

## MAE0212 - Conjuntos de Exercícios 1

1. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória  $X$ ,  $F_X(x) = P(X \leq x)$  para  $x \in \mathbf{R}$ , é dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1/6, & 1 \leq x < 4, \\ 1/3, & 4 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

- a) Determine  $P(X \leq 1)$ . b) Determine  $P(2 \leq X < 5)$ . c) Determine  $P(2 \leq X < 5 \mid X > 1)$ . d) Determine  $E(X)$ .
2. Um jornaleiro compra jornais a dez centavos cada e os vende a cinquenta centavos. A demanda diária de jornais é uma variável aleatória que se distribui segundo uma binomial com  $n=10$  e  $p=1/3$  e o jornaleiro compra  $m$  jornais por dia. a) Qual é a probabilidade do jornaleiro não conseguir vender todos os seus jornais se  $m = 5$ ? b) Qual é o valor de  $m$  que maximiza o lucro esperado do jornaleiro por dia?
3. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória  $X$ ,  $F_X$ , é dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x+1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

- a) Determine  $P(X \geq 1/2)$ . b) Determine  $P(X \geq 1/2 \mid X > 0)$ .
4. Considere  $X$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbf{1}_{(-\sqrt{3}, \sqrt{3})}(x)$$

- onde  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  se  $x \in A$  e  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  caso contrário. a) Determine  $P(X \leq \frac{1}{2})$ . b) Determine  $\mu = \mathbf{E}(X)$  (valor esperado de  $X$ ) e  $\sigma = \sqrt{\mathbf{var} X}$  (desvio padrão de  $X$ ).
5. As variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes;  $1 - P(X = 0) = P(X = 1) = 1/3$  e  $Y$  tem distribuição Uniforme no intervalo  $[0, 2]$ . determine a função de distribuição de probabilidade acumulada das variáveis aleatórias  $W = XY$  e  $Z = X + Y$ .
6. A densidade conjunta das v.a.  $X, Y$  é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} a, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a) Determine o valor de  $a$ . b) Se  $(X, Y)$  são as coordenadas de um ponto de  $\mathbf{R}^2$ , seja  $(R, \phi)$  sua representação em coordenadas esféricas (ou seja,  $R^2 = X^2 + Y^2$  e  $\tan(\phi) = \frac{Y}{X}$ ). Determine as distribuições marginais de  $R$  e  $\phi$ .
7. O salário mensal de um vendedor é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo 1000 e 2000 reais. a) Qual é a probabilidade dele ganhar mais que 1100 reais? b) Qual é seu salário médio? c) Assumindo independência, qual é a probabilidade dele ganhar mais que 1800 reais em pelo menos um mes no decorrer de um semestre?
8. Na distribuição  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  encontre
- (a)  $P(X \geq \mu + 2\sigma)$ .

- (b)  $P(|X - \mu| < \sigma)$ .
- (c) O número  $a$  tal que  $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0,99$ .
- (d) O número  $a$  tal que  $P(X > a) = 0,90$ .
9. Suponha que os tempos de vida de dois aparelhos elétricos,  $T$  e  $V$ , tenham distribuições  $T \sim N(42,36)$  e  $V \sim N(45,9)$ . Se os aparelhos são feitos para serem usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?
10. Um bom indicador do nível de intoxicação por benzeno é a quantidade de fenol encontrada na urina. A quantidade de fenol na urina de moradores de uma certa região segue, aproximadamente, uma distribuição normal de média  $6 \text{ mg/L}$  e desvio padrão  $2 \text{ mg/L}$ . Considere as seguintes definições em termos da variável quantidade de fenol na urina:
- Define-se como **valor de referência** a quantidade de fenol tal que 90% da população têm quantidade de fenol maior ou igual a esse valor;
  - Uma pessoa é considerada **atípica** se a quantidade de fenol em sua urina for superior a  $9 \text{ mg/l}$  ou inferior a  $3 \text{ mg/L}$ .
- (a) Qual é o valor de referência da população?
- (b) Uma pessoa da região é sorteada ao acaso. Calcule a probabilidade de ela ser **atípica**.
- (c) Sorteadas 4 pessoas ao acaso, qual é a probabilidade de se ter no mínimo 3 **atípicas**?
- (d) Sabendo que uma pessoa é atípica, qual é a probabilidade de ela ter quantidade de fenol superior a  $9,92 \text{ mg/L}$ ?
11. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de  $1.000 \text{ cm}^3$  e a variância de  $100 \text{ cm}^6$ . Admita que a distribuição do volume seja normal.
- (a) Calcule a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que  $990 \text{ cm}^3$ .
- (b) Um inspetor exige que apenas 2% das garrafas tenham menos que  $1.000 \text{ cm}^3$ . Considerando agora que a máquina tem um desvio padrão de  $20 \text{ cm}^3$ , como deve ser regulada a média, isto é, qual o ajuste do volume médio de forma a atender as exigências do inspetor?
12. Estatísticas do Departamento de Trânsito sobre o envolvimento em acidentes, de motoristas com pouca experiência (até 2 anos de habilitação), indicam que o seguinte modelo pode ser adotado.
- |                             |     |     |     |     |     |
|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Número de acidentes ( $X$ ) | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   |
| $p_x$                       | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |
- (a) Determine  $E(X)$  e  $Var(X)$ .
- Para uma amostra aleatória de 2 desses “jovens” motoristas (isto é,  $n = 2$ ) resolva os itens abaixo.
- (b) Determine a distribuição amostral de  $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$ .
- (c) Calcule  $E(\bar{X})$  e  $Var(\bar{X})$ , e esboce os histogramas (ou gráficos de barras) de  $X$  e  $\bar{X}$  num mesmo diagrama.
13. Sendo a variável amostrada  $X$  uma Normal de média  $\mu$ .
- (a) Se  $X$  tem variância 25, obtenha o valor de  $P(|\bar{X} - \mu| \leq 2)$  nos casos de tamanho de amostra  $n$  igual a 2, 20 e 60. Comente os resultados obtidos.
- (b) Se  $n = 30$ , determine  $P(|\bar{X} - \mu| \leq 1)$  em que  $\sigma^2$  é igual a 16, 64 e 100. Qual é a sua conclusão?
14. Uma máquina enche pacotes de café com um peso que se comporta como um variável aleatória Normal de média 200 gramas e desvio padrão 10 gramas. Uma amostra de 25 pacotes é sorteada e pergunta-se
- (a) Qual é o número esperado de pacotes da amostra com peso inferior a 205 gramas?
- (b) Qual é a probabilidade de que o peso total dos pacotes da amostra não exceda 5125 gramas?
15. A máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição Normal com média  $\mu$  e desvio padrão 10 gramas.

- (a) Em quanto deve ser regulado o peso médio  $\mu$  para que apenas 10% dos pacotes tenham menos de 500 gramas?
- (b) Com a máquina assim regulada, qual é a probabilidade de que o peso total de 4 pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 2 kg?
16. No exercício anterior, e após a máquina estar regulada, programou-se uma carta de controle de qualidade. De hora em hora, será retirada uma amostra de 4 pacotes e esses serão pesados. Se a média da amostra for inferior a 495 g ou superior a 520 g, a produção é suspensa para reajustar a máquina, isto é, reajustar o peso médio.
- (a) Qual é a probabilidade de ser feita uma parada desnecessária?
- (b) Se o peso médio da máquina desregulou-se para 500 g, qual é a probabilidade de continuar a produção fora dos padrões desejados?
17. A capacidade máxima de um elevador é de 500 kg. Supondo que a distribuição de pesos  $X$  dos usuários é  $N(70 \text{ kg}, 100 \text{ kg}^2)$ , qual é a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite? E seis passageiros? Qual resultado você utilizou para resolver este problema?
18. Um fabricante afirma que sua vacina contra gripe imuniza em 80% dos casos. Uma amostra de 25 indivíduos que tomaram a vacina foi sorteada e testes foram feitos para verificar a imunização ou não desses indivíduos. Se o fabricante estiver correto, qual é a probabilidade da proporção de imunizados na amostra ser inferior à 75%? E superior à 85%? Qual resultado você utilizou para resolver este problema?
19. Cada seção usada para a construção de um oleoduto tem um comprimento médio de 5 m e desvio padrão de 20 cm. O comprimento total do oleoduto será de 8 km.
- (a) Se a firma construtora do oleoduto encomendar 1.600 seções, qual é a probabilidade de ela ter de comprar mais do que uma seção adicional (isto é, de as 1.600 seções somarem menos do que 7.995 m)?
- (b) Qual é a probabilidade do uso exato de 1.599 seções, isto é, a soma das 1.599 seções estar entre 8.000 m e 8.005 m? Que resultado você utilizou para resolver o problema?
- (c) Qual resultado você utilizou para resolver este problema?
20. Um procedimento de controle de qualidade foi planejado para garantir um máximo de 10% de itens defeituosos na produção. A cada 6 horas sorteia-se uma amostra de 20 peças e havendo mais de 15% de defeituosas, encerra-se a produção para verificação do processo. Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?