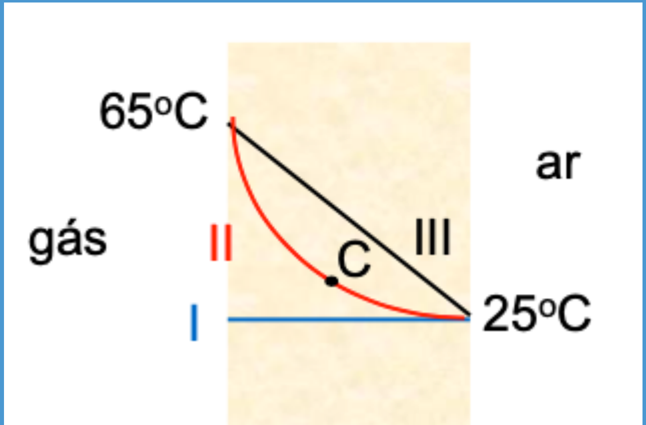
Condução de Calor em sólidos

Metodologia de análise da condução térmica

Caso mais simples: sistema unidimensional; estado estacionário; sem geração de energia

Geometrias comuns:

- Parede plana: descrita em coordenadas retangulares (x). Área perpendicular à direção da transferência de calor é constante (independente de x).
- Parede cilíndrica (tubos): condução radial através da parede do tubo.
- Camada esférica: condução radial através da camada.



O que ocorre se aumentamos a temperatura de um dos lados de uma parede plana?

t(0): distribuição de temperaturas I

t(1): distribuição II, a T em C está aumentando. Ocorre condução em estado não estacionário

t(2): para t suficientemente grande, distribuição III: estado estacionário

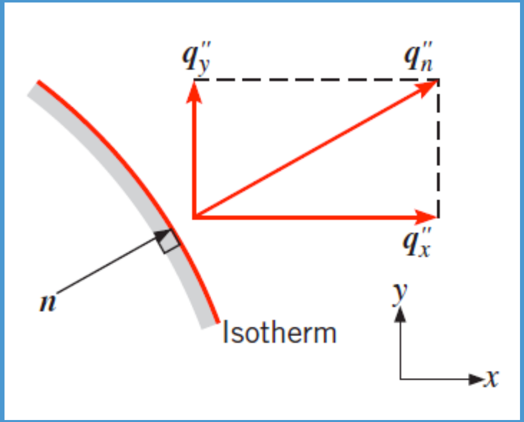
Lei de Fourier

Uma equação de taxa que permite a determinação do fluxo de calor de condução a partir do conhecimento da distribuição de temperatura em um meio

Sua forma mais geral (vetorial) para condução multidimensional é:

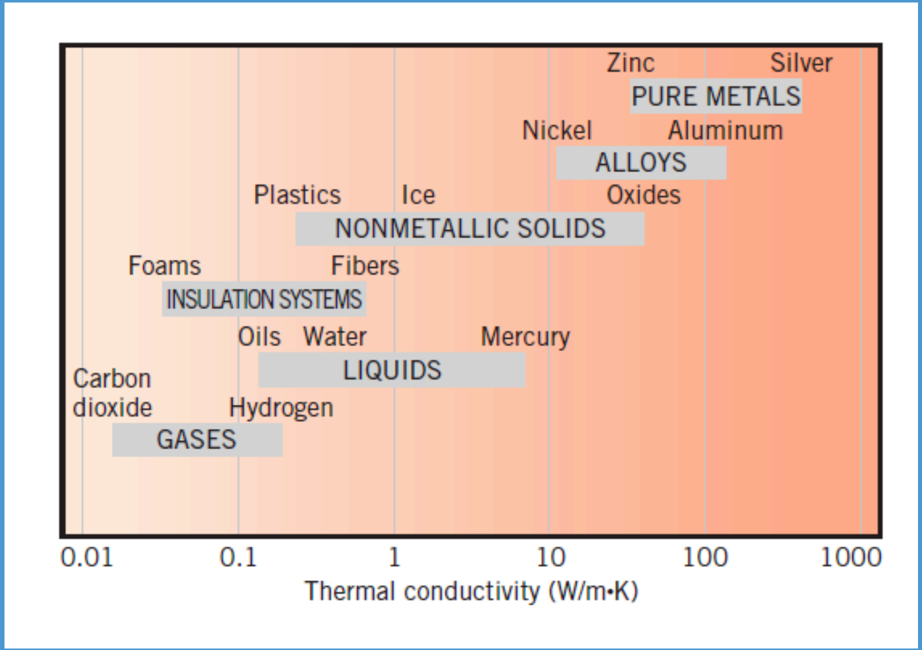
$$\vec{q}'' = -k \nabla T$$

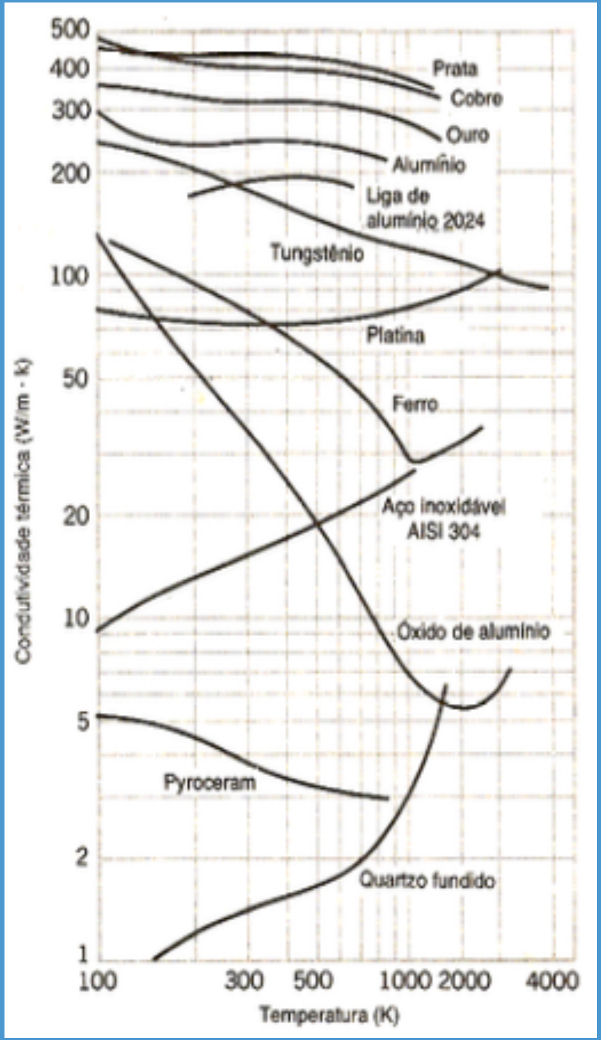
Condutividade térmica (*k*): uma medida da capacidade de um material para transferir calor energia por condução.



Implicações:

- A transferência de calor está no sentido de diminuir a temperatura (base para o sinal de menos).
- A Lei de Fourier serve para definir a condutividade térmica do meio
- A direção da transferência de calor é perpendicular às linhas de temperatura constante (isotérmicas).

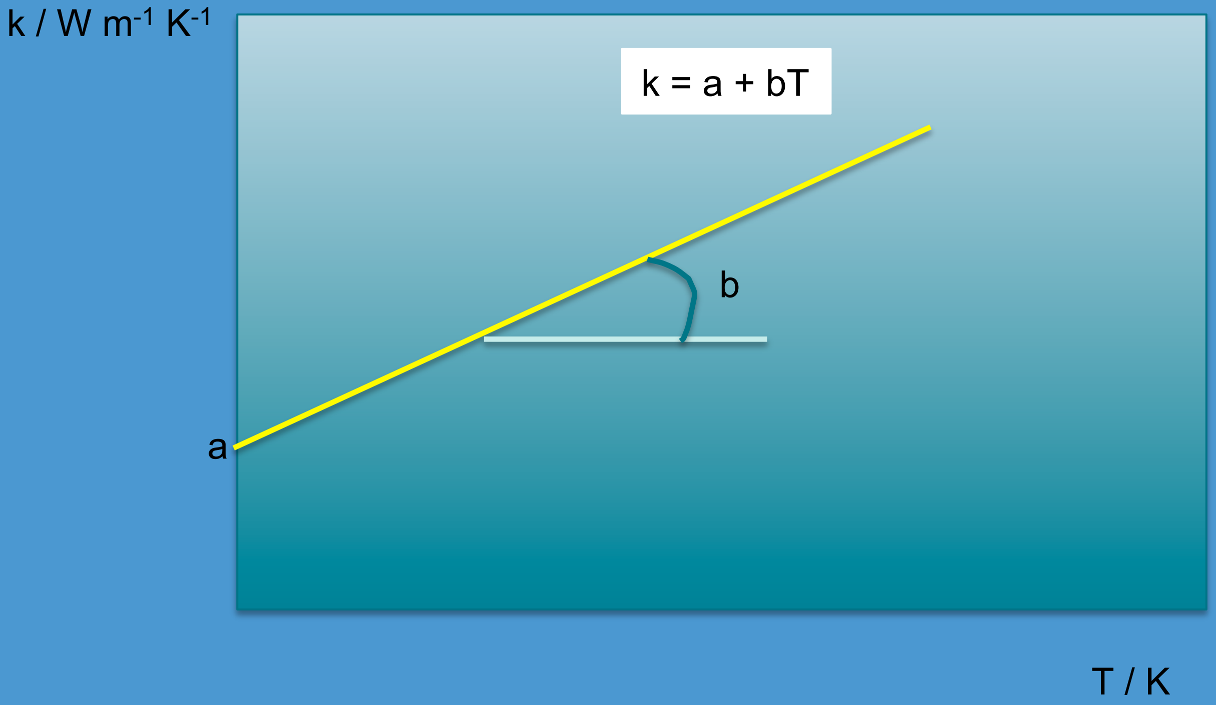




A Lei de Fourier estabelece que k é independente de T: verdade para intervalos de T pequenos!!

Para intervalos de T maiores podemos assumir que

$$k = a + bT$$



k / W m-1 K-1
k = a + bT
b
a
T / K

Observações

Quanto maior for a distância entre átomos e moléculas no material, menor será a condutividade térmica, pois o menor contato entre as partículas dificulta o transporte de energia térmica.

Dentre os sólidos, os metais tem maiores k graças aos elétrons livres que colaboram com a difusão de energia térmica.

Os sistemas de isolamento térmico (materiais refratários) são normalmente matrizes porosas contendo ar (espumas e fibras) e, portanto, apresentam valores de k próximos ao dos gases.

Coordenadas cartesianas

$$T\left(x, y, z\right)$$

$$\vec{q}'' = \underbrace{-k\frac{\partial T}{\partial x}}_{q''_x}\vec{i} - \underbrace{k\frac{\partial T}{\partial y}}_{q''_y}\vec{j} - \underbrace{k\frac{\partial T}{\partial z}}_{q''_z}\vec{k}$$

$$\vec{q}'' = \underbrace{-k\frac{\partial T}{\partial x}}_{q''_x}\vec{i}$$

$q'' = -k\ dT/dx$

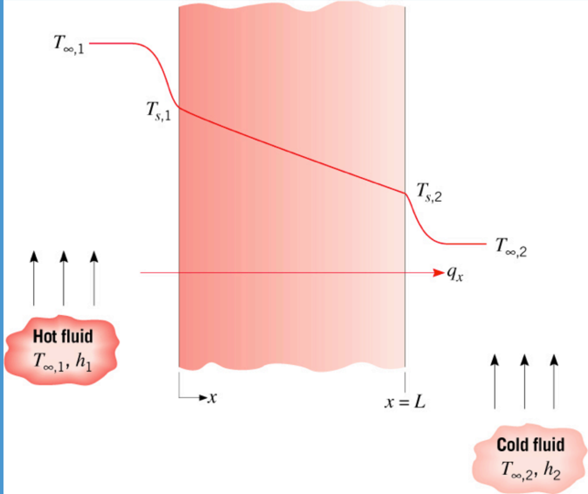
O fluxo de calor
depende da forma

Unidades:

- q: kcal/h ou kcal/s ou kJ/s
- dT/dx: ºC/m
- k: kcal/(hºC) ou W/(m.K)

O caso da parede plana

Considere uma parede plana entre dois fluidos de temperatura diferente:



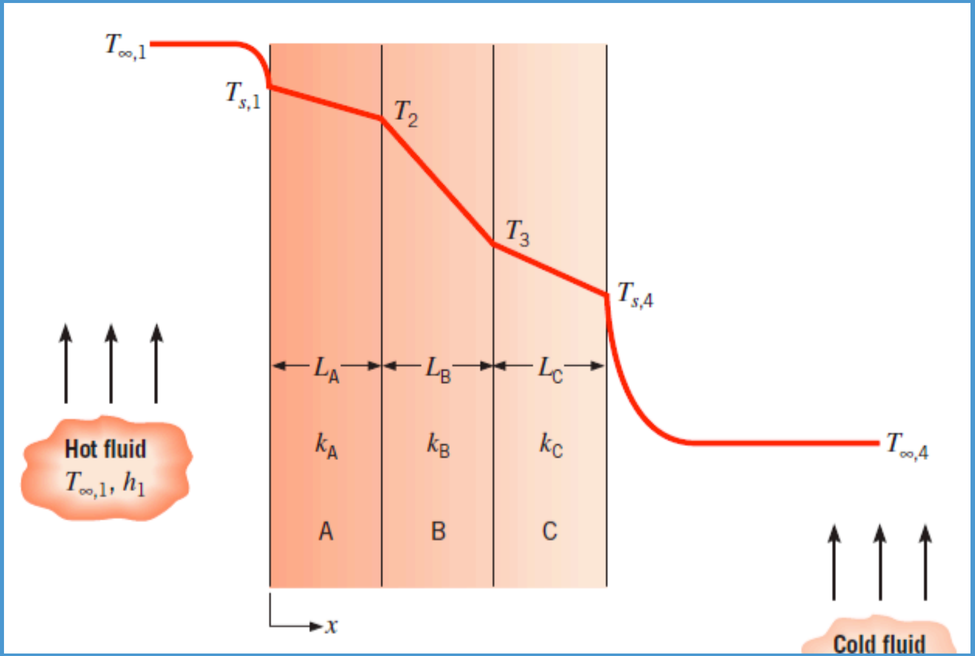
$$T(x) = T_{s,1} + \left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)\frac{x}{L}$$

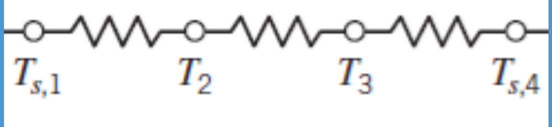
O fluxo de calor q" é independente de x

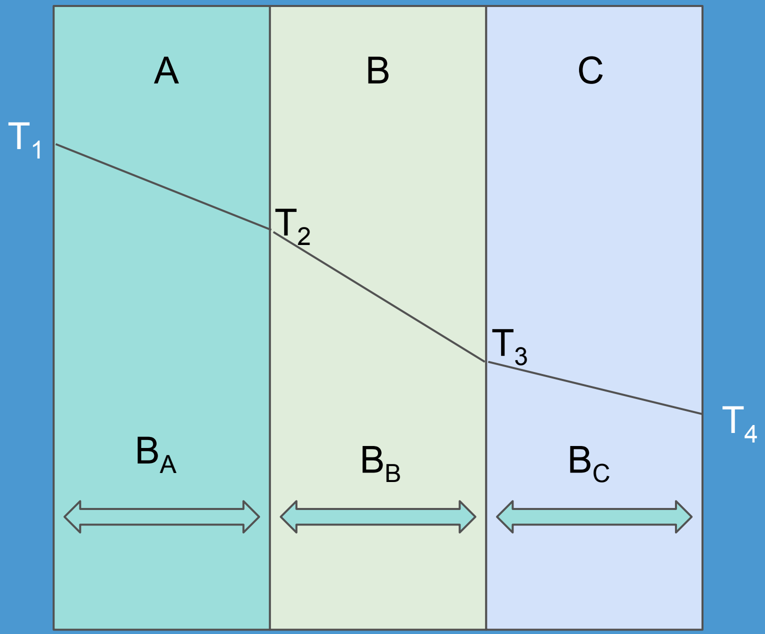
$$q_x'' = -k\frac{dT}{dx} = \frac{k}{L}\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right)$$

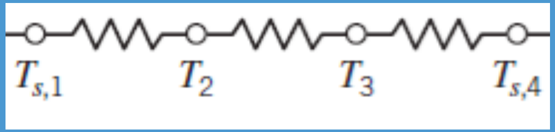
$$q_x = -kA\frac{dT}{dx} = \frac{kA}{L}\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right)$$

Resistência Térmica $\quad R_{t,\text{cond}} = \dfrac{L}{kA}$


$T_{\infty,1}$
$T_{s,1}$
T_2
T_3
$T_{s,4}$
L_A L_B L_C
k_A k_B k_C
A B C
Hot fluid
$T_{\infty,1}$, h_1
$T_{\infty,4}$
x
Cold fluid


$T_{s,1}$ T_2 T_3 $T_{s,4}$





$$\Delta T = \Delta T_A + \Delta T_B + \Delta T_C$$

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{q}{A} = -k\frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = -k\frac{\Delta T}{B}$$

B = espessura da parede

$$\frac{q}{A} = k\frac{(T_1 - T_2)}{B}$$

$$R = \frac{B}{kA}$$

R = resistência térmica

$$q = \frac{\Delta T}{R}$$

$$\Delta T = \Delta T_A + \Delta T_B + \Delta T_C$$

$$\Delta T_A = q_A \frac{B_A}{k_A A}$$

$$\Delta T_B = q_B \frac{B_B}{k_B A}$$

$$\Delta T_C = q_C \frac{B_C}{k_C A}$$

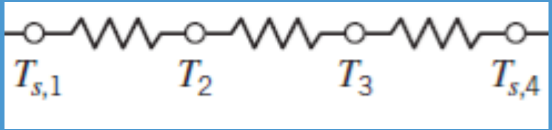
$$q_A = q_B = q_C = q$$

Estado estacionário

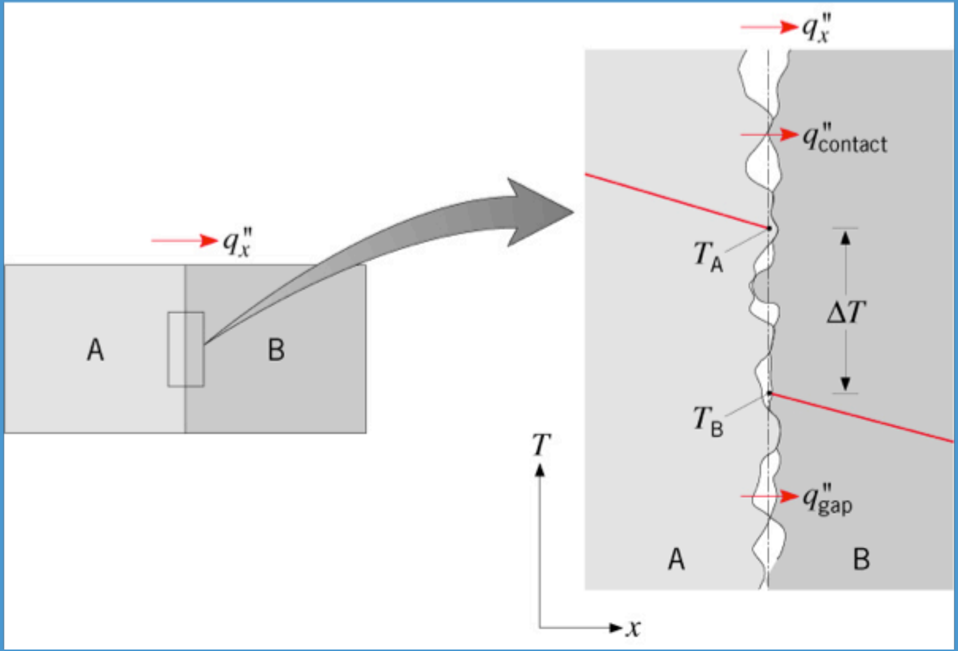
$$\frac{\Delta T}{R} = \frac{\Delta T_A}{R_A} = \frac{\Delta T_b}{R_B} = \frac{\Delta T_C}{R_C}$$

$$\Delta T = q_A \frac{B_A}{k_A A} + q_B \frac{B_B}{k_B A} + q_C \frac{B_C}{k_C A}$$

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{B_A}{k_A A} + \frac{B_B}{k_B A} + \frac{B_C}{k_C A}} = \frac{\Delta T}{R_A + R_B + R_C} = \frac{\Delta T}{R}$$



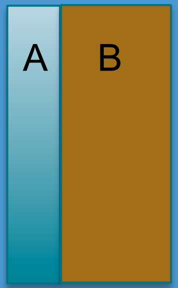
Resistência de contato



Exemplo

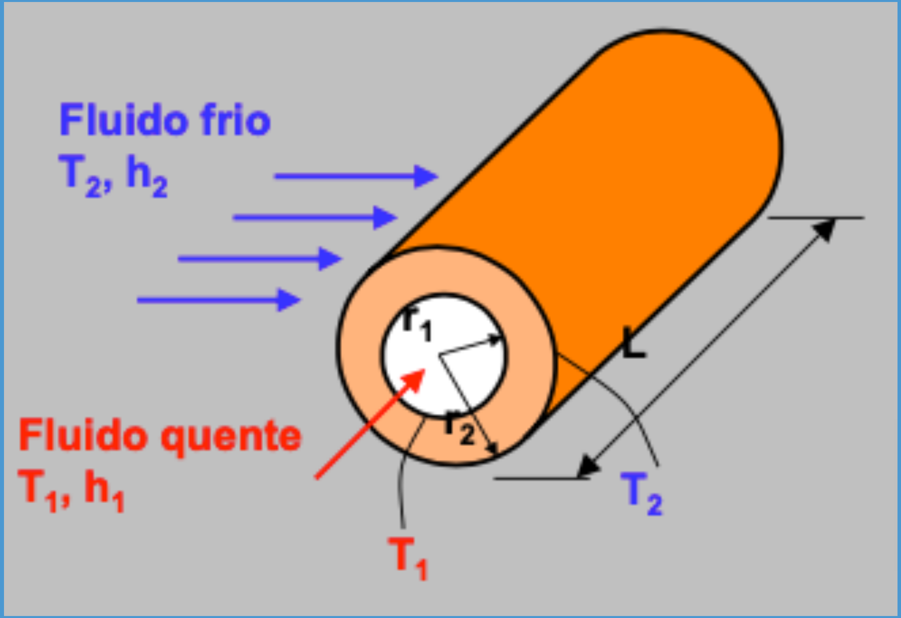
A parede plana de um forno é formada por uma camada de 12 cm de espessura de um material A, cuja condutividade térmica é 0,12 kcal/(m h ^{o}C), e uma camada de 24 cm de espessura de um material B com k = 1,2 kcal/(m h ^{o}C). A temperatura da face interna da parede é 760 ^{o}C e da face externa é de 76 ^{o}C. Calcular:

a) A perda de calor através da parede
b) A temperatura na interface entre as duas camadas
c) A perda de calor supondo que o contato entre as camadas é ruim, de forma que se origina uma resistência de contato de 0,10 ^{o}C h / kcal


A
B

Fluxo de calor através de uma configuração cilíndrica (cilindro oco)

Cilindro oco, sistema unidimensional, sem geração de calor, em regime estacionário, com *k* = constante.



Sistemas radiais:
gradiente de Temperatura na direção radial

Área perpendicular ao fluxo

$$A = 2\,\pi\, r\, L$$

Mas r varia entre r_1 e r_2 (área variável)

Qual área considerar ?

$$\frac{q}{A} = \frac{q}{2\pi r L} = -k\frac{dT}{dr}$$

$$\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} = \frac{2\pi Lk}{q} \int_{T_o}^{T_i} dT$$

$$\ln r_o - \ln r_i = \frac{2\pi Lk}{q}(T_i - T_o)$$

$$q = \frac{k(2\pi L)(T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)}$$

r_i = raio interno

r_o = raio externo

T_i = temperatura interna

T_o = temperatura externa

$$\bar{r}_L = \frac{r_o - r_i}{\ln(r_o/r_i)}$$

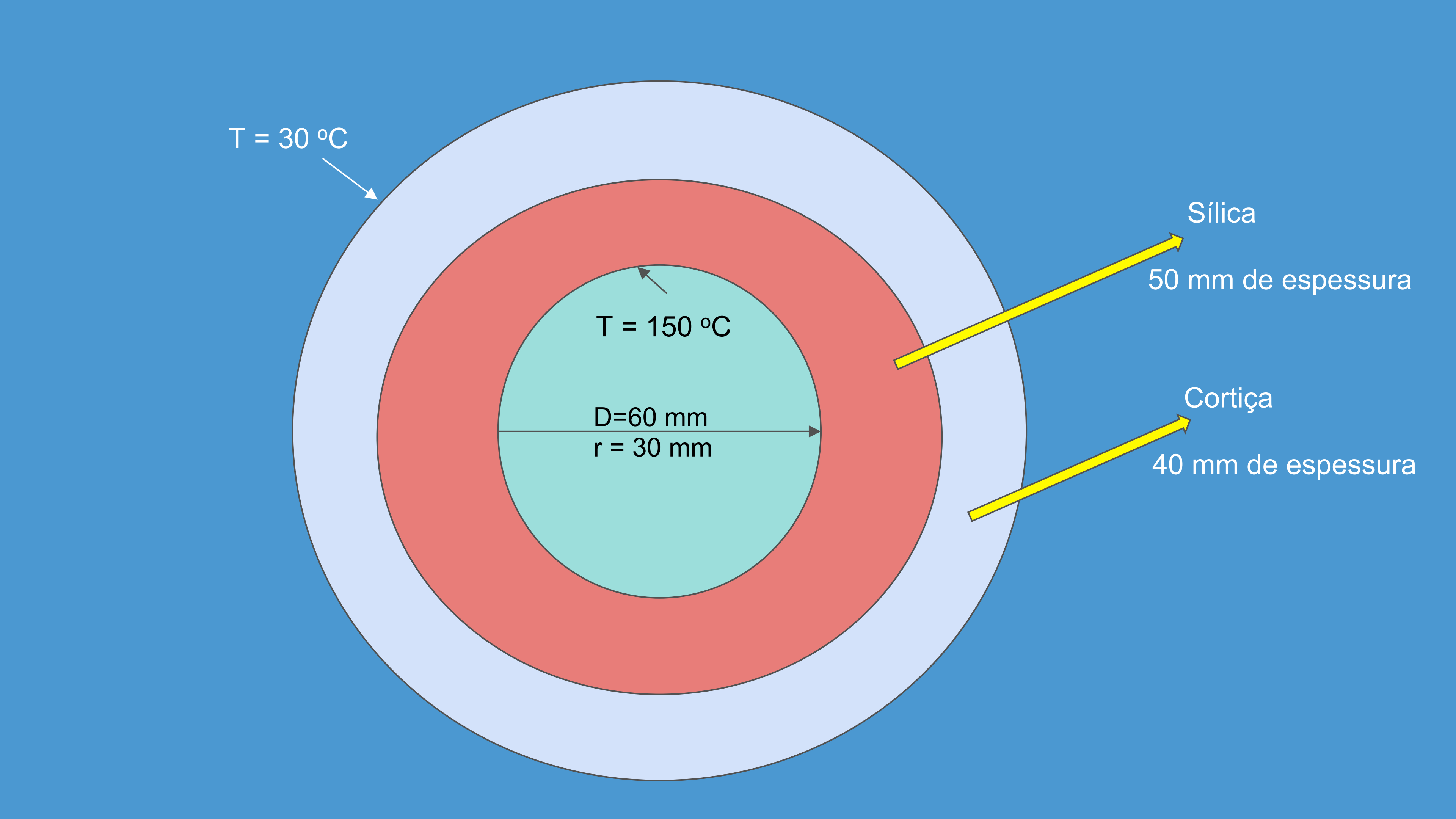
Raio médio logarítmico

$$\bar{A}_L = \frac{2\pi L(r_o - r_i)}{\ln(r_o/r_i)}$$

Área média logarítmica

$$q = \frac{k\bar{A}_L(T_i - T_o)}{r_o - r_i}$$

EXEMPLO: Um tubo de diâmetro externo (OD) de 60 mm é isolado com uma camada de espuma de sílica de 50 mm de espessura, cuja condutividade é 0,055 W / m °C, seguido por uma camada de cortiça de 40 mm com uma condutividade de 0,05 W / m°C. Se a temperatura da superfície externa do tubo for 150 °C e a temperatura da superfície externa da cortiça for 30 °C, calcule a perda de calor em watts por metro de tubo.


T = 30 ºC
Sílica
50 mm de espessura
T = 150 ºC
Cortiça
D=60 mm
r = 30 mm
40 mm de espessura

$$\bar{r}_L = \frac{80-30}{\ln(80/30)} = 50.97 \text{ mm}$$

para a camada de sílica (A)

$$\bar{r}_L = \frac{120-80}{\ln(120/80)} = 98.64 \text{ mm}$$

para a camada de cortiça (B)

$$q_A = \frac{k_A \bar{A}_A (T_i - T_x)}{x_A} \qquad q_B = \frac{k_B \bar{A}_B (T_x - T_o)}{x_B}$$

T_x = temperatura na interface

$$\bar{A}_A = 2\pi(0.05097)L = 0.3203L \qquad \bar{A}_B = 2\pi(0.09864)L = 0.6198L$$

$$q_A = \frac{0.055 \times 0.3203 L (T_i - T_x)}{0.050} = 0.3522 L (T_i - T_x)$$

$$q_B = \frac{0.05 \times 0.6198 L (T_x - T_o)}{0.040} = 0.7748 L (T_x - T_o)$$

$$\frac{2.839 q_A}{L} = T_i - T_x \qquad \frac{1.291 q_B}{L} = T_x - T_o$$

$$T_i - T_o = (T_i - T_x) + (T_x - T_o)$$

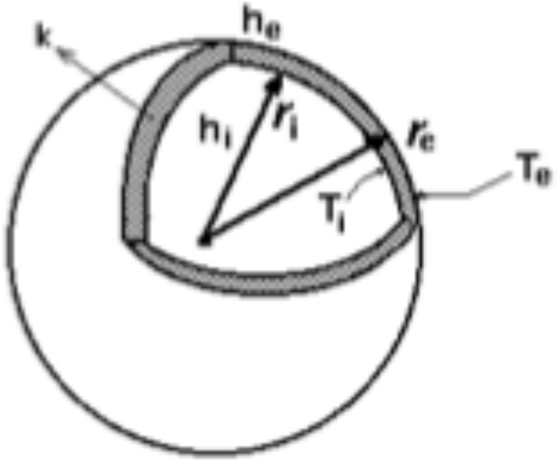
$$q_A = q_B = q$$

$$\frac{4.13 q}{L} = T_i - T_o = 150 - 30 = 120$$

$$\frac{q}{L} = 29.1 \text{ W/m } (30.3 \text{ Btu/ft} \cdot \text{h})$$

Fluxo de calor através de uma configuração esférica

$$\dot{q} = -k.A.\frac{dT}{dr}$$ onde $\frac{dT}{dr}$ é o gradiente de temperatura na direção radial



$$A = 4.\pi.r^2$$

$$\dot{q} = -k.(4.\pi.r^2).\frac{dT}{dr}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \dot{q}.\frac{dr}{r^2} = -\int_{T_1}^{T_2} k.4.\pi.dT$$

$$\dot{q}_r = \frac{-4.k.\pi.(T_2 - T_1)}{(1/r_1)-(1/r_2)} = \frac{4.k.\pi.(T_1 - T_2)}{(1/r_2)-(1/r_1)}$$