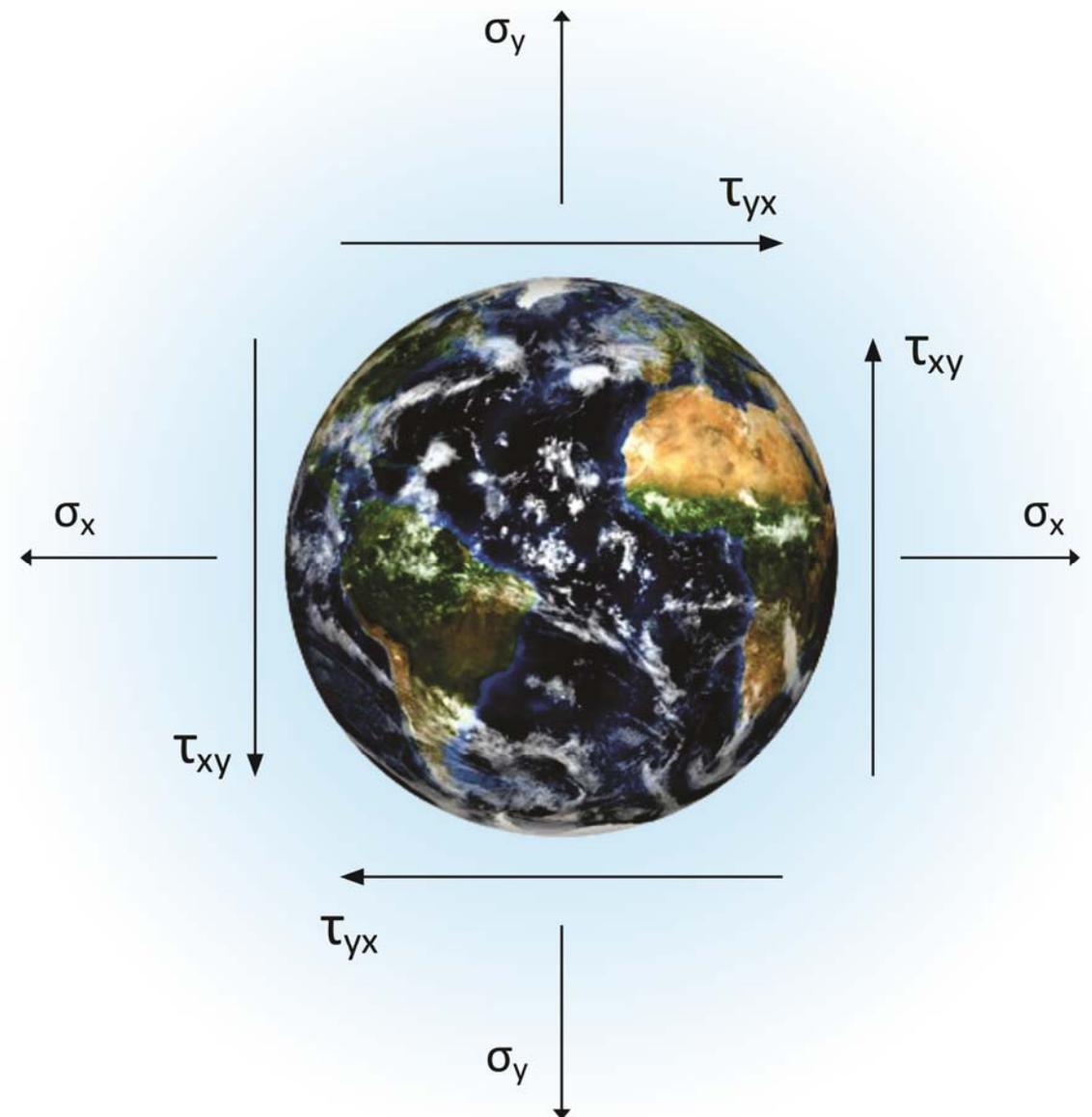


**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**NOTAS DE AULA PARA AS DISCIPLINAS  
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS E MECÂNICA DOS SÓLIDOS**



***AUTOR: PROFESSOR EDSON DENNER LEONEL***

***SÃO CARLOS-SP, JANEIRO DE 2016***

O texto que será apresentado a seguir não tem por objetivo substituir o conteúdo apresentado em livros clássicos de resistência dos materiais e estática das estruturas. O objetivo dessas notas de aula é somente fornecer ao aluno uma ferramenta extra para o aprendizado dos conteúdos fundamentais da mecânica dos sólidos deformáveis. Assim, o autor recomenda fortemente que o aluno complemente o conteúdo apresentado nessas notas de aula, assim como todos aqueles discutidos ao longo do curso, em livros clássicos sugeridos na ementa do curso. Este texto é revisado anualmente pelo autor com o objetivo de torná-lo completo e atualizado.

## Sumário

---

---

1. – Introdução.....	1
2. – Equilíbrio de Ponto Material e Corpo Rígido .....	16
3. – Elemento de Barra Simples .....	34
4. – Elemento de Barra Geral .....	58
5. – Relações Diferenciais entre Esforços Solicitantes e Ações Externas .....	79
6. – Elemento de Barra Geral: Pórticos Planos .....	94
7. – Estruturas Mistas Bidimensionais .....	126
8. – Elemento de Barra Geral: Grelhas .....	139
9. – Elemento de Barra Geral: Pórticos Tridimensionais .....	167
10. – Estruturas Mistas Tridimensionais .....	184
11. – Cabos .....	202
12. – Tensão e Deformação .....	219
13. – Propriedades dos Materiais e Lei de Hooke .....	240
14. – Barras Carregadas Axialmente .....	251
15. – Torção em Elementos de Barra .....	299
16. – Formulação Geral da Torção. Analogia de Membrana .....	333
17. – Tensões Normais na Flexão .....	365
18. – Carregamentos Axiais Excêntricos e Flexão Assimétrica .....	420
19. – Tensões de Cisalhamento na Flexão .....	453
20. – Fluxo de Cisalhamento em Seções Formadas por Elementos Esbeltos .....	468
21. – Deslocamentos em Vigas. Linha Elástica .....	507

<b>22. – Estabilidade Estrutural. Flambagem de Colunas .....</b>	<b>573</b>
<b>23. – Tensões .....</b>	<b>620</b>
<b>24. – Deformações .....</b>	<b>650</b>
<b>25. – Lei de Hooke Generalizada .....</b>	<b>677</b>
<b>26. – Critérios de Falha .....</b>	<b>690</b>
<b>27. – Vasos de Pressão de Paredes Finas .....</b>	<b>709</b>
<b>28. – Métodos de Energia .....</b>	<b>721</b>

## **1. – Introdução**

---

### 1.1 – Definições Iniciais

Para a compreensão dos conceitos e o entendimento dos fenômenos contidos no domínio da mecânica dos materiais e dos corpos deformáveis, torna-se necessária a introdução de algumas definições iniciais. Tais definições são de grande importância e serão utilizadas com frequência ao longo deste curso. Inicialmente, define-se *Mecânica dos Sólidos/Resistência dos Materiais* como o ramo da mecânica dos corpos deformáveis que visa à determinação de níveis de tensões e deformações de forma a selecionar materiais e estabelecer dimensões para os elementos de uma estrutura, máquina ou manufatura qualquer, a fim de capacitá-los a cumprir suas funções com segurança, confiabilidade, durabilidade e em condições econômicas.

O estudo da mecânica dos corpos deformáveis teve início no século XVII, com Galileu Galilei. Nessa época, esse renomado cientista realizou diversos experimentos em vigas formadas por diferentes materiais. Depois disso, no século XVIII, Poisson, Lamé, Navier e Saint-Venant realizaram estudos teóricos e experimentais, baseados na aplicação da mecânica clássica, estendendo a compreensão dos fenômenos ligados a corpos deformáveis solicitados por ações externas. Esses cientistas denominaram seu estudo como “resistência dos materiais”. Porém, atualmente, esse domínio do conhecimento é conhecido como mecânica dos corpos deformáveis, ou simplesmente mecânica dos materiais, sendo a mecânica dos sólidos/resistência dos materiais um dos subdomínios que a compõem.

No contexto da mecânica dos sólidos/resistência dos materiais, os corpos em análise ou em estudo são denominados estrutura. Assim, define-se *Elemento Estrutural* a parte menor que compõe a estrutura/corpo. A *Estrutura* pode ser compreendida como o conjunto de elementos estruturais adequadamente dispostos com o objetivo de resistir

às ações mecânicas externas. Os elementos estruturais transmitem e resistem a forças, momentos, binários, ações térmicas, entre outros. Portanto, todo objeto material pode ser classificado como uma estrutura.

A *Resistência* de um elemento estrutural, ou de uma estrutura, pode ser brevemente entendida como sua capacidade de suportar solicitações externas sem a observação de falha. Nesse contexto, *Falha* está relacionada ao colapso da estrutura ou do elemento estrutural, observação de deformações ou deslocamentos excessivos, perda de estabilidade ou demais ações que comprometam sua durabilidade e funcionalidade.

A capacidade que um elemento estrutural possui de se opor às mudanças geométricas provocadas por solicitações externas (deformações) é denominada *Rigidez*. A rigidez é proporcional ao inverso da deformação, ou seja,  $rigidez \propto 1/deformação$ . Portanto, quão mais deformável for o corpo em análise menos rígido ele o é, e vice-versa. Por exemplo, o aço é mais rígido que uma espuma.



Figura 1.1 Perda de estabilidade em uma régua comprimida.

Muitas vezes o elemento estrutural em estudo atende aos critérios de resistência e rigidez quando exposto às solicitações externas. Apesar disso, pode-se ainda observar nessa situação, especialmente em elementos estruturais comprimidos, a ocorrência de um cenário de falha denominado de *Perda de Estabilidade*, como no caso da régua

flexível comprimida mostrada na Fig. (1.1). Apesar de ser possível a obtenção de uma configuração de equilíbrio, esta é somente encontrada em uma posição diferente da inicial. Deve-se enfatizar que a determinação da configuração de equilíbrio nessa situação é uma árdua tarefa. Porém, a determinação da intensidade da carga externa que causa essa mudança de configuração geométrica é uma tarefa menos complexa.

Em mecânica dos sólidos/resistência dos materiais, empregam-se modelos matemáticos simplificados para a descrição de fenômenos físicos, que são muitas vezes complexos. Devido a essas simplificações, correções posteriores, como coeficientes de segurança, devem ser aplicadas. A modelagem dos fenômenos associados aos corpos deformáveis segue, geralmente, o fluxograma apresentado na Fig. (1.2).

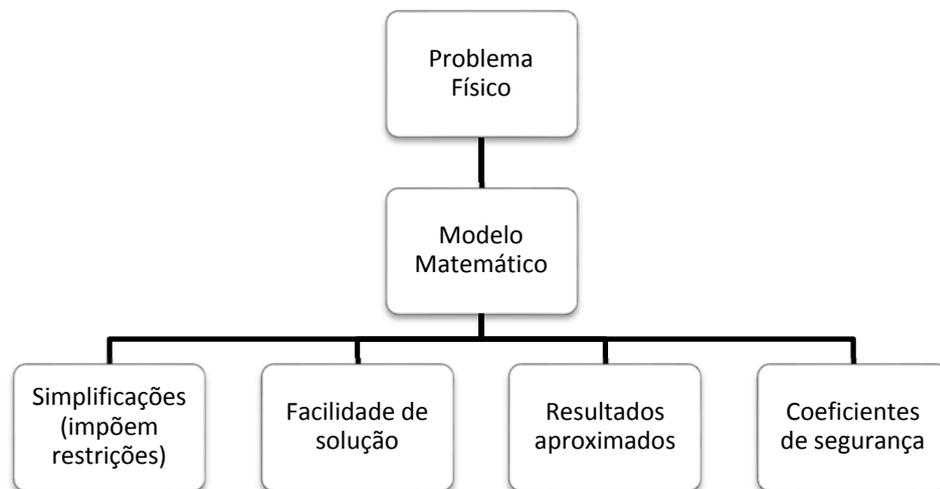


Figura 1.2 Simplificações para a modelagem de problemas de corpos deformáveis.

Assim, os modelos matemáticos da mecânica dos sólidos/resistência dos materiais são propostos assumindo-se hipóteses simplificadoras sobre os fenômenos físicos a serem representados. Tais considerações são efetuadas com o objetivo de se obter uma representação matemática de fácil utilização no cotidiano da engenharia, a qual não conduza ainda à perdas sensíveis de representatividade física dos fenômenos. Devido às hipóteses simplificadoras assumidas, resultados aproximados são, conseqüentemente, obtidos. Portanto, para que condições de segurança sejam garantidas à estrutura, coeficientes de segurança devem ser aplicados.

## 1.2 – Algumas das Hipóteses Simplificadoras Correntemente Assumidas

No domínio da mecânica dos corpos deformáveis, modelos matemáticos baseados em hipóteses simplificadoras são utilizados na modelagem de problemas físicos. De forma a propor modelos matemáticos que não sejam extremamente complexos para a utilização corrente em engenharia, e que ao mesmo tempo não sejam excessivamente simplificados, perdendo assim a representatividade do problema físico, as seguintes hipóteses serão assumidas.

### *1.2.1 – Materiais*

Os materiais que compõem os corpos em estudo devem ser contínuos, homogêneos, isotropos e de comportamento mecânico elástico linear.

### *1.2.2 – Elemento Estrutural*

As estruturas devem ser entendidas como disposições racionais e adequadas de diversos elementos estruturais. Classificam-se como elementos estruturais os corpos deformáveis com capacidade de receber e transmitir solicitações mecânicas em geral. Em função de suas dimensões, esses elementos podem ser divididos nas seguintes categorias:

#### *I. Tridimensionais, 3D ou Bloco. Nessa categoria $a \cong b \cong c$*

São elementos estruturais comumente utilizados em fundações de edificações como sapatas e blocos de fundação. Eles possuem as três dimensões de sua geometria com mesma ordem de grandeza e estados de tensão essencialmente tridimensionais. Podem ser simplificadamente analisados utilizando as teorias de bielas e tirantes. Na Fig.(1.3) apresentam-se dois exemplos de estruturas tridimensionais.



Figura 1.3 Estruturas tridimensionais.

## II. Bidimensionais, 2D, Chapa, Placa ou Casca. Nessa categoria $e \ll a, e \ll b$

As estruturas bidimensionais, de superfície ou laminares, ficam definidas quando se conhecem a sua superfície média e a lei de variação de sua espessura. Essas estruturas possuem duas de suas dimensões muito maiores que a terceira (espessura). Destacam-se nesse grupo de elementos estruturais as placas, as cascas e as chapas, como mostrado na Fig. (1.4).

- *Placas* – São estruturas planas sujeitas a carregamentos perpendiculares ao seu plano médio. As placas são solicitadas por esforço cortante, momentos fletores e momentos volventes. As lajes de edifícios são exemplos comuns de estruturas de placas.
- *Cascas* – Placas onde atuam também esforços de tração ou de compressão paralelos ao seu plano médio são denominadas cascas. As cascas podem apresentar geometrias curvas e irregulares como em coberturas de quiosques e domos de igrejas. Essas duas estruturas são modeladas matematicamente e estudadas na teoria de placas e cascas, a qual resulta de uma particularização adequada da teoria da elasticidade.
- *Chapas* – São estruturas planas que suportam carregamentos orientados apenas ao longo das direções paralelas de seu plano médio. As chapas são muito utilizadas na representação de problemas enquadrados como estado plano de tensão e estado plano de deformação. As paredes e muros de contenção são exemplos clássicos de estruturas de chapa.
- *Membrana* – Trata-se de uma estrutura de casca, onde os momentos fletores e volventes são nulos. Nessa estrutura atuam somente esforços paralelos ao seu plano médio.

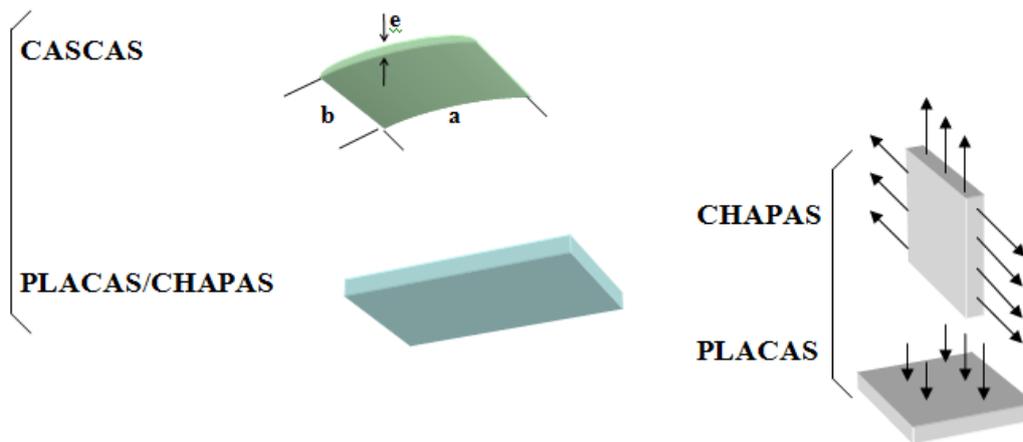


Figura 1.4 Chapas, cascas e placas.

III. *Unidimensionais, 1D, Barra simples, Barra geral ou Arcos. Nessa categoria  $L \gg a, L \gg b$*

Os elementos estruturais unidimensionais, correntemente denominados barras, são caracterizados por possuírem duas de suas dimensões muito menores que a terceira. Nesses elementos estruturais, as dimensões de sua seção transversal são muito menores se comparadas a seu comprimento. As estruturas formadas por uma ou mais barras são denominadas estruturas lineares. Tais elementos estruturais possuem grande importância no estudo de corpos deformáveis, apresentando larga aplicação na análise de estruturas de edifícios, manufaturas, pontes, máquinas e equipamentos, entre outros. Essas estruturas são analisadas segundo hipóteses estabelecidas na mecânica dos corpos deformáveis e na estática das estruturas, observando-se, naturalmente, os aspectos peculiares de cada uma. A seguir, apresentam-se algumas definições de interesse:

- *Eixo de uma barra:* É a trajetória formada pelo ponto representativo do centro de gravidade da figura geradora da seção transversal de uma barra ao longo de seu comprimento.
- *Seção transversal de uma barra:* É o resultado da intersecção entre o eixo da barra e um plano normal a este.
- *Barra reta e barra curva:* São barras cujos eixos são retilíneo e curvilíneo, respectivamente.
- *Barra prismática:* Barra reta de seção transversal constante.

As barras podem ser classificadas segundo os esforços que a solicitam e os deslocamentos assumidos ao longo de seu domínio (comprimento). Assim, pode-se

efetuar a seguinte classificação dos elementos de barra, os quais estão ilustrados na Fig. (1.5).

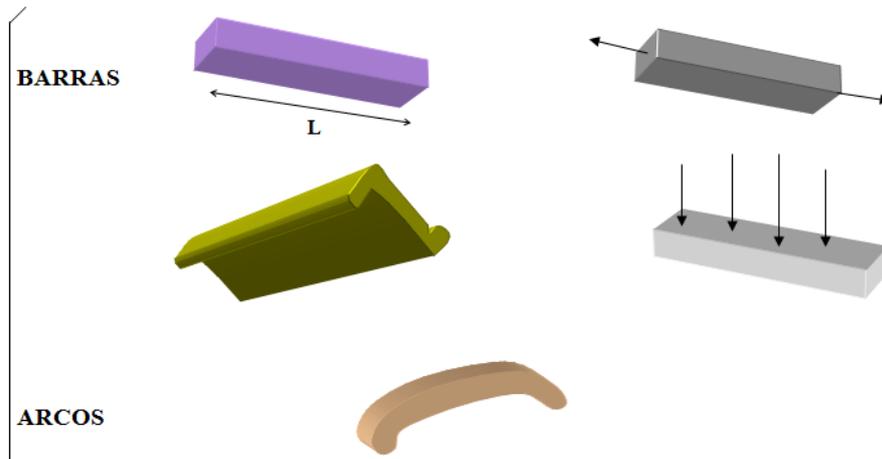


Figura 1.5 Barras e arcos.

- *Vigas* – São elementos de geometria linear que possuem dois graus de liberdade,  $v$  (deslocamento perpendicular ao seu eixo) e  $\theta$  (rotação da seção transversal). As vigas diferem-se segundo suas condições de vinculação podendo ser: viga em balanço, viga simplesmente apoiada, viga bi engastada, viga Gerber (viga articulada e isostática sobre mais de dois apoios), viga contínua (viga hiperestática sobre mais de dois apoios), entre outros. São solicitadas por esforço cortante e momento fletor.
- *Treliças* – As treliças são estruturas lineares constituídas por barras retas, dispostas, em geral, formando painéis triangulares. As treliças são solicitadas predominantemente por esforços de tração e compressão. Isso se deve ao fato das barras que formam a treliça serem conectadas por articulações assumidas como perfeitas. As barras que compõem este tipo de estrutura podem ser divididas em banzos inferior e superior, montante e diagonal conforme indicado na Fig.(1.6). Nesse tipo de estrutura, apenas os deslocamentos dos pontos que conectam as barras são determinados. A rotação relativa entre as barras é, normalmente, desprezada. As treliças podem ser planas, quando suas barras estão contidas em um único plano, ou espaciais no caso contrário.
- *Pilares* – São barras, geralmente retas e com eixo disposto verticalmente, em que os esforços solicitantes são: esforço normal (compressão), esforço cortante e momento fletor. Permite-se representar, com esse elemento estrutural, os deslocamentos e rotações dos pontos que o compõem.



Figura 1.6 Treliça plana.

- *Pórticos* – Os pórticos planos, conforme indicado na Fig. (1.7), são estruturas lineares planas com solicitações coplanares à sua geometria que, sendo constituídas unicamente por barras de eixo retilíneo, não recaem na categoria de viga, treliça ou pilar, nem na categoria de arco. São elementos estruturais de geometria reta, solicitados por esforço normal, esforço cortante e momento fletor. Além disso, permitem a representação, em cada ponto da barra, dos dois deslocamentos no plano e da rotação da seção transversal. Existem também os pórticos tridimensionais, os quais nada mais são que a generalização do problema plano. Nesse caso, em cada ponto que compõe a estrutura representam-se três deslocamentos e três rotações. Além disso, no caso tridimensional, a barra é solicitada a esforços normal e cortantes e a momentos fletores e torção.



Figura 1.7 Pórticos plano, Pórtico tridimensional e Arcos.

- *Arcos* – Podem ser simplificada e definidos como pórticos compostos por barras de eixo curvilíneo, como mostrado na Fig. (1.7).
- *Grelhas* – As grelhas são constituídas por elementos estruturais lineares situados em um mesmo plano, formando uma malha (conjunto de barras contínuas limitando uma região fechada do plano), como mostrado na Fig. (1.8). Nesse tipo de estrutura, os carregamentos externos são aplicados perpendicularmente ao plano de disposição das barras. Em cada ponto da grelha são representados duas rotações (perpendiculares ao

plano da grelha) e o deslocamento perpendicular ao plano das barras. Conseqüentemente, a grelha é solicitada por momentos fletor e torção e esforço cortante.

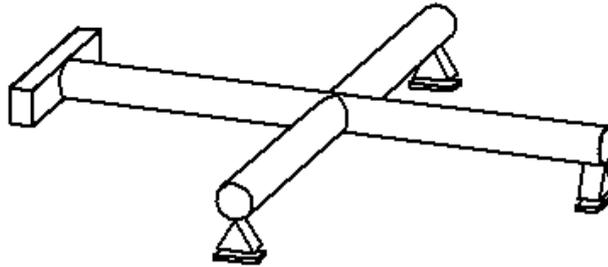


Figura 1.8 Grelhas.

### 1.2.3 – Carregamentos

As ações externas que atuam sobre os elementos estruturais podem ser idealizadas segundo sua dimensão, distribuição, intensidade e localização. Para os casos considerados na mecânica dos sólidos/resistência dos materiais, idealizam-se os carregamentos como:

#### I. Forças Distribuídas

As forças distribuídas podem ser divididas em três categorias, segundo a dimensão do problema analisado.

- *Forças de Volume:* São ações gravitacionais, inerciais ou forças de origem eletromagnéticas. São distribuídas no espaço tridimensional, como mostrado na Fig.(1.9), e mensuradas como unidade de força dividida por unidade de volume.

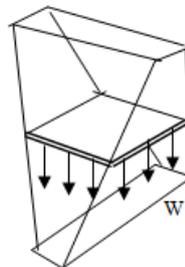


Figura 1.9 Forças volumétricas.

- *Forças de Área:* Comumente encontradas nas análises de placas e cascas e em pressão de fluidos, conforme ilustrado na Fig. (1.10). Essas ações são distribuídas ao

longo de uma determinada região (área) da estrutura. São mensuradas por meio de uma unidade de força dividida por uma unidade de área.



Figura 1.10 Forças de área.

- *Forças de Linha:* São ações, distribuídas unidimensionalmente, atuantes ao longo de elementos de vigas e pórticos, como mostrado na Fig. (1.11). São mensuradas por meio de uma unidade de força dividida por unidade de comprimento.

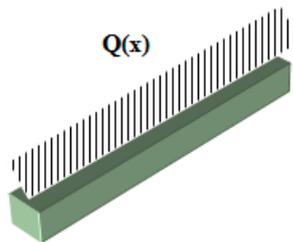


Figura 1.11 Forças de linha.

## II. Ações Concentradas ou Pontuais

São ações localizadas em áreas de pequenas dimensões. Portanto, podem ser assumidas como pontuais. As ações concentradas podem ser forças ou momentos como ilustrado na Fig. (1.12).

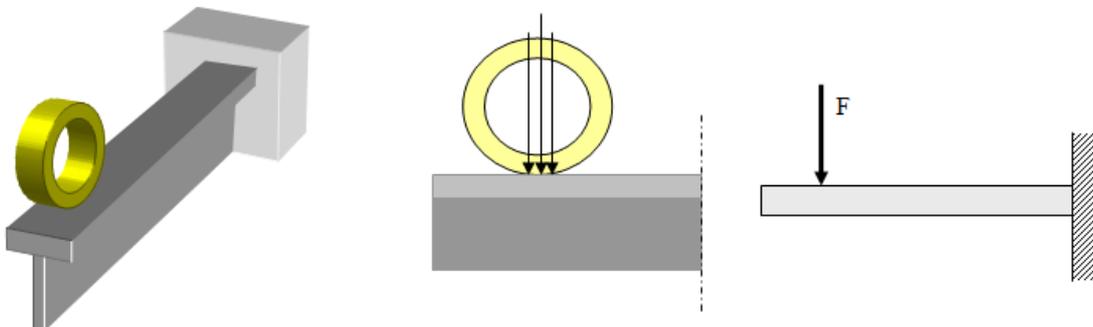


Figura 1.12 Carregamento pontual.

### 1.2.4 – Condições de Vinculação

As condições de vinculação são impostas à estrutura por meio de dispositivos mecânicos que impedem sua movimentação. Estes dispositivos são, por vezes, denominados de dispositivos de fixação chapa/terra. Para a análise de problemas bidimensionais estes dispositivos podem ser divididos em:

#### I. Apoio Móvel

Este tipo de apoio impede o deslocamento do ponto vinculado apenas ao longo de uma direção pré-determinada. Como consequência, nesse tipo de apoio surge uma única reação, orientada na direção do deslocamento impedido. Na Fig. (1.13) está apresentado o mecanismo de funcionamento do apoio móvel. A presença do apoio móvel no sistema estrutural é representada por meio dos símbolos apresentados na Fig. (1.14).

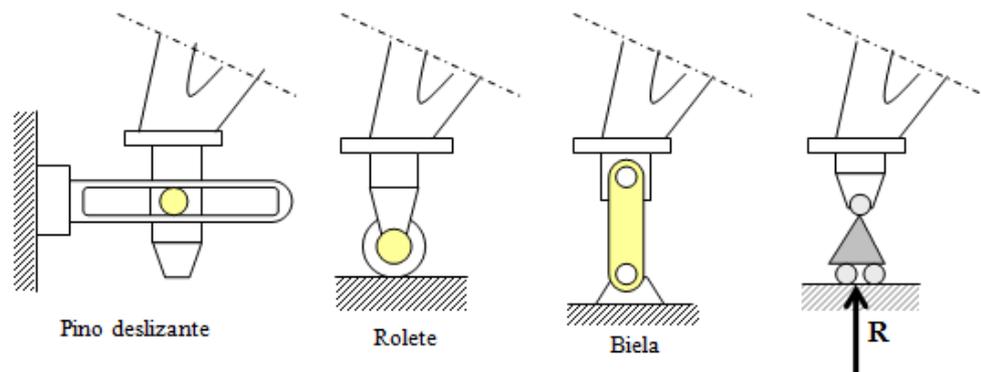


Figura 1.13 Apoio móvel



Figura 1.14 Representação do apoio móvel.

#### II. Apoio Fixo

Este tipo de apoio impede o deslocamento dos pontos vinculados ao longo de duas direções, no caso plano, e três direções no caso tridimensional. Nos apoios do tipo fixo surgem duas(três) forças reativas, como consequência da restrição aos dois(três)

deslocamentos pontuais impedidos no caso plano(tridimensional). As reações de apoio são orientadas nas direções dos deslocamentos restringidos. O apoio fixo pode ser efetuado por meio dos mecanismos ilustrados na Fig. (1.15). Para a representação deste tipo de apoio no sistema estrutural utiliza-se o símbolo apresentado na Fig. (1.16).

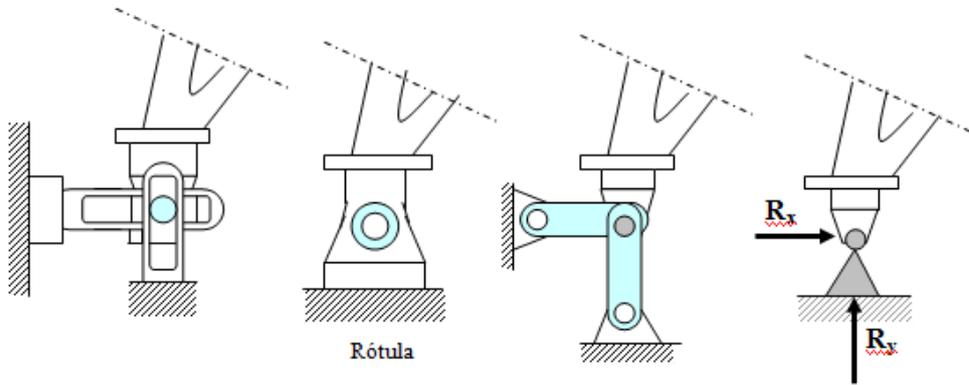


Figura 1.15 Apoio fixo caso plano.



Figura 1.16 Representação apoio fixo

### III. Engastamento Perfeito

O apoio do tipo engastamento perfeito impede dois deslocamentos no caso plano e três no caso tridimensional. Além disso, impede também a rotação do ponto vinculado.

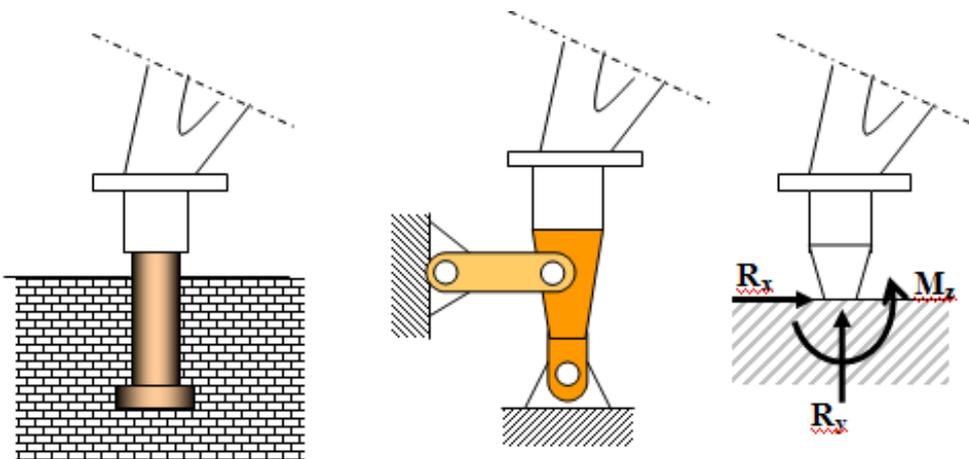


Figura 1.17 Engastamento perfeito. Caso plano.

Surtem no engaste duas(três) forças reativas decorrentes do impedimento dos deslocamentos no caso plano(tridimensional) e um(três) momento(s) que resulta(m) do impedimento à rotação do ponto. Na Fig. (1.17) estão apresentados os mecanismos que podem ser utilizados para a construção de um engaste. Quando o engastamento perfeito está presente em um dado sistema estrutural, este é representado por meio do símbolo mostrado na Fig. (1.18).



Figura 1.18 Representação do engastamento perfeito. Caso plano.

#### IV. Engastamento Móvel

O engastamento móvel é um tipo especial de vinculação não encontrada com frequência em aplicações práticas de engenharia, embora seja empregada em diversas aplicações teóricas. Este tipo de vinculação pode ser observado, por exemplo, na conexão entre tabuleiro e pilar de pontes e em fundações especiais projetadas contra a ação de terremotos. Nesse tipo de apoio, o deslocamento ao longo de uma direção pré-determinada e a rotação do ponto considerado são impedidos. Conseqüentemente, surgem nesse apoio duas ações reativas, sendo uma força (atuando ao longo da direção do deslocamento restringido) e um momento.

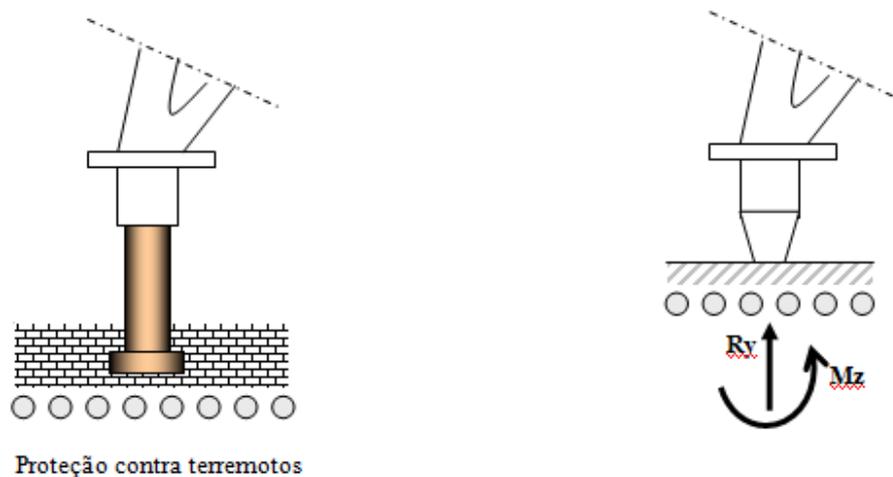


Figura 1.19 Engastamento móvel.

Na Fig. (1.19) ilustram-se os mecanismos para a realização de um engastamento móvel. A simbologia para representação deste tipo de apoio é apresentada na Fig. (1.20).



Figura 1.20 Representação do engastamento móvel.

### 1.3 – Princípio de Saint Venant

Este princípio estabelece que em pontos suficientemente afastados das regiões de aplicação dos carregamentos externos, os efeitos internos se manifestam independentemente da forma da distribuição daqueles carregamentos. Em outras palavras, pode-se dizer que:

*"As tensões que podem ser produzidas em um corpo pela aplicação, em uma pequena parte da sua superfície, de um sistema de forças equivalente estaticamente a força zero e conjugado zero, são de magnitude desprezível a distâncias que são maiores se comparadas com as dimensões lineares do corpo."*

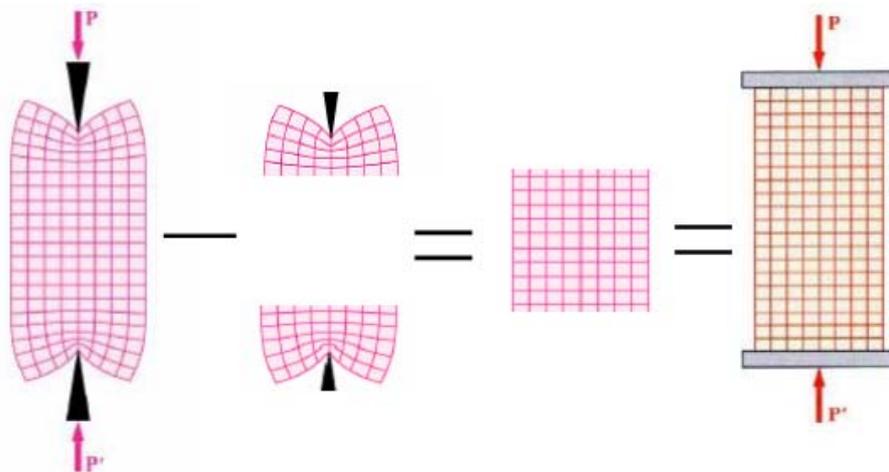


Figura 1.21 Princípio de Saint Venant.

Este princípio é de grande importância na análise mecânica de corpos deformáveis. À medida em que a zona de análise se afasta da região de aplicação das ações externas, o gradiente das tensões e deformações tende a zero, ou seja, essas grandezas tendem a apresentar variação constante. Assim, a diferença entre o comportamento mecânico real e aquele previsto pelos modelos matemáticos da

mecânica dos sólidos/resistência dos materiais, os quais assumem distribuição uniforme de tensões e deformações, é significativa apenas na região vizinha à de aplicação dessas ações externas.

Em outras palavras, este princípio estabelece que se um corpo estiver sujeito à ação de um conjunto de forças, aplicado numa zona limitada da sua superfície, as tensões e deformações provocadas por essas forças a uma “distância suficientemente grande” do seu ponto de aplicação dependem apenas de sua resultante e não da forma como estas são aplicadas.

Assume-se, como parâmetro prático, que as tensões e deformações tornam-se uniformes a partir de uma distância igual à maior dimensão da superfície onde estão aplicadas as ações externas. Este princípio é sustentado por observações experimentais. Na Fig. (1.21) apresenta-se a aplicação do princípio de Saint Venant. Destaca-se, nessa figura, a zona de concentração de tensões e deformações, além da zona onde essas grandezas apresentam variação uniforme.

#### 1.4 – Princípio da Superposição dos Efeitos

O princípio da superposição dos efeitos prevê que os efeitos de um sistema composto por várias ações agindo em um corpo serão iguais à somatória dos efeitos parciais produzidos neste corpo quando cada ação é aplicada isoladamente, independente da origem da aplicação, conforme indicado na Fig. (1.22). Esse princípio é válido desde que as seguintes condições sejam atendidas.

- I. Regime de pequenos deslocamentos.
- II. Material de comportamento mecânico elástico linear.

O princípio da superposição dos efeitos é de grande utilidade na análise de tensões e deslocamentos em corpos deformáveis. Este princípio será utilizado em diversas oportunidades durante este curso.

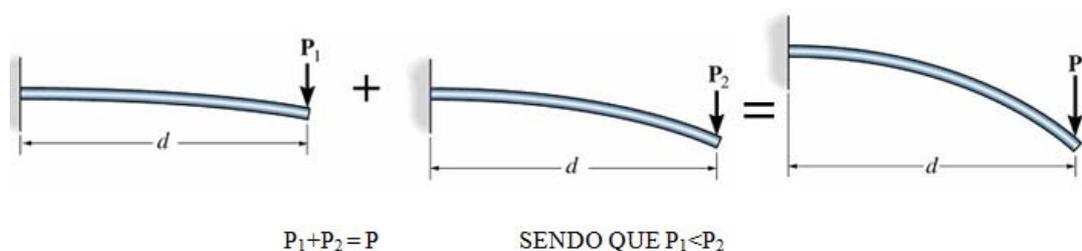


Figura 1.22 Princípio da superposição dos efeitos. Aplicação em viga fletida.

## **2. – Equilíbrio de Ponto Material e Corpo Rígido**

### **2.1 – Introdução**

Um ponto material, ou um ponto pertencente ao um corpo ou a uma estrutura, está em equilíbrio se, e somente se, pelo menos uma das condições abaixo é verificada:

- Se o ponto está em repouso e permanece em repouso.
- Se o ponto está em movimento retilíneo uniforme, ou seja, se sua velocidade for constante.

De acordo com as duas condições acima apresentadas, o ponto material deve apresentar aceleração,  $\vec{a}$ , nula para estar em equilíbrio. Portanto, utilizando a 2ª lei de Newton, assumindo que o ponto material tenha massa não nula, pode-se concluir que na condição de equilíbrio a seguinte condição é observada:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F} = 0 \quad (2.1)$$

Decorre da 2ª lei de Newton que se o ponto material está em equilíbrio então a somatória das forças atuantes sobre o dado ponto deve ser nula, ou seja,  $\sum \vec{F} = 0$ . Esta é uma condição necessária ao equilíbrio.

Para mostrar que o resultado apresentado na Eq. (2.1) é também uma condição suficiente ao equilíbrio do ponto material, deve-se utilizar a 1ª lei de Newton, a qual enuncia que:

*“Todo ponto permanece em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a mudar seu estado por forças a ele impressas.”*

Consequentemente, decorre da primeira lei de Newton que  $\sum \vec{F} = 0$  é uma condição necessária e também suficiente para o equilíbrio do ponto material.

## 2.2 – Equilíbrio Estático do Ponto Material

O termo equilíbrio estático é utilizado para descrever a condição de equilíbrio de um objeto que encontra-se em repouso. Esta é uma condição desejável em grande parte das estruturas utilizadas em engenharia, especialmente as civis. O ponto material está em equilíbrio estático se as seguintes condições estáticas e cinemáticas forem atendidas:

- Condição estática:  $\sum \vec{F} = 0$ .
- Condição cinemática:  $\vec{u} = 0$ .

sendo  $\vec{u}$  o vetor que contém os deslocamentos do ponto material.

Para a análise de problemas bidimensionais, as condições apresentadas acima podem ser particularizadas como:

- Condição estática:  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ .
- Condição cinemática:  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ .

Para a verificação da veracidade, ou imposição, das duas condições acima em um ponto material, uma simples ferramenta deve ser empregada, a qual é denominada diagrama de corpo livre. Esse diagrama envolve um esboço do sistema de ações atuante em torno do ponto material, ou seja, mostra o ponto material e sua vizinhança sendo todas as ações aplicadas no ponto definidas e representadas segundo sua direção, intensidade e sentido.

Deve-se notar que como estão envolvidas apenas duas somatórias de força, para o caso plano, somente duas grandezas poderão ser identificadas por ponto material no problema. Para problemas tridimensionais três grandezas por ponto material podem ser identificadas. Porém, um número maior de grandezas poderá ser identificado e mensurado utilizando as condições de equilíbrio estático. Para que isso seja possível, condições subsidiárias devem ser impostas, relacionando as diversas ações e reações.

### *2.2.1 – Exemplo 1*

Um conjunto de cabos suporta um caixa cujo peso é igual a 1,0 kN. As dimensões dos cabos bem como sua disposição estão apresentadas na Fig. (2.1).

Determine as forças atuantes ao longo dos cabos  $\vec{AC}$  e  $\vec{BC}$  efetuando o equilíbrio estático do ponto C.

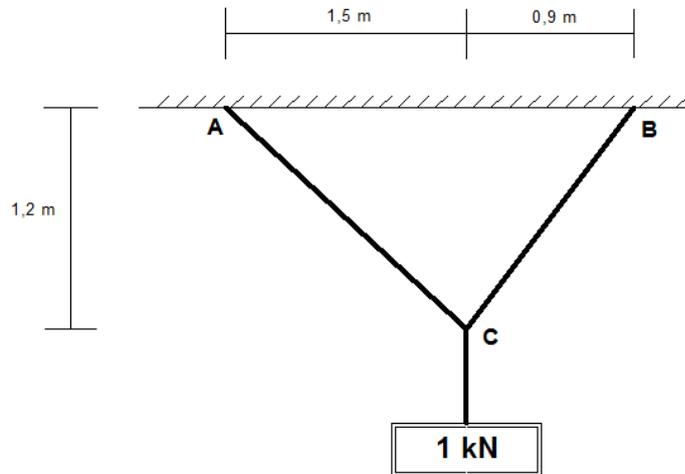


Figura 2.1 Geometria e ações para o exemplo 1.

Para a solução deste problema, deve-se, inicialmente, construir o diagrama de corpo livre do sistema de cabos e força. O diagrama de corpo livre para o problema considerado está ilustrado na Fig. (2.2).

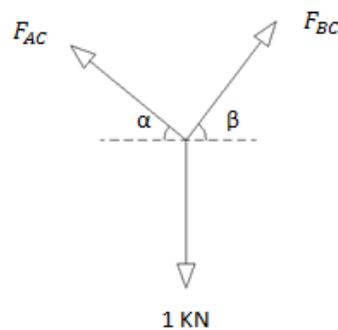


Figura 2.2 Diagrama de corpo livre.

Utilizando relações trigonométricas básicas obtêm-se os valores relacionados aos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  mostrados na Fig. (2.2). Assim:

$$\text{sen}(\alpha) = 0,625 \quad \text{cos}(\alpha) = 0,781 \quad \text{sen}(\beta) = 0,8 \quad \text{cos}(\beta) = 0,6$$

A partir dos valores das relações trigonométricas apresentados acima, pode-se decompor as forças atuantes apresentadas no diagrama de corpo livre segundo as direções  $x$  e  $y$ . Efetuando este procedimento, e aplicando a condição de somatória nula de forças, têm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{BC} \cos(\beta) - F_{AC} \cos(\alpha) = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{BC} \operatorname{sen}(\beta) + F_{AC} \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0\end{aligned}$$

Manipulando o sistema de equações anterior de forma a torná-lo mais conveniente, pode-se escrever que:

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \operatorname{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{BC} \\ F_{AC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema algébrico obtêm-se:

$$F_{BC} = 0,782 \text{ kN}$$

$$F_{AC} = 0,6 \text{ kN}$$

### 2.2.2 – Exemplo 2

Para o conjunto de forças atuante no ponto material mostrado na Fig. (2.3), determine a intensidade da força  $F_3$  de forma que a resultante das forças atuantes neste ponto seja a mínima possível. Considere  $F_1 = 20 \text{ kN}$  e  $F_2 = 12 \text{ kN}$ .

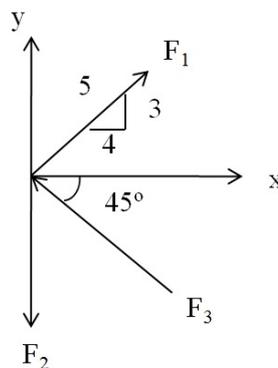
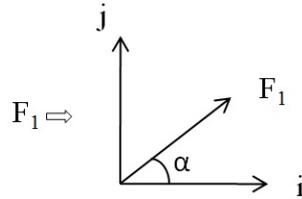


Figura 2.3 Conjunto de forças atuantes em um ponto material.

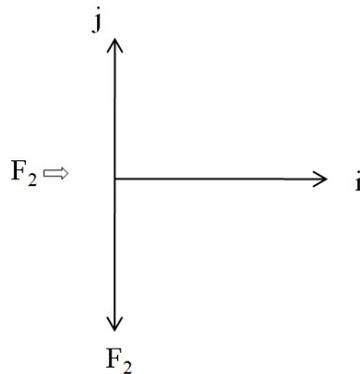
Para a resolução desse problema, as forças atuantes no ponto material devem ser decompostas em relação às direções  $x$  e  $y$ , ou em relação aos versores unitários  $i$  e  $j$ . Para a força  $F_1$ , suas componentes podem ser obtidas com base no apresentado na Fig. (2.4). Utilizando relações trigonométricas básicas obtêm-se que  $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$  e  $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ . Assim, as componentes do vetor  $F_1$  são iguais a:

Figura 2.4 Componentes da força  $F_1$ .

$$F_1^x = F_1 \cos(\alpha) , F_1^y = F_1 \text{sen}(\alpha) \quad \therefore \quad \vec{F}_1 = 16i + 12j$$

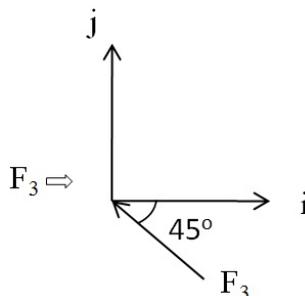
Para a força  $F_2$  procedimento semelhante deve ser efetuado. Com base na ilustração apresentada na Fig. (2.5), verifica-se que as componentes dessa força são iguais a:

$$\vec{F}_2 = 0i - 12j$$

Figura 2.5 Componentes da força  $F_2$ .

Considerando a força  $F_3$ , esta deve também ser decomposta segundo as direções  $i$  e  $j$ . Sabendo que seu ângulo de inclinação em relação a estes eixos é de  $45^\circ$ , como mostrado na Fig. (2.6), suas componentes podem ser descritas como:

$$F_3^x = F_3 \cos(45^\circ) , F_3^y = F_3 \text{sen}(45^\circ) \quad \therefore \quad \vec{F}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_3 i + \frac{\sqrt{2}}{2} F_3 j$$

Figura 2.6 Componentes da força  $F_3$ .

Assim, o vetor resultante das forças atuantes no ponto material considerado pode ser calculado como:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F} = \left(16 + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_3\right) i + \left(12 - 12 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_3\right) j$$

O que resulta em:

$$\vec{F} = \left(16 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_3\right) i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_3\right) j$$

A intensidade do vetor resultante é calculada somando-se o quadrado de cada uma de suas componentes e em seguida extraíndo sua raiz quadrada (norma de um vetor). Efetuando este procedimento tem-se:

$$|\vec{F}| = \sqrt{\left(16 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_3\right)^2}$$

Manipulando algebricamente o termo anterior obtém-se:

$$|\vec{F}| = \sqrt{256 - 16\sqrt{2}F_3 + \frac{F_3^2}{2} + \frac{F_3^2}{2}} \Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{F_3^2 - 16\sqrt{2}F_3 + 256}$$

O mínimo valor da intensidade de  $|\vec{F}|$  pode ser obtido usando os conhecimentos do cálculo diferencial, os quais prescrevem que o extremo de uma função (mínimo ou máximo) ocorre quando sua primeira derivada é nula. Assim, o valor da parcela  $\frac{d|\vec{F}|}{dF_3} = 0$  é igual a:

$$\frac{d|\vec{F}|}{dF_3} = \frac{1}{2} (F_3^2 - 16\sqrt{2}F_3 + 256)^{-1/2} (2F_3 - 16\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d|\vec{F}|}{dF_3} = \frac{1}{2} \frac{(2F_3 - 16\sqrt{2})}{\sqrt{(F_3^2 - 16\sqrt{2}F_3 + 256)}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d|\vec{F}|}{dF_3} = \frac{(F_3 - 8\sqrt{2})}{\sqrt{(F_3^2 - 16\sqrt{2}F_3 + 256)}} = 0$$

Portanto, para que a intensidade da força resultante seja mínima, isto é nula, a razão acima deve possuir numerador nulo. Dessa forma, a intensidade será também nula. Assim:

$$F_3 - 8\sqrt{2} = 0 \Rightarrow F_3 = 11,31 \text{ kN}$$

Para que a solução obtida anteriormente seja válida, o valor de  $F_3$  obtido deve tornar o denominador não nulo e o termo dentro da raiz em um número maior que zero. Fazendo esta verificação tem-se:

$$\sqrt{11,31^2 - 16\sqrt{2} \cdot 11,31 + 256} = \sqrt{128}$$

Portanto, a solução obtida é factível.

### 2.3 – Equilíbrio de Corpo Rígido

Assim como a união de células forma um corpo, a união de pontos materiais forma uma estrutura. Portanto, o equilíbrio de uma estrutura poderá ser compreendido a partir dos conceitos discutidos na seção anterior, uma vez que, se todos os pontos materiais do corpo estiverem em equilíbrio, o corpo estará também em equilíbrio e vice-versa.

Para a compreensão do equilíbrio de um corpo, deve-se considerar o corpo rígido apresentado na Fig. (2.7), o qual está em equilíbrio quando submetido a um conjunto de ações externas,  $F$ , e de condições de vinculação.

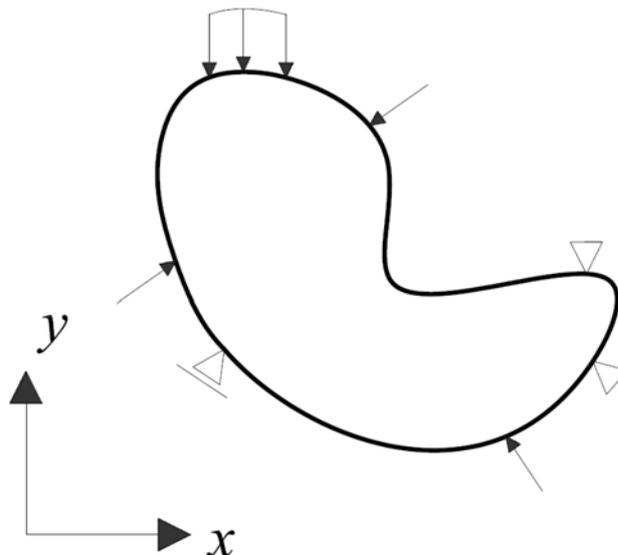


Figura 2.7 Corpo rígido em equilíbrio.

Se o corpo está em equilíbrio, qualquer parte isolada deste deve também estar em equilíbrio. Assim, seccionando o corpo apresentado na Fig. (2.7) em duas partes,

como indicado na Fig. (2.8), ambas as partes, quando analisadas de forma isolada, devem permanecer em equilíbrio.

Para que a condição de equilíbrio seja mantida em cada uma das porções do corpo, surgem forças  $\vec{\delta}_i$ , denominadas forças internas, que reestabelecem a condição de equilíbrio. Assim, se o corpo está em equilíbrio estático, a seguinte condição deve ser observada:

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{\delta}_i = 0 \quad (2.2)$$

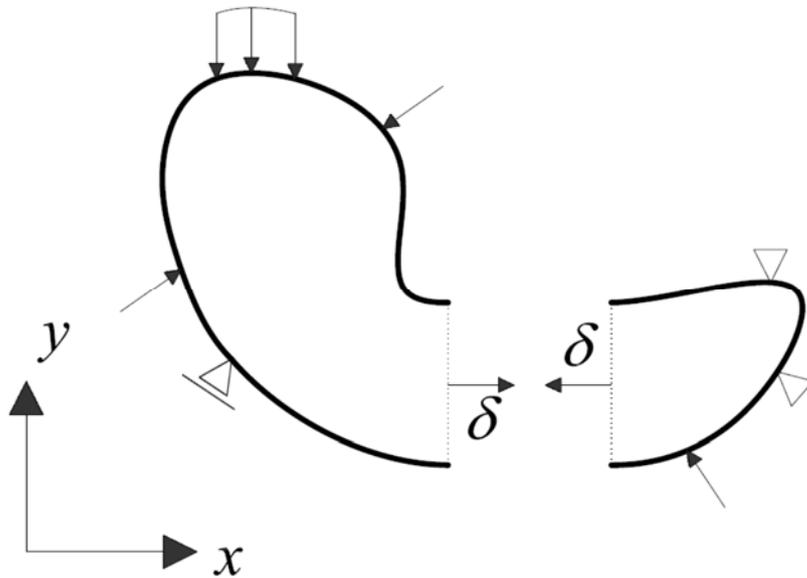


Figura 2.8 Corpo rígido seccionado.

Porém, deve-se enfatizar que as forças internas,  $\vec{\delta}_i$ , surgem aos pares (pela 3ª Lei de Newton: ação e reação). Conseqüentemente, os pares de forças internas possuem mesma direção e intensidade, mas sentidos opostos. Portanto,  $\sum \vec{\delta}_i = 0$  por definição. Assim, uma condição necessária para que o equilíbrio estático ocorra é a apresentada pela Eq.(2.3):

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (2.3)$$

Com relação à verificação da condição de equilíbrio estático, existe ainda outro quesito que deve ser atendido. Este quesito está relacionado às condições cinemáticas do problema. Para entender esta condição, deve-se considerar o corpo rígido apresentado na Fig. (2.9). Trata-se de um corpo plano, retangular, submetido a um binário  $F$ .

Considerando o corpo apresentado na Fig. (2.9), verifica-se que a Eq. (2.3) é atendida. Porém, é intuitivo perceber que, sob a ação dessas forças, o corpo gira no sentido anti-horário. Na Fig. (2.10) são mostradas as configurações deslocada (pontilhado) e indeslocada (linha cheia) do corpo analisado. Portanto, embora a Eq.(2.3) seja atendida, o corpo em questão não atende às condições cinemáticas do equilíbrio estático, ou seja,  $u_x = u_y = 0$ .



Figura 2.9 Corpo rígido submetido a forças F.

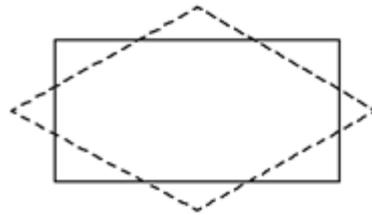


Figura 2.10 Movimentação cinemática do corpo.

Para que as condições cinemáticas sejam também atendidas, de forma a possibilitar o equilíbrio estático, o balanço de uma entidade denominada *momento* deve também ser verificado. O momento de uma força em relação a um ponto, ou eixo, fornece uma medida da tendência dessa força em provocar a rotação (giro) de um corpo em torno deste ponto ou eixo. Considerando o sistema apresentado na Fig. (2.11), o momento pode ser definido matematicamente como apresentado na Eq.(2.4):

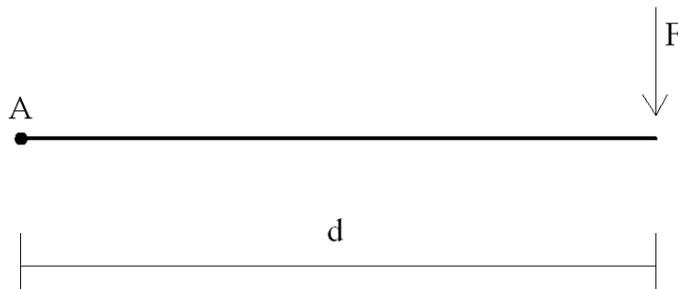


Figura 2.11 Momento causado por uma força.

$$M_A = \vec{F} \otimes \vec{d} \Rightarrow M_A = Fd \quad (2.4)$$

Dessa forma, a somatória dos momentos em relação a qualquer ponto do espaço deve ser nula para que haja o equilíbrio estático. Assim, considerando os termos apresentados na Eq.(2.2) tem-se:

$$\sum \vec{d}_i \otimes (\vec{F}_i + \vec{\delta}_i) = 0 \Rightarrow \sum \vec{d}_i \otimes \vec{F}_i + \sum \vec{d}_i \otimes \vec{\delta}_i = 0 \quad (2.5)$$

Como as forças internas surgem aos pares (3ª Lei de Newton) e têm sentidos opostos, a parcela decorrente dos momentos internos é nula. Dessa forma, a Eq.(2.5) pode ser reescrita como:

$$\sum \vec{d}_i \otimes \vec{F}_i = \sum M = 0 \quad (2.6)$$

Portanto, as duas equações de equilíbrio necessárias para a verificação do equilíbrio estático de um corpo rígido podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \\ \sum M &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Deve-se enfatizar que as expressões mostradas na Eq.(2.7) exprimem condições necessárias e suficientes para a observação do equilíbrio estático de um corpo rígido. Para mostrar que essas condições são necessárias e suficientes, deve-se considerar um corpo rígido em equilíbrio, como mostrado na Fig. (2.7). Nessa situação, as seguintes condições são verificadas:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ e } \sum M = 0 \quad (2.8)$$

Se uma força,  $\vec{F}$ , e um momento,  $\bar{M}$ , forem adicionados a este corpo, pode-se reescrever as Eq. (2.8) da seguinte forma:

$$\sum \vec{F} + \vec{F} = 0 \text{ e } \sum M + \bar{M} = 0 \quad (2.9)$$

Como o corpo estava previamente em equilíbrio, antes da aplicação dessas ações, conclui-se que:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ e } \sum M = 0 \quad (2.10)$$

Consequentemente, para que a condição de equilíbrio seja novamente observada tem-se:

$$\vec{F} = 0 \text{ e } \bar{M} = 0 \quad (2.11)$$

Para problemas bidimensionais, as Eq.(2.7) podem ser particularizadas como:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Já para problemas tridimensionais, tais condições podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Com relação ao equilíbrio cinemático de um corpo plano, observa-se que um elemento infinitesimal pertencente a este corpo apresenta três deslocamentos possíveis, conforme indicado na Fig. (2.12):

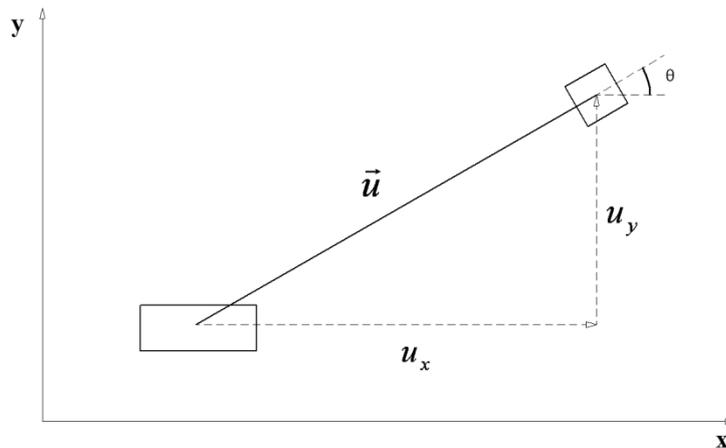


Figura 2.12 Equilíbrio cinemático no elemento infinitesimal.

O vetor deslocamento,  $\vec{u}$ , é formado por uma componente orientada ao longo da direção  $x$ ,  $u_x$ , e outra na direção  $y$ ,  $u_y$ . Além desses, o elemento infinitesimal ainda pode rotacionar no plano. A cada deslocamento ou rotação em potencial dá-se o nome de *grau de liberdade*. No caso plano, um corpo rígido possui 3 graus de liberdade e no caso tridimensional 6 graus de liberdade. Do ponto de vista cinemático, a estrutura está em equilíbrio se ela não se desloca ou rotaciona rigidamente no espaço. Portanto, a estrutura deve ser convenientemente vinculada para que movimentos de corpo rígido não sejam observados.

### 2.3.1 – Exemplo 3

Determine as reações de apoio da estrutura rígida apresentada na Fig. (2.13), de forma que o equilíbrio estático seja observado.

Para a solução deste problema, deve-se construir o diagrama de corpo livre do sistema estrutura e carregamentos. Como o apoio do ponto A é do tipo engaste, surgem, nesse ponto, três reações de apoio, as quais estão indicadas na Fig. (2.14).

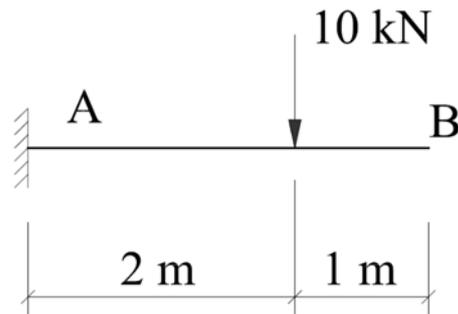


Figura 2.13 Estrutura a ser analisada.

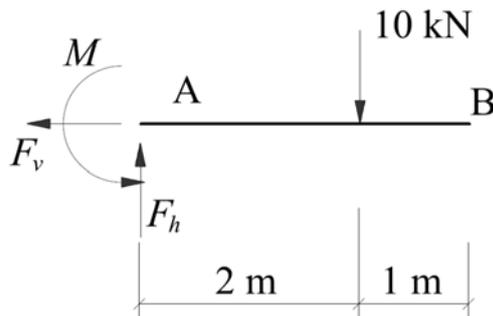


Figura 2.14 Diagrama de corpo livre.

Para que o equilíbrio ocorra, as Eq. (2.12) devem ser atendidas. Assim:

$$\sum F_x = 0 \quad \therefore F_h = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \therefore F_v - 10 = 0 \quad \Rightarrow F_v = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \therefore -10 \cdot 2 + M = 0 \quad \Rightarrow M = 20 \text{ kNm}$$

### 2.3.2 – Exemplo 4. Exercício Proposto

O exercício apresentado neste item será proposto para a resolução pelo leitor. Para a estrutura mostrada na Fig. (2.15), determine as reações de apoio e mostre que o princípio da superposição dos efeitos é válido para o problema.

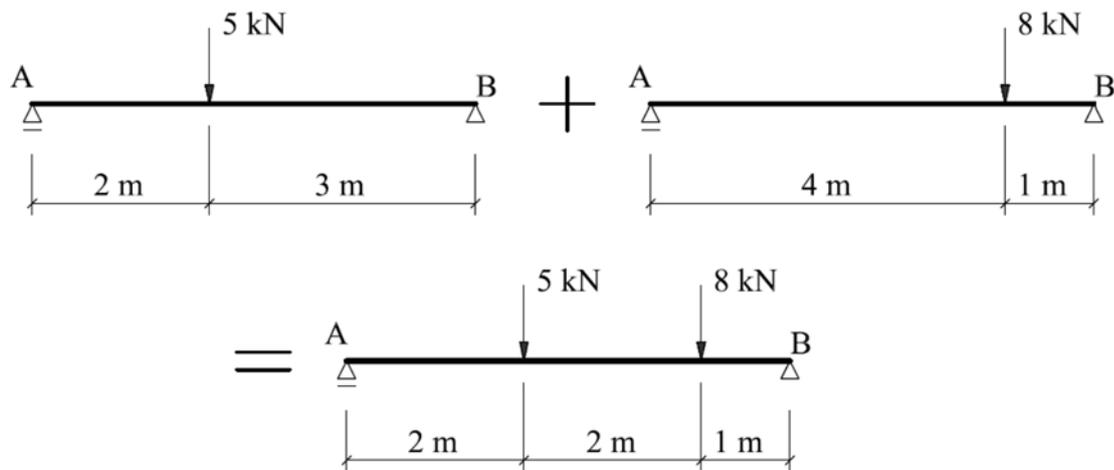


Figura 2.15 Estrutura considerada.

### 2.3.3 – Exemplo 5

A porta apresentada na Fig. (2.16) possui peso próprio igual a 100 N. Determine as reações em suas articulações, sabendo que a dobradiça A suporta apenas reação horizontal e a dobradiça B suporta reações horizontal e vertical. As dimensões apresentadas na Fig. (2.16) são dadas em metro.

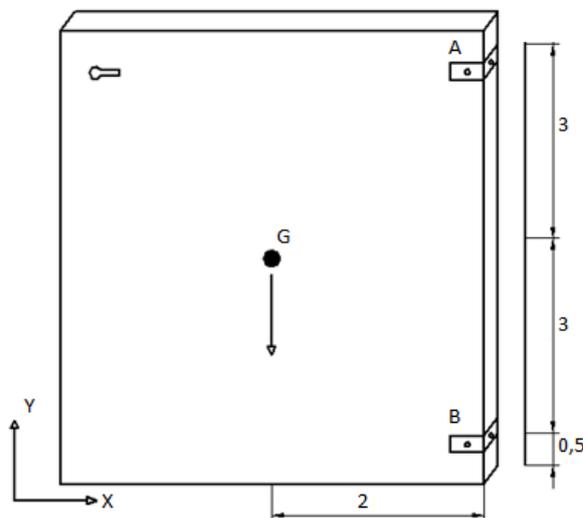


Figura 2.16 Estrutura considerada. Dimensões apresentadas em metro.

A resolução desse problema envolve duas etapas. A primeira delas relacionada à construção do diagrama de corpo livre e a segunda à verificação das condições de equilíbrio expressas pela Eq.(2.12). O diagrama de corpo livre para o problema considerado é o apresentado na Fig. (2.17), o qual leva em consideração as condições propostas no enunciado sobre as restrições ao deslocamento nas dobradiças.

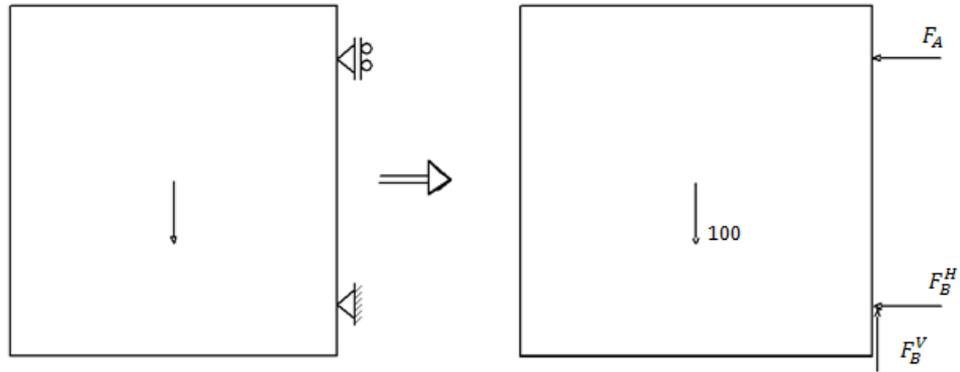


Figura 2.17 Diagrama de corpo livre.

Segundo as ações apresentadas no diagrama de corpo livre, podem ser aplicadas as Eq.(2.12) e, conseqüentemente, a imposição do equilíbrio estático do corpo rígido. Assim, as reações nas dobradiças são dadas por:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_B^V - 100 = 0 &&\Rightarrow F_B^V = 100 \text{ N} \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow 100 \cdot 2 - F_B^H \cdot 6 - F_B^V \cdot 0 = 0 &&\Rightarrow F_B^H = 100/3 \text{ N} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_A - F_B^H = 0 &&\Rightarrow F_A = -100/3 \text{ N} \end{aligned}$$

### 2.3.4 – Exemplo 6

Para o sistema estrutural mostrado na Fig. (2.18), determine o menor comprimento  $d$ , de forma a evitar o tombamento da estrutura. Determine também a intensidade do carregamento aplicado,  $W$ .

Para que o tombamento não ocorra, as equações de equilíbrio estático devem ser satisfeitas. Aplicando as Eq. (2.12) obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow 800 \cdot 4 - \frac{W \cdot d}{2} \cdot \frac{2d}{3} = 0 &&\Rightarrow W \cdot d^2 = 9600 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow 800 - \frac{W \cdot d}{2} = 0 &&\Rightarrow W \cdot d = 1600 \end{aligned}$$

As duas equações obtidas acima devem ser manipuladas algebricamente para se obter os valores de  $d$  e  $W$ . Dividindo a primeira equação pela segunda tem-se:

$$d = 6 \text{ ft}$$

Conseqüentemente:

$$W = \frac{1600}{6} \Rightarrow W = 266,67 \text{ lb/ft}$$

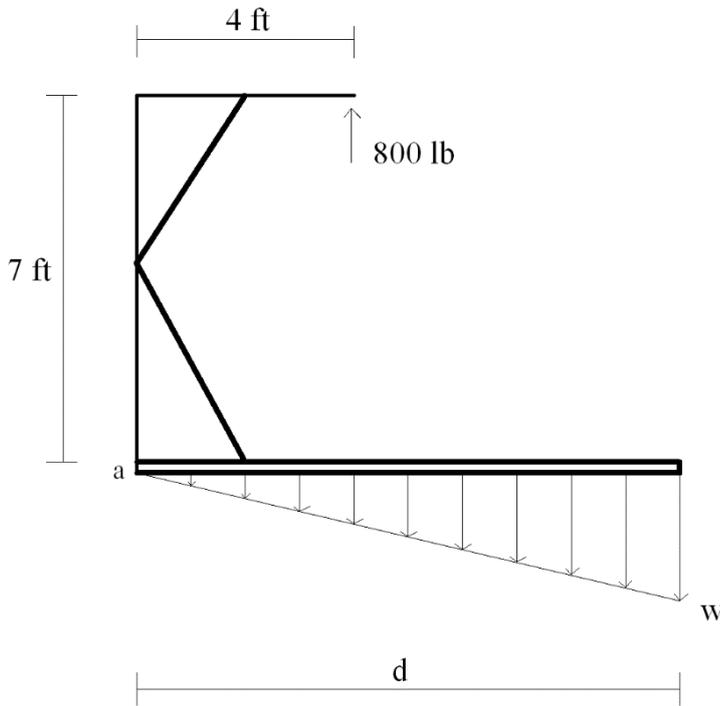


Figura 2.18 Sistema estrutural considerado.

2.3.5 – Exemplo 7

Para a estrutura mostrada na Fig. (2.19) determine as reações de apoio considerando duas hipóteses. Hipótese 1:  $h = 0$  e Hipótese 2:  $h = 20 \text{ cm}$ .

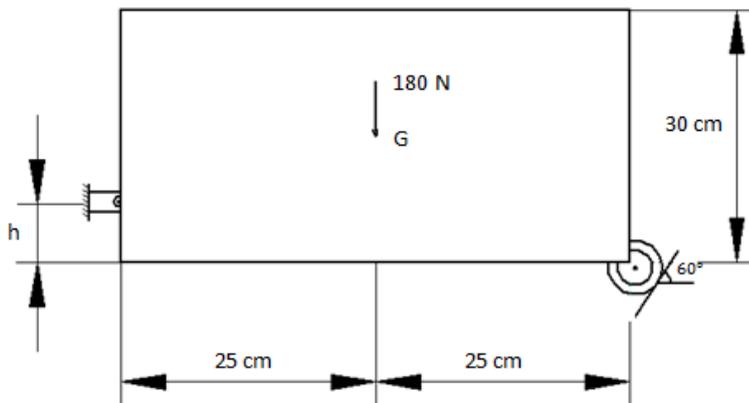


Figura 2.19 Sistema estrutural considerado.

*Hipótese 1 ( $h=0$ )*

Para essa hipótese, o diagrama do corpo livre pode ser construído facilmente, como mostrado na Fig. (2.20). Aplicando as equações de equilíbrio estático obtém-se:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -180 \cdot 25 + B_y \cdot 50 = 0 \Rightarrow 180 \cdot 0,5 = B \cdot \text{sen}(30^\circ) \Rightarrow B = 180N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - B_x = 0 \Rightarrow A_x - B \cdot \cos(30^\circ) = 0 \Rightarrow A_x = 155,885N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 180 = 0 \Rightarrow A_y + B \cdot \text{sen}(30^\circ) - 180 = 0 \Rightarrow$$

$$A_y + 180 \cdot \text{sen}(30^\circ) - 180 = 0 \Rightarrow A_y = 90N$$

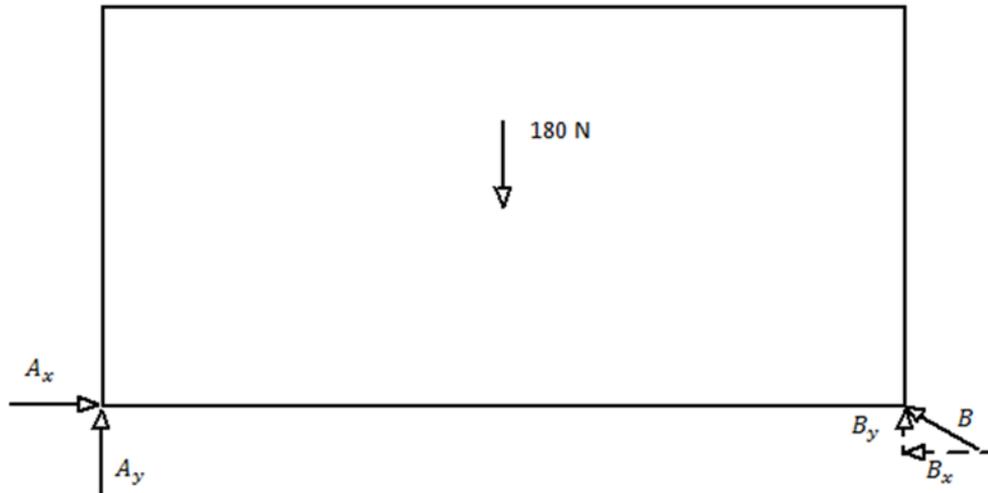


Figura 2.20 Diagrama de corpo livre.

*Hipótese 2 (h = 20 cm)*

Considerando a Hipótese 2, o diagrama do corpo livre pode ser construído posicionando-se o apoio A a 20 cm da base do corpo, conforme indicado na Fig. (2.21).

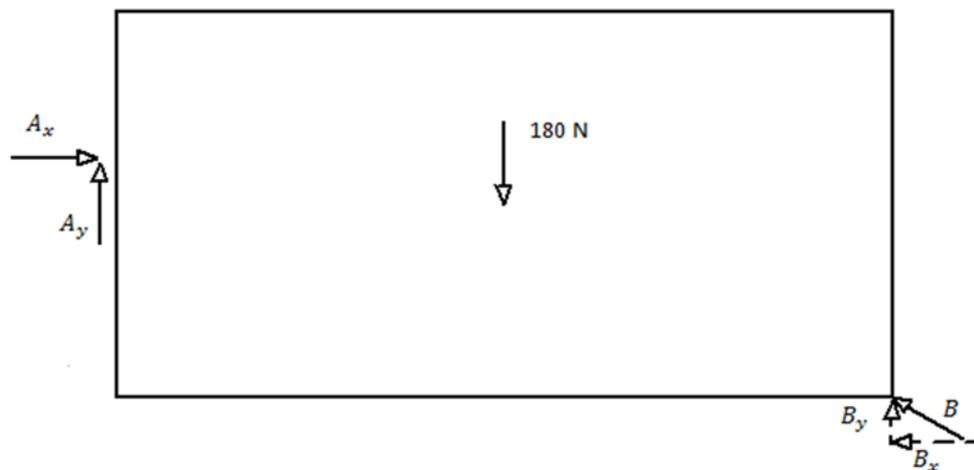


Figura 2.21 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio obtém-se:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_x \cdot 20 - A_y \cdot 50 + 180 \cdot 25 = 0 \Rightarrow 20A_x + 50A_y = 4500$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - B_x = 0 \Rightarrow A_x - B \cos(30^\circ) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 180 = 0 \Rightarrow A_y + B \cdot \text{sen}(30^\circ) = 180$$

A obtenção das reações de apoio passa pela solução conjunta das três equações de equilíbrio obtidas anteriormente. Organizando-as de forma matricial, para a solução de um sistema de equações, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 20 & 50 & 0 \\ 1 & 0 & -0,86603 \\ 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 180 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 507,479 \\ -112,992 \\ 585,983 \end{Bmatrix} N$$

## 2.4 – Conceituação Sobre a Determinação de Estruturas

De acordo com os conceitos apresentados neste capítulo, constata-se que o equilíbrio estático é verificado se as somatórias de forças e de momentos atuantes sobre este são nulas em relação a qualquer ponto do plano, Eq.(2.12) e Eq.(2.13). Consequentemente, para o caso plano têm-se três equações de equilíbrio e para o tridimensional seis, as quais devem ser atendidas. Porém, deve-se perguntar o que ocorre quando estruturas como as apresentadas na Fig. (2.22) devem ser analisadas:

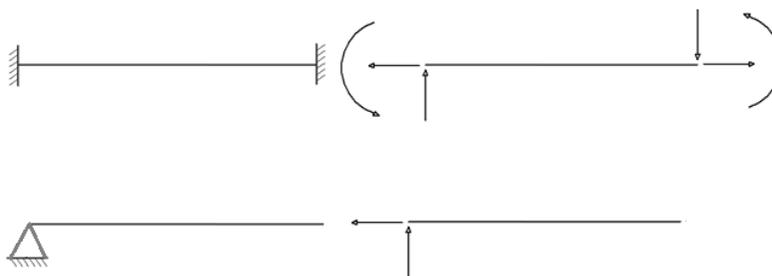


Figura 2.22 Sistemas hiperestático e hipostático.

Com base na quantidade de incógnitas a ser determinada e no número de restrições de movimento (translações e rotações) imposto pelos apoios e conexões internas ao corpo rígido, é possível classificar as estruturas em isostática, hiperestática e hipostática. Às estruturas onde as reações (interna e externa) envolvem número de incógnitas igual ao número de equações de equilíbrio e os tipos de apoio usados são tais

que impossibilitam o corpo rígido de se mover (rigidamente) sob a ação de quaisquer condições de carregamento, dá-se o nome de estrutura de isostática, sendo suas reações estaticamente determinadas.

De forma semelhante, considerando a estrutura impedida de se deslocar rigidamente pela presença dos apoios, quando as incógnitas reativas (interna e externa) decorrentes das condições de vinculação são em maior número que as equações de equilíbrio, as reações são estaticamente indeterminadas e a estrutura é denominada hiperestática, como é o caso da primeira ilustração da Fig. (2.22). Essas estruturas são resolvidas empregando-se condições de compatibilidade.

Nos problemas mecânicos onde o número de incógnitas devido às condições de vinculação é menor que o número de equações de equilíbrio, pelo menos uma das equações de equilíbrio, Eq.(2.12) ou Eq.(2.13), não será satisfeita. Conseqüentemente, a estrutura poderá mover-se rigidamente em pelo menos uma direção. Nessa situação, o equilíbrio não é garantido, sendo essas estruturas denominadas hipostáticas. A segunda ilustração apresentada na Fig. (2.22) trata de uma estrutura hipostática.

Apesar do exposto anteriormente, a estrutura deve ser eficientemente vinculada para evitar que deslocamentos de corpo rígido ocorram. Assim, o número de vinculações é uma condição necessária, mas não suficiente para o equilíbrio estrutural. Na Fig. (2.23) estão ilustrados dois exemplos onde as condições de vinculações resultam três ou mais ações reativas. Apesar disso, a estrutura não apresenta equilíbrio estático por não estar eficientemente vinculada. Assim, nos dois casos apresentados nessa figura, pelo menos uma das Eq.(2.12) não é satisfeita. Em ambos os casos as estruturas podem deslocar-se rigidamente.

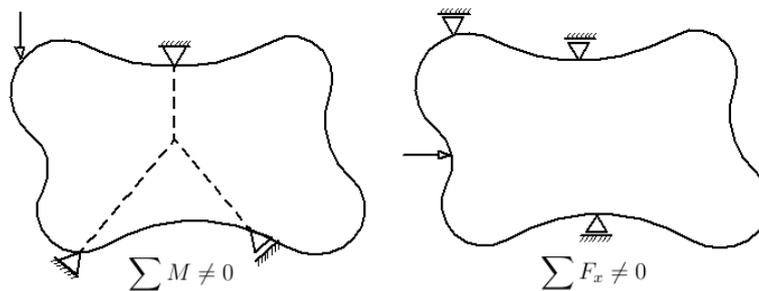


Figura 2.23 Estruturas vinculadas, porém sem equilíbrio estático.

### 3. – Elemento de Barra Simples

---

#### 3.1 – Introdução

O elemento de barra simples é o elemento estrutural mais simples utilizado no domínio da engenharia de estruturas. Este elemento pode ser definido, em termos estáticos, como um elemento estrutural que transmite (ou resiste) apenas a forças segundo seu eixo longitudinal. Já do ponto de vista cinemático, o elemento de barra simples impede que dois pontos materiais ligados por ele se afastem ou se aproximem.

A força interna transmitida ao longo do eixo longitudinal do elemento de barra simples é denominada *esforço solicitante normal*. O esforço solicitante normal, muitas vezes denominado apenas de esforço normal, pode ser entendido a partir de um elemento de barra simples em equilíbrio, como mostra a Fig. (3.1). Seccionando um elemento de barra simples em equilíbrio, solicitado por duas forças trativas  $F$  em seus extremos, surgem, para o reestabelecimento do equilíbrio, duas forças  $N$  no ponto de seccionamento. A força  $N$  é o esforço solicitante normal.



Figura 3.1 Elemento de barra simples.

Para que o equilíbrio seja satisfeito, o esforço  $N$  deve ser igual à força  $F$  aplicada. Assim, pode-se definir o esforço solicitante normal como: “*Conjunto de forças auto equilibrado atuante em um elemento estrutural em equilíbrio de modo que a resultante no elemento seja nula*”.

Se o esforço normal tende a alongar o elemento, este é denominado trativo ou de tração (T) e convencionado com sinal positivo. Por outro lado, se o esforço normal tende a encurtar o elemento, este será compressivo ou de compressão (C) e convencionado com sinal negativo. Na Fig. (3.2) estão ilustradas as ações dos esforços trativos e compressivos atuantes sobre um elemento de barra simples. Esforços trativos do lado esquerdo e esforços compressivos do lado direito.

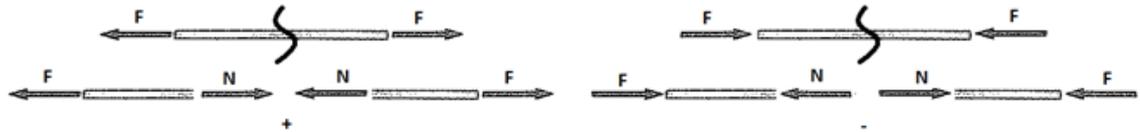


Figura 3.2 Esforços solicitantes em elementos de barra simples.

De acordo com as condições cinemáticas desse elemento, conforme a definição anteriormente apresentada, verifica-se que o elemento de barra simples retira um grau de liberdade (GDL) do sistema. Já o ponto material, também denominado nó, acrescenta dois graus de liberdade para o caso bidimensional e três para o caso tridimensional. Na Fig. (3.3) é apresentado um sistema formado por dois pontos materiais e um elemento de barra simples, ambos contidos no plano. Quando os pontos materiais são analisados de forma isolada, estes apresentam quatro graus de liberdade (dois deslocamentos cada um). Porém, quando o elemento de barra simples é adicionado, um grau de liberdade do sistema é removido, resultando, portanto, três graus de liberdade do sistema. Os três graus de liberdade resultantes do sistema são: deslocamento  $x$ ,  $u_x$ , deslocamento  $y$ ,  $u_y$  e a rotação no plano,  $\theta_{xy}$ . Deve-se enfatizar que estes três GDL estão associados ao deslocamento de corpo rígido do sistema. Para que não ocorra este tipo de deslocamento, a estrutura deve ser convenientemente vinculada. Neste caso, três vinculações devem ser adicionadas, cujas reações são determinadas por meio das equações de equilíbrio de corpo rígido no plano, Eq.(2.12).

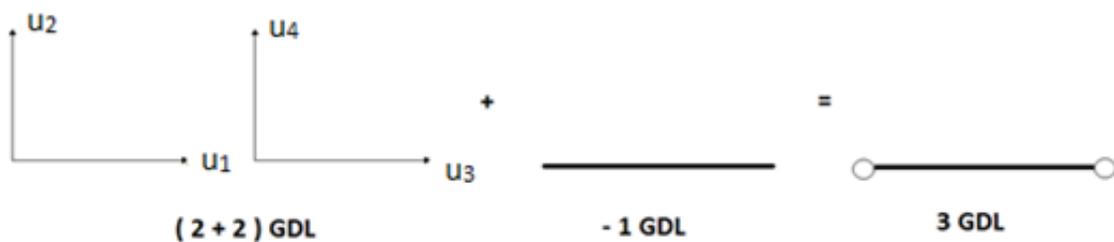


Figura 3.3 Sistema formado por dois pontos materiais e um elemento de barra simples.

Com base no sistema apresentado na Fig. (3.3), pode-se perguntar: Qual é a estrutura rígida mais simples formada por elementos de barra simples? Para responder a esta questão, deve-se efetuar uma análise evolutiva considerando um conjunto de nós e a inserção progressiva de elementos de barra simples, ambos no plano. Esta análise será discutida considerando a ilustração apresentada na Fig.(3.4).

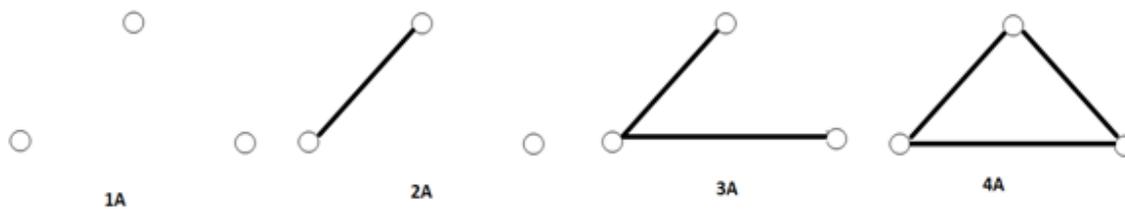


Figura 3.4 Sistema estático mais simples. Triângulo rígido.

Para o caso 1A, observa-se a presença de três nós no plano. O sistema formado por esses nós conduz à existência de seis GDL, sendo dois GDL (dois deslocamentos no plano) por nó. Ao sistema formado por três nós, pode-se acrescentar um elemento de barra simples, como mostrado no caso 2A. O elemento de barra simples retira um GDL do sistema. Portanto, o sistema resultante possui cinco GDL, os quais são dois referentes ao nó isolado e três relacionados ao deslocamento de corpo rígido,  $(u_x, u_y$  e  $\theta_{xy})$ , do conjunto barra simples/dois nós. Evoluindo nessa análise, pode-se acrescentar um elemento de barra simples ao sistema mostrado no caso 2A. Esse caso pode ser visualizado na ilustração 3A, a qual mostra um sistema composto por três nós e dois elementos de barra simples. Como a inclusão do elemento de barra simples retira um GDL do sistema, constata-se que esse caso apresenta quatro GDL. Esses GDL são três referentes ao deslocamento de corpo rígido do conjunto,  $(u_x, u_y$  e  $\theta_{xy})$ , e um relacionado ao deslocamento relativo entre os dois elementos de barra simples. Finalmente, pode-se acrescentar mais um elemento de barra simples ao conjunto mostrado no caso 3A, retirando, assim, um GDL desse sistema. Essa situação é mostrada na ilustração 4A, a qual possui três GDL. Todos estes relacionados ao deslocamento de corpo rígido do conjunto. Para que o movimento de corpo rígido não ocorra, condições de vinculação devem ser propriamente inseridas a este sistema. Assim, o equilíbrio estático pode ser estabelecido. Com base nas ilustrações 1A-4A, constata-se que o *quadro triangular rígido* é a estrutura rígida mais simples composta por nós e elementos de barras simples.

Para a obtenção de estruturas planas funcionais compostas por nós e elementos de barra simples, o crescimento natural é obtido a partir do triângulo rígido, acrescentando-se, a cada crescimento, duas barras e um nó conforme ilustrado na Fig. (3.5).

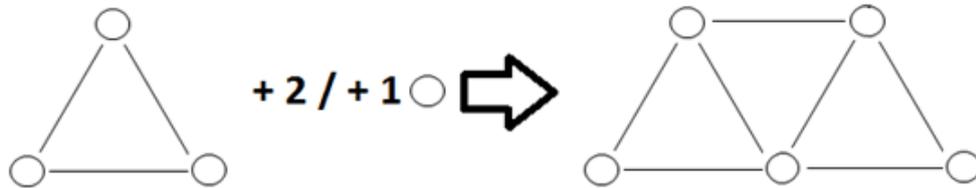


Figura 3.5 Desenvolvimento de estruturas funcionais a partir do triângulo rígido.

Com base na análise apresentada anteriormente, verifica-se que os GDL de uma estrutura composta apenas por barras simples podem ser calculados por meio da seguinte relação:

$$\begin{aligned} GDL &= 2NÓS - BARRAS && \text{se } 2D \\ GDL &= 3NÓS - BARRAS && \text{se } 3D \end{aligned} \quad (3.1)$$

Deve-se enfatizar que a análise efetuada anteriormente pode ser facilmente estendida para o estudo de problemas 3D. Nesse caso, a estrutura rígida mais simples formada por nós e elementos de barra simples é um tetraedro rígido. A determinação estática das estruturas compostas por elementos de barras simples pode ser verificada com base no número de graus de liberdade do sistema. Assim, pode-se definir que:

$$\begin{aligned} GDL &> 3 && \text{HIPOSTÁTICA} \\ GDL &= 3 && \text{ISOSTÁTICA} \\ GDL &< 3 && \text{HIPERESTÁTICA} \end{aligned}$$

O autor propõe que o leitor, com base nas definições acima, classifique os sistemas apresentados na Fig. (3.6) em hipo, iso ou hiperestáticos.

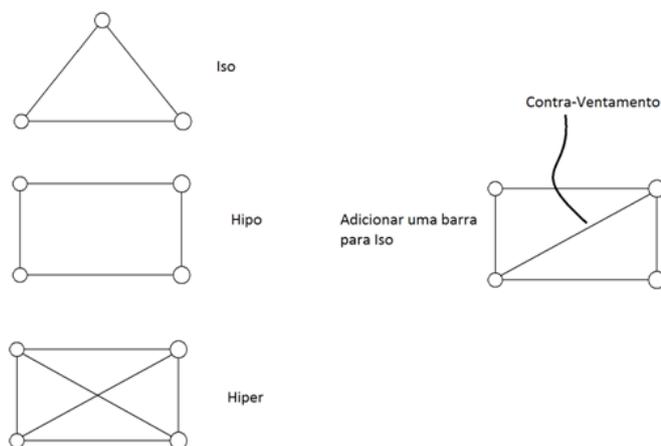


Figura 3.6 Classificação de sistemas segundo sua condição de estaticidade.

Embora a condição estática de uma estrutura de barras simples possa ser determinada com base em seu número de GDL, deve-se atentar para que a disposição das barras no sistema seja também adequada. Na Fig. (3.7) é mostrado um conjunto de barras simples que possui  $GDL=3$ . Porém, devido ao arranjo inadequado de suas barras, existe uma configuração de falha.

Muitas vezes, situações como estas podem ser planejadas para o desenvolvimento de projetos mecânicos. Nesses casos, devem ser utilizados equipamentos mecânicos, como pistão, por exemplo, para o controle dos GDL excedentes.

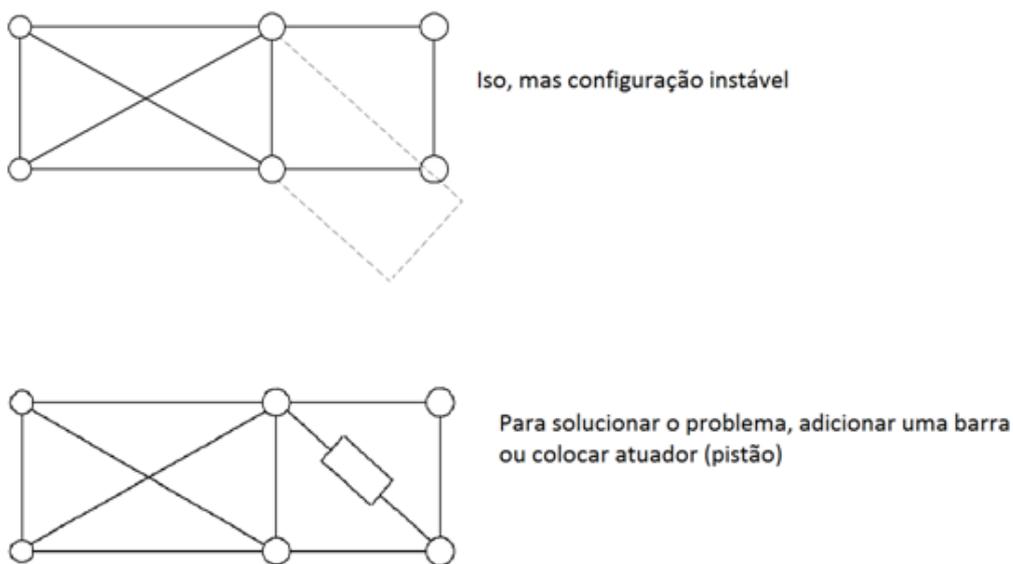


Figura 3.7 Arranjo adequado de barras simples.

### 3.2 – Estruturas de Barra Simples: Treliças

Treliça é um sistema estrutural muito utilizado em engenharia de estruturas para a construção de coberturas, pontes e estruturas de grandes dimensões. As treliças são compostas por elementos lineares, denominados barras simples, ligados entre si por articulações que se consideram perfeitas, chamadas nós. Nas treliças, as cargas externas são pontuais e atuam somente sobre os nós, ficando, assim, as barras sujeitas apenas à esforços normais de tração ou compressão. As treliças são ditas planas quando todas as suas barras encontram-se num mesmo plano. Treliças espaciais são aquelas onde as barras estão posicionadas no espaço (coberturas de postos de combustíveis, estacionamentos e ginásios). Na Fig. (3.8) ilustra-se uma treliça plana típica.

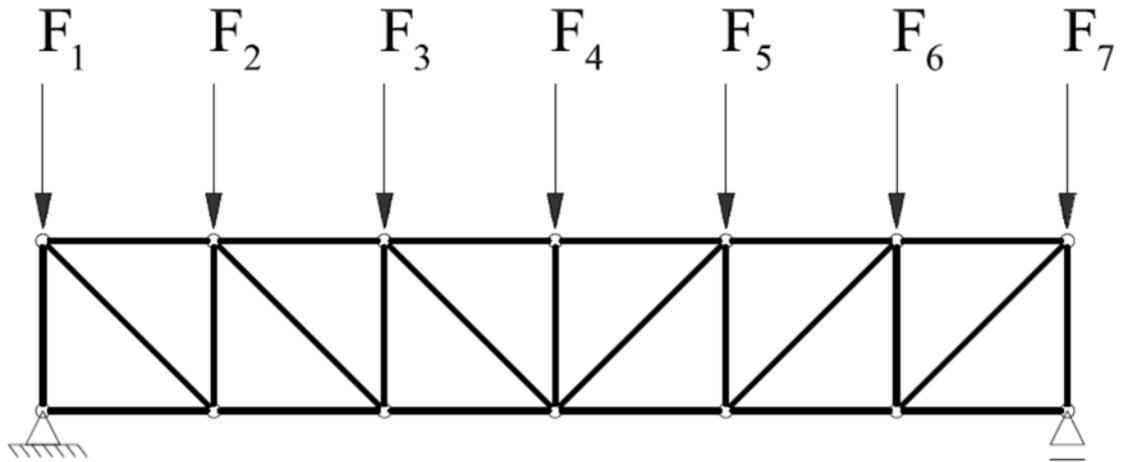


Figura 3.8 Treliça plana típica.

Nas treliças, apenas esforços normais estão presentes. Isso ocorre pelo fato das barras estarem ligadas aos nós, os quais são considerados como articulações perfeitas. Para demonstrar que nessa estrutura apenas esforços axiais estão presentes, pode-se considerar a barra mostrada na Fig.(3.9):

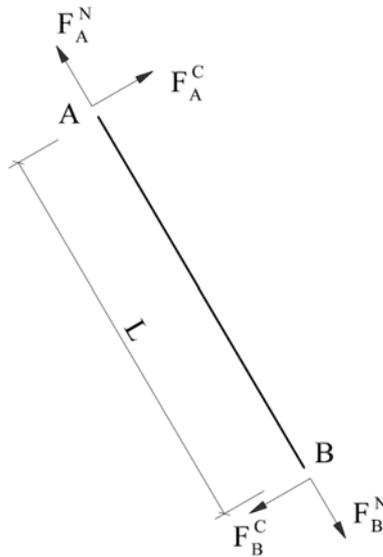


Figura 3.9 Elemento de barra simples.

Considerando que as extremidades da barra são perfeitamente rotuladas, pode-se escrever que:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_A^C \cdot L = 0 \therefore F_A^C = 0 \quad (3.2)$$

Conseqüentemente,  $F_B^C = 0$  e o equilíbrio é efetuado somente por meio das forças axiais.

Para que a hipótese de nós perfeitamente rotulados seja atendida, a ligação entre as barras deve ser projetada utilizando-se pinos lisos ou parafusos. A ligação pode também ser construída por meio de chapas soldadas, conforme indicado na Fig. (3.10), desde que todas as barras concorram para um único ponto.

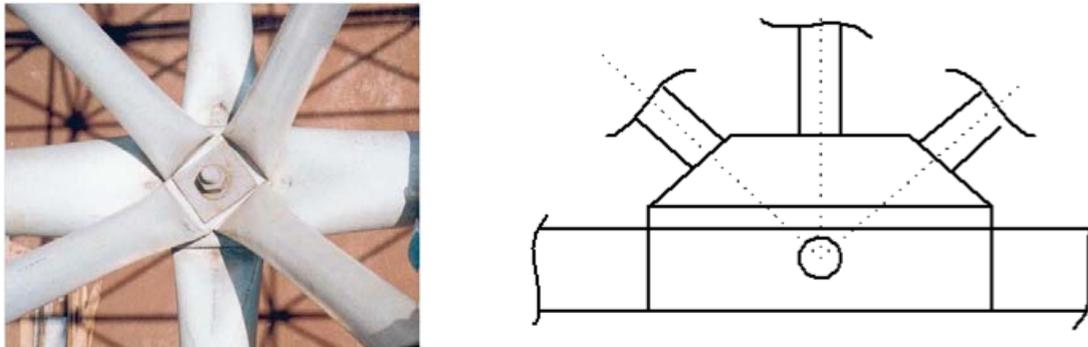


Figura 3.10 Ligação de barras de treliça. Ligação parafusada e por meio de uma chapa de ligação.

Na análise estrutural de treliças, o peso próprio é levado em consideração aplicando-se metade do peso de cada barra em suas extremidades. As estruturas treliçadas são uma alternativa interessante e inteligente para o projeto de estruturas de grandes dimensões. Nas treliças, os esforços são transmitidos por meio de forças axiais, o que pode gerar barras de seções transversais diferentes, de forma a melhor aproveitar sua capacidade portante. Assim, nas treliças o material é melhor utilizado e as dimensões das seções transversais das barras podem ser consideravelmente reduzidas. As treliças são uma interessante alternativa às estruturas fletidas, na qual grande parte do material estrutural é utilizada sob níveis de sollicitação bem abaixo de sua capacidade portante. Nas Fig. (3.11), Fig. (3.12), Fig. (3.13) e Fig. (3.14) ilustram-se aplicações grandiosas de elementos de barra simples em engenharia de estruturas.

Serão agora discutidos alguns processos analíticos para a determinação dos esforços normais em treliças planas isostáticas. Deve-se informar que para a análise de problemas envolvendo treliças hiperestáticas, utilizam-se métodos que empregam condições de compatibilidade. Nesses métodos, a estrutura hiperestática é transformada em uma estrutura isostática equivalente, sendo resolvida tantas vezes quantos forem os GDL excedentes do caso isostático.



Figura 3.11 Cobertura de um galpão.



Figura 3.12 Tabuleiro de uma ponte.



Figura 3.13 Cobertura de um aeroporto.



Figura 3.14 Torre Eiffel.

### 3.3 – Método dos Nós para Treliças Planas

O método dos nós é um procedimento utilizado para a determinação da intensidade dos esforços normais em estruturas compostas por elementos de barras simples. Segundo esse método, o esforço normal em cada uma das barras da treliça é determinado por meio de um balanço de forças, o qual deve ser efetuado em cada nó da estrutura. Deve-se enfatizar que, se cada nó da estrutura está em equilíbrio, conseqüentemente toda a estrutura também o estará. Este método baseia-se na aplicação do equilíbrio de ponto material, o qual é verificado em cada nó da estrutura.

A metodologia para a utilização deste método pode ser resumida em três etapas simples:

1. Escolher um nó da estrutura para efetuar o equilíbrio de forças. Sugere-se iniciar o processo por um nó que possua, no máximo, dois esforços normais incógnitos (duas barras conectadas ao nó, por exemplo).

2. Arbitrar o sentido do esforço normal atuante nas barras, separando o nó da estrutura, conforme apresentado na Fig. (3.15). Sugere-se que todos os esforços normais sejam arbitrados como trativos, como mostrado na Fig. (3.15).
3. Utilizar as equações apresentadas para o equilíbrio do ponto material e efetuar o equilíbrio nodal.

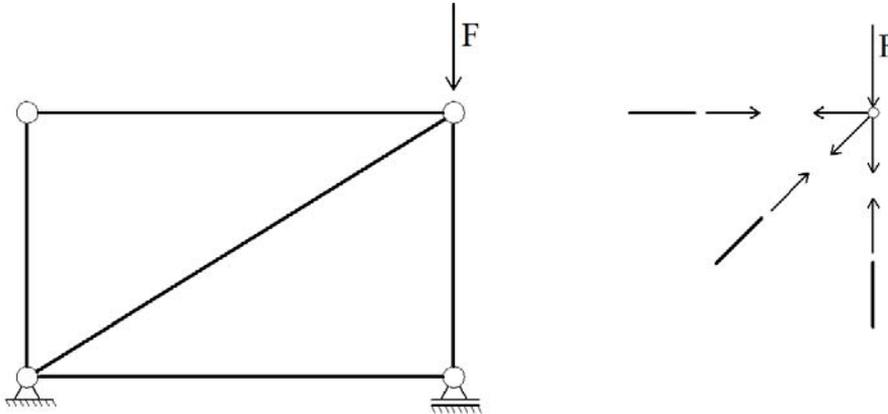


Figura 3.15 Separação entre o nó e a estrutura.

### 3.3.1 – Exemplo 1

Determine os esforços normais atuantes na treliça plana mostrada na Fig. (3.16) utilizando o método dos nós.

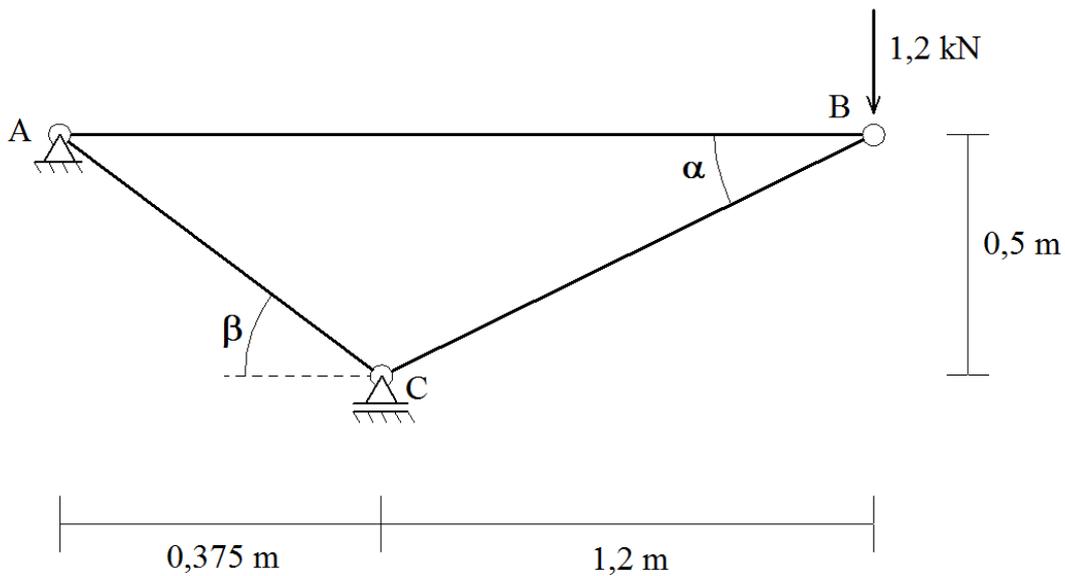


Figura 3.16 Treliça plana a ser analisada.

Com base na geometria da estrutura, pode-se determinar os valores dos senos e cossenos dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ . Utilizando relações trigonométricas básicas, obtém-se:

$$\text{sen}(\alpha) = 0,3846 \quad \text{cos}(\alpha) = 0,9231 \quad \text{sen}(\beta) = 0,8 \quad \text{cos}(\beta) = 0,6$$

Para aplicar o método dos nós deve-se escolher um nó onde existam no máximo duas incógnitas. As incógnitas, neste problema, referem-se ao número de forças desconhecidas atuantes sobre o nó. Assim, pode-se escolher o nó B para iniciar os procedimentos de equilíbrio. Isolando este nó do restante da estrutura, como apresentado na Fig. (3.17), obtém-se:

*Equilíbrio nó B:*

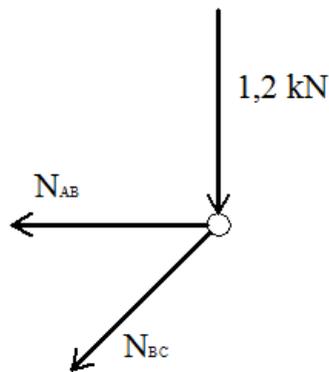


Figura 3.17 Equilíbrio nó B.

Aplicando as equações de equilíbrio de ponto material tem-se:

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 & \quad -N_{AB} - N_{BC} \cos(\alpha) = 0 \\ \sum F_Y = 0 & \quad -N_{BC} \text{sen}(\alpha) - 1,2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{BC} = -3,1201 \text{ kN (compressão)} \end{aligned}$$

Com base no valor de  $N_{BC}$  determinado anteriormente, pode-se também definir o valor de  $N_{AB}$ . Assim:

$$N_{AB} = 3,1201 \cdot 0,9231 \Rightarrow N_{AB} = 2,8802 \text{ kN (tração)}$$

Pode-se agora repetir este procedimento considerando o equilíbrio do nó C

*Equilíbrio nó C:*

Isolando o nó C da estrutura, como indicado na Fig. (3.18), e aplicando as equações de equilíbrio de ponto material obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 & \quad -N_{AC} \cos(\beta) - 3,1201 \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N_{AC} = -4,80 \text{ kN (compressão)} \\ \sum F_Y = 0 & \quad R_C + N_{AC} \text{sen}(\beta) - 3,1201 \text{sen}(\alpha) = 0 \Rightarrow \\ & \quad R_C - 4,80 \cdot 0,8 - 3,1201 \cdot 0,3846 \Rightarrow \quad R_C = 5,04 \text{ kN} \end{aligned}$$

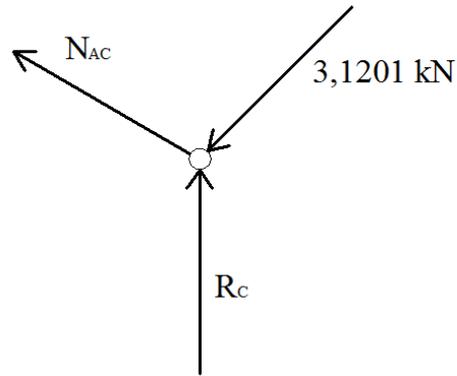


Figura 3.18 Equilíbrio nó C.

Considerando agora o nó A, tem-se:

*Equilíbrio do nó A:*

Isolando o nó A do restante da estrutura, como ilustrado na Fig. (3.19), observa-se que atuam sobre este nó as forças  $A_x$  e  $A_y$ , as quais representam as reações do apoio A:

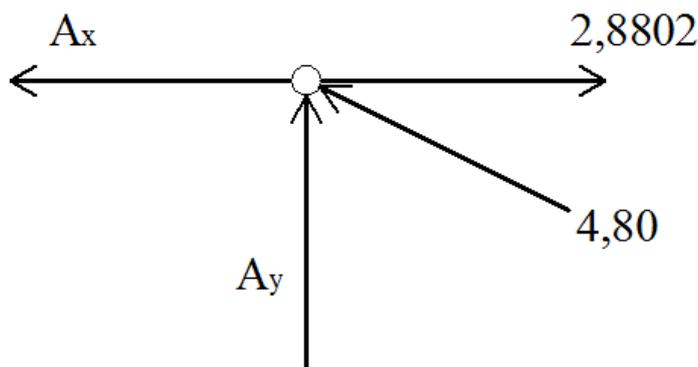


Figura 3.19 Equilíbrio nó A.

Aplicando as equações de equilíbrio do ponto material, obtêm-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad -A_x + 2,8802 - 4,80 \cos(\beta) = 0 \Rightarrow A_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad A_y + 4,80 \sin(\beta) = 0 \Rightarrow A_y = -3,84 \text{ kN}\end{aligned}$$

Assim, têm-se definidos todos os valores dos esforços normais atuantes nos elementos de barra simples. Como verificação ao leitor, sugere-se que as reações  $A_x$  e  $A_y$  sejam também calculadas considerando o equilíbrio de corpo rígido e os valores encontrados devem ser comparados aos obtidos pelo método dos nós.

## 3.3.2 – Exemplo 2

Para a treliça mostrada na Fig. (3.20), determine os valores dos esforços normais em suas barras utilizando o método dos nós.

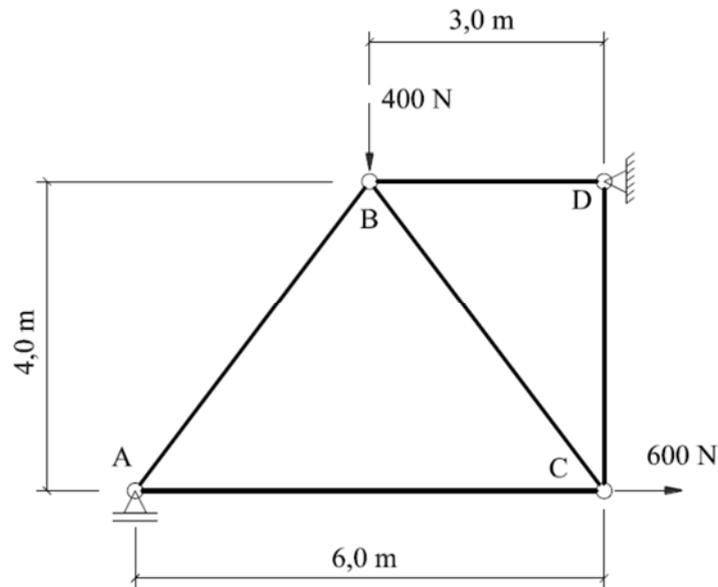


Figura 3.20 Treliça plana a ser analisada.

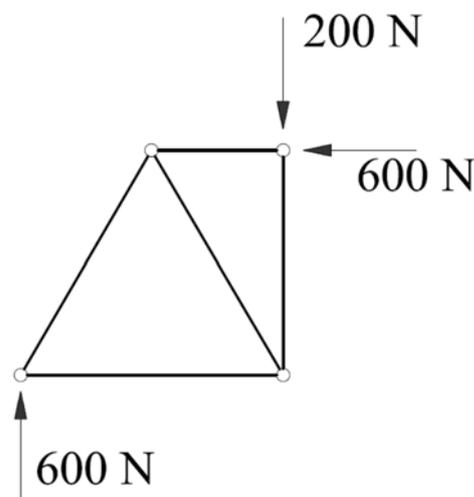


Figura 3.21 Forças reativas.

Para a resolução deste problema, deve-se atentar para o fato de que todos os nós da estrutura possuem mais que duas incógnitas. Portanto, antes do processo de equilíbrio de cada um dos nós ser iniciado, devem ser determinadas as reações de apoio

da estrutura utilizando as equações de equilíbrio de corpo rígido. Efetuando este procedimento, obtêm-se os valores das forças reativas mostradas na Fig. (3.21).

Com base nos valores das reações de apoio apresentados na Fig. (3.21), o equilíbrio nó a nó pode ser efetuado (como apresentado no exemplo 1). Seguindo este procedimento obtêm-se os seguintes valores para os esforços normais, o qual fica como exercício para o leitor.

$$N_{AB} = 750 \quad (\text{compressão})$$

$$N_{BC} = 250 \quad (\text{tração})$$

$$N_{AC} = 450 \quad (\text{tração})$$

$$N_{BD} = 600 \quad (\text{compressão})$$

$$N_{CD} = 200 \quad (\text{compressão})$$

### 3.4 – Método das Seções para Treliças Planas

O método das seções é outro método muito utilizado para a determinação de esforços normais em treliças. Este método baseia-se no equilíbrio de corpo rígido. Assim, a metodologia de análise do método consiste em efetuar cortes (secções) na estrutura e, em seguida, aplicar o equilíbrio de corpo rígido de cada porção de corpo seccionada. A vantagem deste método em relação ao método dos nós refere-se à facilidade de determinação dos esforços normais em barras específicas, especialmente em treliças com um grande número de barras. Portanto, por meio do método das seções, os esforços normais podem ser determinados sem a necessidade de equilibrar todos os nós da estrutura.

A metodologia de análise do método pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Efetuar uma secção imaginária na estrutura. Este corte (secção) deve passar pelas barras cujos esforços normais o analista tenha interesse.
2. Construir o diagrama de corpo livre das partes seccionadas.
3. Escolher a região de seccionamento de forma que, no máximo, três variáveis (incógnitas) estejam presentes. Isto se deve ao fato de existirem apenas três equações de equilíbrio no plano, o que permite a determinação de apenas três incógnitas.
4. Aplicar as equações de equilíbrio de corpo rígido e obter os esforços normais.

Com o objetivo de aplicar os procedimentos de análise do método das seções, será apresentado um exemplo onde poderão ser observadas algumas vantagens desse método em relação ao método dos nós.

### 3.4.1 – Exemplo 3

Determine os esforços normais nas barras FC, BC e FE da treliça plana mostrada na Fig.(3.22) utilizando o método das seções:

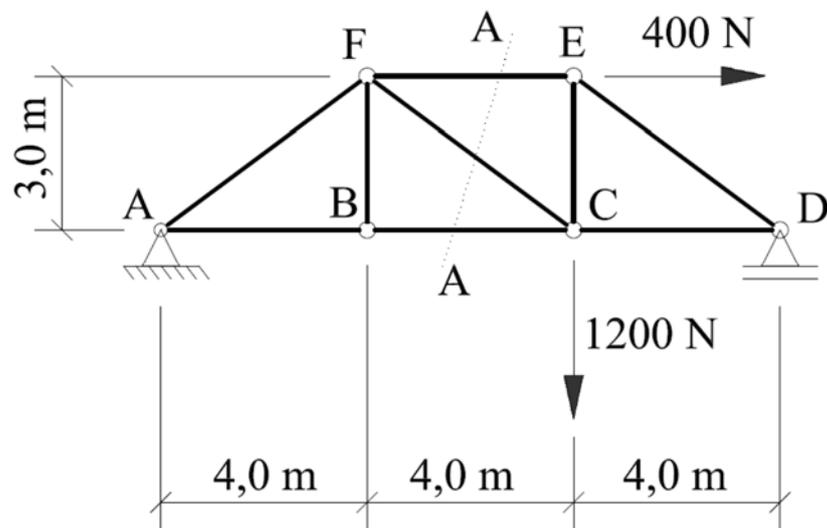


Figura 3.22 Treliça plana a ser analisada.

Como neste exemplo o interesse é a determinação dos esforços normais de apenas três barras, o método das seções torna-se mais adequado (e de aplicação mais rápida) que o método dos nós. Por meio do último método, o equilíbrio de pelo menos três nós deverá ser efetuado antes da obtenção dos esforços desejados. Antes de proceder à aplicação da metodologia proposta pelo método das seções, devem ser determinadas as reações de apoio da estrutura. Para tal fim, deve-se construir o diagrama de corpo livre do sistema, o qual é mostrado na Fig. (3.23).

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido no plano obtêm-se:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1200 \cdot 8 - 400 \cdot 3 + D_y \cdot 12 = 0 \Rightarrow D_y = 900N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 1200 + 900 = 0 \Rightarrow A_y = 300N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -A_x + 400 = 0 \Rightarrow A_x = 400N$$

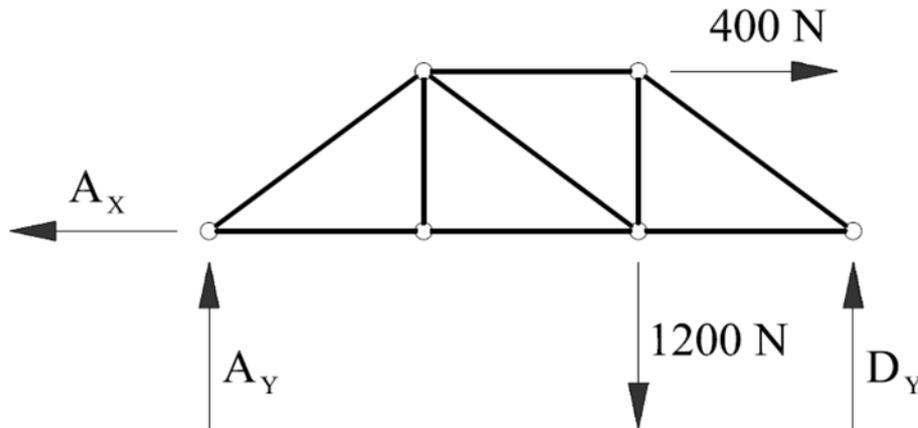


Figura 3.23 Diagrama de corpo livre.

Como o objetivo do exercício é a determinação dos esforços normais apenas nas barras FC, BC e FE, deve-se proceder à realização de um corte passando por estas três barras. Deve-se também salientar que este corte irá gerar três incógnitas, justamente os esforços normais das barras desejadas. Portanto, as três equações de equilíbrio de corpo rígido poderão ser aplicadas de forma a determiná-las. O corte AA para o seccionamento da treliça está representado na Fig. (3.22). Isolando a porção esquerda da treliça seccionada, tem-se o sistema mostrado na Fig. (3.24).

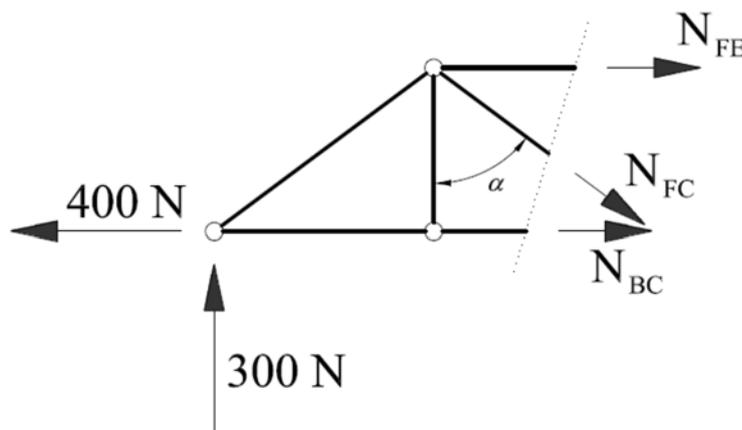


Figura 3.24 Porção direita do corte.

A partir de relações trigonométricas simples, podem ser determinados os seno e cosseno do ângulo  $\alpha$  mostrado na Fig. (3.24). Assim:

$$\text{sen}(\alpha) = 0,8 \quad \text{cos}(\alpha) = 0,6$$

Efetuando o equilíbrio de corpo rígido do sistema mostrado na Fig. (3.24) determinam-se aos esforços normais FC, BC e FE. Assim:

$$\begin{aligned}\sum M_F = 0 &\Rightarrow -400 \cdot 3 - 300 \cdot 4 + N_{BC} \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_{BC} = 800N \text{ (tração)} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow 300 - N_{FC} \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N_{FC} = 500N \text{ (tração)} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -400 + N_{BC} + N_{FE} + N_{FC} \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \\ &-400 + 800 + N_{FE} + 500 \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow N_{FE} = -800N \text{ (compressão)}\end{aligned}$$

### 3.5 – Treliças Tridimensionais

Treliças tridimensionais são largamente utilizadas no cotidiano da engenharia de estruturas. Como exemplo, basta observar as Fig. (3.13) e Fig. (3.14) apresentadas anteriormente neste capítulo. As treliças tridimensionais, também denominadas treliças espaciais, são um conjunto de barras simples conectadas em suas extremidades perfeitamente rotuladas de forma a compor uma estrutura tridimensional estável solicitada apenas por esforços normais.

Para a determinação dos esforços normais em cada uma das barras deste tipo de estrutura, pode-se utilizar o método dos nós, aplicado a problemas tridimensionais. Por meio deste método, os esforços normais atuantes nas barras são decompostos utilizando-se os versores unitários que definem a geometria da barra. Isso é feito uma vez que o esforço normal é transmitido ao longo do eixo da barra. Assim, com base na geometria das barras, têm-se definidas as componentes dos esforços ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Esses versores são obtidos subtraindo-se as coordenadas cartesianas dos pontos final e inicial que definem as barras simples de interesse. Em seguida, divide-se as componentes do versor por sua norma, de forma a torná-lo unitário. Se o esforço normal atuante for de tração, suas componentes são obtidas multiplicando-se a intensidade do esforço normal pelas componentes desse versor. Caso o esforço normal atuante seja de compressão, as componentes do esforço normal são obtidas multiplicando-se a intensidade do esforço normal pelo valor negativo das componentes do versor.

Depois disso, o equilíbrio nodal deve ser efetuado, considerando as condições de equilíbrio de ponto material. Para a análise de problemas tridimensionais, o equilíbrio do nó deve ser efetuado por meio da somatória de forças ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , somatórias estas que devem ser nulas.

O método das seções pode também ser aplicado à análise de treliças tridimensionais. Nesse caso, efetua-se um corte ao longo das barras cujos esforços normais desejam ser determinados. Como o problema é tridimensional, o referido corte é composto por um plano e não mais por uma linha como no caso bidimensional. A partir das porções separadas da estrutura, efetua-se o equilíbrio de corpo rígido considerando um corpo tridimensional, Eq.(2.13). Nessas notas de aula, a análise de treliças tridimensionais por meio do método das seções não será considerada.

Para ilustrar a aplicação do método dos nós na análise de treliças tridimensionais, serão apresentados dois exemplos na sequência deste texto.

### 3.5.1 – Exemplo 4

Determine os esforços normais atuantes nas barras simples da treliça tridimensional mostrada na Fig. (3.25) e informe se estes esforços são trativos ou compressivos. Responda também porque é possível resolver esse problema equilibrando somente o nó D.

A estrutura mostrada na Fig. (3.25) é uma treliça tridimensional composta por três barras. Assim, a solução deste exemplo pode ser efetuada equilibrando apenas o nó D, uma vez que sobre este nó existem somente três incógnitas, as quais referem-se aos esforços normais nas barras que concorrem ao nó D.

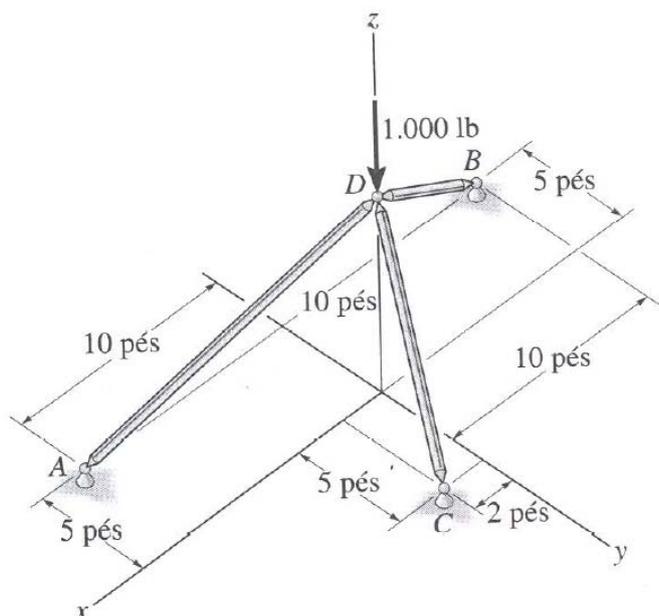


Figura 3.25 Treliça tridimensional a ser analisada.

*Equilíbrio do nó D:*

Inicialmente, devem ser determinados os versores unitários que definem a geometria das barras DB, DA e DC, as quais concorrem ao nó D. Esses versores são obtidos subtraindo-se as coordenadas cartesianas dos pontos final (A, B e C) e inicial (D) que definem as barras simples de interesse. Em seguida, divide-se as componentes do versor por sua norma, de forma a torna-lo unitário. Por meio de uma simples inspeção na geometria da estrutura, e com base no sistema de coordenadas adotado, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}\overline{L}_{DB} &= (-10i - 5j - 10k) \frac{1}{15} \\ \overline{L}_{DA} &= (10i - 5j - 10k) \frac{1}{15} \\ \overline{L}_{DC} &= (2i + 5j - 10k) \frac{1}{\sqrt{129}}\end{aligned}$$

Como nas treliças estão presentes apenas esforços normais, sabe-se que as componentes destes esforços atuam na direção paralela ao eixo das barras simples. Assim, as componentes destes esforços podem ser escritas com base nos versores unitários determinados anteriormente. Portanto, o conjunto de esforços normais e carregamento que atua sobre o nó D pode ser assim escrito, com base em suas componentes:

$$\begin{aligned}\vec{N}_{DB} &= (-10i - 5j - 10k) \frac{N_{DB}}{15} \\ \vec{N}_{DA} &= (10i - 5j - 10k) \frac{N_{DA}}{15} \\ \vec{N}_{DC} &= (2i + 5j - 10k) \frac{N_{DC}}{\sqrt{129}} \\ \vec{F} &= 0i + 0j - 1000k\end{aligned}$$

A partir dos valores definidos para as componentes dos esforços e da força, apresentados acima, pode-se efetuar o equilíbrio do nó por meio das seguintes condições:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

Para o caso em estudo pode-se escrever que:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \left\{ -\frac{10}{15}N_{DB} + \frac{10}{15}N_{DA} + \frac{2}{\sqrt{129}}N_{DC} = 0 \right. \\ \sum F_y = 0 & \left\{ -\frac{5}{15}N_{DB} - \frac{5}{15}N_{DA} + \frac{5}{\sqrt{129}}N_{DC} = 0 \right. \\ \sum F_z = 0 & \left\{ -\frac{10}{15}N_{DB} - \frac{10}{15}N_{DA} - \frac{10}{\sqrt{129}}N_{DC} - 1000 = 0 \right. \end{cases}$$

Reorganizando as equações acima de uma maneira matricial, a qual é mais facilmente resolvida com o auxílio de calculadoras, pode-se reescrever estas equações como:

$$\begin{bmatrix} -\frac{10}{15} & \frac{10}{15} & \frac{2}{\sqrt{129}} \\ -\frac{5}{15} & -\frac{5}{15} & \frac{5}{\sqrt{129}} \\ -\frac{10}{15} & -\frac{10}{15} & -\frac{10}{\sqrt{129}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{DB} \\ N_{DA} \\ N_{DC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema matricial anterior obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -0,667 & 0,667 & 0,176 \\ -0,333 & -0,333 & 0,440 \\ -0,667 & -0,667 & -0,880 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{DB} \\ N_{DA} \\ N_{DC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix} \therefore \begin{Bmatrix} N_{DB} \\ N_{DA} \\ N_{DC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -450 \\ -300 \\ -567,75 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

Devido ao sinal negativo encontrado no valor dos esforços normais, conclui-se que todos os esforços solicitantes encontrados são compressivos. Esse resultado era esperado, uma vez que, intuitivamente, percebe-se que a força aplicada comprime as barras da treliça em seu nó D.

### 3.5.2 – Exemplo 5

Determine os esforços normais atuantes nas barras da treliça tridimensional mostrada na Fig. (3.26). Considere que todos os apoios da treliça são do tipo móvel.

Antes que o processo de equilíbrio nodal seja iniciado, é conveniente que sejam determinados os valores das reações dos apoios localizados sobre os nós A, B e C. Para tal fim, pode-se fazer o equilíbrio de corpo rígido na condição de análise tridimensional. Assim:

$$\sum M_{AC} = 0 \Rightarrow 8 \cdot 2 - V_B \cdot 4,5 = 0 \quad \Rightarrow V_B = 0i \ 0j \ 3,556k$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow V_A \cdot 6 + 3,556 \cdot 3 - 8 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow V_A = 0i \ 0j \ 2,222k$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 3,556 + 2,222 + V_C - 8 = 0 \quad \Rightarrow V_C = 0i \ 0j \ 2,222k$$

A partir das reações de apoio calculadas acima, pode-se efetuar o equilíbrio nodal.

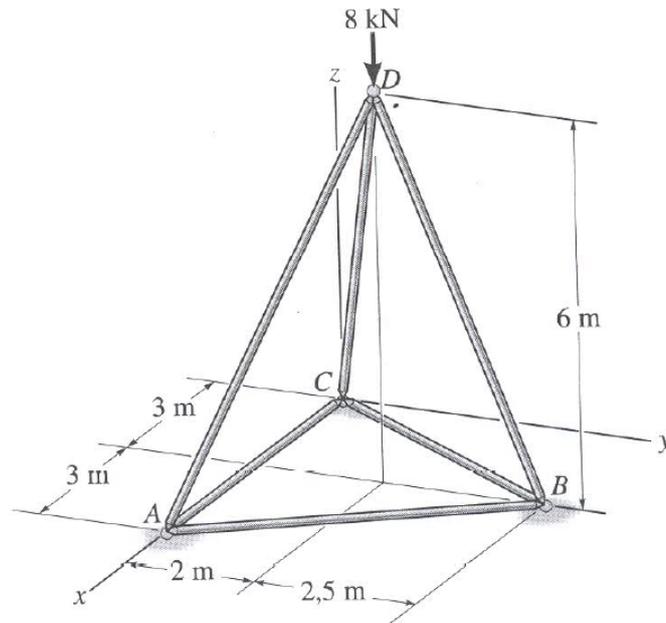


Figura 3.26 Treliça tridimensional a ser analisada.

#### *Equilíbrio do nó D:*

O primeiro passo a ser efetuado para o equilíbrio desse nó refere-se à determinação dos versores unitários das barras que concorrem ao nó D. Com base no sistema de coordenadas adotado, e nas dimensões dos elementos de barra simples, tem-se:

$$\overline{L}_{DB} = (0i \ 2,5j \ -6k) \frac{1}{\sqrt{42,25}}$$

$$\overline{L}_{DC} = (-3i \ -2j \ -6k) \frac{1}{7}$$

$$\overline{L}_{DA} = (3i \ -2j \ -6k) \frac{1}{7}$$

Conseqüentemente, as componentes dos esforços normais nas barras que concorrem ao nó D e da força aplicada podem ser expressas como:

$$\vec{N}_{DB} = (0i \ 2,5j \ -6k) \frac{N_{DB}}{\sqrt{42,25}}$$

$$\vec{N}_{DC} = (-3i \ -2j \ -6k) \frac{N_{DC}}{7}$$

$$\vec{N}_{DA} = (3i \ -2j \ -6k) \frac{N_{DA}}{7}$$

$$\vec{F} = (0i \ 0j \ -8k)$$

Aplicando as condições de equilíbrio de um ponto material tridimensional, expressas por  $\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$ , e considerando as componentes da força aplicada e dos esforços normais tem-se:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \begin{cases} 0N_{DB} - \frac{3}{7}N_{DC} + \frac{3}{7}N_{DA} = 0 \\ \frac{2,5}{\sqrt{42,25}}N_{DB} - \frac{2}{7}N_{DC} - \frac{2}{7}N_{DA} = 0 \\ -\frac{6}{\sqrt{42,25}}N_{DB} - \frac{6}{7}N_{DC} - \frac{6}{7}N_{DA} - 8 = 0 \end{cases}$$

Reorganizando as três equações acima em um sistema matricial, pode-se escrever que:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2,5}{\sqrt{42,25}} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{\sqrt{42,25}} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{DB} \\ N_{DC} \\ N_{DA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema, composto por três equações e três incógnitas, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0,429 & 0,429 \\ 0,385 & -0,286 & -0,286 \\ -0,923 & -0,857 & -0,857 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{DB} \\ N_{DC} \\ N_{DA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_{DB} \\ N_{DC} \\ N_{DA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,852 \\ -2,593 \\ -2,593 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Como os valores encontrados para os esforços normais são todos negativos, conclui-se que estes são esforços compressivos.

*Equilíbrio do nó A:*

Para a realização do equilíbrio do nó A, os mesmos procedimentos empregados para o equilíbrio do nó D devem ser repetidos. Assim, a determinação dos versores unitários das barras que concorrem ao nó A conduz a:

$$\overline{L}_{AC} = (-6i \ 0j \ 0k) \frac{1}{6}$$

$$\overline{L}_{AB} = (-3i \ 4,5j \ 0k) \frac{1}{\sqrt{29,25}}$$

$$\overline{L}_{AD} = (-3i \ 2j \ 6k) \frac{1}{7}$$

Conseqüentemente, as componentes dos esforços normais das barras que concorrem ao nó A e da reação de apoio no ponto A podem ser escritas como:

$$\vec{N}_{AC} = (-6i \ 0j \ 0k) \frac{N_{AC}}{6}$$

$$\vec{N}_{AB} = (-3i \ 4,5j \ 0k) \frac{N_{AB}}{\sqrt{29,25}}$$

$$\vec{N}_{AD} = (-3i \ 2j \ 6k) \frac{N_{AD}}{7}$$

$$V_A = (0i \ 0j \ 2,222k)$$

Assim, o equilíbrio do nó A conduz às seguintes equações:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \left\{ \begin{array}{l} -N_{AC} - \frac{3N_{AB}}{\sqrt{29,25}} - \frac{3N_{AD}}{7} = 0 \\ 0N_{AC} + \frac{4,5N_{AB}}{\sqrt{29,25}} + \frac{2N_{AD}}{7} = 0 \\ 0N_{AC} + 0N_{AB} + \frac{6N_{AD}}{7} + 2,222 = 0 \end{array} \right. \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

Reorganizando o sistema acima composto por três equações e três incógnitas em uma forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{\sqrt{29,25}} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{4,5}{\sqrt{29,25}} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{AC} \\ N_{AB} \\ N_{AD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,222 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema matricial determinam-se os esforços normais nas barras, os quais estão apresentados a seguir:

$$\begin{bmatrix} -1 & -0,555 & -0,429 \\ 0 & 0,832 & 0,286 \\ 0 & 0 & 0,857 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{AC} \\ N_{AB} \\ N_{AD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,222 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_{AC} \\ N_{AB} \\ N_{AD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,617 \\ 0,891 \\ -2,593 \end{Bmatrix} kN$$

Deve-se notar que os esforços  $N_{AC}$  e  $N_{AB}$  são trativos, enquanto o esforço na barra AD,  $N_{AD}$ , é compressivo. Além disso, deve-se destacar que o valor encontrado para o esforço  $N_{AD}$  por meio equilíbrio do nó A é o mesmo encontrado no equilíbrio do nó D. Essa verificação é importante e reforça a correção dos resultados obtidos.

Para finalizar o exercício, resta ainda efetuar o equilíbrio do nó B.

*Equilíbrio do nó B:*

Seguindo os mesmos procedimentos efetuados anteriormente para o equilíbrio dos nós D e A, podem ser agora determinados os esforços normais nas barras que concorrem ao nó B. Para isso, deve-se inicialmente calcular as componentes dos versores unitários que definem a geometria das barras que concorrem ao nó B. Com base no sistema de coordenadas apresentado na Fig. (3.26) e na geometria da estrutura pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \overline{L_{BA}} &= (3i - 4,5j \ 0k) \frac{1}{\sqrt{29,25}} \\ \overline{L_{BC}} &= (-3i - 4,5j \ 0k) \frac{1}{\sqrt{29,25}} \\ \overline{L_{BD}} &= (0i - 2,5j \ 6k) \frac{1}{\sqrt{42,25}} \end{aligned}$$

Portanto, utilizando esses versores unitários, definem-se as componentes dos esforços normais nas barras que concorrem ao nó B. Essas componentes e as componentes da força reativa neste nó podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \vec{N}_{BA} &= (3i - 4,5j \ 0k) \frac{N_{BA}}{\sqrt{29,25}} \\ \vec{N}_{BC} &= (-3i - 4,5j \ 0k) \frac{N_{BC}}{\sqrt{29,25}} \\ \vec{N}_{BD} &= (0i - 2,5j \ 6k) \frac{N_{BD}}{\sqrt{42,25}} \\ V_B &= (0i \ 0j \ 3,556k) \end{aligned}$$

Com base nas componentes da força e dos esforços determinadas anteriormente, deve-se proceder à realização do equilíbrio do ponto material do nó B. Efetuando a

somatória das forças ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  e igualando-as a zero obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{3N_{BA}}{\sqrt{29,25}} - \frac{3N_{BC}}{\sqrt{29,25}} + 0N_{BD} = 0 \\ \frac{4,5N_{BA}}{\sqrt{29,25}} - \frac{4,5N_{BC}}{\sqrt{29,25}} - \frac{2,5N_{BD}}{\sqrt{42,25}} = 0 \\ 0N_{BA} + 0N_{BC} + \frac{6N_{BD}}{\sqrt{42,25}} + 3,556 = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Reescrevendo as três equações acima em um sistema matricial, de forma a torná-lo mais facilmente solvível, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29,25}} & -\frac{3}{\sqrt{29,25}} & 0 \\ \frac{4,5}{\sqrt{29,25}} & -\frac{4,5}{\sqrt{29,25}} & -\frac{2,5}{\sqrt{42,25}} \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{42,25}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{BA} \\ N_{BC} \\ N_{BD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,556 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema matricial mostrado acima, determinam-se os esforços normais atuantes ao longo das barras que concorrem ao nó B. Assim:

$$\begin{bmatrix} 0,555 & -0,555 & 0 \\ -0,832 & -0,832 & -0,385 \\ 0 & 0 & 0,923 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{BA} \\ N_{BC} \\ N_{BD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,556 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_{BA} \\ N_{BC} \\ N_{BD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,891 \\ 0,891 \\ -3,853 \end{Bmatrix} kN$$

Com base no resultado obtido, verifica-se que os esforços  $N_{BA}$  e  $N_{BC}$  são trativos uma vez que estes apresentaram valores positivos. Já o esforço  $N_{BD}$ , este é de compressão devido a seu sinal negativo. Além disso, deve-se destacar que o valor determinado para o esforço  $N_{BD}$ , por meio do equilíbrio do nó B, é igual ao valor encontrado efetuando-se o equilíbrio do nó D. O mesmo comentário deve ser feito para o esforço  $N_{AB}$ , o qual apresentou valores iguais para os equilíbrios dos nós B e A. Essa verificação simples reforça o fato de que os cálculos efetuados neste exercício estão corretos.

Sugere-se que o leitor faça verificações semelhantes durante a resolução dos exercícios propostos. Este procedimento simples permite a determinação de erros durante a resolução dos exercícios.

## 4. – Elemento de Barra Geral

### 4.1 – Introdução

Os elementos de barra geral são elementos estruturais largamente empregados na análise e na modelagem de problemas da engenharia de estruturas. Estes elementos são definidos, do ponto de vista estático, como elementos estruturais que transmitem (ou resistem) a esforços normais e transversais ao seu eixo geométrico. Assim, estes elementos transmitem esforços normal e cortantes, momentos fletores, além do momento torçor ou torque. Diferentemente dos elementos de barra simples, nas estruturas compostas por elementos de barra geral, as ações externas podem ser aplicadas transversalmente ao eixo da barra e/ou ao longo de seu comprimento. Além disso, ações concentradas e/ou distribuídas podem ser também consideradas.

No contexto cinemático, esse elemento estrutural apresenta seis graus de liberdade, sendo três translações (ao longo dos eixos  $x$  ( $u$ ),  $y$  ( $v$ ) e  $z$  ( $w$ )) e três rotações (nos planos  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ ), conforme apresentado na Fig. (4.1).

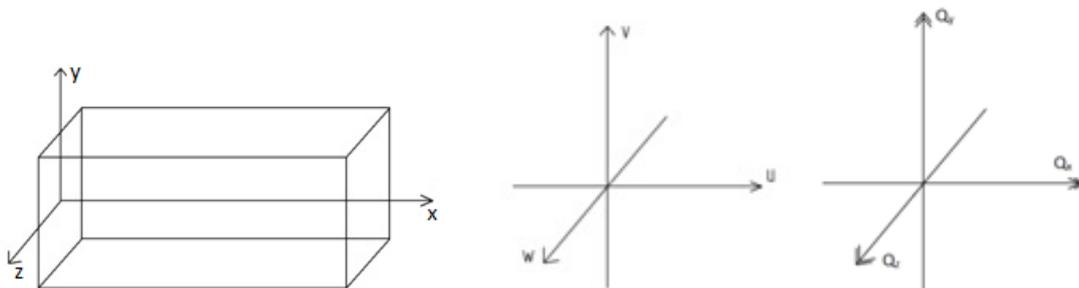


Figura 4.1 Graus de liberdade de um elemento de barra geral.

Para melhor compreender o comportamento mecânico e a atuação dos esforços transmitidos pelo elemento de barra geral, deve-se considerar a estrutura mostrada na Fig. (4.2), a qual está em equilíbrio estático sob a ação de um dado carregamento externo. Seccionando este elemento em um ponto ao longo de seu comprimento,

surgirão um conjunto de forças e momentos auto equilibrado que atuarão no sentido de restaurar a condição de equilíbrio inicialmente observada.

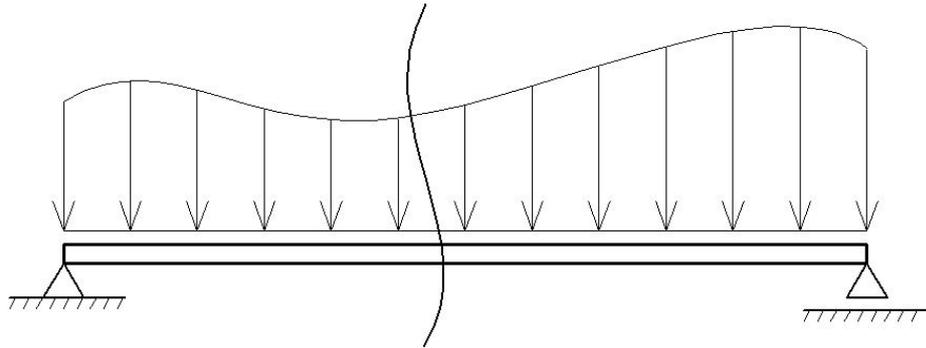


Figura 4.2 Elemento de barra geral em equilíbrio sob a ação de carregamento externo.

No elemento de barra geral poderão surgir os seguintes esforços solicitantes:

1. Forças:

- Direção normal  $x$ , esforço normal ( $N$ ).
- Direção transversal  $y$ , esforço cortante ou cisalhante ( $V_y$ ).
- Direção transversal  $z$ , esforço cortante ou cisalhante ( $V_z$ ).

2. Momentos:

- Direção normal  $x$ , momento torçor ( $M_x$ ).
- Direção transversal  $y$ , momento fletor  $y$  ( $M_y$ ).
- Direção transversal  $z$ , momento fletor  $z$  ( $M_z$ ).

Estes esforços solicitantes estão ilustrados na Fig. (4.3).

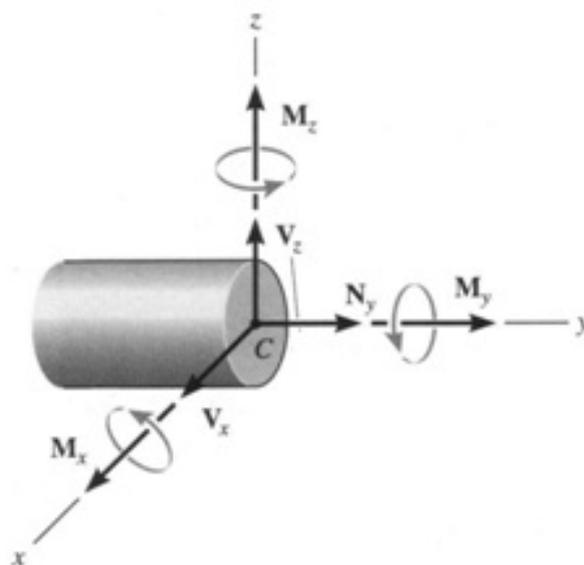


Figura 4.3 Esforços solicitantes caso geral.

Na Fig. (4.4) estão ilustrados os sentidos de atuação dos esforços solicitantes enunciados acima, bem como a convenção adotada sobre seus sinais. O elemento de barra geral é um elemento estrutural que permite a análise de estruturas no espaço tridimensional. Porém, a partir da consideração de algumas simplificações, este elemento pode ser também aplicado à análise de problemas planos. Estas simplificações estão associadas à restrição de um ou mais graus de liberdade do elemento e, conseqüentemente, de seus esforços transmitidos. Portanto, o elemento de barra geral pode ser particularizado para a análise de diversos problemas de interesse da engenharia de estruturas.

As estruturas compostas por elementos de barra geral mais simples são as vigas e as colunas, como ilustrado na Fig. (4.5). A diferença entre essas estruturas encontra-se na ausência ou presença, respectivamente, do esforço solicitante normal. Ambas as estruturas transmitem momentos fletores.

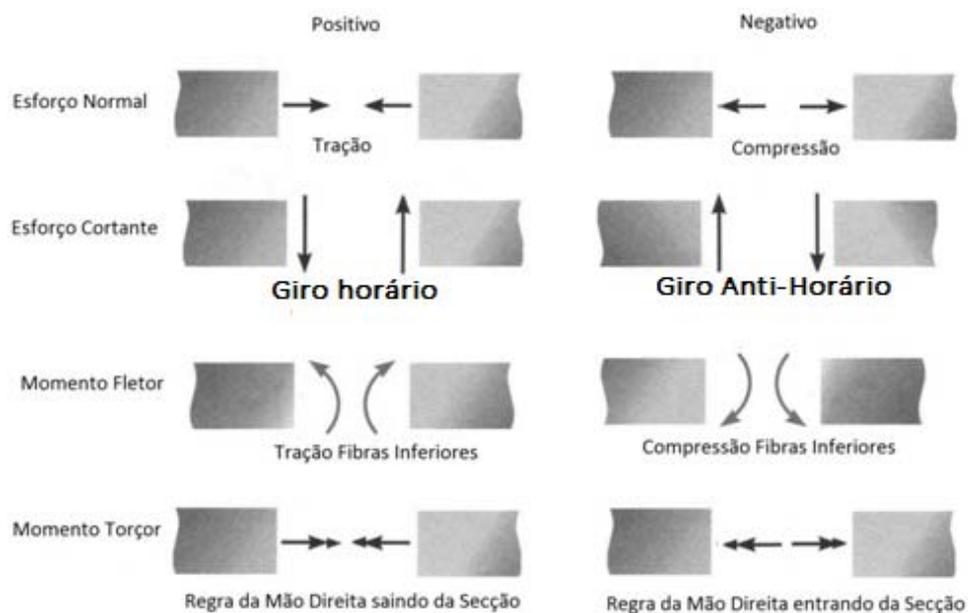


Figura 4.4 Elemento de barra geral em equilíbrio sob a ação de carregamento externo.



Figura 4.5 Vigas e colunas.

Porém, existem estruturas mais complexas envolvendo elementos de barra geral. Para o caso bidimensional, a associação destes elementos dispostos segundo diferentes orientações no plano, além da consideração da presença conjunta dos deslocamentos ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , dá origem aos pórticos bidimensionais. A associação direta de elementos de barra geral formando uma estrutura estável no espaço tridimensional dá origem aos pórticos tridimensionais. Finalmente, as estruturas de grelha consideram carregamentos perpendiculares a seu plano e permitem a análise dos esforços solicitantes cortante, de flexão e de torção. Na Fig. (4.6) estão apresentadas as estruturas discutidas neste parágrafo.

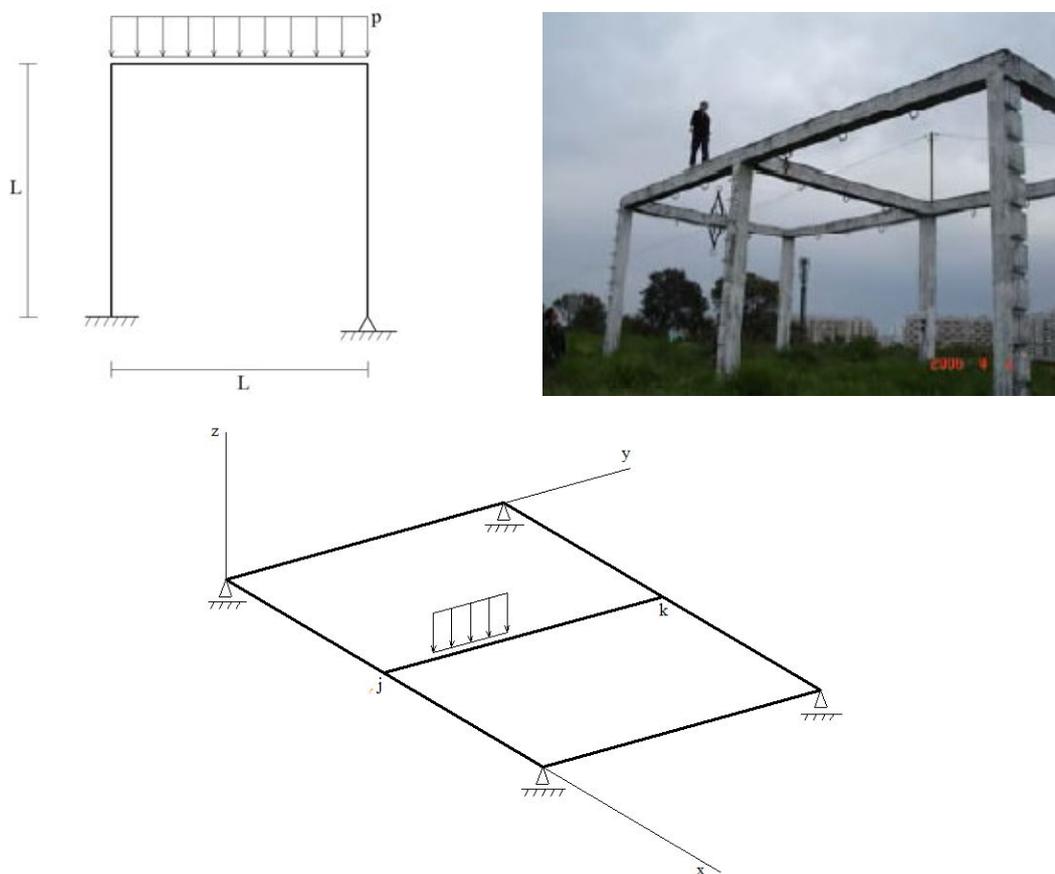


Figura 4.6 Estruturas de pórtico plano, pórtico tridimensional e grelha.

#### 4.2 – Vinculações Internas no Elemento de Barra Geral: Caso Plano

Um dos objetivos da mecânica dos sólidos/Resistência dos Materiais é o estudo do equilíbrio estático de elementos estruturais de barra geral e a determinação de seus esforços solicitantes. Nesse contexto, são de grande importância a descrição e a

compreensão da cinemática desses elementos quando estes são conectados para a formação de estruturas planas de maior complexidade. Considerando o caso bidimensional, um elemento de barra geral apresenta três graus de liberdade (GDL), os quais são: deslocamento ao longo do eixo  $x$ , deslocamento ao longo do eixo  $y$  e a rotação no plano  $xy$ , conforme indicado na Fig. (4.7).



Figura 4.7 Elemento de barra geral e seus graus de liberdade.

Para que o elemento esteja em equilíbrio estático, os três GDL relativos ao seu deslocamento de corpo rígido devem ser convenientemente impedidos por meio da aplicação de condições de vinculação adequadas. Para o elemento apresentado na Fig. (4.7), pode-se empregar um engaste ou uma combinação entre apoios fixo e móvel, conforme indicado na Fig. (4.8), para a obtenção do equilíbrio estático.

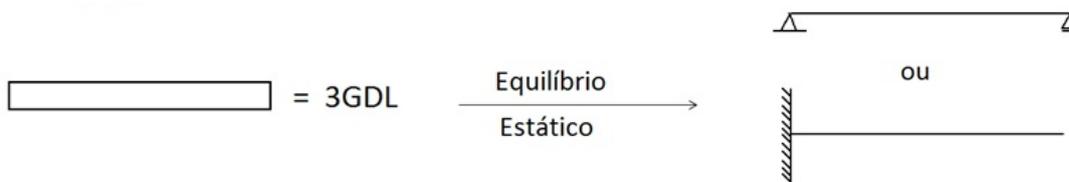


Figura 4.8 Aplicação de condições de vinculação ao elemento de barra geral plano.

Porém, como deve-se proceder em estruturas mais complexas que possuem mais de um elemento de barra geral? Como deve ser feita a conexão entre as barras? Para responder a estas perguntas deve-se inicialmente entender o processo de conexão (vinculação interna) entre as barras. Como o elemento de barra geral plano apresenta três GDL, cada conexão pode transmitir três, dois ou apenas um dos GDL do plano. Para a ilustração desses casos, deve-se considerar as barras apresentadas na Fig. (4.9).

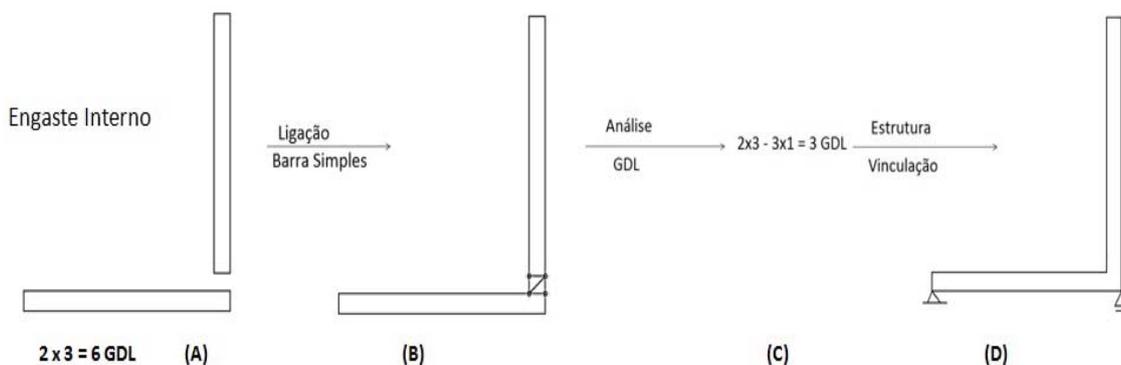


Figura 4.9 Conexão via engaste interno.

Na ilustração A dessa figura, tem-se um sistema composto por dois elementos de barra geral, o qual totaliza seis GDL. Deseja-se que a conexão entre as barras resulte um engaste interno, ou seja, que os deslocamentos ao longo das direções  $x$  e  $y$  além da rotação no plano do ponto de conexão sejam os mesmos para os dois extremos das barras conectadas. Assim, a próxima etapa encontra-se na compreensão da conexão entre essas duas barras, como mostrado em B. Para tal fim, elementos de barra simples podem ser úteis. Lembrando-se dos conceitos apresentados no capítulo anterior, verifica-se que esses elementos eliminam um GDL do sistema. Assim, devem ser inseridos três elementos de barra simples à referida conexão de forma a retirar do sistema os deslocamentos relativos das barras ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  e a rotação relativa no plano  $xy$ .

A determinação do número de GDL resultante do sistema é efetuada considerando-se o número de barras geral e o número de vinculações internas entre barras, como mostrado na ilustração C. No caso apresentado na Fig. (4.9), têm-se dois elementos de barra geral que inserem seis GDL ao sistema. Porém, subtrai-se deste sistema três GDL referentes aos deslocamentos relativos das barras ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  e a rotação no plano. Assim, restam ao sistema apenas três GDL, os quais são os deslocamentos referentes ao corpo rígido das duas barras. Para que a estrutura esteja em equilíbrio estático, deve-se inserir no sistema condições de vinculação suficientes para impedir que o deslocamento de corpo rígido da estrutura ocorra. Deve-se enfatizar que devido à vinculação interna imposta, compatibilização dos três GDL no plano, serão transmitidos na conexão esforço normal, esforço cortante e momento fletor.

Os elementos de barra simples utilizados na realização das conexões entre elementos de barra geral são comumente denominados de dispositivos de fixação interna. A partir da utilização conveniente destes elementos, diferentes conexões entre elementos de barra geral podem ser propostas. Um tipo de conexão muito utilizado na engenharia de estruturas é aquele que impõe que os deslocamentos  $x$  e  $y$  dos pontos pertencentes às barras que estão sobre o nó de conexão sejam os mesmos. Porém, esta conexão permite a existência de uma rotação relativa entre os elementos de barra geral que concorrem ao nó de conexão. Na Fig. (4.10) é apresentada a referida conexão, a qual é denominada articulação ou rótula.

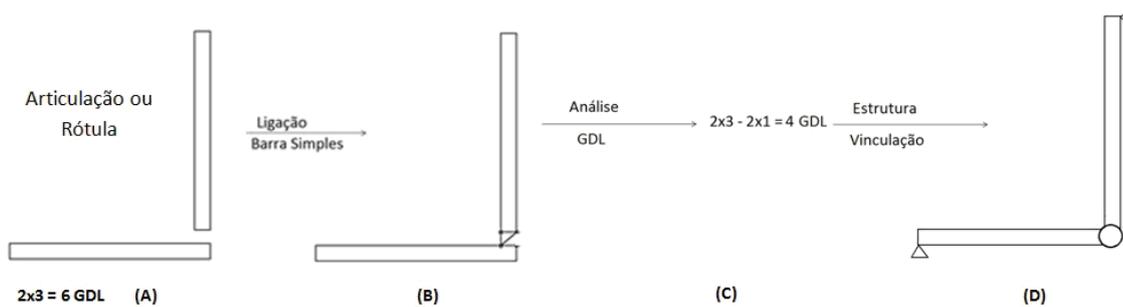


Figura 4.10 Conexão via rótula.

Na Fig. (4.10) é apresentado o sistema formado por dois elementos de barra geral, resultando seis GDL, ilustração A. A partir da inserção de dois elementos vinculares internos, que retiram os deslocamentos relativos das barras nas direções  $x$  e  $y$  (ilustração B), dois GDL são retirados do sistema. Consequentemente, como mostrado na ilustração C, o sistema passa a apresentar quatro GDL. Para que a estrutura apresente equilíbrio estático, condições de vinculação devem ser adequadamente inseridas para impedir seu deslocamento de corpo rígido. Como na ligação via rótula apenas os deslocamentos ao longo das direções  $x$  e  $y$  estão compatibilizados, esta conexão transmite apenas os esforços solicitantes normal e cortante. Devido à possibilidade de giro relativo no nó de conexão, o momento fletor neste ponto é nulo. Tal condição deixa de ser verdadeira se momentos fletores externos forem aplicados sobre a articulação. De maneira geral, nos pontos da estrutura onde um dado GDL não é vinculado, o esforço solicitante associado a este GDL, neste ponto, é nulo. Assim, o momento fletor é nulo nas articulações, por exemplo. Semelhantemente, se a vinculação interna aplicada permitir o deslocamento relativo entre as barras em uma dada direção, não haverá transmissão de força ao longo desta direção e consequentemente, o esforço solicitante associado a esta força (normal ou cortante) será nulo.

Outro tipo de vinculação interna possível, porém menos utilizada para fins práticos, é a denominada engaste interno móvel. Neste caso, a conexão interna compatibiliza apenas um deslocamento, além da rotação do ponto de conexão. Consequentemente, os elementos de barra que concorrem a esta conexão poderão apresentar deslocamento relativo ao longo da direção não vinculada, como mostrado na Fig. (4.10).

Efetuada a análise cinemática considerando os elementos apresentados na Fig. (4.11), ao sistema composto por dois elementos de barra geral, que apresentam seis GDL (ilustração A), são inseridos dois elementos vinculares, que para o caso mostrado

na ilustração B, retira o deslocamento relativo do sistema ao longo da direção  $y$  e a rotação do ponto de conexão. Deve-se enfatizar que um elemento vincular pode também ser posicionado de forma a eliminar o deslocamento relativo ao longo da direção  $x$  ao invés do deslocamento relativo na direção  $y$ . Desta forma, o sistema resultante possui quatro GDL, como mostrado na ilustração C. Para que o equilíbrio estático seja obedecido, condições de vinculação devem ser adequadamente impostas de maneira a impedir o deslocamento de corpo rígido do sistema.

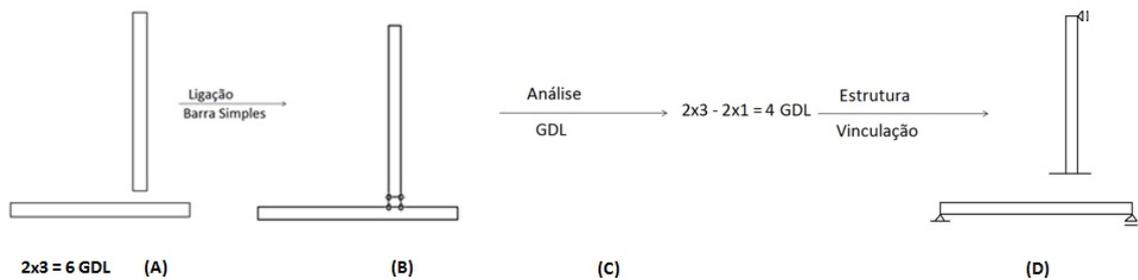


Figura 4.11 Engaste interno móvel.

No caso apresentado anteriormente, o deslocamento horizontal da conexão não é impedido. Assim, na conexão, o esforço cortante, na barra vertical, e esforço normal, na barra horizontal são nulos.

É importante enfatizar que os procedimentos apresentados anteriormente para a análise das vinculações internas em elementos de barra geral, os quais foram aplicados para análises bidimensionais, podem ser facilmente estendidos para o caso tridimensional. Nessa situação, hipóteses de vinculação devem ser também efetuadas com relação ao deslocamento ao longo do terceiro eixo e também as rotações não consideradas na análise plana.

### 4.3 – Diagramas de Esforços Solicitantes. Aplicação ao Caso de Barras Gerais no Plano

Os diagramas de esforços solicitantes são ferramentas gráficas muito utilizadas em engenharia de estruturas para a representação do comportamento dos esforços solicitantes, bem como de suas variações, ao longo do domínio da estrutura. Deve-se enfatizar que é a partir da análise dos esforços solicitantes que os procedimentos de dimensionamento estrutural são efetuados, ou seja, a determinação das dimensões

estruturais de maneira que estas suportem, com segurança e economia, aos carregamentos atuantes. Portanto, a determinação incorreta destes diagramas pode conduzir ao dimensionamento contra segurança e conseqüentemente à falha estrutural.

Para que os diagramas de esforços solicitantes sejam construídos, o analista deve determinar a variação dos esforços solicitantes ao longo da estrutura levando em consideração os carregamentos atuantes, pontuais ou distribuídos, bem como as condições de vinculação. Para tal fim, o primeiro passo a ser efetuado pelo analista é a determinação das reações de apoio da estrutura e das reações vinculares internas entre os elementos conectados. Para a realização desta etapa, a construção do diagrama de corpo livre deve ser efetuada. Como já é de conhecimento do leitor, para a construção deste diagrama, deve-se substituir as vinculações existentes na estrutura por reações equivalentes, segundo os GDL restringidos. Para fins de exemplificação, deve-se considerar a estrutura de barra geral apresentada na Fig. (4.12), a qual possui apoios fixo e móvel e está submetida a carregamentos concentrados e distribuídos ao longo de seu comprimento. Nesta mesma figura, estas vinculações são substituídas por reações equivalentes de maneira a compor o diagrama de corpo livre.

Para a determinação da variação dos esforços solicitantes ao longo do domínio da estrutura pode ser utilizado o método das seções. Assim, cortes devem ser efetuados ao longo da estrutura de forma a separá-la em duas ou mais partes. Em cada ponto seccionado, esforços solicitantes surgirão de maneira a restaurar o equilíbrio originalmente observado. Assim, estes podem ser determinados e mensurados por meio deste método. Se uma quantidade conveniente de cortes for efetuada na estrutura, a variação dos esforços solicitantes ao longo do corpo da estrutura poderá ser corretamente avaliada.

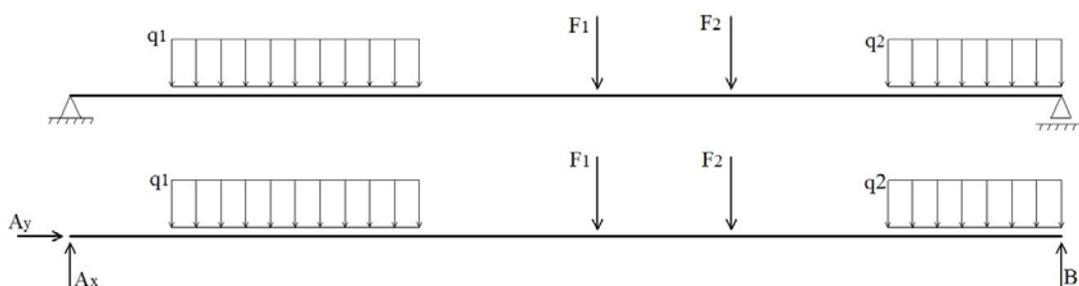


Figura 4.12 Diagrama de corpo livre.

Considerando a estrutura apresentada na Fig. (4.12), esta pode ser seccionada por meio de um plano CC, como mostrado na Fig. (4.13). Sabendo que esta estrutura é

plana, surgirão, no ponto de secção, um esforço normal ( $N_c$ ), um esforço cortante ( $V_c$ ) e um momento fletor ( $M_c$ ), todos auto equilibrados segundo a terceira lei de Newton. Estes esforços podem ser determinados efetuando-se o equilíbrio de corpo rígido das porções separadas da estrutura isoladamente. Para isso, as equações de equilíbrio de corpo rígido devem ser empregadas.

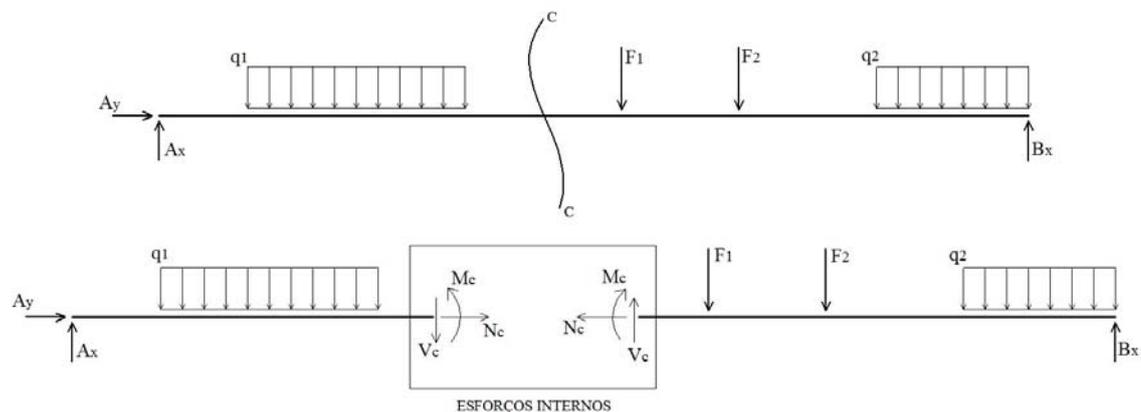


Figura 4.13 Método das seções e esforços solicitantes.

Se os esforços forem determinados para todas as seções do elemento estrutural, então, estes poderão ser registrados por meio de uma representação gráfica. Esses gráficos são denominados diagramas de esforços solicitantes e indicam, graficamente, a distribuição destes esforços ao longo da estrutura. Para a construção desses diagramas, uma convenção de sinais deve ser definida de forma que um valor positivo ou negativo indique um sentido para os esforços solicitantes em qualquer seção da estrutura. Nestas notas, a convenção de sinais apresentada na Fig. (4.4) será adotada.

Deve-se enfatizar que embora a discussão apresentada neste tópico tenha sido efetuada para problemas bidimensionais, sua extensão para casos tridimensionais é facilmente realizada. Para este último caso, deve-se considerar a atuação dos seis esforços solicitantes anteriormente apresentados, os quais estão apresentados na Fig. (4.3). Assim, o método das seções deve ser aplicado objetivando determinar a variação destes esforços ao longo do corpo da estrutura. Posteriormente, estes deverão ser registrados através de uma representação gráfica, ou seja, através dos diagramas de esforços solicitantes.

#### 4.4 – Exemplo 1

De forma a ilustrar os conceitos apresentados anteriormente neste capítulo, deve-se determinar os diagramas de esforços solicitantes do elemento de barra geral apresentado na Fig. (4.14). Trata-se de uma estrutura simplesmente apoiada submetida a uma carga concentrada no centro do seu vão.

As variações dos esforços solicitantes ao longo do comprimento do elemento podem ser obtidas utilizando-se o método das seções. As funções obtidas podem então ser ilustradas por meio dos diagramas de esforços solicitantes. As funções que descrevem o comportamento dos esforços solicitantes serão descontínuas em pontos onde aparecem descontinuidades nas condições de carregamento aplicadas, ou seja, mudanças nas intensidades e distribuições de carregamentos distribuídos ou onde forças ou momentos concentrados são aplicados. Nesses casos, torna-se necessária a determinação das funções dos esforços para cada trecho do elemento localizado entre quaisquer descontinuidades.

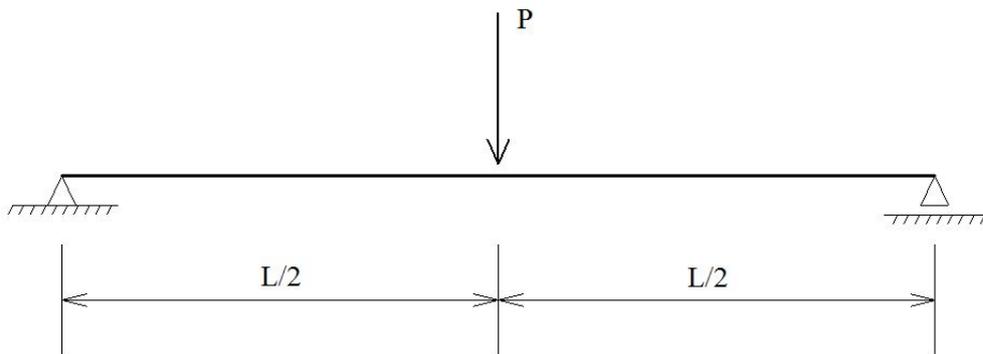


Figura 4.14 Elemento de barra geral.

O primeiro passo para a construção dos diagramas de esforços solicitantes é a determinação das reações de apoio do sistema. Para tal fim, deve-se construir o diagrama de corpo livre da estrutura, como mostrado na Fig. (4.15). Nesta figura encontra-se também ilustrada a diferenciação entre os trechos entre descontinuidades. Devido à presença de uma carga pontual no centro do vão, observa-se na estrutura dois trechos, os quais conduzirão a dois conjuntos de equações que descreverão a variação dos esforços solicitantes ao longo do comprimento da barra.

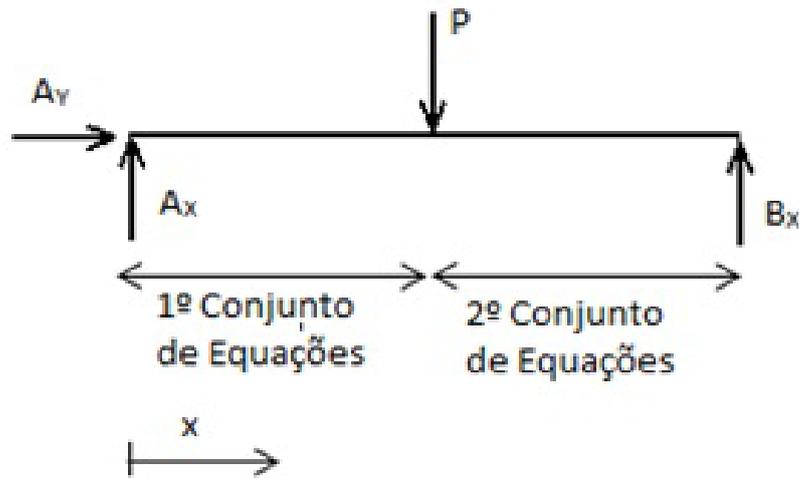


Figura 4.15 Diagrama de corpo livre.

Efetuada o equilíbrio de corpo rígido do sistema apresentado na Fig. (4.15), obtêm-se os seguintes valores para as reações de apoio.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 && \Rightarrow A_y = 0 \\ \sum M_A &= 0 && \Rightarrow B_x L - P \frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow B_x = \frac{P}{2} \\ \sum F_y &= 0 && \Rightarrow A_x + \frac{P}{2} - P = 0 \quad \Rightarrow A_x = \frac{P}{2}\end{aligned}$$

Considerando o primeiro trecho, o primeiro conjunto de equações pode ser determinado. Este trecho é caracterizado pelo seguinte intervalo  $0 \leq x < \frac{L}{2}$ , segundo a orientação do eixo  $x$  mostrada na Fig. (4.15). Efetuando um corte em qualquer ponto dentro do intervalo mencionado tem-se o seguinte diagrama de corpo livre:

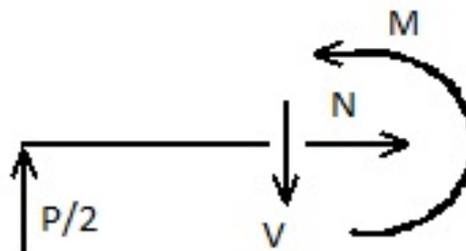


Figura 4.16 Diagrama de corpo livre primeiro trecho.

Efetuada o equilíbrio de corpo rígido considerando o corpo apresentado na Fig. (4.16) tem-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \Rightarrow & N = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - V = 0 & \Rightarrow & V = \frac{P}{2} \\ \sum M_x &= 0 \Rightarrow M - \frac{P}{2}x = 0 & \Rightarrow & M = \frac{P}{2}x\end{aligned}$$

Deve-se ressaltar que o esforço cortante no trecho considerado é constante, conforme as equações acima. Além disso, o momento fletor apresenta variação linear ao longo do comprimento do elemento, estando este esforço tracionando a face inferior do elemento.

Para o segundo trecho, análise semelhante deve ser efetuada. Sabendo que este trecho é definido no intervalo  $L/2 < x \leq L$ , o seguinte diagrama de corpo livre é obtido.

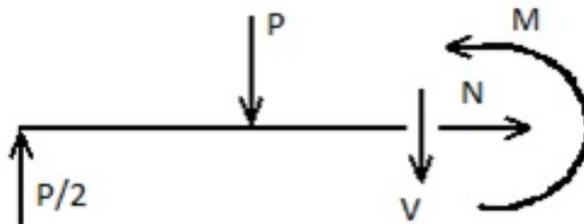


Figura 4.17 Diagrama de corpo livre segundo trecho.

Procedendo ao equilíbrio do corpo rígido mostrado na Fig. (4.17) tem-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \Rightarrow & N = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - V = 0 & \Rightarrow & V = -\frac{P}{2} \\ \sum M_x &= 0 \Rightarrow -\frac{P}{2}x + P\left(x - \frac{L}{2}\right) + M = 0 & \Rightarrow & M = \frac{P}{2}(L - x)\end{aligned}$$

Deve-se destacar que no segundo trecho o esforço cortante é constante e o momento fletor apresenta variação linear. Porém, ao contrário do primeiro trecho, o momento fletor apresenta variação negativa em relação à ordenada  $x$ , indicando, portanto, que seu valor diminui à medida que a ordenada  $x$  aumenta. Neste trecho, embora constante, o esforço cortante apresenta sinal oposto ao observado no primeiro trecho. Com base nas equações que descrevem a variação dos esforços solicitantes ao longo do comprimento da barra, pode-se construir os diagramas de esforços solicitantes. Para o problema estudado, estes diagramas, que nada mais são que representações gráficas das equações determinadas anteriormente, estão ilustradas na Fig. (4.18).

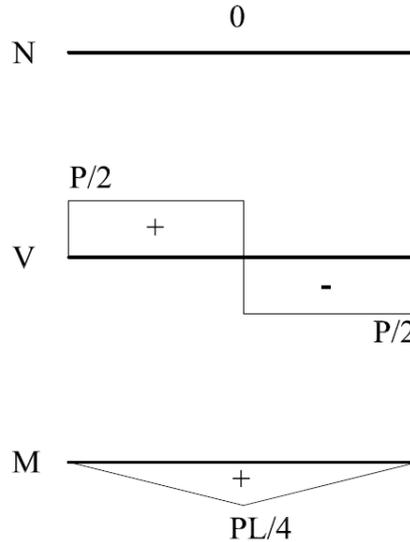


Figura 4.18 Diagramas de esforços solicitantes.

#### 4.5 – Exemplo 2

Objetiva-se, neste exemplo, a determinação dos diagramas de esforços solicitantes da estrutura apresentada na Fig. (4.19). Trata-se de um elemento de barra geral engastado em sua extremidade esquerda sendo submetido a um carregamento uniformemente distribuído em parte de seu comprimento. Nesta mesma figura encontra-se também representado seu diagrama de corpo livre.

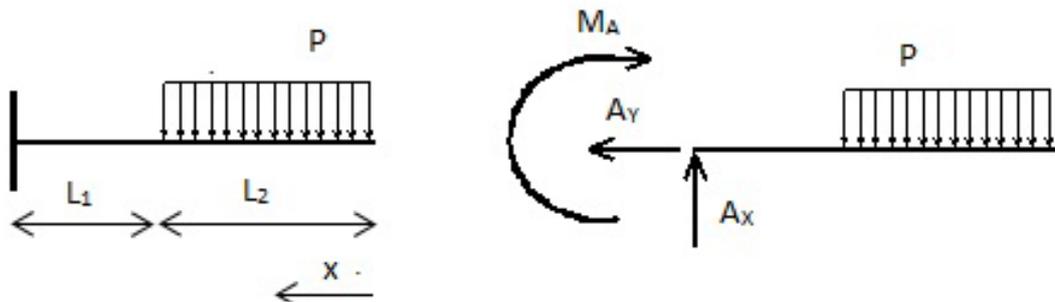


Figura 4.19 Estrutura considerada e diagrama de corpo livre.

Para a determinação dos diagramas de esforços solicitantes, devem ser, inicialmente, obtidos os valores das reações de apoio da estrutura. Com base em seu diagrama de corpo livre, Fig. (4.19), e na aplicação das equações de equilíbrio obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 && \Rightarrow A_y = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow A_x - PL_2 = 0 && \Rightarrow A_x = PL_2 \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow \therefore -M_A - PL_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right) = 0 && \Rightarrow M_A = -PL_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right)\end{aligned}$$

Como na estrutura considerada tem-se a presença de dois trechos, devido à descontinuidade do carregamento uniformemente distribuído, as equações que descrevem a variação dos esforços solicitantes ao longo do corpo do elemento serão obtidas para cada um dos trechos. Efetuando um corte ao longo do intervalo  $0 \leq x < L_2$  obtém-se o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (4.20).

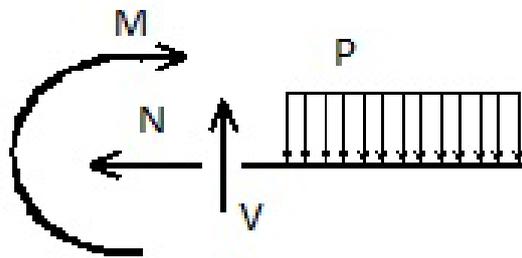


Figura 4.20 Diagrama de corpo livre primeiro trecho.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao corpo apresentado na Fig. (4.20) obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 && \Rightarrow N = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow V - Px = 0 && \Rightarrow V = Px \\ \sum M_x &= 0 \Rightarrow -M - Px \frac{x}{2} = 0 && \Rightarrow M = -P \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

Considerando agora o segundo trecho, cujo intervalo é  $L_2 < x \leq (L_1 + L_2)$ , uma secção deve ser efetuada neste intervalo de maneira a determinar as variações dos esforços solicitantes no trecho. Procedendo a este corte, obtém-se o diagrama de corpo livre ilustrado na Fig. (4.21).

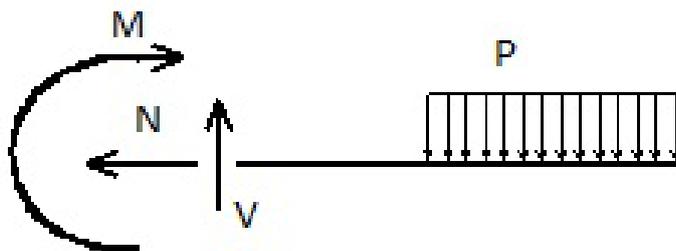


Figura 4.21 Diagrama de corpo livre segundo trecho.

Aplicando a este corpo as equações de equilíbrio de corpo rígido têm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \Rightarrow N = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow V - PL_2 = 0 \Rightarrow V = PL_2 \\ \sum M_x = 0 & \Rightarrow -M - PL_2 \left( x - \frac{L_2}{2} \right) = 0 \Rightarrow M = -PL_2 x + P \frac{L_2^2}{2}\end{aligned}$$

Deve-se destacar, com base nas equações obtidas, que o esforço cortante apresenta variação linear no primeiro trecho e comportamento constante no segundo. Já o momento fletor, este apresenta variação quadrática no primeiro trecho e linear no segundo. Assim, a partir destas equações, os diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (4.22).

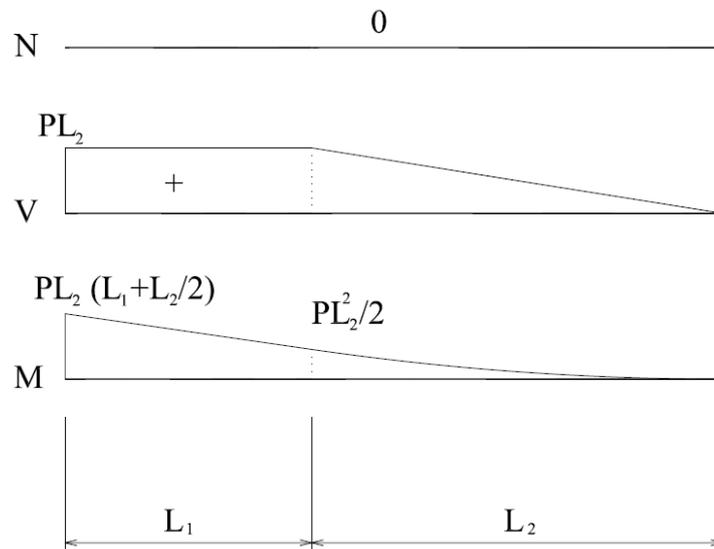


Figura 4.22 Diagramas de esforços solicitantes.

#### 4.6 – Exemplo 3

O último exemplo deste capítulo visa a determinação dos diagramas de esforços solicitantes da estrutura apresentada na Fig. (4.23). Trata-se de um elemento de barra geral, simplesmente apoiado, submetido a um carregamento pontual e a um carregamento distribuído. Para este exemplo os seguintes valores foram adotados,  $q(x) = 5 \text{ kN/m}$ ,  $P = 5 \text{ kN}$ ,  $L_1 = 2 \text{ m}$ ,  $L_2 = 1 \text{ m}$  e  $L_3 = 1 \text{ m}$ .

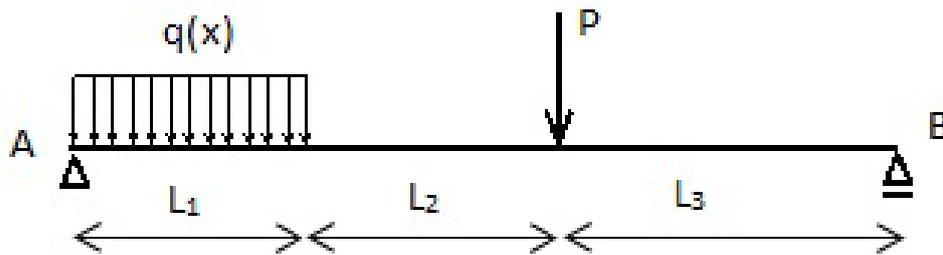


Figura 4.23 Estrutura considerada.

Para a resolução deste exemplo, o primeiro passo a ser seguido trata da obtenção do diagrama de corpo livre da estrutura, o qual permitirá a determinação de suas reações de apoio. Este diagrama está apresentado na Fig. (4.24). Aplicando ao corpo apresentado na Fig. (4.24) as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm os seguintes resultados:

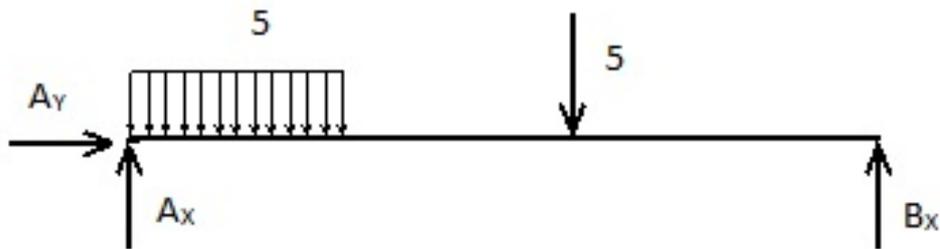


Figura 4.24 Diagrama de corpo livre.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow A_y = 0 \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow -5,0 \cdot 2,0 \cdot 1,0 - 5,0 \cdot 3,0 + B_x \cdot 4,0 = 0 \Rightarrow B_x = 6,25kN \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow A_x + 6,25 - 5,0 - 5,0 \cdot 2,0 = 0 \Rightarrow A_x = 8,75kN \end{aligned}$$

Sabendo que a reação  $A_y$  é nula, observa-se que o esforço normal ao longo de todo o corpo da estrutura é nulo. Assim, a variação deste esforço não será determinada no equilíbrio de cada trecho. Com base na Fig. (4.23), constata-se que o elemento considerado apresenta três trechos distintos, os quais são decorrentes das descontinuidades introduzidas pelos carregamentos atuantes.

Para o primeiro trecho, no intervalo  $0 \leq x \leq L_1$ , um corte conduz a obtenção do seguinte diagrama de corpo livre.

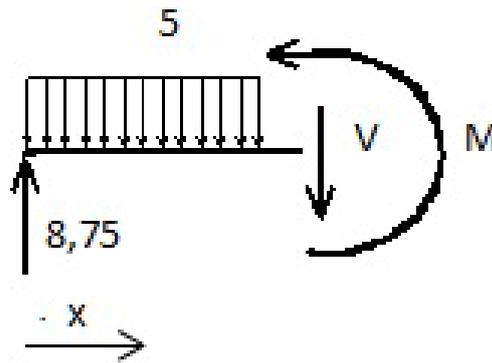


Figura 4.25 Diagrama de corpo livre para o primeiro trecho.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à porção da estrutura apresentada na Fig. (4.25) obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow 8,75 - 5,0x - V = 0 &&\Rightarrow V = 8,75 - 5x \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow -8,75x + 5,0x \frac{x}{2} + M = 0 &&\Rightarrow M = 8,75x - \frac{5}{2}x^2\end{aligned}$$

Com base nas equações acima, observa-se que neste trecho o esforço cortante apresenta variação linear, enquanto o momento fletor apresenta variação quadrática. Considerando agora o segundo trecho, cujo intervalo é  $L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)$ , um corte neste trecho gera o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (4.26). Aplicando sobre este corpo as equações de equilíbrio de corpo rígido, obtêm-se as seguintes equações.

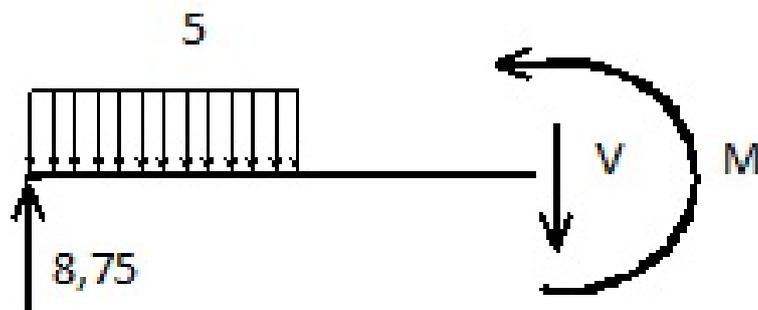


Figura 4.26 Diagrama de corpo livre para o segundo trecho.

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow 8,75 - 5,0 \cdot 2,0 - V = 0 &&\Rightarrow V = -1,25 \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow -8,75x + 5,0 \cdot 2,0 \left( x - \frac{2,0}{2,0} \right) + M = 0 &&\Rightarrow M = -1,25x + 10\end{aligned}$$

Analisando as equações obtidas anteriormente, observa-se que o esforço cortante tem comportamento constante enquanto o momento fletor apresenta variação linear ao longo do trecho considerado. Finalmente, pode-se analisar o terceiro trecho. Este trecho

abrange o intervalo  $(L_1 + L_2) \leq x \leq (L_1 + L_2 + L_3)$ . Aplicando o método das seções no referido intervalo obtém-se o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (4.27).

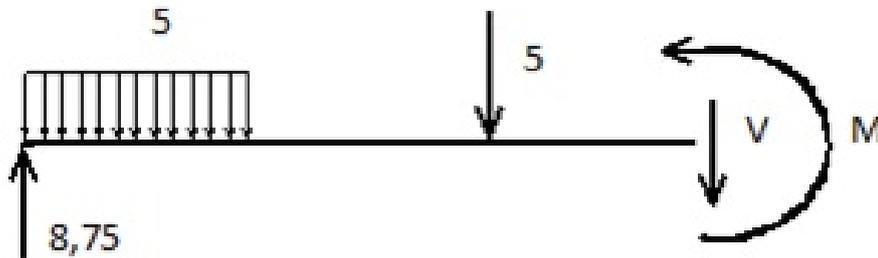


Figura 4.27 Diagrama de corpo livre para o terceiro trecho.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à porção estrutural mostrada na Fig. (4.27), determinam-se as seguintes equações:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 8,75 - 5,0 \cdot 2,0 - 5,0 - V = 0 \quad \Rightarrow V = -6,25$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -8,75x + 5,0 \cdot 2,0 \left( x - \frac{2,0}{2,0} \right) + 5,0(x - 3,0) + M = 0 \Rightarrow M = -6,25x + 25$$

No terceiro trecho, o esforço cortante apresenta comportamento constante enquanto o momento fletor possui variação linear. Com base nas equações que descrevem a variação dos esforços solicitantes ao longo do comprimento da estrutura, pode-se representar os diagramas de esforços solicitantes simplesmente desenhando as curvas decorrentes das equações determinadas anteriormente. Para a estrutura em questão, esses diagramas estão apresentados na Fig. (4.28).

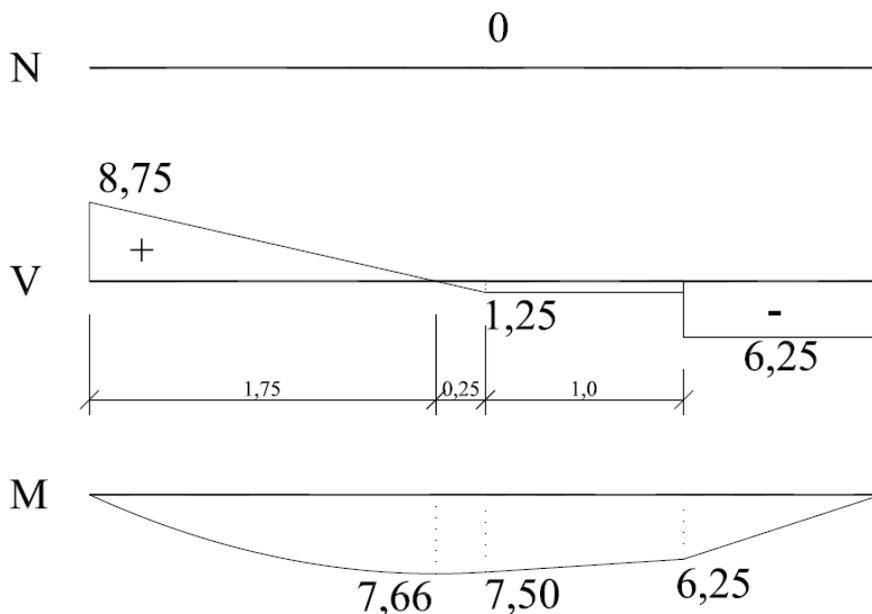


Figura 4.28 Diagramas de esforços solicitantes.

#### 4.7 – Elemento de Barra Geral: Viga

As vigas consistem, basicamente, de elementos de barra geral, contínuos ou não, com eixo reto, equilibrados por um sistema de apoios (móvel, fixo ou engaste), de modo a garantir que essas barras sejam, no mínimo, isostáticas. Em virtude da transferência apenas dos esforços dos tipos flexão e cisalhamento, estas estruturas estão aptas a suportar ações aplicadas ao longo do seu comprimento, as quais podem ser concentradas ou distribuídas. As vigas podem ser compostas por diferentes materiais como concreto, aço, alumínio, madeira ou composição destes, entre outros. Este tipo de estrutura tem grande aplicação em pontes, edifícios, passarelas entre outros, onde usualmente suportam lajes.

Quando a viga está submetida a ações que provocam flexão, observa-se que o momento fletor conduz a rotação de suas seções transversais. Portanto, como mostrado na Fig. (4.29), parte de sua seção estará comprimida e parte tracionada. Para o elemento de viga, a barra geral pode ser particularizada considerando apenas os graus de liberdade que envolvem a rotação no plano e o deslocamento perpendicular ao eixo da barra. Portanto, este elemento possui somente dois GDL. Conseqüentemente, apenas dois tipos de esforços solicitantes serão não nulos, os quais são os correspondentes aos GDL considerados, ou seja, momento fletor e esforço cortante, respectivamente. Deve-se enfatizar que nos elementos de viga, o valor do esforço normal é nulo por definição, já que o deslocamento paralelo ao eixo da barra não é considerado. Assim, a equação de equilíbrio envolvendo a somatória das forças orientadas ao longo do eixo da viga é automaticamente satisfeita.

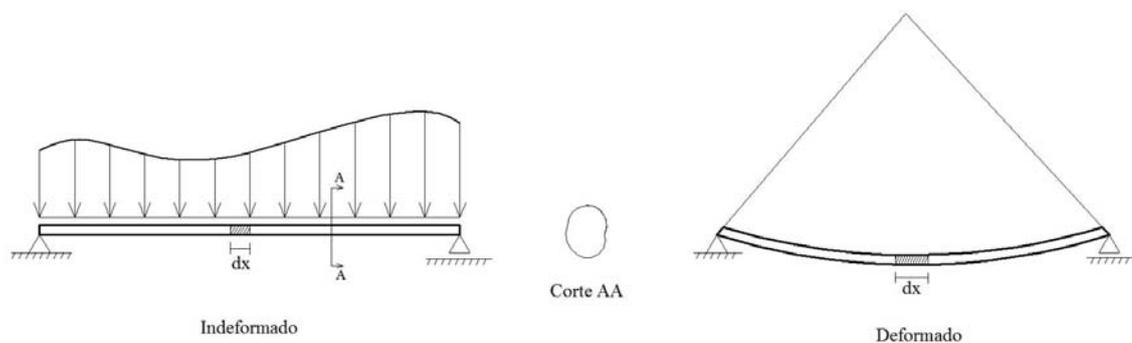


Figura 4.29 Rotação das seções de elementos de viga.

Com base nestas simples definições sobre o elemento de viga, constata-se que todas as estruturas cujos esforços solicitantes foram determinados neste capítulo são do

tipo viga. Portanto, ao leitor foram já introduzidos os procedimentos básicos para a análise estrutural de um elemento de barra geral importante no domínio da engenharia de estruturas. Na sequência destas notas, pretende-se introduzir métodos diretos para a determinação dos esforços solicitantes bem como elementos e sistemas estruturais mais complexos.

## **5. – Relações Diferenciais entre Esforços Solicitantes e Ações Externas**

### 5.1 – Relações Diferenciais

Os diagramas de esforços solicitantes são de fundamental importância na análise estrutural e no dimensionamento de estruturas. Com base na intensidade dos esforços solicitantes atuantes, as dimensões dos elementos estruturais são determinadas para que estes resistam aos efeitos das ações externas com níveis de segurança e economia desejados.

No capítulo anterior foi apresentado um procedimento, baseado no método das seções e nas equações de equilíbrio de corpo rígido, onde expressões analíticas para os esforços solicitantes eram obtidas em uma seção genérica " $x$ " da estrutura. Apesar desse método ser aplicável a todos os tipos de estrutura e carregamentos externos, observa-se que nos casos onde várias descontinuidades estão presentes (ações externas concentradas em diversos pontos e ações distribuídas em diversos trechos), o método torna-se demasiadamente oneroso e cansativo.

Uma alternativa para a solução deste problema é encontrada utilizando-se as relações diferenciais que efetuam a ligação entre os carregamentos distribuídos, esforços cortante e normal e momentos fletores. Por meio dessas relações, os diagramas de esforços solicitantes podem ser mais rapidamente construídos e também interpretados. Para a determinação dessas relações, deve-se considerar o elemento de barra geral apresentado na Fig. (5.1), o qual está em equilíbrio estático sob a ação de forças concentradas e distribuídas ao longo de seu comprimento.

Objetivando analisar o equilíbrio da estrutura, deve-se isolar um elemento de comprimento infinitesimal,  $\Delta x$ , pertencente à estrutura, e estudar o comportamento dos esforços solicitantes neste elemento. Para o caso considerado, o elemento infinitesimal e os esforços solicitantes, estão apresentados na Fig. (5.2).

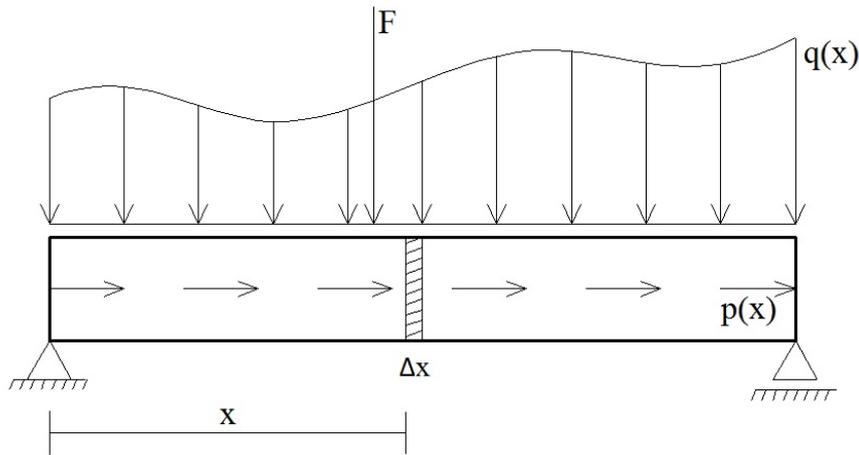


Figura 5.1 Elemento de barra em equilíbrio.

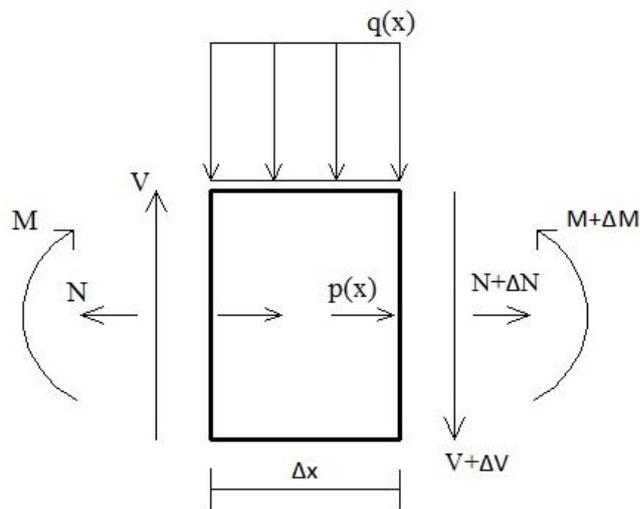


Figura 5.2 Elemento infinitesimal em equilíbrio.

Utilizando as equações de equilíbrio de corpo rígido, as quais são aplicadas ao elemento ilustrado na Fig. (5.2) obtêm-se:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V(x) - [V(x) + \Delta V(x)] - q(x)\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta V(x) = -q(x)\Delta x \quad (5.1)$$

Dividindo ambos os membros da Eq. (5.1) pelo comprimento do elemento infinitesimal, ou seja, por  $\Delta x$ , e em seguida tomando o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , quando o elemento infinitesimal torna-se uma seção transversal da barra, obtêm-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = -q(x) \quad (5.2)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$$

Segundo a Eq. (5.2), verifica-se que a inclinação do diagrama de esforço cortante é igual ao negativo da intensidade do carregamento transversalmente distribuído na seção transversal em análise. Ou seja, a variação do esforço cortante ao longo do comprimento da barra é igual ao negativo da função que descreve a carga distribuída aplicada perpendicularmente ao eixo da barra.

Procedendo agora ao equilíbrio em termos de momentos fletores, têm-se:

$$\begin{aligned} \sum M_{(x+\Delta x)} = 0 \Rightarrow -M(x) - V(x)\Delta x + q(x)\Delta x \frac{\Delta x}{2} + [M(x) + \Delta M(x)] = 0 \Rightarrow \\ -V(x)\Delta x + \Delta M(x) + q(x) \frac{(\Delta x)^2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dividindo ambos os membros da Eq. (5.3) pelo comprimento do elemento infinitesimal,  $\Delta x$ , e na sequência tomando o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , ou seja quando o elemento infinitesimal torna-se uma seção transversal da barra, obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -V(x) + \frac{\Delta M(x)}{\Delta x} + \frac{q(x)\Delta x}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -V(x) + \frac{\Delta M(x)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \\ \frac{dM(x)}{dx} = V(x) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Com base no resultado apresentado pela Eq. (5.4), verifica-se que a inclinação do diagrama de momento fletor é igual à intensidade do esforço cortante atuante na seção transversal considerada. Deve-se também destacar que os valores mínimos e máximos do momento fletor podem ser facilmente encontrados utilizando-se a Eq. (5.4) e os conceitos clássicos de cálculo diferencial. Quando  $V$  assume valor nulo, consequentemente  $dM/dx = 0$ . Isso indica que quando o esforço cortante é nulo, o momento fletor apresenta um ponto de extremo, ou seja, máximo ou mínimo. Portanto, com base na Eq. (5.4) a construção e a interpretação do diagrama de momento fletor podem ser efetuadas.

Finalmente, considerando o equilíbrio do elemento infinitesimal apresentado na Fig. (5.2) com relação à somatória de forças atuantes ao longo da direção  $x$  tem-se:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \Rightarrow -N(x) + [N(x) + \Delta N(x)] + p(x)\Delta x = 0 \Rightarrow \\ \Delta N(x) = -p(x)\Delta x \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dividindo ambos os membros da Eq. (5.5) pelo comprimento do elemento diferencial,  $\Delta x$ , e tomando o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$  tem-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta N(x)}{\Delta x} = -p(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(x)}{dx} = -p(x) \quad (5.6)$$

De forma análoga ao observado para o esforço cortante, constata-se que a inclinação do diagrama de esforço normal, em um dado ponto, é igual ao negativo do valor da função que descreve o carregamento axialmente distribuído.

Deve-se enfatizar que embora as Eq.(5.2), Eq. (5.4) e Eq.(5.6) tenham sido apresentadas em sua forma diferencial, estas equações podem ser também resolvidas utilizando-se técnicas integrais. Essas equações, em termos integrais, podem ser assim reescritas:

$$\begin{aligned} \Delta V_{AB} &= \int_A^B -q(x) dx \\ \Delta M_{AB} &= \int_A^B V(x) dx \\ \Delta N_{AB} &= \int_A^B -p(x) dx \end{aligned} \quad (5.7)$$

sendo que  $A$  e  $B$  são as ordenadas genéricas " $x$ ", ao longo do eixo da barra, inicial e final, respectivamente, e  $\Delta$  é a variação dos esforços solicitantes no intervalo considerado.

As relações diferenciais apresentadas anteriormente são válidas apenas em pontos onde não atuam ações pontuais, ou seja, forças ou momentos concentrados. Nesses dois casos especiais, surgem descontinuidades nas variações dos esforços solicitantes ao longo do domínio da estrutura. Portanto, estes casos devem ser criteriosamente considerados. Apenas para ilustrar o surgimento da descontinuidade, deve-se considerar o elemento infinitesimal de comprimento  $\Delta x$  apresentado na Fig. (5.3). Este elemento está submetido apenas a uma força concentrada de intensidade  $F$ .

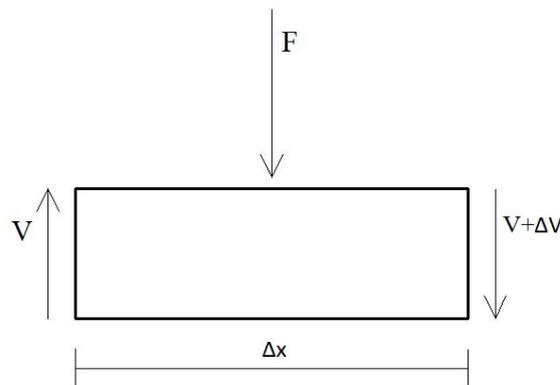


Figura 5.3 Elemento infinitesimal em equilíbrio submetido a uma carga concentrada.

Efetuada o equilíbrio de corpo rígido no elemento apresentado na Fig. (5.3) tem-se:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V(x) - F - (V(x) + \Delta V(x)) = 0 \Rightarrow \Delta V(x) = -F \quad (5.8)$$

O equilíbrio apresentado na Eq. (5.8) mostra que a variação do esforço cortante é negativa, para o sentido da força pontual considerada, sendo que no diagrama de esforço cortante ocorre uma descontinuidade (salto) quando a ação concentrada  $F$  está presente. Deve-se ressaltar que o valor da descontinuidade no diagrama será exatamente igual à intensidade da ação concentrada. Como sugestão ao leitor, compare esse resultado a um dos exemplos resolvidos no capítulo anterior.

Embora mostrado apenas para a ação de forças pontuais, o mesmo efeito ocorre quando momentos fletores pontuais são aplicados. Nesse caso ocorre uma descontinuidade (salto) no diagrama de momento fletor. De acordo com a relação diferencial apresentada na Eq.(5.4), e nos conhecimentos de cálculo diferencial, verifica-se que no ponto onde  $V$  não é contínua  $dM/dx$  também não apresenta valor definido. Portanto, os pontos de descontinuidade no diagrama de esforço cortante conduzem a pontos onde o diagrama de momento fletor possui derivadas não contínuas. Nesses pontos, as tangentes das curvas que descrevem o momento fletor imediatamente antes e depois da descontinuidade possuem valores diferentes.

### 5.2 – Exemplo 1

No primeiro exemplo deste capítulo, objetiva-se a determinação dos diagramas de esforços solicitantes da viga apresentada na Fig. (5.4). Trata-se de uma viga engastada submetida a um carregamento distribuído de forma triangular ao longo de seu comprimento. A Fig. (5.4) apresenta também o diagrama de corpo livre da viga.

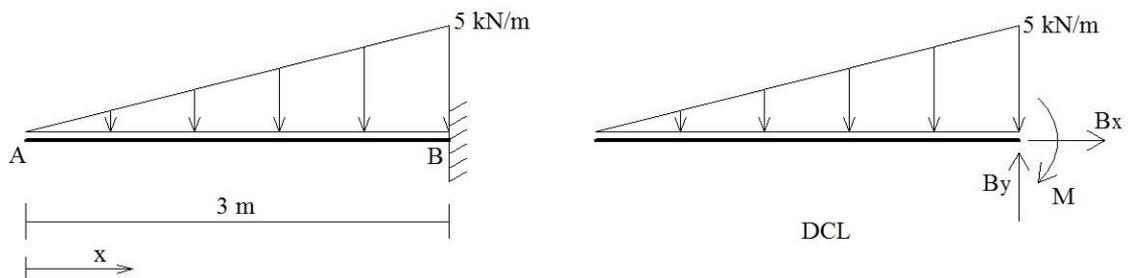


Figura 5.4 Estrutura considerada na análise.

Com base no diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (5.4), pode-se determinar as reações de apoio utilizando-se as equações de equilíbrio de corpo rígido.

Assim:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \Rightarrow B_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow B_y - \frac{5 \cdot 3}{2} = 0 \quad \Rightarrow B_y = 7,5 \text{ kN} \\ \sum M_B = 0 & \Rightarrow -M_B + \frac{5 \cdot 3}{2} \cdot \frac{3}{3} = 0 \quad \Rightarrow M_B = 7,5 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Antes de empregar as relações diferenciais, o problema será resolvido utilizando-se a metodologia proposta no capítulo anterior, onde expressões analíticas para os esforços solicitantes são obtidas com base no equilíbrio de corpo rígido. Considerando a ilustração mostrada na Fig. (5.4), constata-se que a viga apresenta trecho único. Portanto, efetuando um corte ao longo do comprimento da viga obtêm-se o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (5.5).

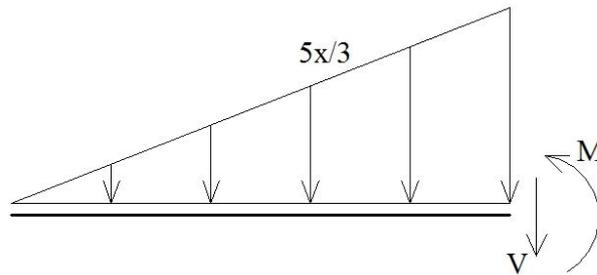


Figura 5.5 Diagrama de corpo livre para o trecho único da estrutura.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao elemento apresentado na Fig. (5.5) obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 & \Rightarrow -V - \frac{5x}{3} \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow V = -\frac{5x^2}{6} \\ \sum M_x = 0 & \Rightarrow M + \frac{5x}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0 \quad \Rightarrow M = -\frac{5x^3}{18}\end{aligned}$$

Resolvendo o problema com base nos recursos das relações diferenciais, obtêm-se a seguinte relação para o esforço cortante:

$$V = -\int q(x) dx \quad \Rightarrow \quad V = -\int \frac{5x}{3} dx \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{5x^2}{6} + C$$

Considerando a distribuição do carregamento do problema analisado, constata-se que o esforço cortante é nulo em  $x = 0$ . Conseqüentemente, o termo constante,  $C$ , que surgiu da integração da equação do carregamento deve ser nulo. Assim, a expressão

para a variação do esforço cortante ao longo do comprimento da viga fica definida como  $V = -\frac{5x^2}{6}$ , que é o mesmo resultado obtido por meio da metodologia do capítulo anterior.

Aplicando agora as relações diferenciais na determinação da expressão que descreve a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga obtém-se:

$$M = \int V(x) dx \Rightarrow M = \int -\frac{5x^2}{6} dx \Rightarrow M = -\frac{5x^3}{18} + C$$

Como na coordenada  $x = 0$  nenhuma ação externa é aplicada, constata-se que nesse ponto o momento fletor é nulo. Portanto, a constante de integração,  $C$ , que surgiu da integração da equação do esforço cortante deve ser nula para que essa condição de contorno seja atendida. Portanto, a expressão que descreve a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga torna-se igual a  $M = -\frac{5x^3}{18}$ , que é a mesma expressão obtida utilizando-se a metodologia empregada no capítulo anterior. Com base nessas duas equações, os diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (5.6).

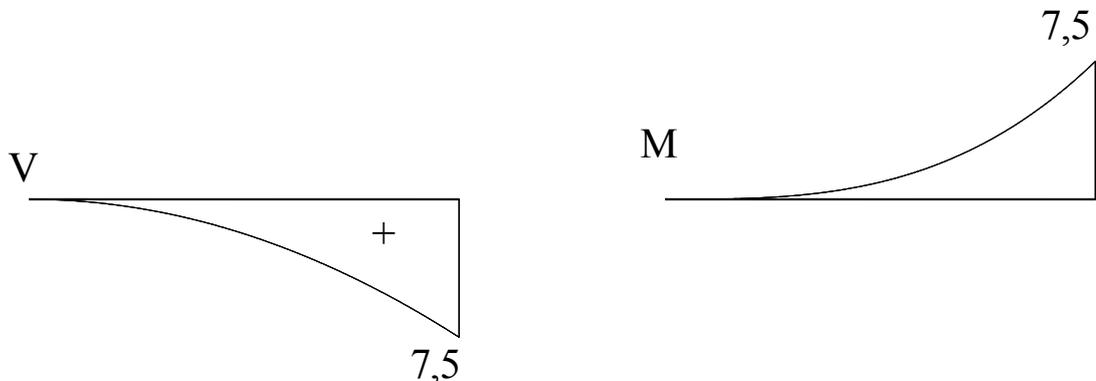


Figura 5.6 Diagramas de esforços solicitantes.

### 5.3 – Exemplo 2

Objetiva-se, neste exemplo, a construção dos diagramas de esforços solicitantes da estrutura apresentada na Fig. (5.7). Trata-se de uma viga engastada em seu extremo esquerdo e vinculada, através de um apoio móvel, em seu extremo direito. A estrutura está submetida à ação de uma força concentrada igual a 5 kN e a um carregamento

distribuído igual a 2 kN/m. Deve-se ressaltar a presença de uma articulação na estrutura, a qual está posicionada sobre o nó B.

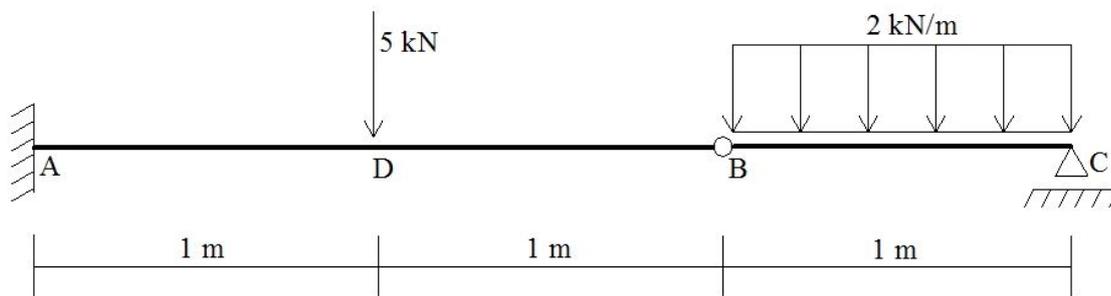


Figura 5.7 Estrutura considerada na análise.

Quando uma articulação é inserida em um sistema estrutural, insere-se também um GDL extra, referente à rotação relativa entre as barras que concorrem à articulação. Consequentemente, para que o sistema resultante seja no mínimo isostático, devem ser empregadas condições de vinculação tais que restrinjam os três GDL referentes ao deslocamento de corpo rígido da estrutura no plano mais o(s) GDL relativo(s) à introdução da(s) articulação(ões). Dessa forma, se uma única articulação estiver presente, como é o caso do exemplo considerado, devem ser restringidos quatro GDL, os quais conduzirão à determinação de quatro reações de apoio. Como somente três equações de equilíbrio estão disponíveis para o caso plano, a quarta reação de apoio é determinada utilizando-se a condição de momento fletor nulo sobre a articulação, conforme discutido no capítulo anterior (onde o GDL é permitido o esforço solicitante associado é nulo).

Assim, para a determinação das reações de apoio e das reações vinculares a estrutura, esta deve ser seccionada sobre a articulação. Em seguida cada porção seccionada deve ser equilibrada isoladamente utilizando as equações de equilíbrio de corpo rígido. Considerando este procedimento, o trecho da estrutura referente aos nós B e C conduz ao diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (5.8).

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à porção da estrutura apresentada anteriormente têm-se:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow N_B = 0 \\ \sum M_B = 0 & \Rightarrow -2,0 \cdot 1,0 \cdot \frac{1,0}{2,0} + C_y \cdot 1,0 = 0 \Rightarrow C_y = 1,0 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow V_B - 2,0 \cdot 1,0 + 1,0 = 0 \Rightarrow V_B = 1,0 \text{ kN} \end{aligned}$$

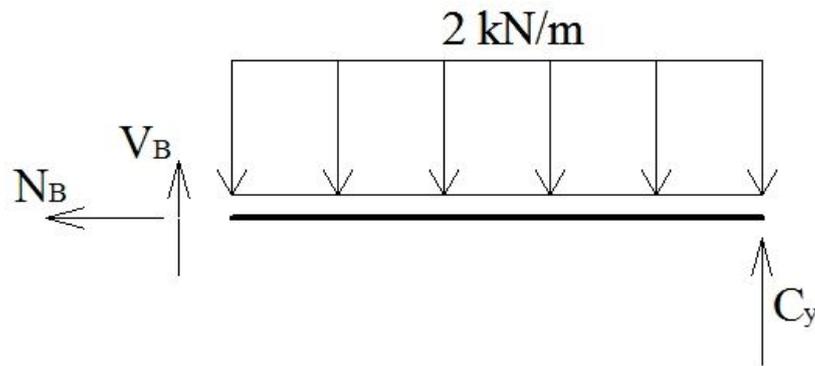


Figura 5.8 Diagrama de corpo livre trecho entre nós B e C.

Analisando agora a outra porção de estrutura, a qual corresponde à viga delimitada pelos nós A e B, tem-se o seguinte diagrama de corpo livre:

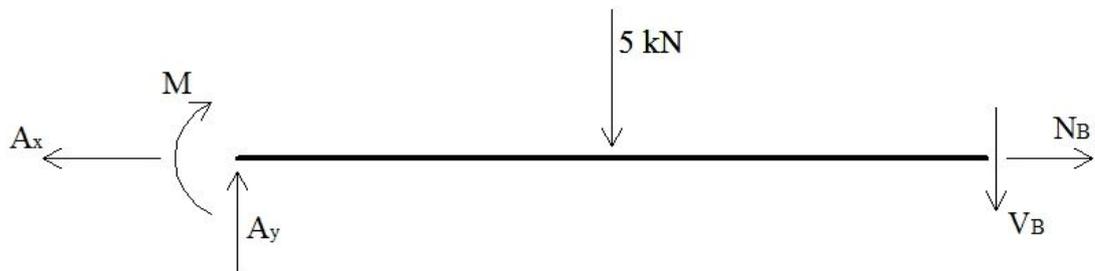


Figura 5.9 Diagrama de corpo livre trecho entre nós A e B.

Empregando as equações de equilíbrio de corpo rígido para o corpo apresentado na Fig. (5.9) obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 && \Rightarrow A_x = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow A_y - 5,0 - 1,0 = 0 && \Rightarrow A_y = 6,0 \text{ kN} \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow -M - 5,0 \cdot 1,0 - 1,0 \cdot 2,0 = 0 && \Rightarrow M = -7,0 \text{ kN} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Com base no equilíbrio efetuado para cada porção da viga isoladamente, o seguinte diagrama de corpo livre é obtido.

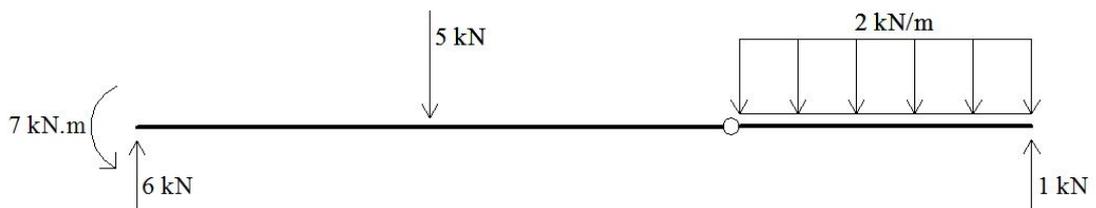


Figura 5.10 Diagrama de corpo livre viga.

Assim, utilizando-se as relações diferenciais e o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (5.10), pode-se construir os diagramas de esforços solicitantes.

Considerando o esforço normal, observa-se que este tipo de esforço é nulo ao longo de todo o comprimento da viga. Portanto, o diagrama de esforço normal para a viga considerada é o apresentado na Fig. (5.11).



Figura 5.11 Diagrama de esforço normal.

Para a construção do diagrama de esforço cortante, observa-se que no trecho entre os nós A e D não existe carregamento distribuído. Assim, segundo a Eq.(5.2), neste trecho o esforço cortante deve ser constante. Como a reação do apoio A é igual a 6,0 kN, neste trecho o esforço cortante será igual a 6,0 kN. Sobre o ponto D atua um carregamento concentrado de valor igual a 5,0 kN. Conseqüentemente, sobre o nó D ocorrerá uma descontinuidade no diagrama de esforço cortante. A intensidade desta descontinuidade, como mostrado na Eq.(5.8), é igual ao valor da carga concentrada, portanto, igual a 5,0 kN.

Assim como no trecho entre os nós A e D, no trecho que envolve os nós D e B o carregamento distribuído é igual à zero. Dessa forma, como mostra a Eq.(5.2), neste trecho o diagrama de esforço cortante deve ser constante. Portanto, através do equilíbrio de corpo rígido apresentado na Fig. (5.8), constata-se que neste trecho o esforço cortante é igual a 1,0 kN.

Finalmente, considerando o trecho que envolve os nós B e C, observa-se a presença de um carregamento uniformemente distribuído. Utilizando o resultado apresentado pela Eq.(5.2), conclui-se que neste trecho o esforço cortante deve apresentar variação linear. Com base no equilíbrio apresentado na Fig. (5.8), constata-se que sobre o nó C o esforço cortante é negativo e igual a 1,0 kN.

Com base na discussão apresentada anteriormente, obtém-se o diagrama de esforço cortante para a viga analisada, o qual está apresentado na Fig. (5.12).

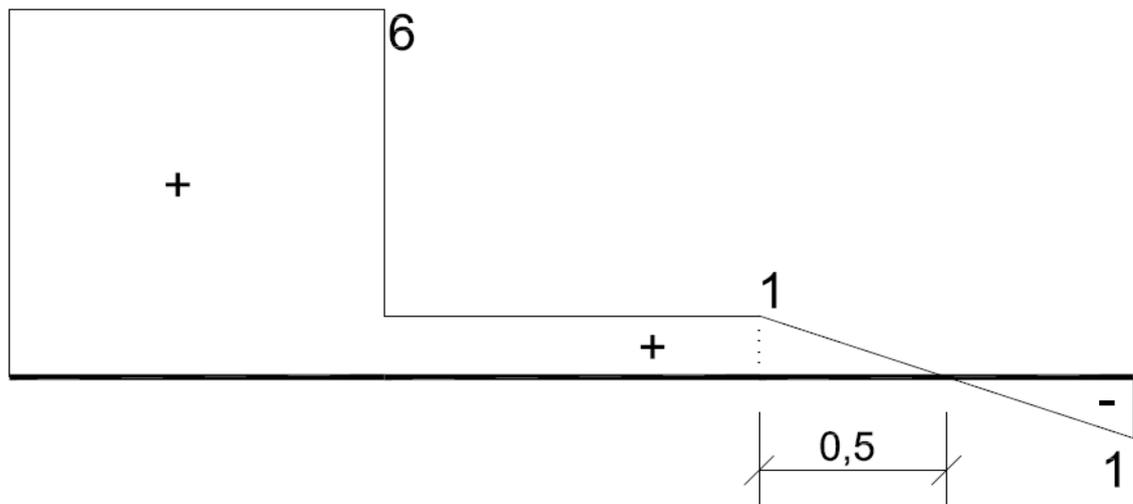


Figura 5.12 Diagrama de esforço cortante.

Considerando as variações do esforço cortante ao longo do comprimento da viga, pode-se também empregar as relações diferenciais para a construção do diagrama de momento fletor. Para o trecho que envolve os nós A e D, observa-se que o esforço cortante é constante. Conseqüentemente, por meio da Eq.(5.4), conclui-se que o momento fletor neste trecho deve apresentar variação linear. Assim, determinando-se os valores dos momentos fletores sobre os nós A e D tem-se caracterizada a variação deste esforço no trecho desejado. Por meio de um equilíbrio simples, constata-se que sobre o nó D o momento fletor é igual a  $-1,0$  kN (tração na parte superior).

No trecho que envolve os nós D e B, o esforço cortante apresentou também comportamento constante. Assim, neste trecho o momento fletor, segundo a Eq.(5.4), deve apresentar variação linear. Como sobre a articulação o momento fletor é nulo, tem-se os dois pontos necessários para a caracterização da variação deste esforço no trecho.

Finalmente, para o trecho entre os nós B e C, observa-se que o esforço cortante apresentou variação linear. Conseqüentemente, pelo apresentado na Eq.(5.4), neste trecho o momento fletor deve apresentar variação quadrática. Como sobre os nós B e C o momento fletor é nulo, basta que se conheça o valor deste esforço ao longo de qualquer ponto no trecho considerado para que se caracterize o diagrama. Um ponto de particular interesse para a determinação do momento fletor é aquele onde o esforço cortante é nulo. Como apresentado anteriormente, no ponto onde o esforço cortante é nulo o momento fletor observa um valor extremo (máximo ou mínimo). Assim, calculando o momento nesta posição tem-se o valor de máximo e conseqüentemente os pontos necessários para o traçado deste diagrama.

Com base nas explicações apresentadas, obtêm-se o diagrama de momento fletor para a viga analisada, o qual está apresentado na Fig. (5.13).

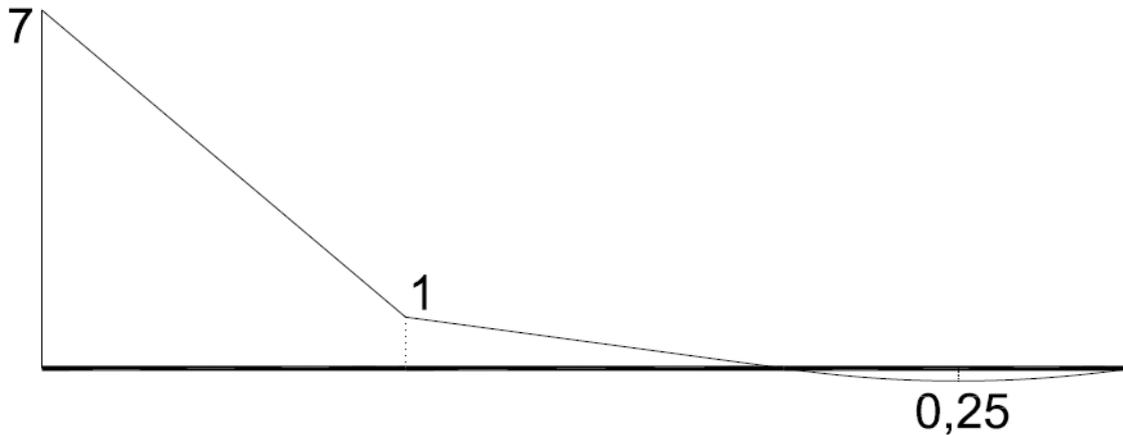


Figura 5.13 Diagrama de momento fletor.

A determinação das equações que descrevem a variação dos esforços solicitantes ao longo do comprimento da viga pode ser também efetuada. Utilizando as Eq.(5.7) obtêm-se as seguintes equações:

Para o trecho AD:

$$q = 0 \quad e \quad V = 6$$

$$M = \int 6dx \Rightarrow M = 6x + C_1$$

$$\text{em } x = 0, M = -7 \therefore C_1 = 7 \Rightarrow M = 6x - 7$$

Para o trecho DB:

$$q = 0 \quad e \quad V = 6 - 5 \Rightarrow V = 1$$

$$M = \int 1dx \Rightarrow M = x + C_2$$

$$\text{em } x = 0, M = -1 \therefore C_2 = -1 \Rightarrow M = x - 1$$

Para o trecho BC:

$$q = 2 \quad e \quad V = \int -2dx \Rightarrow V = -2x + C_3 \Rightarrow \text{em } x = 0, V = 1 \Rightarrow$$

$$C_3 = 1 \Rightarrow V = -2x + 1$$

$$M = \int -2x + 1dx \Rightarrow M = \frac{-2x^2}{2} + x + C_4 \Rightarrow x = 0, M = 0 \Rightarrow$$

$$C_4 = 0 \Rightarrow M = -x^2 + x$$

Representando graficamente as equações apresentadas acima, obtêm-se os diagramas de esforços solicitantes ilustrados nas Fig. (5.11), Fig. (5.12) e Fig. (5.13).

### 5.4 – Exemplo 3

No último exemplo deste capítulo, objetiva-se a determinação dos diagramas de esforços solicitantes da estrutura apresentada na Fig. (5.14). Trata-se de um sistema formado por duas vigas, onde uma viga apoia-se sobre a outra, e atua um carregamento uniformemente distribuído.

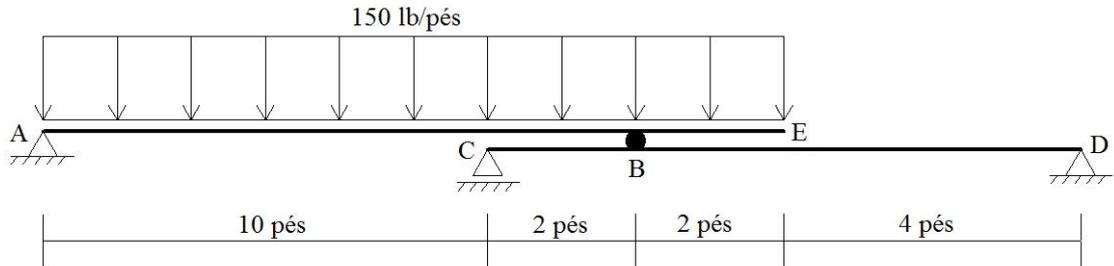


Figura 5.14 Estrutura considerada para análise.

O primeiro passo para a resolução deste exemplo trata da obtenção do diagrama de corpo livre da estrutura analisada. Substituindo as condições de vinculação do problema por reações equivalentes, obtém-se o diagrama apresentado na Fig. (5.15).

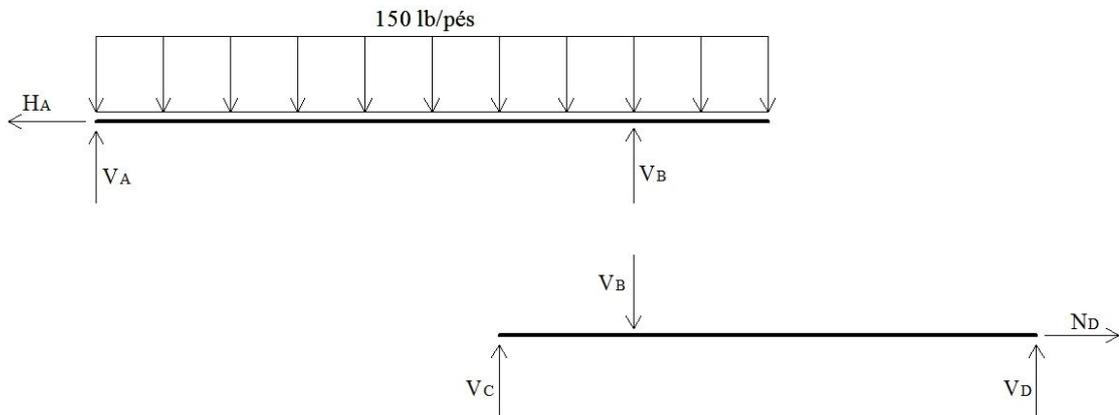


Figura 5.15 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido a viga superior, ou seja, a viga delimitada pelos nós A e E obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 && \Rightarrow H_A = 0 \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow V_B \cdot 12,0 - 150,0 \cdot 14,0 \cdot \frac{14,0}{2,0} = 0 && \Rightarrow V_B = 1225,0 \text{ lb} \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow V_A - 150,0 \cdot 14,0 + 1225,0 = 0 && \Rightarrow V_A = 875,0 \text{ lb}\end{aligned}$$

Considerando o equilíbrio de corpo rígido da viga delimitada pelos nós C e D resulta:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow N_D = 0 \\ \sum M_C = 0 & \Rightarrow -1225,0 \cdot 2,0 + V_D \cdot 8,0 = 0 \Rightarrow V_D = 306,25 \text{ lb} \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow V_C - 1225 + 306,25 = 0 \Rightarrow V_C = 918,75 \text{ lb} \end{aligned}$$

Para a viga delimitada pelos nós A e E observa-se a presença de um carregamento uniformemente distribuído. De acordo com o apresentado pelas Eq.(5.2) e Eq.(5.4), conclui-se que para este trecho o esforço cortante apresentará variação linear e o momento fletor variação quadrática. Deve-se destacar que devido à presença da reação pontual  $V_B$ , ocorrerá, no diagrama de esforço cortante, uma descontinuidade, de intensidade igual ao valor de  $V_B$ , a qual conduzirá a um “bico”, ou ponto com derivadas descontínuas, no diagrama de momento fletor.

Já para a viga delimitada pelos nós C e D, o carregamento distribuído atuante é nulo. Assim, neste trecho, conforme indicam as Eq.(5.2) e Eq.(5.4), o esforço cortante será constante e o momento fletor apresentará variação linear. Assim como na viga superior, na viga inferior ocorrerá também a descontinuidade no diagrama de esforço cortante devido à presença da reação pontual  $V_B$ .

Com base nos comentários dos dois últimos parágrafos, e nos diagramas de corpo livre, os diagramas de esforços solicitantes para as vigas analisadas podem ser construídos, os quais estão apresentados nas Fig. (5.16) e Fig. (5.17).

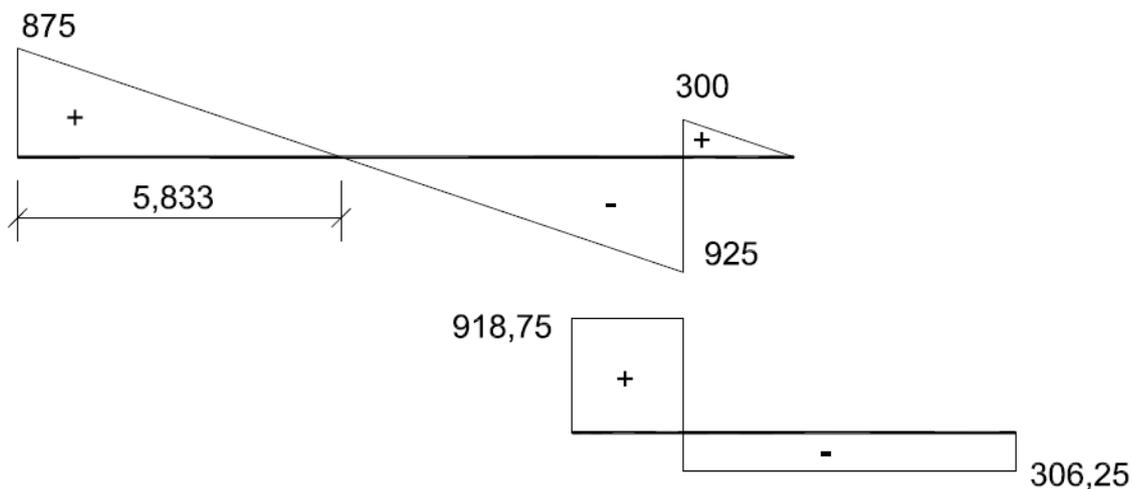


Figura 5.16 Diagrama de esforço cortante.

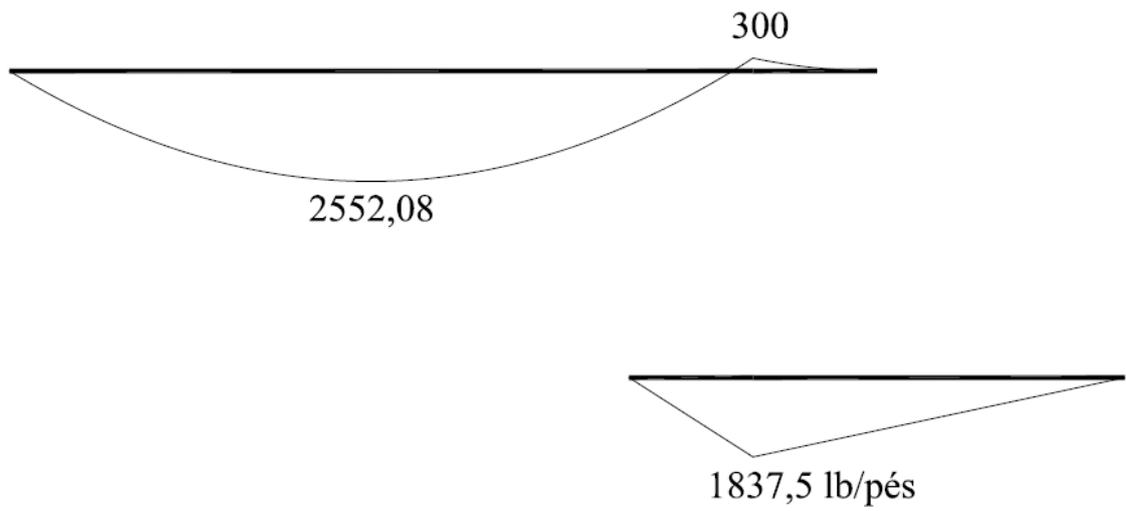


Figura 5.17 Diagrama de momento fletor.

## **6. – Elemento de Barra Geral: Pórticos Planos**

---

### 6.1 – Introdução

Pórticos planos são estruturas lineares planas submetidas a ações externas contidas no plano que define a geometria de sua estrutura. Seu emprego é amplo no domínio da engenharia das estruturas, principalmente em edificações e manufaturas mecânicas. Esse tipo de estrutura é composto por elementos de barra geral de geometria reta, sendo solicitado apenas por esforço normal, esforço cortante e momento fletor. Consequentemente, os pórticos planos conseguem representar os deslocamentos da estrutura no plano, ou seja, deslocamentos ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  bem como a rotação no plano  $\theta_{xy}$ . Deve-se destacar que existem também os pórticos tridimensionais, os quais são a generalização do caso plano.

A análise estrutural dos pórticos planos é efetuada de forma semelhante à apresentada para os elementos de viga. Assim, utilizam-se as relações diferenciais para o traçado dos diagramas de esforços solicitantes. Porém, como os pórticos envolvem normalmente mais de uma barra, nessas estruturas os diagramas são construídos barra a barra. Na sequência deste capítulo, serão apresentados três exemplos com o objetivo de ilustrar a determinação dos diagramas de esforços solicitantes em pórticos planos.

### 6.2 – Exemplo 1

O primeiro exemplo deste capítulo visa à determinação dos diagramas de esforços solicitantes do pórtico plano apresentado na Fig. (6.1). Trata-se de um pórtico composto por duas barras sendo solicitado por uma carga distribuída e duas forças pontuais. Na estrutura estão presentes um apoio fixo e um móvel, os quais impedem seu deslocamento de corpo rígido. Com base na geometria da estrutura, verifica-se que o

ângulo de inclinação  $\alpha$ , apresentado na Fig. (6.1), possui as seguintes propriedades trigonométricas:  $\text{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$ ,  $\text{cos}(\alpha) = \frac{4}{5}$ .

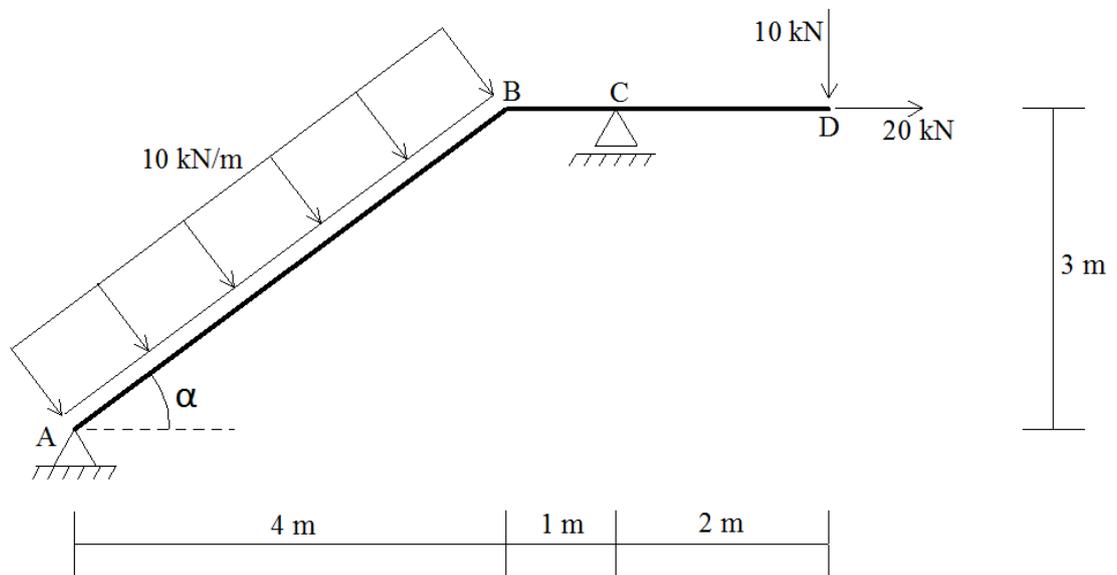


Figura 6.1 Estrutura considerada.

Para a resolução deste exemplo, deve-se, inicialmente, decompor a força equivalente correspondente à ação distribuída ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ . A Fig. (6.2) ilustra a decomposição desta força, a qual resulta uma parcela orientada ao longo do eixo  $x$ : *Parcela  $x = 50 \text{sen}(\alpha) = 30 \text{ kN}$* , e uma parcela orientada ao longo do eixo  $y$ : *Parcela  $y = 50 \text{cos}(\alpha) = 40 \text{ kN}$* .

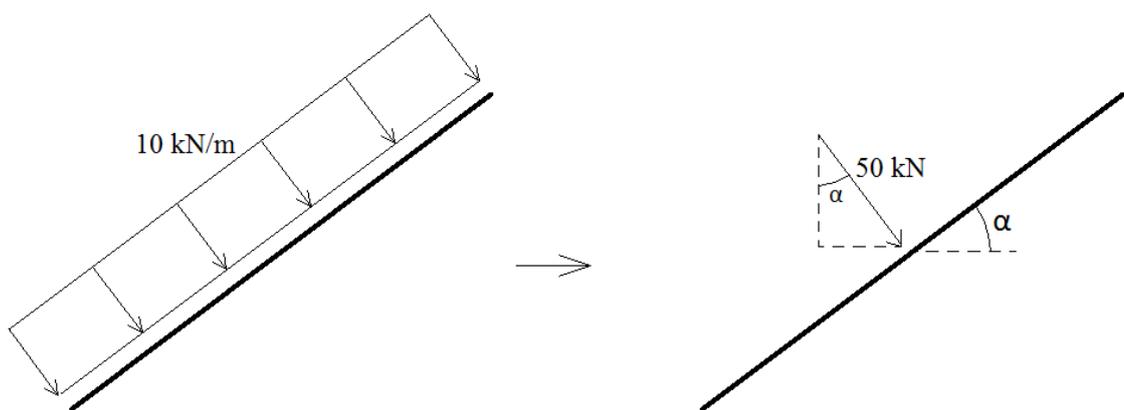


Figura 6.2 Decomposição da força equivalente a carga distribuída.

Com base na decomposição da força apresentada na Fig. (6.2) obtém-se o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (6.3). Assim, as reações de apoio da estrutura

são obtidas aplicando-se as equações de equilíbrio de corpo rígido sobre o sistema apresentado nessa figura. Portanto:

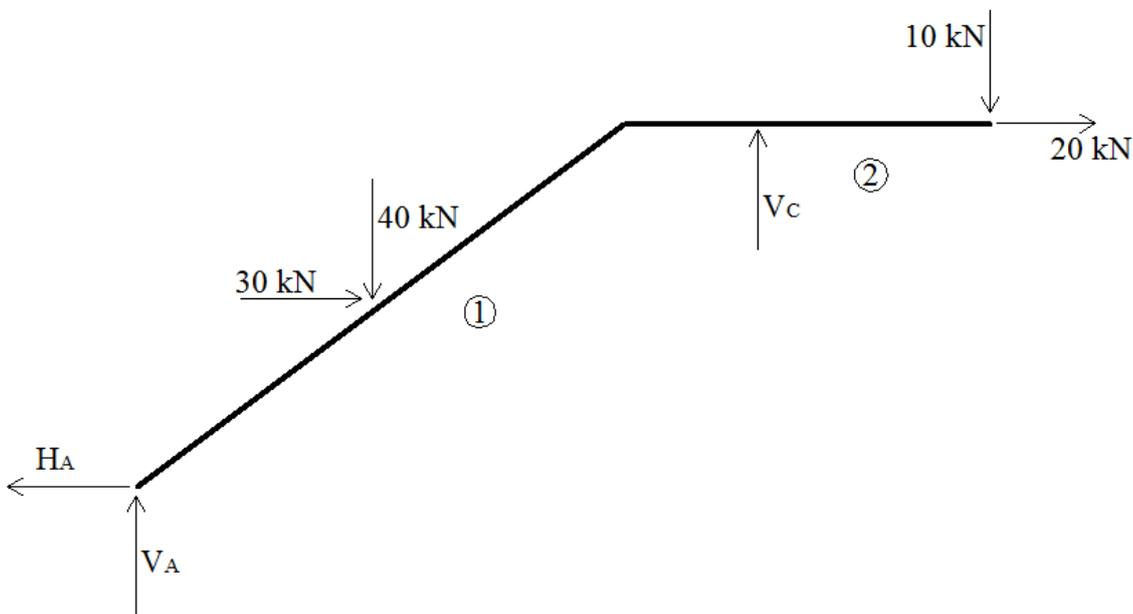


Figura 6.3 Diagrama de corpo livre.

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow 30 + 20 - H_A = 0 &&\Rightarrow H_A = 50 \text{ kN} \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -20 \cdot 3 - 10 \cdot 7 - 40 \cdot 2 - 30 \cdot 1,5 + V_c \cdot 5 = 0 &&\Rightarrow V_c = 51 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + 51 - 40 - 10 = 0 &&\Rightarrow V_A = -1 \text{ kN}\end{aligned}$$

Para o traçado dos diagramas de esforços solicitantes deve-se isolar o elemento de barra no qual deseja-se estudar a variação dos esforços. Iniciando o estudo pelo elemento 1 apresentado na Fig. (6.3), este deve ser isolado e as ações em suas extremidades devem ser representadas. Como esta barra é definida pelos nós A e B, as ações sobre o nó A são as reações de apoio calculadas anteriormente e sobre o nó B são os esforços solicitantes do extremo da barra. O diagrama de corpo livre desta barra, com as ações mencionadas, está apresentado na Fig. (6.4).

Para tornar possível a determinação dos esforços normal (atuante ao longo do comprimento da barra) e cortante (perpendicular ao eixo da barra), as reações do apoio A devem ser decompostas em parcelas orientadas ao longo do eixo da barra e perpendicular a este, como mostra a Fig. (6.4). Por meio desta figura, observa-se que a reação  $H_A$  gera uma componente normal,  $N_{HA}$ , e outra cortante,  $V_{HA}$ , as quais são determinadas pelas seguintes relações:

$$N_{H_A} = 50 \cos(\alpha) = 40 \text{ kN}$$

$$V_{H_A} = 50 \sin(\alpha) = 30 \text{ kN}$$

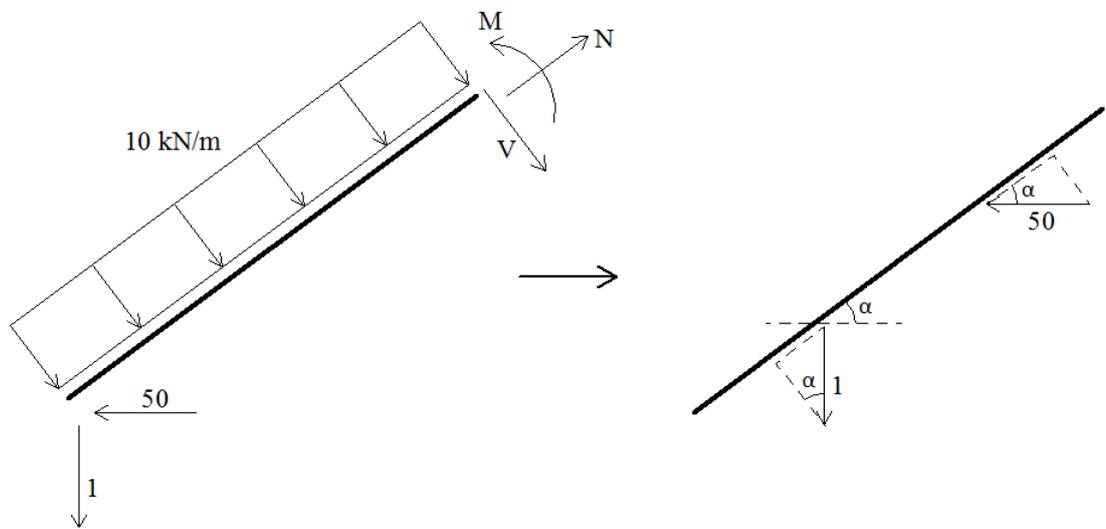


Figura 6.4 Diagrama de corpo livre barra 1.

Efetuada decomposição semelhante para a reação  $V_A$  obtém-se:

$$N_{V_A} = 1 \sin(\alpha) = 0,6 \text{ kN}$$

$$V_{V_A} = 1 \cos(\alpha) = 0,8 \text{ kN}$$

Assim, o diagrama de corpo livre da barra 1 pode ser reconstruído da maneira como apresentado na Fig. (6.5).

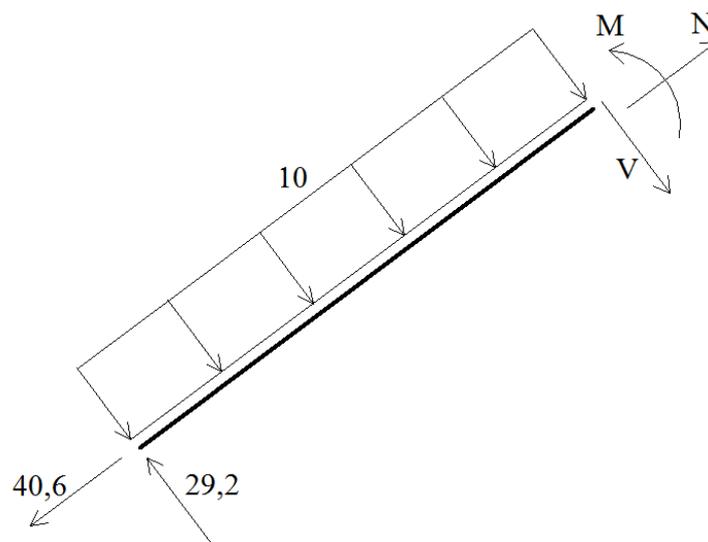


Figura 6.5 Diagrama de corpo livre barra 1.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao elemento 1 determinam-se os esforços solicitantes na extremidade B desta barra. Assim:

$$\begin{aligned}\sum F_N = 0 & \Rightarrow N = 40,6 \text{ kN} \\ \sum F_V = 0 & \Rightarrow 29,2 - 10 \cdot 5 - V = 0 \Rightarrow V = 20,8 \text{ kN} \\ \sum M_x = 0 & \Rightarrow -29,2 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 2,5 + M = 0 \Rightarrow M = 21 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Com base nas equações diferenciais, verifica-se que na barra 1 o esforço normal atuante é constante ao longo do comprimento da barra, sendo o mesmo de tração. Devido a presença da carga distribuída sobre a barra 1, constata-se, com base nas Eq.(5.2) e Eq.(5.4), que o esforço cortante apresentará variação linear ao longo do comprimento da barra, enquanto para o momento fletor esta variação será quadrática. Assim, considerando os esforços nas extremidades da barra e as informações relativas à variação destes ao longo de seu comprimento, obtêm-se os diagramas de esforços solicitantes, os quais estão apresentados na Fig. (6.6).

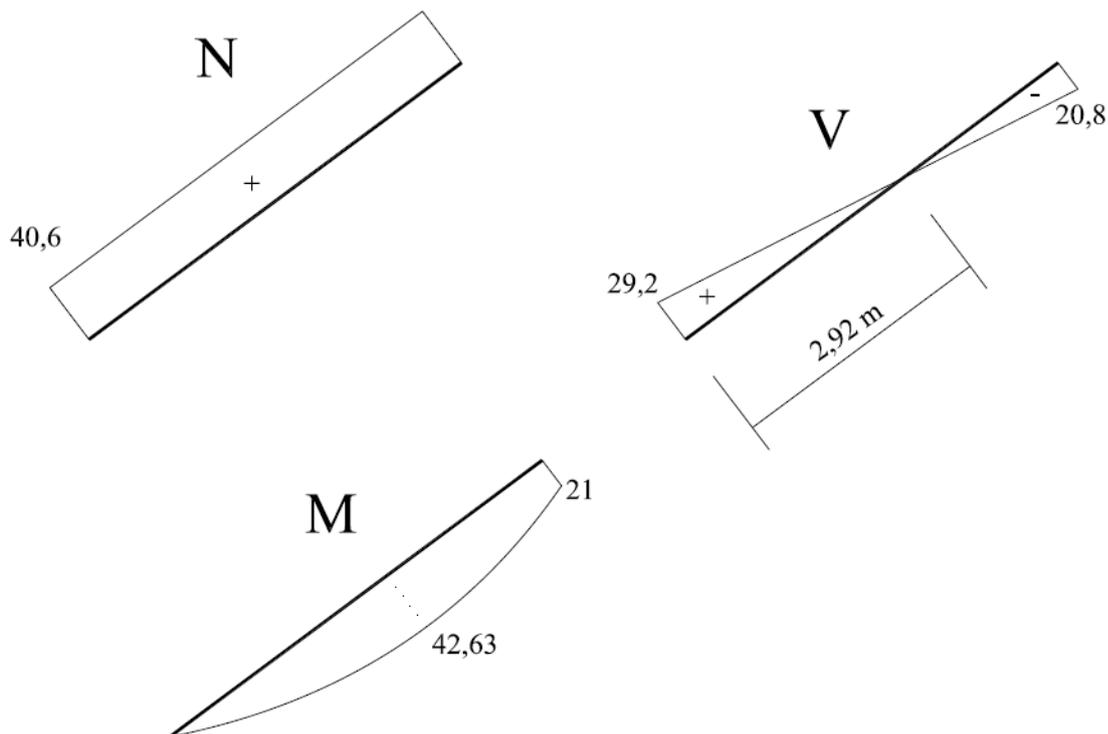


Figura 6.6 Diagramas de esforços solicitantes barra 1.

Para a construção dos diagramas de esforços solicitantes da barra 2, devem ser determinados os valores das ações atuantes em suas extremidades. Considerando o equilíbrio da barra 1, observa-se que as ações atuantes sobre o nó B foram já obtidas. Consequentemente, estas ações sobre a barra 2 terão mesma intensidade e direção mas

sentidos opostos (terceira lei de Newton). Dessa forma, para a barra 2, o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (6.7) pode ser facilmente obtido.

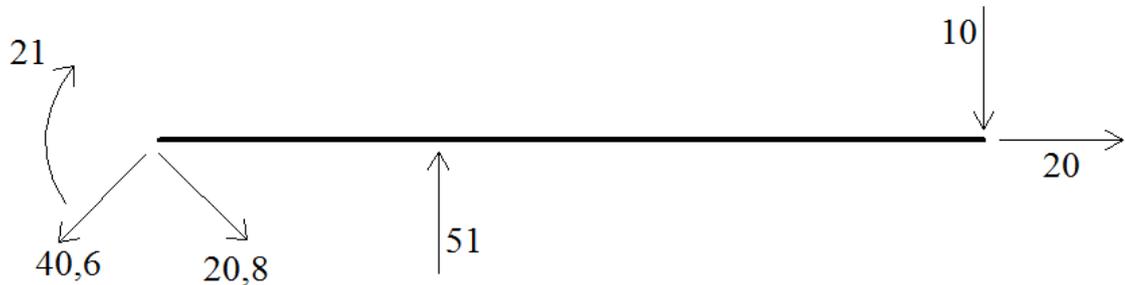


Figura 6.7 Diagrama de corpo livre para a barra 2.

Para que os diagramas de esforços solicitantes desta barra sejam construídos, as ações atuantes sobre o nó B devem ser decompostas segundo as direções paralela e perpendicular ao eixo da barra. Esta decomposição de forças está ilustrada na Fig. (6.8).

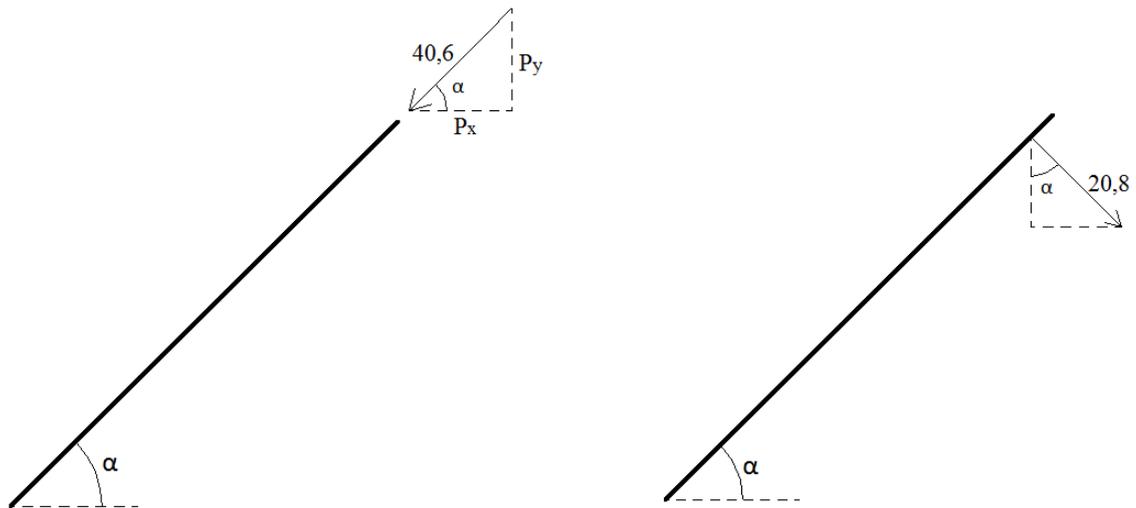


Figura 6.8 Decomposição de forças para a barra 2.

Para o esforço normal atuante na barra 1 sobre o nó B, de valor igual a 40,6 kN, sua decomposição em relação aos eixos  $x$  e  $y$  resulta:

$$P_y^N = -40,6 \text{sen}(\alpha) \Rightarrow P_y^N = -40,6 \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow P_y^N = -24,36 \text{ kN}$$

$$P_x^N = -40,6 \text{cos}(\alpha) \Rightarrow P_x^N = -40,6 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow P_x^N = -32,48 \text{ kN}$$

Já para o esforço cortante atuante na barra 1 sobre o nó B, de valor igual a 20,8 kN, sua decomposição em relação aos eixos paralelo e perpendicular à barra 2 resulta:

$$P_x^V = 20,8 \text{sen}(\alpha) \Rightarrow P_x^V = 20,8 \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow P_x^V = 12,48 \text{ kN}$$

$$P_y^V = -20,8 \text{cos}(\alpha) \Rightarrow P_y^V = -20,8 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow P_y^V = -16,64 \text{ kN}$$

Dessa forma, as ações de força na extremidade da barra 2, localizada sobre o nó B, resulta da soma conveniente das componente determinadas acima. Portanto, as resultantes ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  são iguais a:

$$P_x = -32,48 + 12,48 \Rightarrow P_x = -20 \text{ kN}$$

$$P_y = -24,36 - 16,64 \Rightarrow P_y = -41 \text{ kN}$$

Assim, como base nas ações determinadas na última equação, obtém-se o diagrama de corpo livre da barra 2 como mostrado na Fig. (6.9).

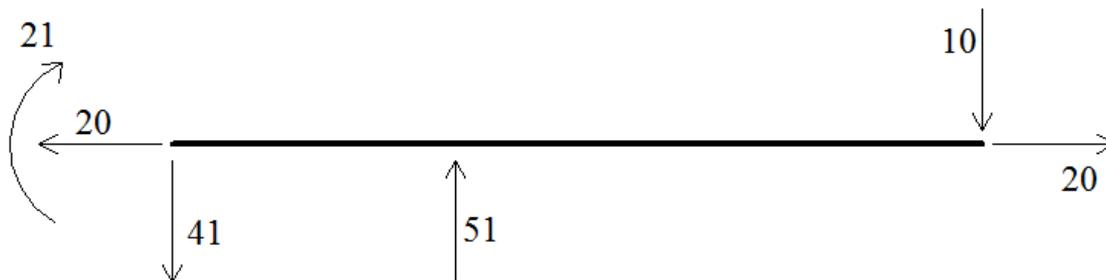


Figura 6.9 Diagrama de corpo livre para a barra 2.

Para a verificação da correção dos resultados até aqui obtidos, pode ser efetuado o equilíbrio de corpo rígido do elemento mostrado na Fig. (6.9). Como todas as ações são conhecidas, as equações de equilíbrio de corpo rígido devem ser satisfeitas. Assim:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sum F_x = -20 + 20 = 0 \quad OK!$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sum F_y = -41 + 51 - 10 = 0 \quad OK!$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \sum M_B = -10 \cdot 3 + 51 \cdot 1 - 21 = 0 \quad OK!$$

Com base no diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (6.9) e nas relações diferenciais, constata-se que o esforço normal é trativo, constante e igual a 20 kN. Como não existem cargas distribuídas sobre a barra 2, conclui-se, com base nas Eq. (5.2) e Eq.(5.4), que o esforço cortante apresentará variação constante e o momento fletor variação linear ao longo do comprimento da barra. Deve-se ressaltar que devido à reação do apoio C, surgirá uma descontinuidade no diagrama de esforço cortante de intensidade igual à reação deste apoio, a qual produzirá um “bico”, ou ponto com derivada descontínua, no diagrama de momento fletor. Assim, com base nestes comentários, os seguintes diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos.

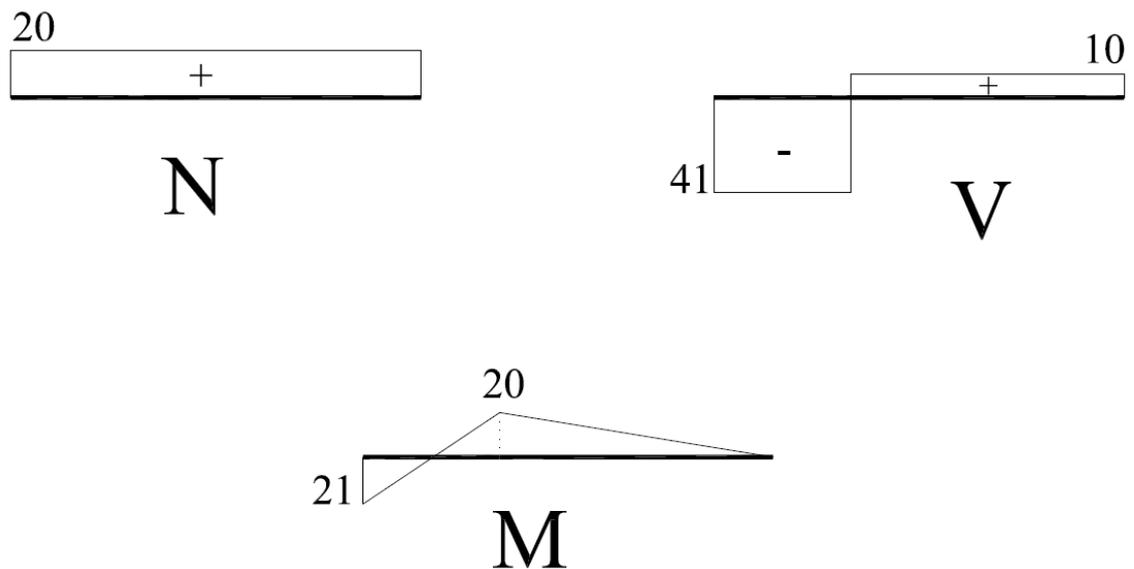


Figura 6.10 Diagramas de esforços solicitantes.

### 6.2 – Exemplo 2

Neste exemplo serão determinados os diagramas de esforços solicitantes da estrutura apresentada na Fig. (6.11). Esta é uma estrutura de pórtico plano, submetida a carregamentos concentrados e distribuído ao longo de suas barras e a um par de momentos fletores aplicado sobre o nó G. Além disso, estão também presentes dois apoios fixos e uma articulação.

Para a obtenção dos diagramas de esforços solicitantes, devem ser, inicialmente, determinadas as reações de apoio da estrutura. Como estão presentes no sistema estrutural dois apoios do tipo fixo, conclui-se que quatro reações de apoio deverão ser determinadas. Considerando o equilíbrio de corpo rígido plano, dispõe-se de três equações de equilíbrio, as quais poderão determinar três reações. Assim, a quarta reação de apoio será calculada utilizando o fato de que, sobre a articulação, o momento fletor é nulo. Portanto, na articulação a estrutura poderá ser seccionada e a somatória dos momentos fletores em relação à articulação, de ambas as partes seccionadas deverá ser nula. Dessa forma, obtém-se o diagrama de corpo livre da estrutura seccionando-a na articulação, como apresentado na Fig. (6.12).

Considerando que os esforços que surgem no ponto de corte são auto equilibrados tem-se:

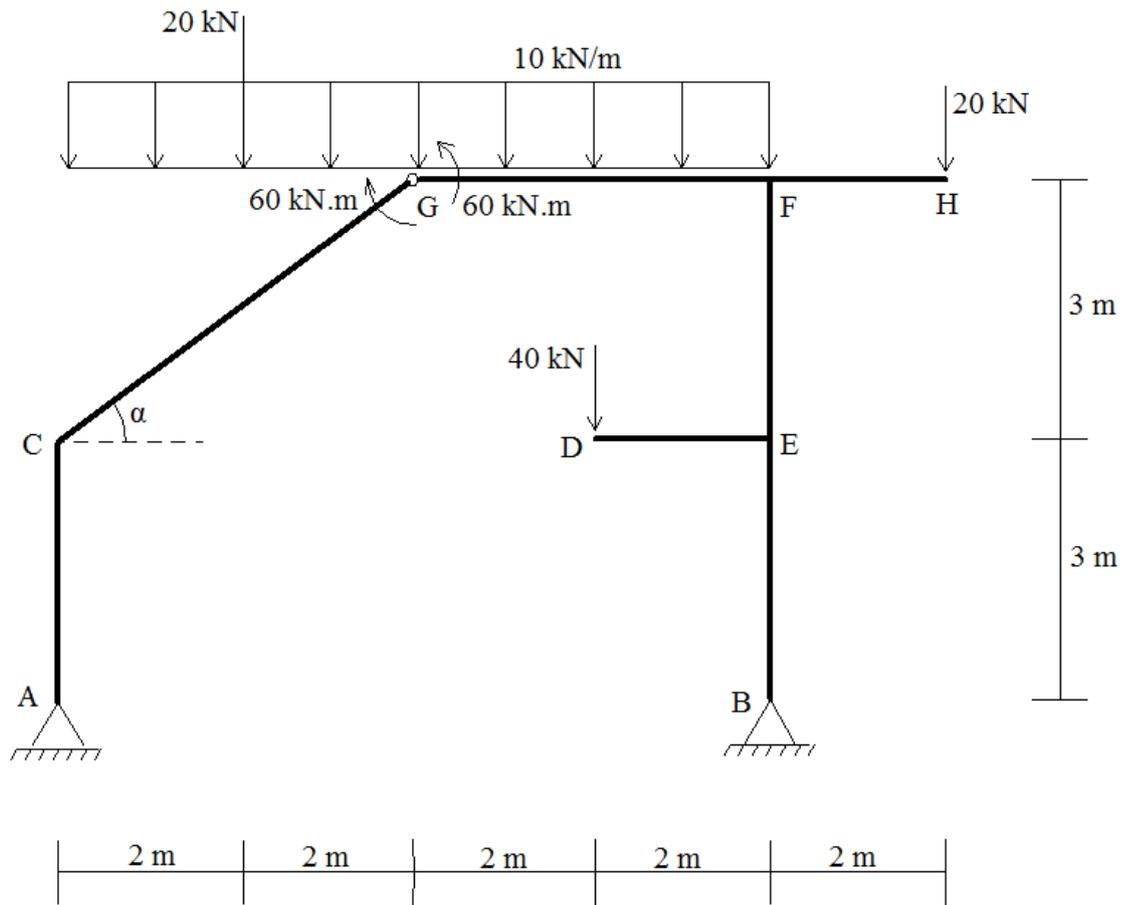


Figura 6.11 Estrutura a ser analisada.

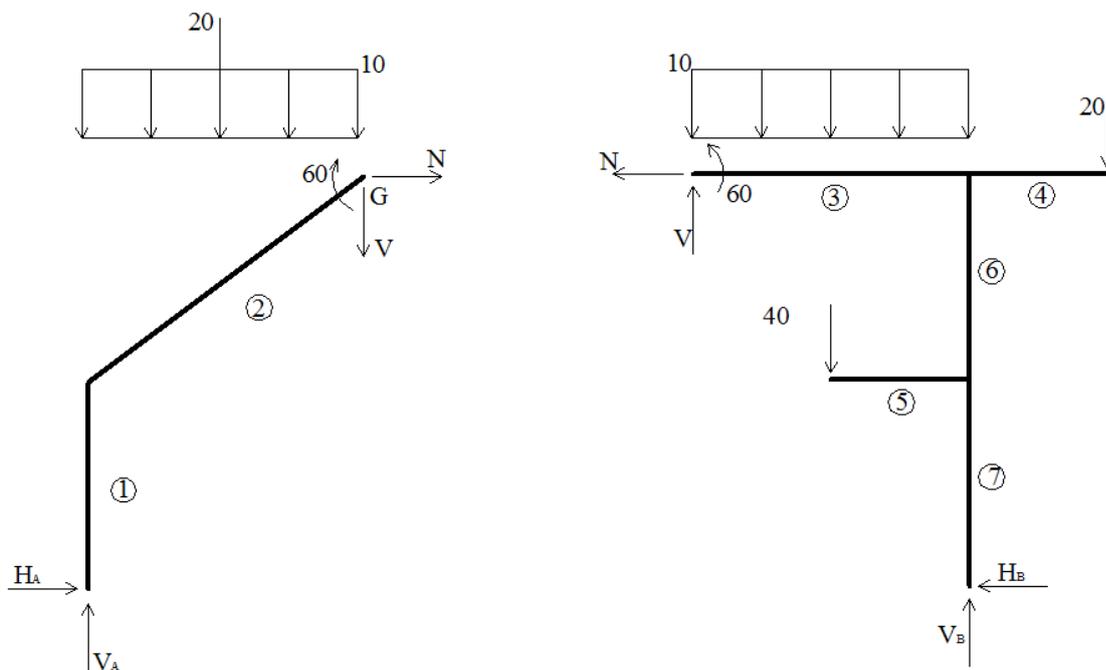


Figura 6.12 Diagrama de corpo livre.

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0 &\Rightarrow -V_A \cdot 8 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 8 \cdot \frac{8}{2} + 60 - 60 + 40 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \\ V_A &= 60 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow 60 - 20 - 10 \cdot 8 - 20 - 40 + V_B = 0 \Rightarrow \\ V_B &= 100 \text{ kN}\end{aligned}$$

O equilíbrio de corpo rígido da porção esquerda da estrutura, ou seja, aquela definida pelos nós A, C e G, pode ser efetuada utilizando o fato do momento ser nulo sobre a articulação. Assim:

$$\begin{aligned}\sum M_G = 0 &\Rightarrow -60 \cdot 4 + H_A \cdot 6 + 10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 20 \cdot 2 - 60 = 0 \Rightarrow H_A = 30 \text{ kN} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow 30 - H_B = 0 \Rightarrow H_B = 30 \text{ kN}\end{aligned}$$

Com base nas reações de apoio determinadas anteriormente, deve-se calcular os valores das ações nas extremidades das barras que compõem a estrutura. Iniciando a análise do problema pela barra 1, pode-se determinar seu diagrama de corpo livre, o qual está ilustrado na Fig. (6.13).

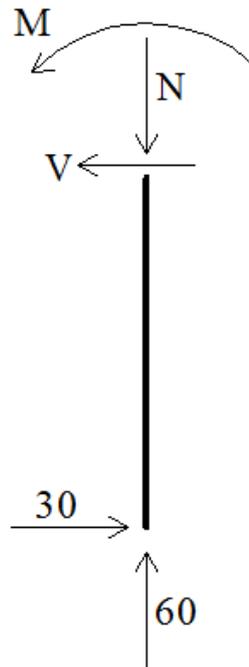


Figura 6.13 Diagrama de corpo livre barra 1.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido sobre a barra apresentada na Fig. (6.13) obtém-se:

$$\sum F_N = 0 \Rightarrow N = 60 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 30 \cdot 3 + M = 0 \Rightarrow M = -90 \text{ kN}$$

Por meio do equilíbrio efetuado anteriormente e das relações diferenciais, observa-se que o esforço normal é compressivo, constante e igual a 60 kN para esta barra. Já as variações do esforço cortante e do momento fletor podem ser determinadas utilizando as Eq. (5.2) e Eq.(5.4). Como nesta barra não existem carregamentos distribuídos perpendicularmente ao eixo da barra, o esforço cortante será constante e o momento fletor apresentará variação linear ao longo do comprimento da barra. Assim, os diagramas de esforços solicitantes apresentados na Fig. (6.14) podem ser construídos.

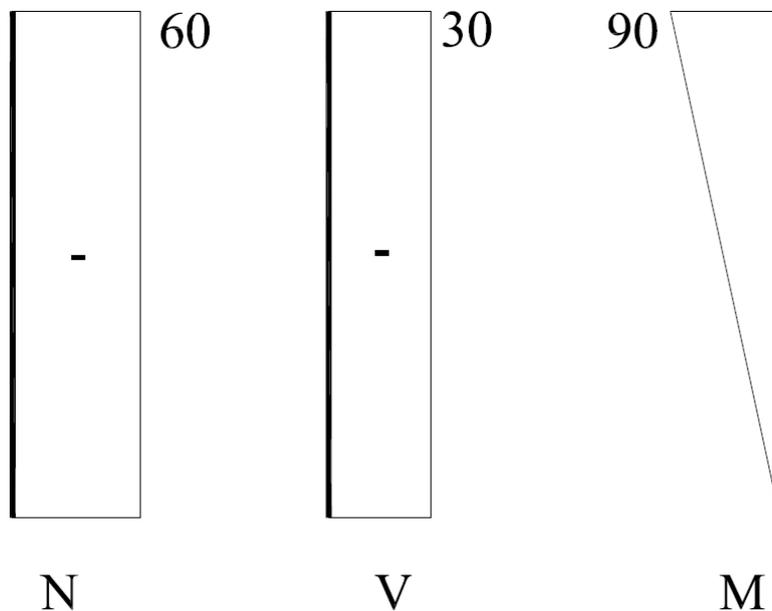


Figura 6.14 Diagramas de esforços solicitantes barra 1.

Passando agora à análise do elemento de barra 2, verifica-se que este encontra-se posicionado de forma inclinada em relação aos eixos cartesianos. Consequentemente, as ações internas e externas atuantes sobre esta barra deverão ser decompostas em relação às direções paralela e perpendicular ao eixo da barra. Com base no equilíbrio da barra 1, tem-se determinadas as ações atuantes sobre o nó C. Assim, o diagrama de corpo livre da barra 2 pode ser construído, como mostrado na Fig. (6.15).

A primeira ação a ser decomposta será a força concentrada de 20 kN. Com base no apresentado pela Fig. (6.16), suas componentes normal e cortante são obtidas utilizando a inclinação  $\alpha$ . Assim:

$$P_N^F = -20 \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow P_N^F = -12 \text{ kN}$$

$$P_V^F = -20 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow P_V^F = -16 \text{ kN}$$

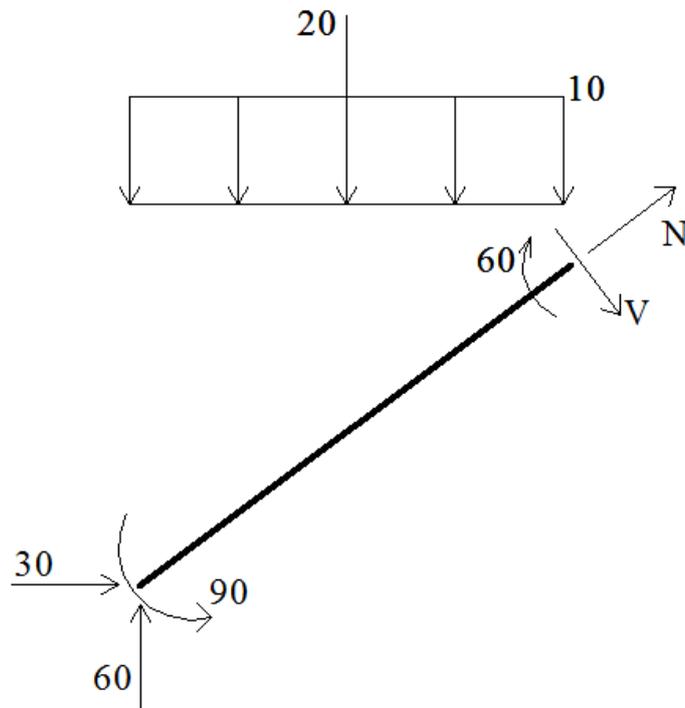


Figura 6.15 Diagrama de corpo livre para a barra 2.

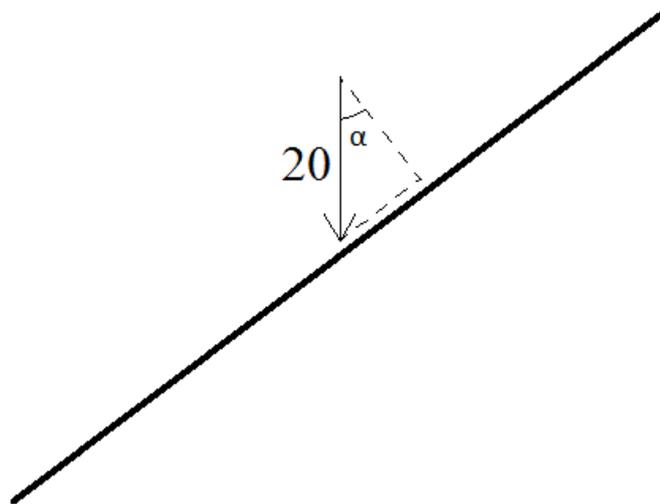


Figura 6.16 Decomposição da carga concentrada.

As reações da barra 1 sobre a barra 2 atuantes no nó C podem ser também decompostas. Utilizando a inclinação  $\alpha$  da barra em relação ao eixo  $x$  e a Fig. (6.17) tem-se:

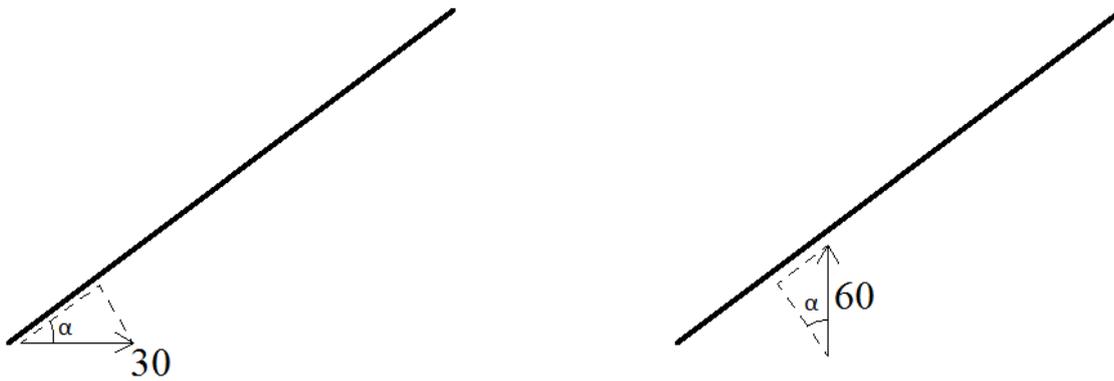


Figura 6.17 Decomposição reações da barra 1 sobre a barra 2.

Para a ação horizontal:

$$P_N^H = 30 \cdot \frac{4}{5} = 24 \text{ kN}$$

$$P_V^H = -30 \cdot \frac{3}{5} = -18 \text{ kN}$$

Para a ação vertical:

$$P_N^V = 60 \cdot \frac{3}{5} = 36 \text{ kN}$$

$$P_V^V = 60 \cdot \frac{4}{5} = 48 \text{ kN}$$

Somando convenientemente as parcelas correspondentes a decomposição das ações da barra 1 sobre a barra 2, verifica-se que a força orientada paralela ao eixo da barra 2 é igual a  $P_N = 24 + 36 \Rightarrow P_N = 60 \text{ kN}$ . Já a parcela orientada perpendicular ao eixo da barra 2 é igual a  $P_V = -18 + 48 \Rightarrow P_V = 30 \text{ kN}$ .

Com relação à decomposição do carregamento uniformemente distribuído, deve-se, primeiramente, determinar sua força equivalente. Para isso, multiplica-se o valor do carregamento uniformemente distribuído pelo comprimento no qual este atua. Em seguida, a força equivalente deve ser decomposta segundo as direções paralela e perpendicular ao eixo da barra 2. Finalmente, para a obtenção dos carregamentos distribuídos orientados em relação ao eixo da barra, divide-se cada uma das componentes calculadas pelo comprimento da barra. Para a barra estudada, este procedimento pode ser efetuado com o auxílio da Fig. (6.18).

A força equivalente a este carregamento distribuído é igual a  $10 \cdot 4 = 40 \text{ kN}$ . Utilizando a inclinação  $\alpha$  da barra e dividindo cada uma das componentes de força pelo comprimento da barra tem-se:

$$P_N = -40 \cdot \frac{3}{5} = -24 \Rightarrow P_N^D = -\frac{24}{5} = -4,8 \text{ kN/m}$$

$$P_V = -40 \cdot \frac{4}{5} = -32 \Rightarrow P_V^D = -\frac{32}{5} = -6,4 \text{ kN/m}$$

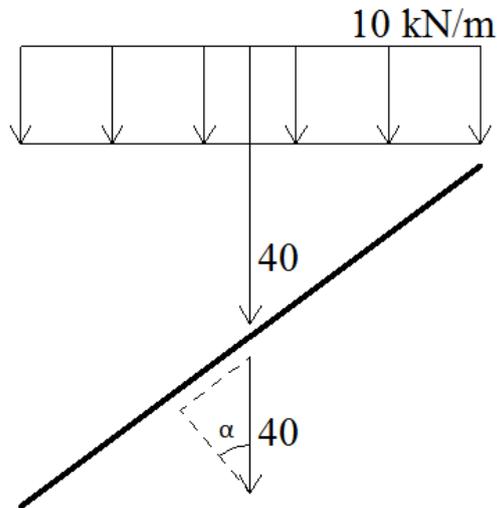


Figura 6.18 Decomposição da carga distribuída.

Dessa forma, as cargas distribuídas determinadas acima estão orientadas como apresentado na Fig. (6.19).

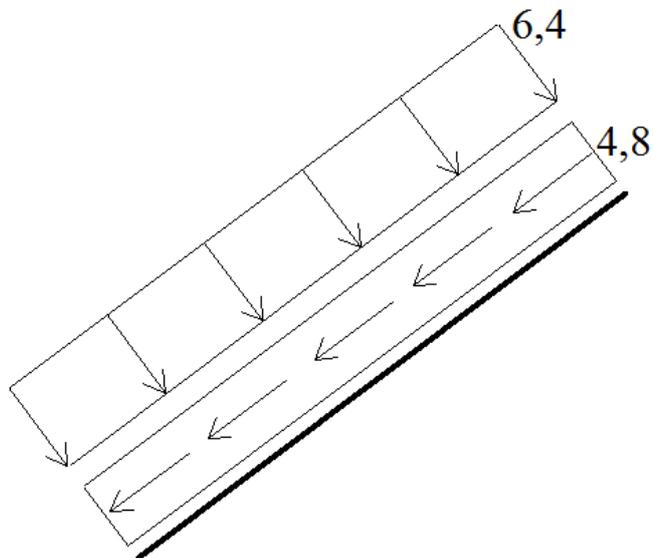


Figura 6.19 Decomposição da carga distribuída.

Portanto, com base na decomposição de todas as ações tem-se o diagrama de corpo livre da barra 2, o qual está ilustrado na Fig. (6.20).

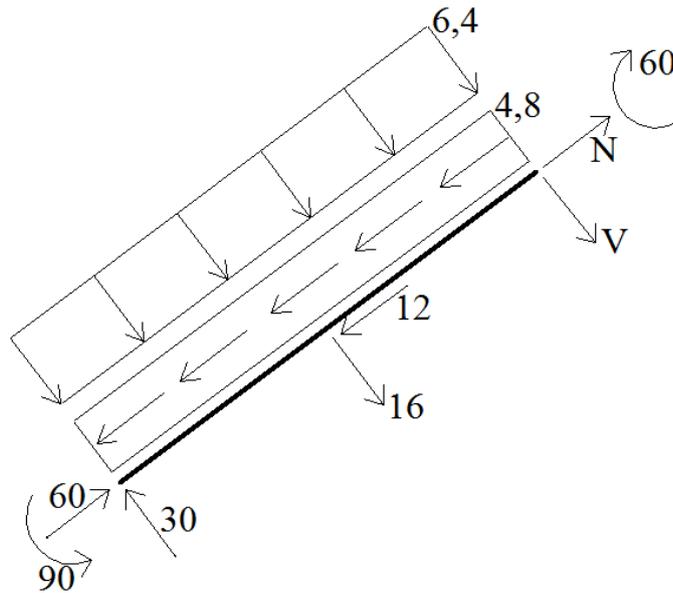


Figura 6.20 Diagrama de corpo livre para a barra 2.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao elemento apresentado na Fig. (6.20) obtém-se:

$$\sum F_N = 0 \Rightarrow 60 - 4,8 \cdot 5 + N - 12 = 0 \Rightarrow N = -24 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow 30 - 6,4 \cdot 5 - 16 - V = 0 \Rightarrow V = -18 \text{ kN}$$

Para a verificação sobre a correção dos resultados, pode-se verificar se a equação de somatória de momentos é atendida. Assim:

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow -30 \cdot 5 + 90 + 6,4 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} + 16 \cdot 2,5 - 60 = 0 \quad \text{OK!}$$

Com base nas relações diferenciais mostradas no capítulo anterior, verifica-se que o esforço normal apresenta variação linear ao longo da barra 2. Esta variação ocorre devido à presença de um carregamento distribuído axialmente como mostra a Fig. (6.20). O mesmo tipo de variação é observado para o esforço cortante. Este comportamento decorre da presença de uma carga distribuída perpendicularmente ao eixo da barra, como ilustrado na Fig. (6.20). Conseqüentemente, o momento fletor apresentará variação quadrática no trecho considerado. Deve-se ressaltar que devido à presença de duas forças concentradas no centro da barra 2, surgirão, neste ponto, descontinuidades nos diagramas de esforço normal e esforço cortante, além de, neste mesmo ponto, o diagrama de momento fletor apresentar derivada não contínua. Com base nas considerações deste parágrafo, podem ser construídos os diagramas de esforços solicitantes, os quais, para a barra 2, estão apresentados na Fig. (6.21).

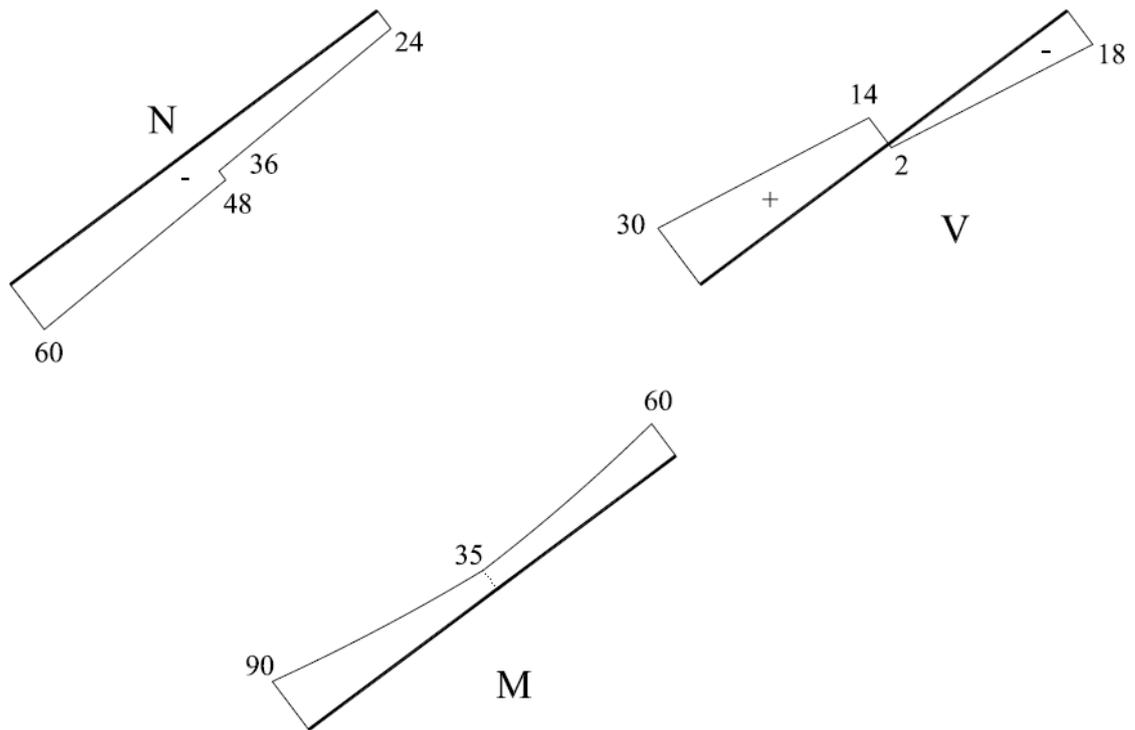


Figura 6.21 Diagramas de esforços solicitantes para a barra 2.

A próxima barra a ser analisada é a de número 3. Inicialmente, os esforços calculados na extremidade da barra 2, atuantes sobre o nó G, devem ser reaplicados sobre o extremo da barra 3 localizado sobre o nó G considerando mesma intensidade e direção, mas sentido oposto (terceira lei de Newton). Efetuando este procedimento, é possível construir o diagrama de corpo livre da barra 3, o qual está apresentado na Fig. (6.22).

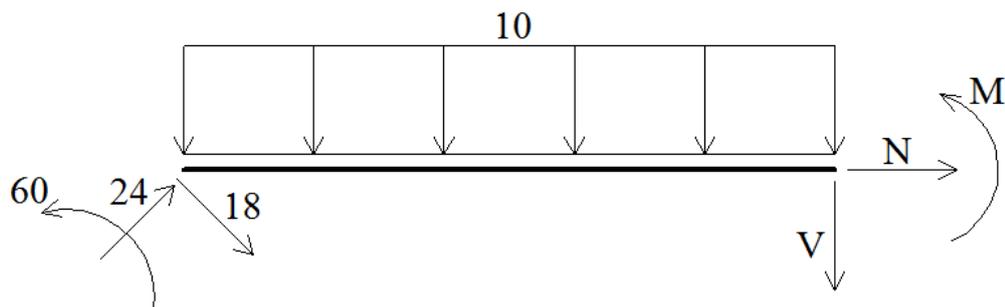


Figura 6.22 Diagrama de corpo livre para a barra 3.

Na sequência, as forças representadas na Fig. (6.22), atuantes sobre o nó G, devem ser decompostas segundo as direções normal e paralela ao eixo da barra 3. Utilizando a inclinação  $\alpha$  da barra 2 e o diagrama ilustrado na Fig. (6.23), as

componentes horizontal e vertical dos esforços inclinados aplicados sobre o nó G resultam:

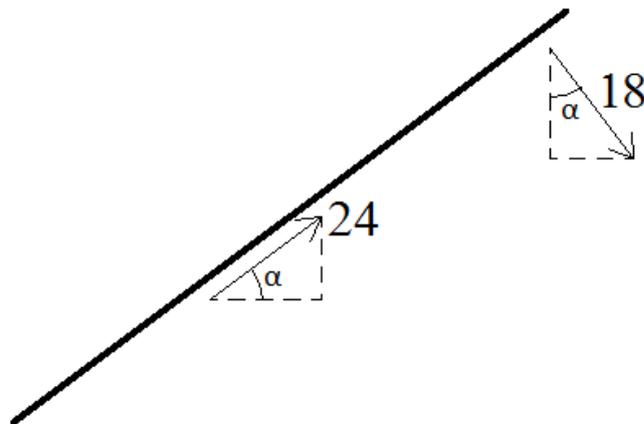


Figura 6.23 Decomposição de forças sobre o nó G.

$$P_x^N = 24 \cdot \frac{4}{5} = 19,2 \text{ KN}$$

$$P_y^N = 24 \cdot \frac{3}{5} = 14,4 \text{ KN}$$

$$P_x^V = 18 \cdot \frac{3}{5} = 10,8 \text{ KN}$$

$$P_y^V = 18 \cdot \frac{4}{5} = 14,4 \text{ KN}$$

Somando convenientemente as parcelas  $x$  e  $y$  calculadas acima, obtém-se o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (6.24).

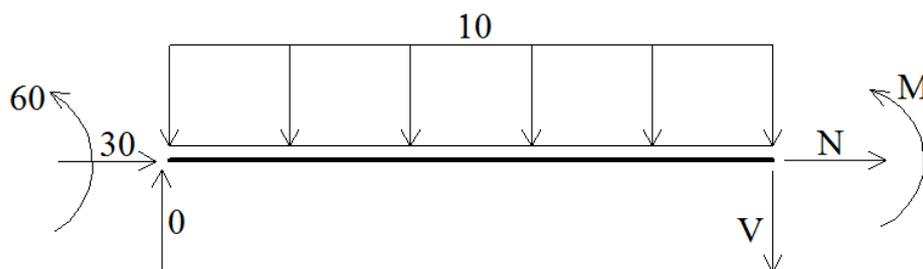


Figura 6.24 Diagrama de corpo livre para a barra 3.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao corpo apresentado na Fig. (6.24) obtém-se:

$$\sum F_N = 0 \Rightarrow 30 + N = 0 \Rightarrow N = -30 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow 0 - 10 \cdot 4 - V = 0 \Rightarrow V = -40 \text{ kN}$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 60 + 10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + M = 0 \Rightarrow M = -140 \text{ kNm}$$

Com base no diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (6.24) e nos valores acima calculados para as ações nas extremidades da barra 3 é possível a construção dos

diagramas de esforços solicitantes desta barra. Com base nos esforços atuantes nas extremidades da barra e nas relações diferenciais, observa-se que o esforço normal é compressivo, constante e igual a 30 kN. O esforço cortante apresenta variação linear ao longo do comprimento da barra, já que sobre esta existe um carregamento uniformemente distribuído orientado de forma perpendicular ao seu eixo. Conseqüentemente, utilizando as relações diferenciais, verifica-se que o momento fletor apresentará variação quadrática ao longo do comprimento da barra. Como o esforço cortante não passa por zero ao longo do comprimento da barra, constata-se que o momento máximo ocorrerá nas extremidades da barra. Considerando estes comentários, obtêm-se os diagramas de esforços solicitantes apresentados na Fig.(6.25).

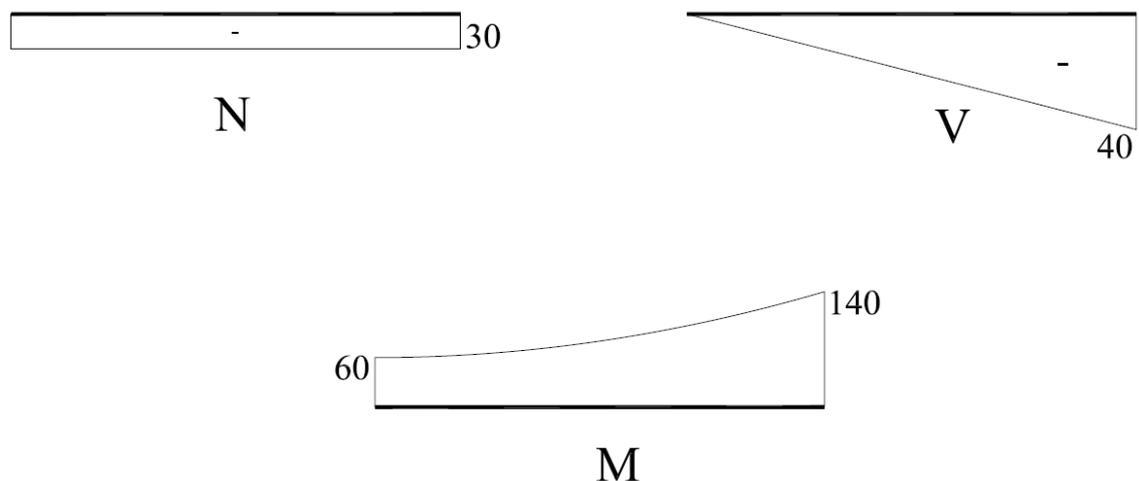


Figura 6.25 Diagramas de esforços solicitantes para a barra 3.

Isolando a barra 4 da estrutura, obtêm-se o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (6.26).

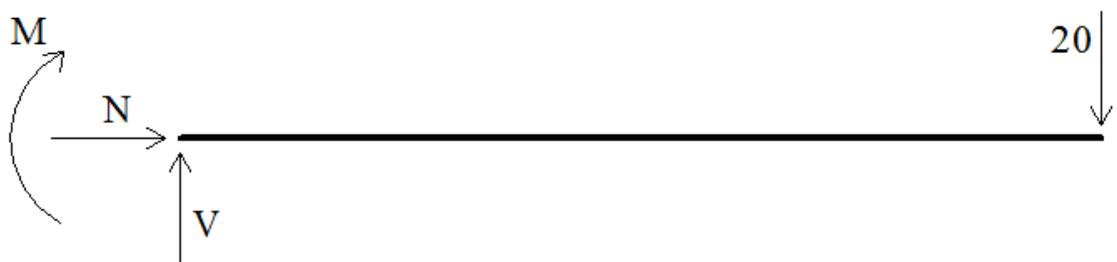


Figura 6.26 Diagrama de corpo livre para a barra 4.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo livre sobre este elemento obtêm-se os valores das ações atuantes sobre suas extremidades. Assim:

$$\sum F_N = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow M = -40 \text{ kN}$$

Com base nos valores dos esforços nas extremidades da barra e nas relações diferenciais, constata-se que o esforço normal é nulo. Além disso, o esforço cortante será constante e o momento fletor apresentará variação linear ao longo do comprimento da barra. Esse comportamento ocorre devido à ausência de carregamentos distribuídos. Assim, os seguintes diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos.

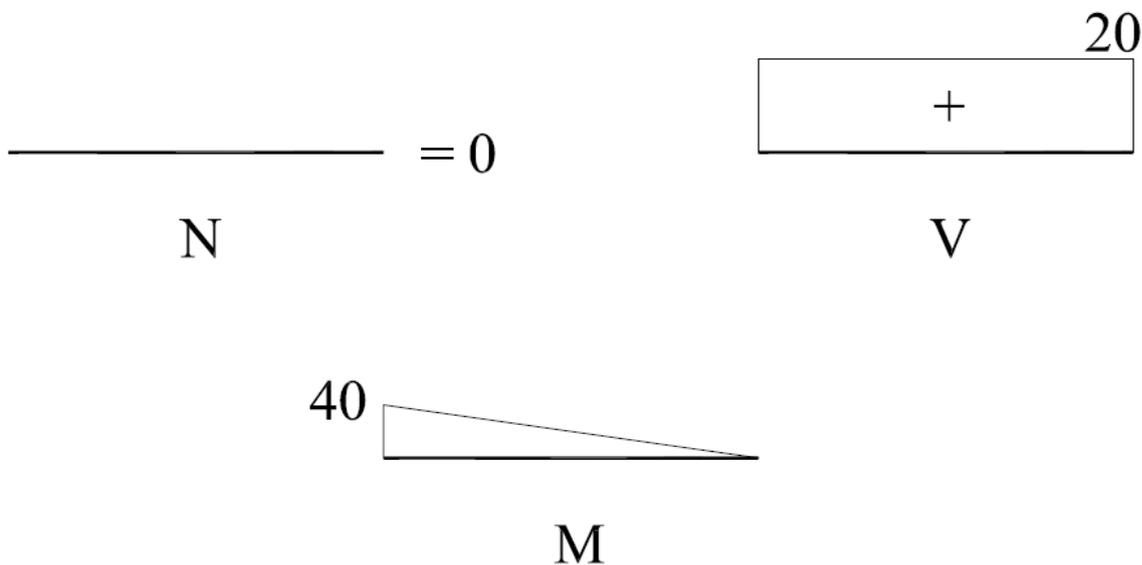


Figura 6.27 Diagramas de esforços solicitantes para a barra 4.

Considerando agora o elemento 5, sua análise é muito semelhante a apresentada para a barra 4, devido a semelhança entre os carregamentos atuantes e as condições de extremidade. Isolando o elemento 5 da estrutura obtém-se o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (6.28):

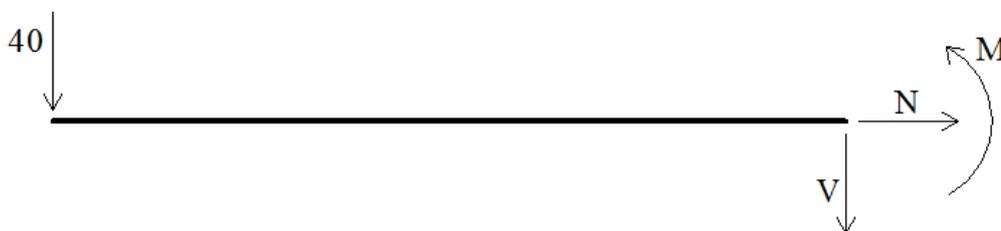


Figura 6.28 Diagrama de corpo livre para a barra 5.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao elemento apresentado na Fig. (6.28) obtém-se:

$$\begin{aligned}\sum F_N = 0 &\Rightarrow N = 0 \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow V = -40 \text{ kN} \\ \sum M_E = 0 &\Rightarrow M = -80 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Considerando os mesmos comentários efetuados sobre a variação dos esforços solicitantes ao longo do elemento 4, obtém-se os diagramas de esforços solicitantes atuantes sobre a barra 5, os quais estão ilustrados na Fig. (6.29).

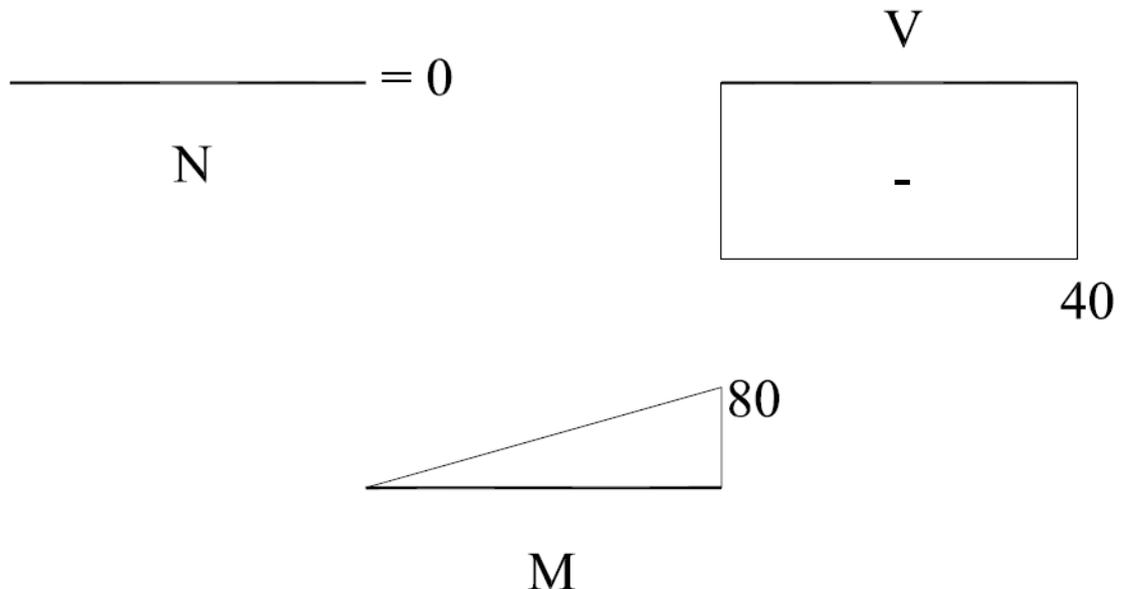


Figura 6.29 Diagrama de esforços solicitantes para a barra 5.

A próxima barra a ser analisada é a de número 6, a qual é definida pelos nós F e E sendo apresentada na Fig. (6.30). Para a obtenção dos esforços nas extremidades desta barra deve-se, primeiramente, efetuar o equilíbrio do nó F. Para tal fim, as ações nas extremidades das barras 3 e 4, atuantes sobre o nó F, devem ser aplicadas sobre este nó juntamente com as ações da extremidade da barra 6 atuantes também sobre este nó.

Devido a 3ª lei de Newton, as ações atuantes sobre o nó para a consideração do equilíbrio devem possuir mesma direção e intensidade, mas sentidos opostos aos determinados no equilíbrio das barras. As ações atuantes sobre o nó F estão ilustradas na Fig. (6.31).

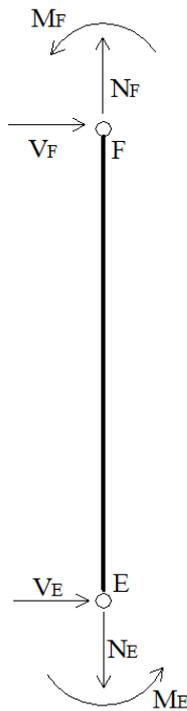


Figura 6.30 Diagrama de corpo livre para a barra 6.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido às ações mostradas na Fig.

(6.31) tem-se:

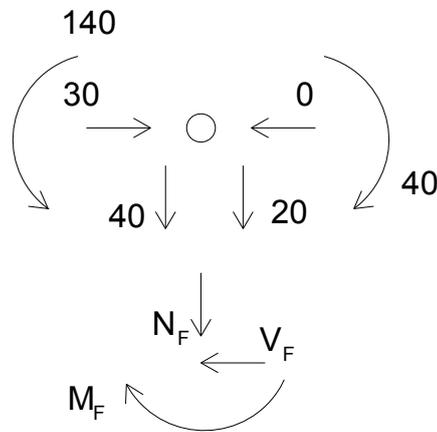


Figura 6.31 Equilíbrio nó F.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\Rightarrow -V_F + 30 = 0 &&\Rightarrow V_F = 30\text{kN} \\
 \sum F_y = 0 &\Rightarrow -40 - 20 - N_F = 0 &&\Rightarrow N_F = -60\text{kN} \\
 \sum M = 0 &\Rightarrow 140 - 40 - M_F = 0 &&\Rightarrow M_F = 100\text{kNm}
 \end{aligned}$$

Com base nas ações “ $X_F$ ” obtidas no equilíbrio apresentado acima, pode-se reconstruir o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (6.29). Dessa forma, obtém-se o diagrama de corpo livre ilustrado na Fig. (6.32).

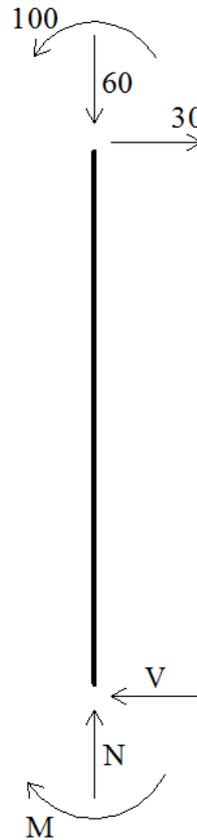


Figura 6.32 Diagrama de corpo livre para a barra 6.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido a barra mostrada na Fig.(6.32) obtém-se:

$$\begin{aligned}\sum F_N = 0 &\Rightarrow N - 60 = 0 &&\Rightarrow N = 60 \text{ kN} \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow V - 30 = 0 &&\Rightarrow V = 30 \text{ kN} \\ \sum M_E = 0 &\Rightarrow 100 - 30 \cdot 3 - M = 0 &&\Rightarrow M = 10 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Devido a ausência de carregamentos distribuídos nessa barra, pode-se concluir, com base nas relações diferenciais apresentadas no capítulo anterior, que o esforço normal será compressivo, constante e igual a 60 kN. O esforço cortante será constante e o momento fletor apresentará variação linear ao longo do comprimento da barra. Assim, os diagramas de esforços solicitantes desta barra podem ser construídos, como mostrado na Fig. (6.33).

Finalmente, deve-se analisar a última barra do pórtico, a qual apresenta o número 7. Esta barra é delimitada pelos nós E e B, sendo que sobre o nó B atuam as reações de um apoio fixo. Dessa forma, pode-se construir o diagrama de corpo livre desta barra como mostrado na Fig. (6.34).

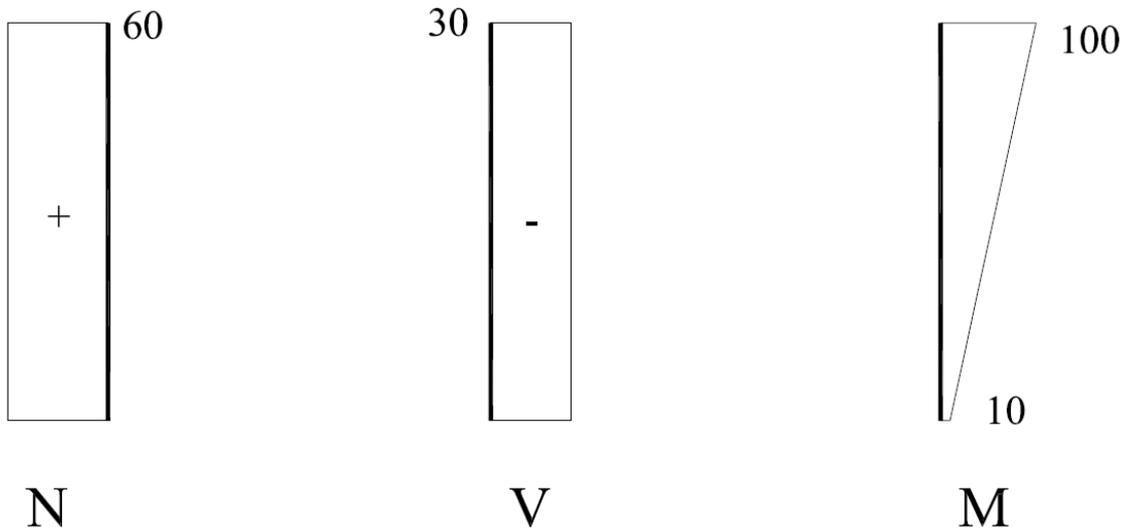


Figura 6.33 Diagramas de esforços solicitantes para a barra 6.

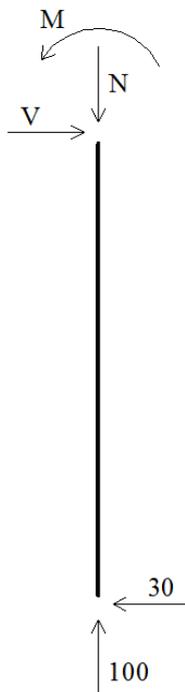


Figura 6.34 Diagrama de corpo livre para a barra 7.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido sobre o elemento e as ações mostradas na Fig. (6.34) tem-se:

$$\begin{aligned}\sum F_N = 0 &\Rightarrow 100 - N = 0 &&\Rightarrow N = 100 \text{ kN} \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow 30 - V = 0 &&\Rightarrow V = 30 \text{ kN} \\ \sum M_E = 0 &\Rightarrow M - 30 \cdot 3 = 0 &&\Rightarrow M = 90 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Devido a ausência de forças distribuídas sobre esta barra, constata-se, com base nas relações diferenciais apresentadas no capítulo anterior, que o esforço normal será constante, compressivo e igual a 100 kN. Além disso, o esforço cortante apresentará comportamento constante e o momento fletor apresentará variação linear ao longo da barra. Os diagramas de esforços solicitantes para esta barra, com base nestes comentários, podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (6.35).

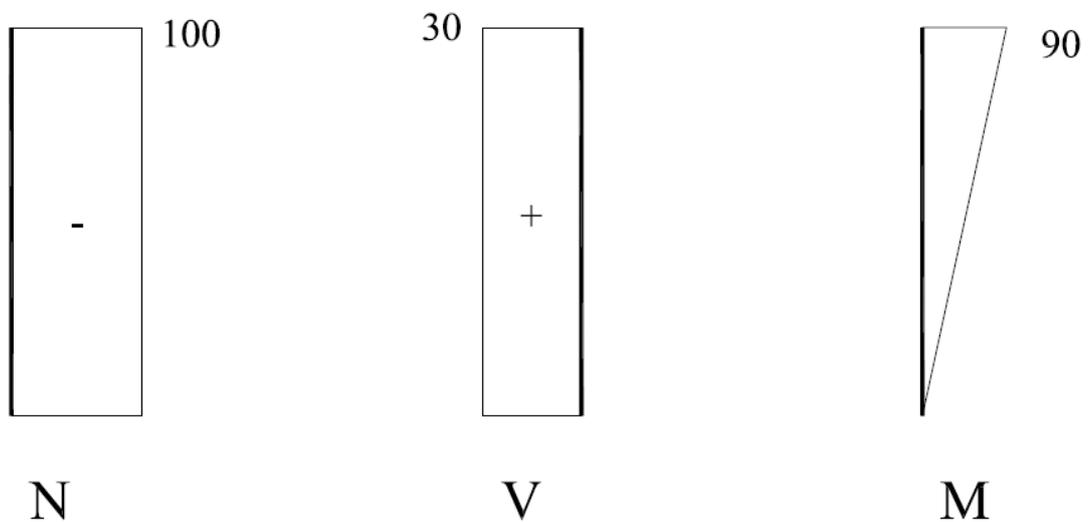


Figura 6.35 Diagramas de esforços solicitantes para a barra 7.

De forma a verificar a correção do exercício, pode-se averiguar se a condição de equilíbrio do nó E é atendida. Sobre este nó concorrem três barras. Assim, as ações das extremidades dessas barras, atuantes sobre o nó E, devem ser aplicadas sobre este nó e a condição de equilíbrio de corpo rígido deve ser atendida. Para tal finalidade, os esforços determinados nas extremidades das barras devem ser reaplicados sobre o nó com mesma intensidade e direção, mas com sentido contrário (3ª lei de Newton).

Na Fig. (6.36) estão apresentadas as ações atuantes sobre o nó E. Impondo, sobre essas ações, a condição de equilíbrio tem-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow 0 - 30 + 30 = 0 &&OK! \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow 100 - 40 - 60 = 0 &&OK! \\ \sum M = 0 &\Rightarrow 80 + 10 - 90 = 0 &&OK!\end{aligned}$$

Assim, o equilíbrio é satisfeito indicando a correção do exercício.

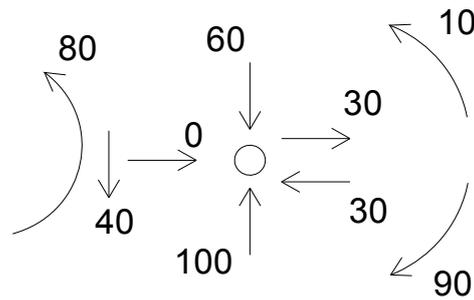


Figura 6.36 Verificação do equilíbrio do nó E.

### 6.3 – Exemplo 3

No último exemplo deste capítulo serão determinados, para o pórtico plano apresentado na Fig. (6.37), os diagramas de esforços solicitantes e as reações dos vínculos internos e externos existentes. O pórtico está submetido apenas a carregamentos uniformemente distribuídos ao longo das barras que o compõem. Além disso, a estrutura é vinculada por meio de dois apoios do tipo fixo, posicionados sobre os nós A e D. Uma característica diferente presente neste pórtico, e ainda não discutida nos exemplos anteriores, é o tipo de ligação (ou vínculo interno) existente entre as barras 2 e 3, ou seja, sobre o nó C. Este tipo de ligação impede apenas o deslocamento vertical e o giro relativo entre as referidas barras. Portanto, são transmitidas somente a força vertical (esforço normal da barra 2 e esforço cortante da barra 3) e o momento fletor entre as barras unidas neste nó.

O diagrama de corpo livre da estrutura, separada no nó C com os respectivos esforços internos e externos, é apresentado na Fig. (6.38). Se a estrutura está em equilíbrio, cada parte isolada da estrutura também estará em equilíbrio. Fazendo o equilíbrio da parte esquerda da estrutura, definida pelos nós A, B e C, tem-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + 10 \cdot 5 = 0 \Rightarrow H_A = 50 \text{ kN}$$

Considerando todas as ações atuantes sobre a estrutura, tem-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -50 + 10 \cdot 5 - H_D = 0 \Rightarrow H_D = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -V_A \cdot 8 - 50 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} + 10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + M_C - M_C + 2 \cdot (V_C - V_C) = 0$$

$$V_A = -5,625 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -5,625 - 10 \cdot 4 + V_D = 0 \Rightarrow V_D = 45,625 \text{ kN}$$

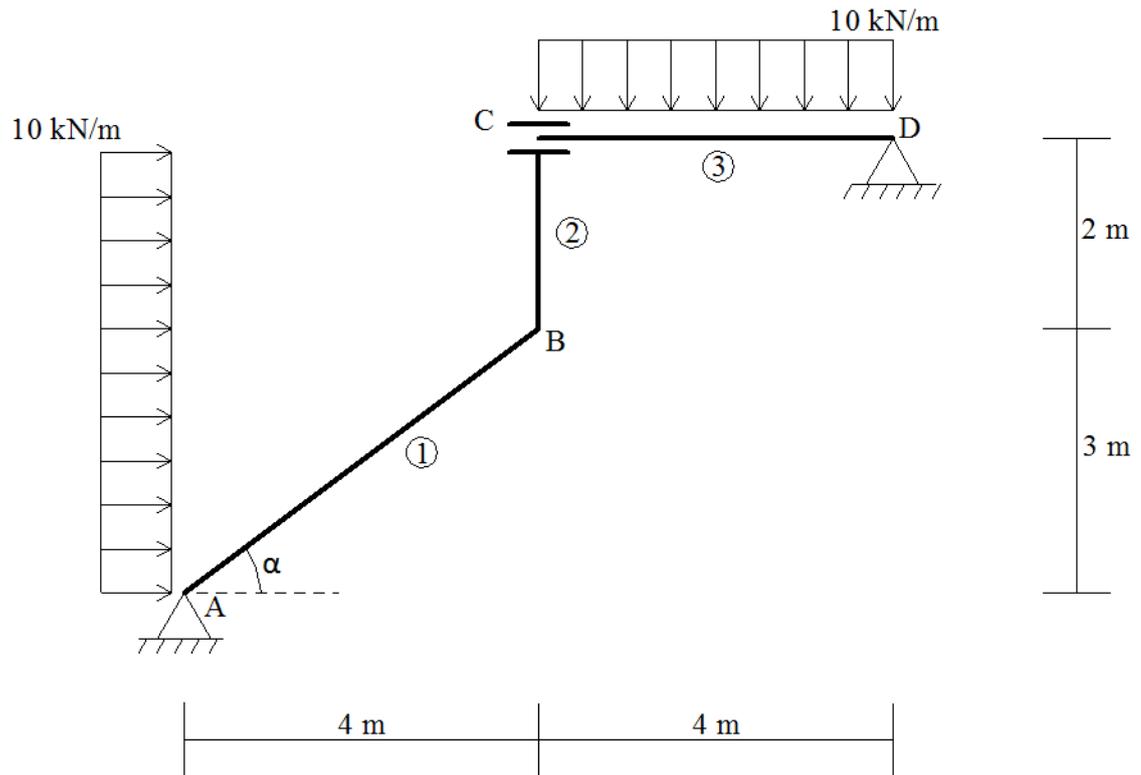


Figura 6.37 Estrutura a ser analisada.

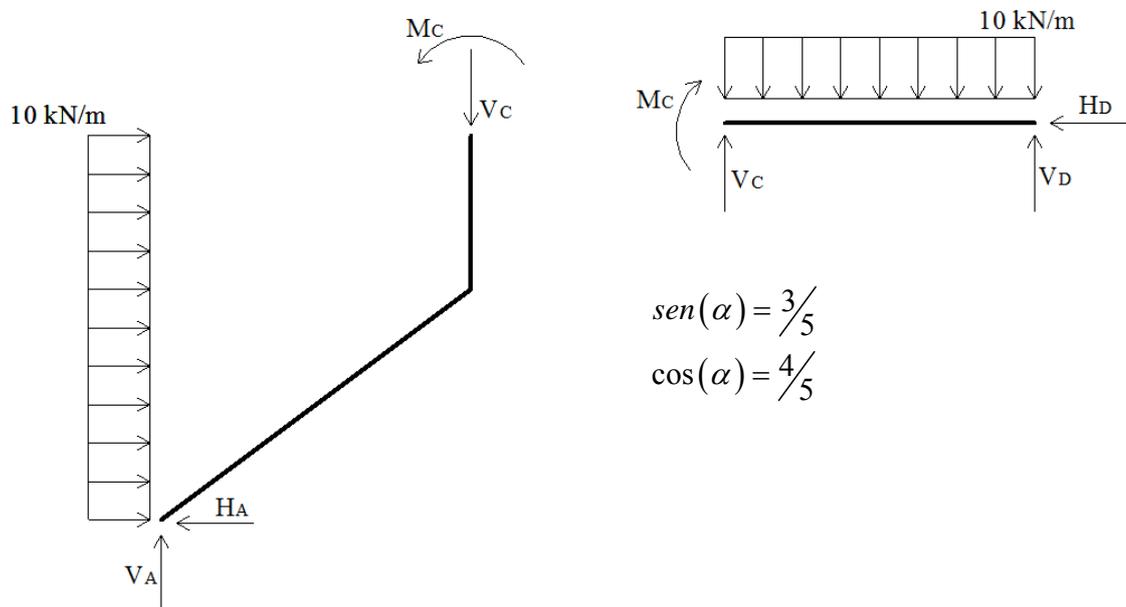


Figura 6.38 Diagrama de corpo livre.

Considerando agora apenas a parte direita da estrutura, definida pelos nós C e D, obtêm-se os valores dos esforços atuantes sob o nó C aplicando as seguintes equações de equilíbrio de corpo rígido:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_c + V_d - 10 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_c + 45,625 - 40 = 0 \Rightarrow V_c = -5,625 \text{ kN}$$

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow V_d \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - M_c = 0 \Rightarrow M_c = 102,5 \text{ kNm}$$

Conhecidas as reações dos vínculos externos e do vínculo interno entre as barras 2 e 3, deve-se analisar o diagrama de corpo livre de cada uma das barras de forma isolada, para então serem traçados os diagramas de esforços solicitantes desejados.

Começando pela barra 1, a Fig. (6.39) apresenta o diagrama de corpo livre desta barra, que encontra-se inclinada de  $\alpha$  em relação à horizontal.

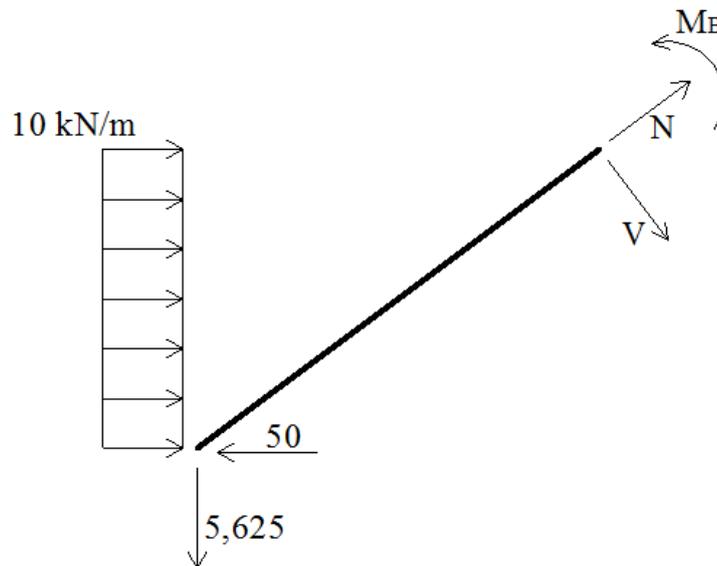


Figura 6.39 Diagrama de corpo livre da barra 1.

Antes de serem aplicadas as equações de equilíbrio de corpo rígido, faz-se necessária a decomposição das reações de apoio atuantes sobre o nó A em relação às direções paralela e perpendicular ao eixo da barra. Isso será feito utilizando a Fig.(6.40).

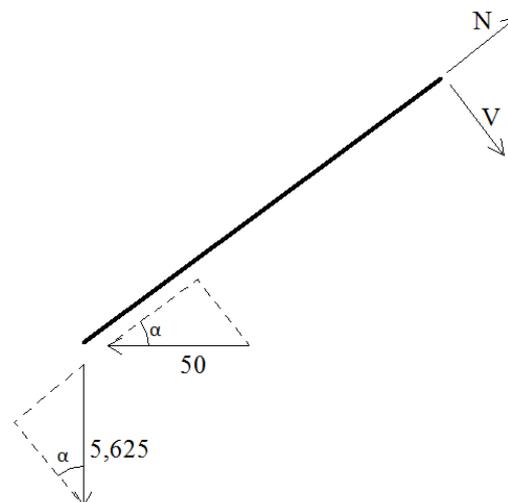


Figura 6.40 Decomposição das reações de apoio do nó A.

As parcelas paralela e perpendicular ao eixo da barra, devidas à reação do apoio A, são obtidas por:

$$P_N^{50} = 50 \cos(\alpha) = 40 \text{ kN}$$

$$P_V^{50} = 50 \sin(\alpha) = 30 \text{ kN}$$

$$P_N^{5,625} = 5,625 \sin(\alpha) = 3,375 \text{ kN}$$

$$P_V^{5,625} = 5,625 \cos(\alpha) = 4,5 \text{ kN}$$

Somando convenientemente as parcelas correspondentes à decomposição das reações no nó A, verifica-se que a força resultante orientada paralela ao eixo da barra 1 é igual a  $P_N = 40 + 3,375 \Rightarrow P_N = 43,375 \text{ kN}$ . Já a parcela orientada perpendicular ao eixo da barra 1 é igual a  $P_V = 30 - 4,5 \Rightarrow P_V = 25,5 \text{ kN}$ .

Além da decomposição das reações, é necessária a decomposição da carga distribuída que atua ao longo da barra 1. Primeiramente, determina-se a força concentrada equivalente ao carregamento distribuído, a qual é obtida multiplicando-se o valor da carga distribuída pelo comprimento no qual esta atua. Então, decompõe-se a força equivalente segundo as direções perpendicular e paralela ao eixo da barra em questão. Dividindo-se as componentes da força equivalente pelo comprimento da barra, encontram-se os valores das cargas distribuídas, paralela e perpendicular, ao longo da barra 1. Este procedimento está representado na Fig. (6.41).

A força equivalente a este carregamento distribuído é igual a  $10 \cdot 3 = 30 \text{ kN}$ . Utilizando a inclinação  $\alpha$  da barra e dividindo cada uma das componentes de força pelo comprimento da barra tem-se:

$$P_N = 30 \cos(\alpha) = 24 \text{ kN} \Rightarrow P_N^D = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ kN/m}$$

$$P_V = 30 \sin(\alpha) = 18 \text{ kN} \Rightarrow P_V^D = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ kN/m}$$

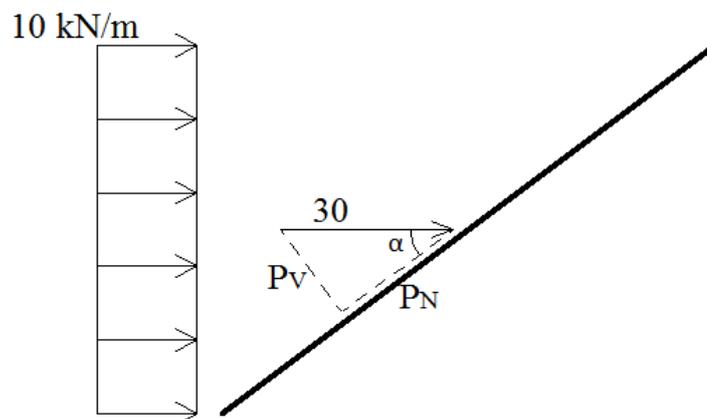


Figura 6.41 Decomposição da carga distribuída.

Dessa forma, as cargas distribuídas determinadas anteriormente estão orientadas como apresentado na Fig. (6.42), a qual também ilustra o diagrama de corpo livre da barra 1.

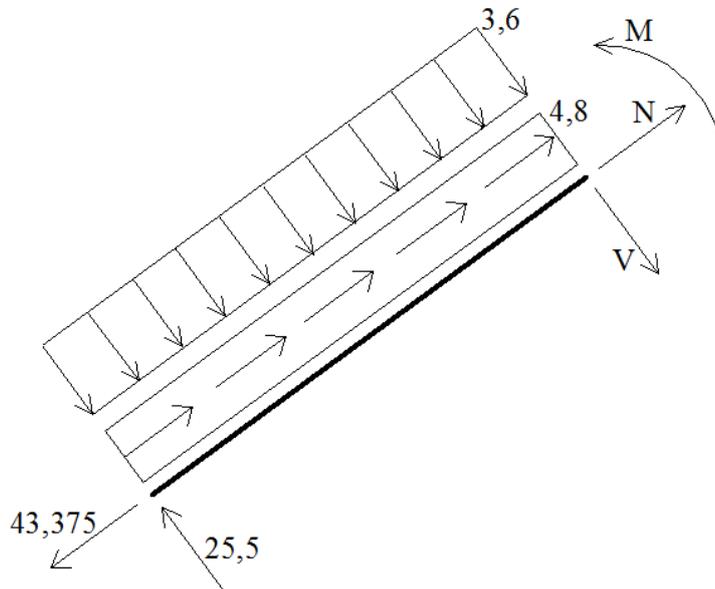


Figura 6.42 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à barra apresentada na Fig. (6.42) obtém-se:

$$\begin{aligned}\sum F_N = 0 &\Rightarrow -43,375 + 4,8 \cdot 5 + N = 0 &&\Rightarrow N = 19,375 \text{ kN} \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow 25,5 - 3,6 \cdot 5 - V = 0 &&\Rightarrow V = 7,5 \text{ kN} \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow -25,5 \cdot 5 + 3,6 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} + M = 0 &&\Rightarrow M = 82,5 \text{ KN} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Com base nas relações diferenciais apresentadas no capítulo anterior, verifica-se que o esforço normal possui variação linear ao longo do comprimento da barra. Esta variação ocorre devido à presença de uma carga distribuída de forma paralela ao eixo da barra como mostrado na Fig. (6.42). O mesmo tipo de variação é observado para o esforço cortante. Este comportamento decorre da presença de uma carga distribuída de forma perpendicular ao eixo da barra, como também ilustrado na Fig. (6.42). Consequentemente, o momento fletor apresentará variação quadrática no trecho considerado. Com base nas considerações deste parágrafo, podem ser construídos os diagramas de esforços solicitantes da barra analisada, os quais estão apresentados na Fig. (6.43).

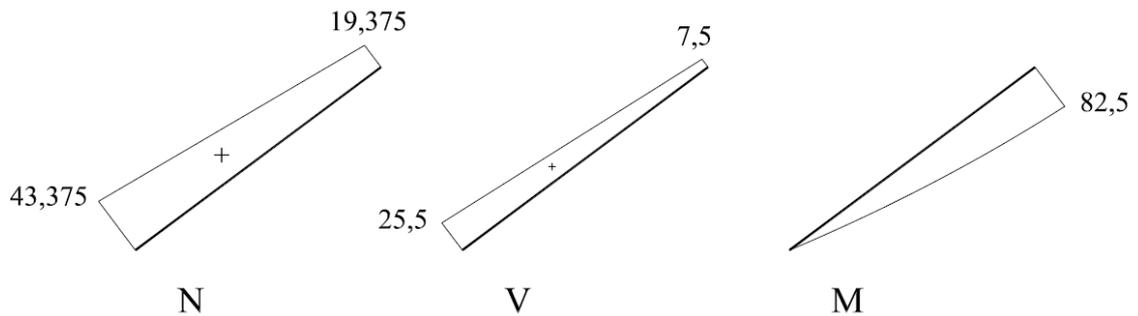


Figura 6.43 Diagramas de esforços solicitantes para a barra 1.

Para a barra 2, esquematiza-se o diagrama de corpo livre tal como apresentado na Fig. (6.44). Salienta-se que os esforços do nó C foram obtidos no instante em que as reações dos vínculos internos e externos foram determinadas.

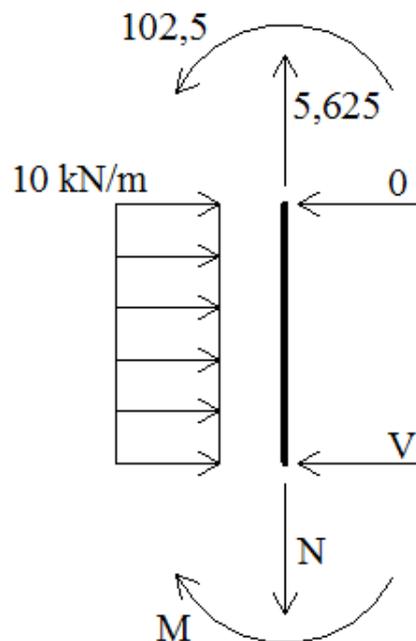


Figura 6.44 Diagramas de corpo livre para a barra 2.

Aplicando-se as equações de equilíbrio de corpo rígido ao corpo apresentado na Fig. (6.44) obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum F_N = 0 &\Rightarrow -N + 5,625 = 0 &&\Rightarrow N = 5,625 \text{ kN} \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow -V + 10 \cdot 2 = 0 &&\Rightarrow V = 20 \text{ kN} \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow -M - 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 102,5 = 0 &&\Rightarrow M = 82,5 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Uma maneira de verificar se os resultados obtidos até o momento estão corretos, é efetuando o equilíbrio do nó B considerando as ações das extremidades das barras 1 e

2 atuantes sobre o nó B. Decompondo as ações da barra 1 em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , como mostrado na Fig. (6.45), obtém-se:

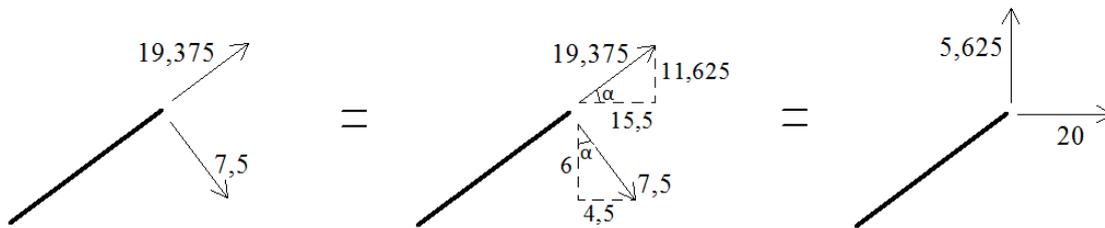


Figura 6.45 Decomposição dos esforços da barra 1 no nó B.

Considerando as ações determinadas na barra 2, pode-se escrever o equilíbrio do nó B, conforme apresentado na Fig. (6.46). Portanto, verifica-se que o equilíbrio é satisfeito, indicando a correção dos equilíbrios até aqui efetuados.

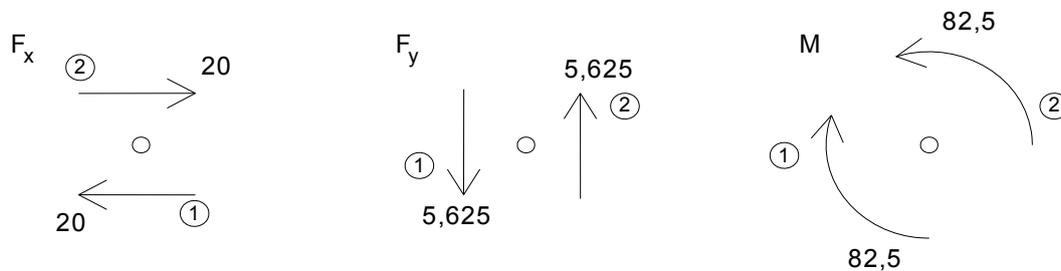


Figura 6.46 Equilíbrio do nó B.

Com base no diagrama de corpo livre da barra 2, apresentado na Fig. (6.44), e nos valores anteriormente calculados para as ações em suas extremidades, é possível a construção dos diagramas de esforços solicitantes para a referida barra. Com base nos valores dos esforços nas extremidades da barra e nas relações diferenciais, observa-se que o esforço normal atuante na barra é de tração, constante e igual a 5,625 kN. O esforço cortante apresenta variação linear ao longo do comprimento da barra, já que sobre esta existe um carregamento uniformemente distribuído atuando. Consequentemente, utilizando-se as relações diferenciais, verifica-se que o momento fletor apresentará variação quadrática ao longo do comprimento da barra. Com base nestes comentários, obtêm-se os diagramas de esforços solicitantes apresentados na Fig.(6.47).

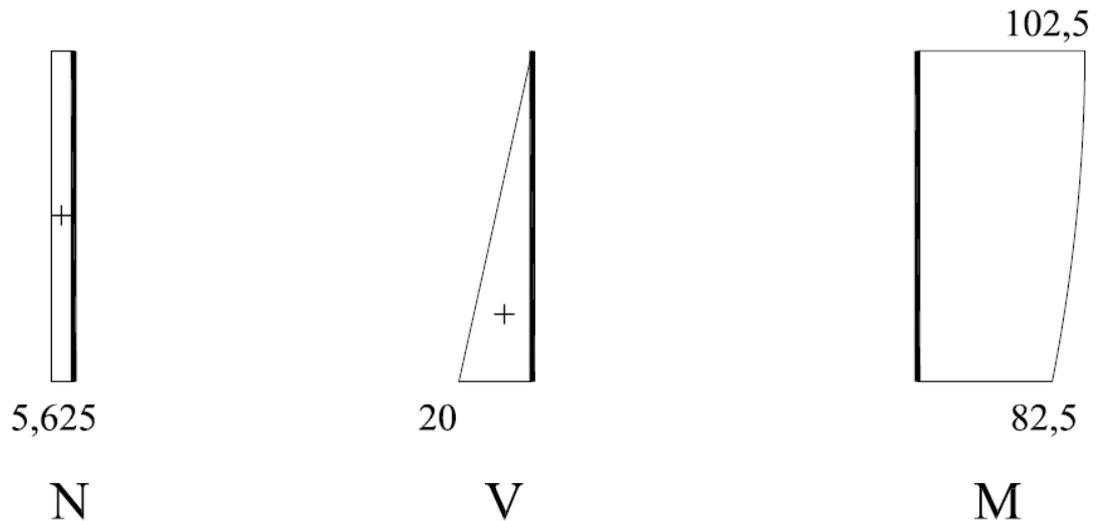


Figura 6.47 Diagrama de esforços solicitantes para a barra 2.

Para a barra 3, o diagrama de corpo livre é o ilustrado na Fig. (6.48).

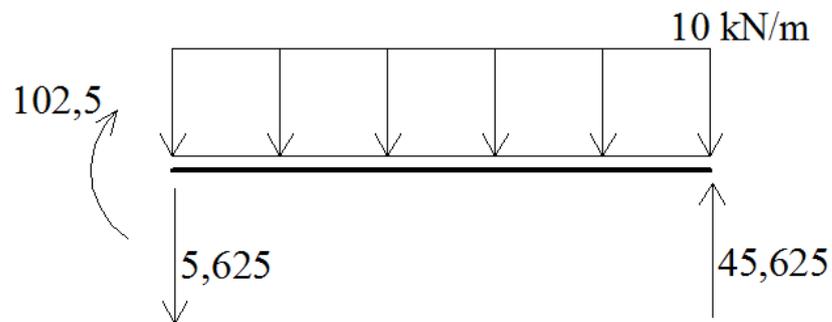


Figura 6.48 Diagrama de corpo livre para a barra 3.

As componentes dos esforços solicitantes sobre os nós C e D já haviam sido calculadas quando da determinação das reações dos vínculos internos e externos. Com base nesses valores, verifica-se que o esforço normal na barra é nulo. Além disso, em função da carga distribuída uniformemente ao longo da barra, o comportamento do esforço cortante é linear e, conseqüentemente, o comportamento do momento fletor é quadrático. Assim, os seguintes diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos.

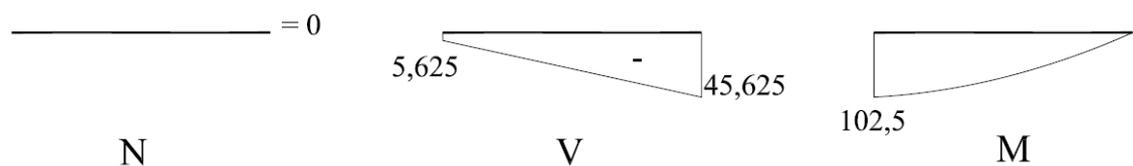


Figura 6.49 Diagrama de esforços solicitantes para a barra 3.

## 7. – Estruturas Mistas Bidimensionais

---

### 7.1 – Introdução

O termo misto é normalmente utilizado na língua portuguesa para designar objetos compostos por elementos diferentes. No contexto da engenharia de estruturas, esse termo pode ser empregado para a designação de estruturas formadas por diferentes materiais e/ou diferentes tipos de elementos estruturais. Esses tipos de estruturas são de grande importância no cotidiano da engenharia de estruturas, pois permitem a concepção de projetos e a determinação de configurações estruturais que melhor se adequam aos recursos disponíveis, como apresentado na Fig. (7.1).

Neste capítulo serão analisadas estruturas planas mistas compostas por elementos de barra geral e elementos de barra simples. Objetivam-se determinar os diagramas de esforços solicitantes para os elementos de barra geral e os esforços normais nos elementos de barra simples.



Figura 7.1 Exemplos de estruturas mistas.

### 7.2 – Exemplo 1

O primeiro exemplo deste capítulo refere-se à análise estrutural da estrutura mista apresentada na Fig. (7.2). Trata-se de um pórtico plano formado por duas barras, sobre o qual apoia-se uma treliça plana composta por quatro barras. Esta estrutura é engastada em seu nó E, sendo que dois carregamentos concentrados atuam sobre o nó A. Além disso, um carregamento uniformemente distribuído atua sobre a barra horizontal do pórtico.

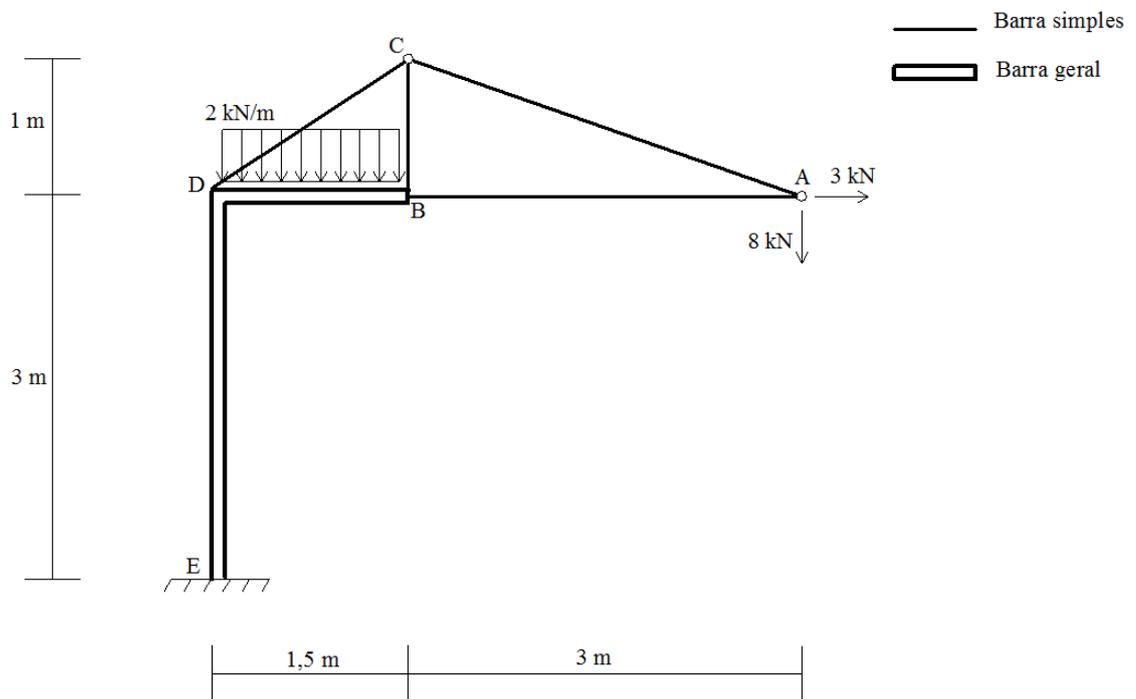


Figura 7.2 Estrutura a ser analisada.

A análise será iniciada determinando-se os esforços normais atuantes nas barras da treliça (elementos de barra simples) por meio do método dos nós. Efetuando o equilíbrio do nó A, o seguinte diagrama de corpo livre pode ser obtido.

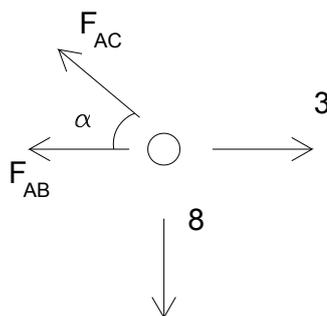


Figura 7.3 Diagrama de forças para o nó A.

Segundo a disposição geométrica dos elementos de barra simples, verifica-se que o ângulo  $\alpha$  apresenta os seguintes valores para seu seno e cosseno:  $\text{sen}(\alpha) = 0,3162$  ;  $\text{cos}(\alpha) = 0,9486$ . Aplicando as equações de equilíbrio de ponto material sobre as forças atuantes no nó A obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -8 + F_{AC}\text{sen}(\alpha) = 0 &\Rightarrow F_{AC} = 25,30 \text{ kN (tração)} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{AB} - F_{AC}\text{cos}(\alpha) + 3 = 0 &\Rightarrow F_{AB} = -21 \text{ kN (compressão)}\end{aligned}$$

O próximo nó a ser equilibrado é o de letra C. Isolando-o da estrutura e representando as forças que atuam sobre ele, obtêm-se o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (7.4), o qual já leva em conta o esforço atuante sobre a barra AC.

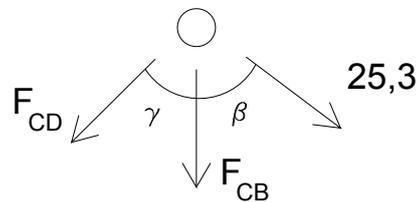


Figura 7.4 Diagrama de forças para o nó C.

Conforme a disposição geométrica dos elementos de barra simples, observa-se que os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  apresentam os seguintes valores para as funções trigonométricas seno e cosseno:

$$\text{sen}(\beta) = 0,9486 ; \text{cos}(\beta) = 0,3162 ; \text{sen}(\gamma) = 0,8321 ; \text{cos}(\gamma) = 0,5547$$

Portanto, aplicando as equações de equilíbrio de ponto material sobre as forças apresentadas na Fig. (7.4) obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{CD}\text{sen}(\gamma) + 25,3\text{sen}(\beta) = 0 &\Rightarrow F_{CD} = 28,842 \text{ kN (tração)} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -F_{CD}\text{cos}(\gamma) - 25,3\text{cos}(\beta) - F_{CB} = 0 &\Rightarrow F_{CB} = -24 \text{ kN (compressão)}\end{aligned}$$

Com base no equilíbrio desses dois nós, determinam-se as forças atuantes sobre os nós B e D, pertencentes ao pórtico, referentes às reações da treliça. Assim, obtêm-se o conjunto de forças mostrado na Fig. (7.5) para os nós B e D respectivamente.



Figura 7.5 Forças atuantes sobre os nós B e D.

A partir das forças atuantes sobre os nós B e D, é possível a representação do conjunto total de forças atuantes sobre o pórtico, o qual é mostrado na Fig. (7.6).

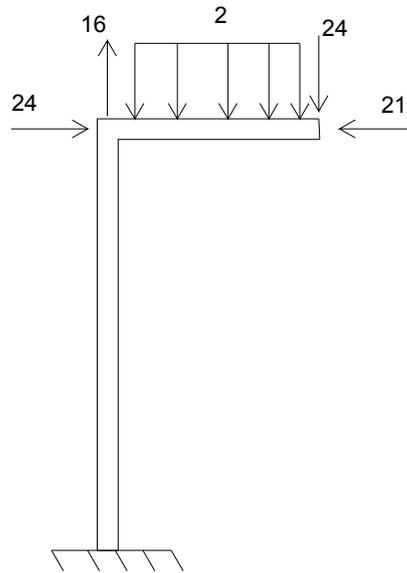


Figura 7.6 Forças atuantes sobre o pórtico plano.

Para a determinação dos esforços solicitantes no pórtico plano mostrado na Fig. (7.6), deve-se inicialmente obter seu diagrama de corpo livre. Este diagrama é ilustrado na Fig. (7.7).

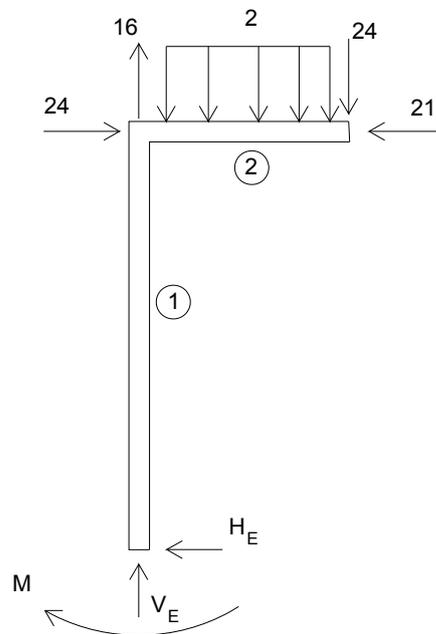


Figura 7.7 Diagrama de corpo livre.

Com base na Fig. (7.7) podem ser obtidas as reações de apoio da estrutura aplicando-se as equações de equilíbrio de corpo rígido. Assim:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow 24 - 21 - H_E = 0 && \Rightarrow H_E = 3 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_E + 16 - 2 \cdot 1,5 - 24 = 0 && \Rightarrow V_E = 11 \text{ kN} \\ \sum M_E = 0 &\Rightarrow 21 \cdot 3 - 24 \cdot 1,5 - \frac{2 \cdot 1,5^2}{2} - 24 \cdot 3 - M = 0 && \Rightarrow M = -47,25 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Iniciando o traçado dos diagramas de esforços solicitantes pela barra 1, esta deve ser isolada da estrutura como mostrado na Fig. (7.8). Para que a variação dos esforços solicitantes ao longo do domínio da barra seja conhecida, os valores das ações em suas extremidades devem ser determinados. Assim, aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à barra mostrada na Fig. (7.8) obtém-se:

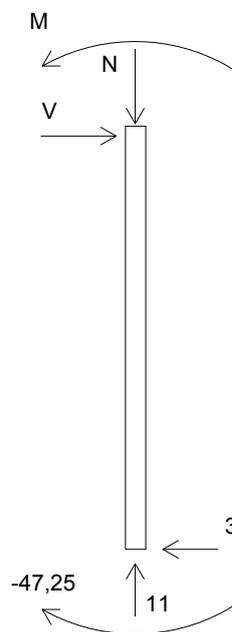


Figura 7.8 Diagrama de corpo livre para barra 1.

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &&& \Rightarrow V = 3 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &&& \Rightarrow N = 11 \text{ kN} \\ \sum M_E = 0 &\therefore -(-47,25) - 3 \cdot 3 + M = 0 && \Rightarrow M = -38,25 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Com base nos valores das ações nas extremidades da barra 1, determinados anteriormente, pode-se utilizar as relações diferenciais para o traçado dos diagramas de esforços solicitantes. A partir destas relações, e dos valores dos carregamentos atuantes sobre a barra, constata-se que o esforço normal será constante, compressivo e igual a 11 kN. Já o esforço cortante, este será também constante e igual a 3 kN. Devido a seu sentido (tende a rotacionar a barra no sentido horário) seu sinal é positivo. O momento fletor apresentará variação linear ao longo do comprimento da barra (uma ordem

polinomial a mais que para o esforço cortante), sendo que os momentos fletores em suas extremidades tendem a tracionar sua face direita da barra. Assim, obtêm-se os diagramas ilustrados na fig. (7.9).

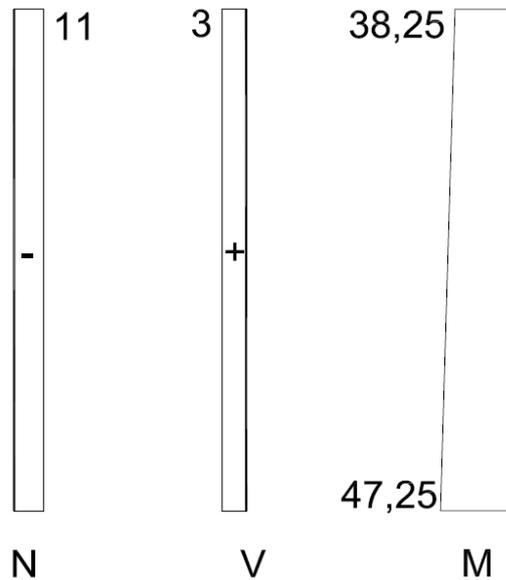


Figura 7.9 Diagramas de esforços solicitantes para barra 1.

Continuando a análise, os esforços solicitantes atuantes sobre a barra 2 devem também ser determinados. Isolando esta barra da estrutura obtêm-se o corpo ilustrado na Fig. (7.10).

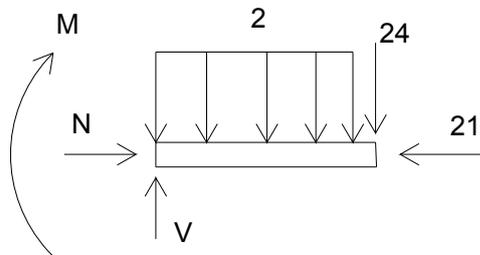


Figura 7.10 Diagrama de corpo livre para a barra 2.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido sobre o corpo acima têm-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - 21 = 0 \Rightarrow N = 21 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - 24 - 2 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow V = 27 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -24 \cdot 1,5 - \frac{2 \cdot 1,5^2}{2} - M = 0 \Rightarrow M = -38,25 \text{ kNm}$$

A partir das ações determinadas nas extremidades da barra 2, das relações diferenciais e dos carregamentos atuantes sobre esta barra, verifica-se que seu esforço normal será constante, compressivo e igual a 21 kN. Já o esforço cortante apresentará

variação linear ao longo do comprimento da barra. Esse comportamento decorre da presença de um carregamento uniformemente distribuído orientado perpendicularmente ao eixo da barra. Finalmente, verifica-se que o momento fletor apresentará variação quadrática ao longo do comprimento da barra. Assim, com base nesses comentários, obtêm-se os diagramas de esforços solicitantes, os quais são representados na Fig. (7.11).

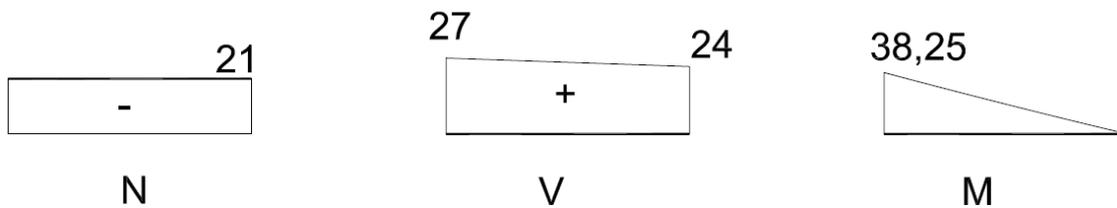


Figura 7.11 Diagramas de esforços solicitantes para a barra 2.

Para a verificação sobre a correção da resolução do exemplo, a condição de equilíbrio deve ser verificada sobre o nó D. Para tal fim, as ações das extremidades das barras atuantes sobre este nó devem ser reaplicadas sobre ele com sentido inverso (3º lei de Newton). Além disso, os carregamentos externos sobre o nó devem ser também considerados. Assim, obtêm-se as representações mostradas na Fig. (7.12). Aplicando sobre as ações mostradas nesta figura as equações de equilíbrio de corpo rígido tem-se:

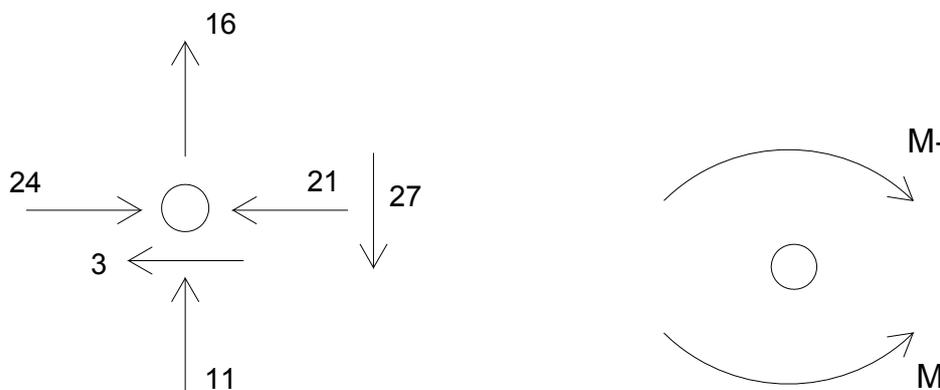


Figura 7.12 Verificação do equilíbrio nó D.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 24 - 21 - 3 = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 11 + 16 - 24 = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 38,25 - 38,25 = 0 \quad \text{OK!}$$

Assim, como o equilíbrio é atendido, constata-se a correção do exemplo.

### 7.3 – Exemplo 2

A estrutura a ser analisada neste item é a apresentada na Fig. (7.13). Trata-se de um pórtico plano formado por dois elementos de barra geral, delimitados pelos nós ADB e CEB, e um tirante horizontal posicionado entre os nós DE. O tirante é um elemento de barra simples solicitado apenas por esforços de tração. Sobre os nós B, D e E atuam forças concentradas de valor igual a 10 kN. Além disso, a estrutura possui uma articulação localizada em seu nó B sendo vinculada nos nós A e C onde atuam um apoio fixo e um móvel, respectivamente.

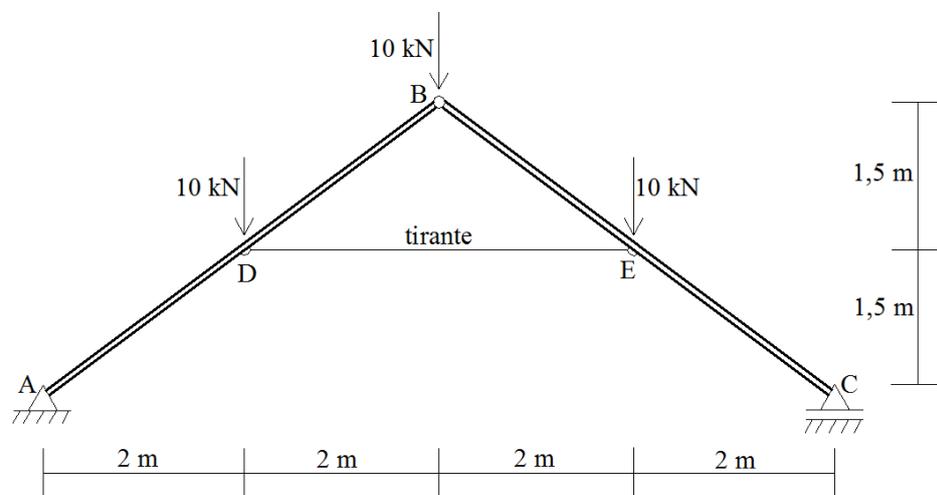


Figura 7.13 Estrutura a ser analisada.

Para a determinação dos diagramas de esforços solicitantes deve-se, inicialmente, determinar as reações nos apoios. Para este fim, o diagrama de corpo livre da estrutura deve ser construído. Este diagrama, para a estrutura em análise, está apresentado na Fig. (7.14).

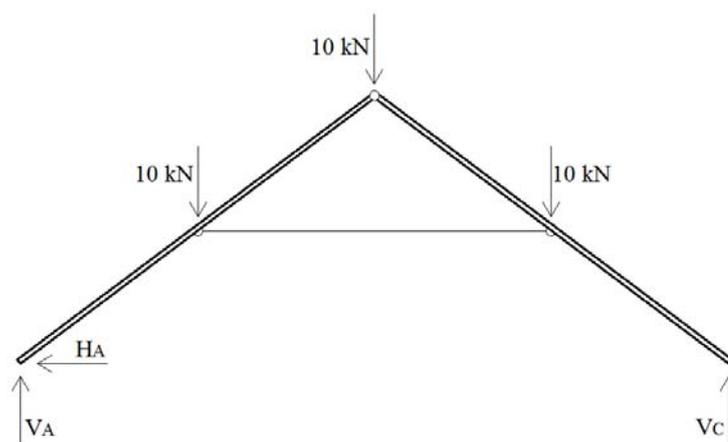


Figura 7.14 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido sobre a estrutura mostrada na Fig. (7.14) obtém-se:

$$\begin{aligned}\sum M_C = 0 &\Rightarrow -V_A \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 0 &\Rightarrow V_A = 15 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow 15 - 10 - 10 - 10 + V_C = 0 &\Rightarrow V_C = 15 \text{ kN} \\ \sum F_x = 0 &&\Rightarrow H_A = 0\end{aligned}$$

De posse dos valores das reações de apoio, os valores das ações nas extremidades das barras devem ser calculados. Portanto, deve-se separar a estrutura em seu nó B, ou seja, sobre a articulação. Através dessa separação, obtém-se o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (7.15).

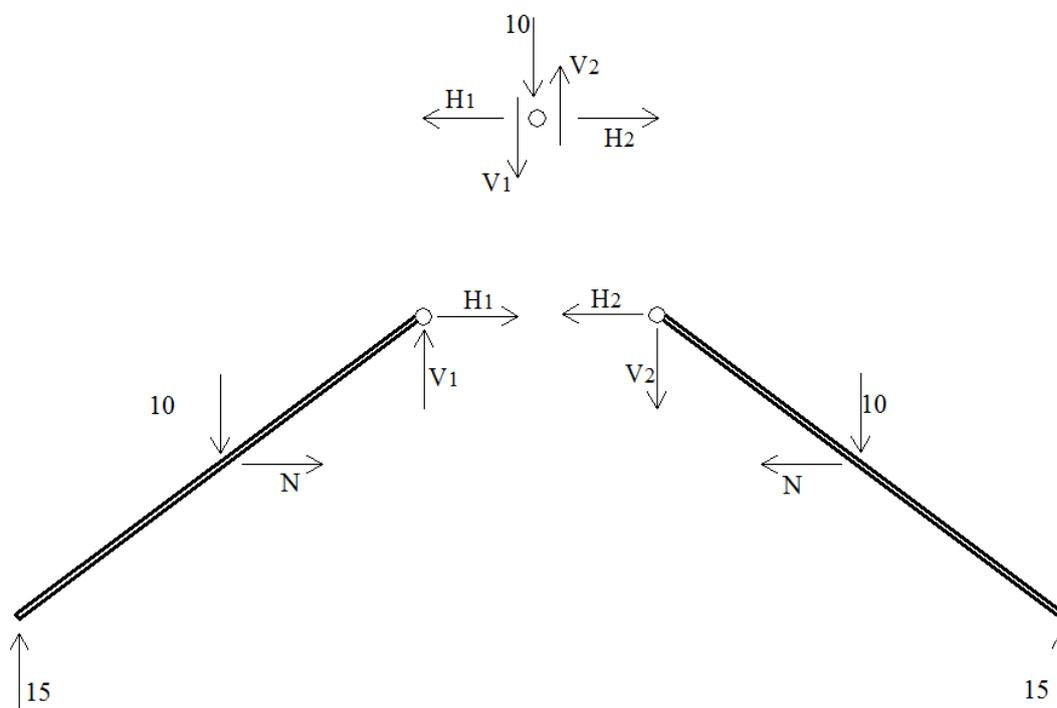


Figura 7.15 Diagrama de corpo livre da estrutura separada.

Efetuada o equilíbrio de corpo rígido da barra esquerda mostrada na Fig.(7.15), delimitada pelos nós ADB, é possível a determinação das reações internas  $V_1$ ,  $H_1$  e  $N$ .

Assim:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow 15 - 10 + V_1 = 0 &\Rightarrow V_1 = -5 \text{ kN} \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow -15 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + N \cdot 1,5 = 0 &\Rightarrow N = 26,67 \text{ kN} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow N + H_1 = 0 &\Rightarrow H_1 = -26,67 \text{ kN}\end{aligned}$$

Para que as variações dos esforços normal, cortante e momento fletor ao longo da barra ADB sejam determinadas, as ações determinadas anteriormente devem ser

decompostas segundo as direções paralela e normal ao eixo desta barra. Utilizando a inclinação  $\alpha$  da barra, a qual é mostrada na Fig. (7.16), verifica-se que seno ( $\alpha$ ) e cosseno ( $\alpha$ ) são dados por:  $\text{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$  e  $\text{cos}(\alpha) = \frac{4}{5}$ . Assim, utilizando esta informação e o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (7.16) é possível a determinação da decomposição das ações.

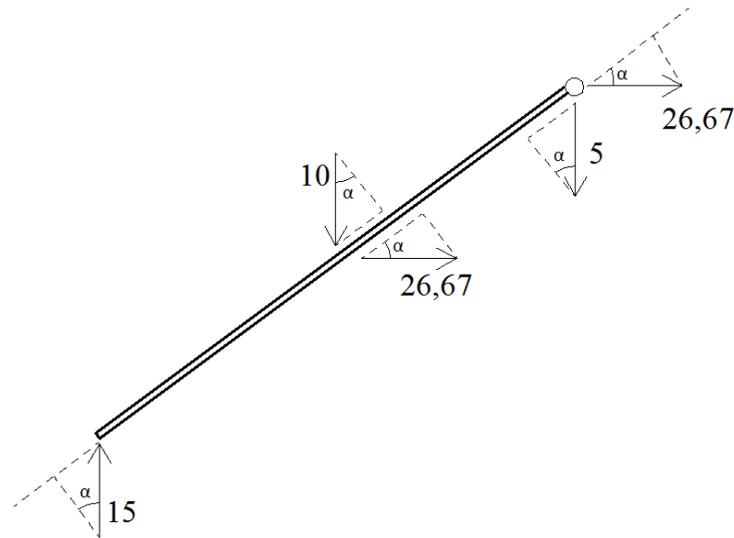


Figura 7.16 Decomposição das forças para a barra.

Efetuada a decomposição da reação do apoio A, a qual será designada pelo índice R, tem-se:

$$P_N^R = 15 \text{sen}(\alpha) = 9 \text{ kN}$$

$$P_V^R = 15 \text{cos}(\alpha) = 12 \text{ kN}$$

Decompondo agora o esforço normal atuante sobre o tirante obtém-se:

$$P_N^N = 26,67 \text{cos}(\alpha) = 21,34 \text{ kN}$$

$$P_V^N = 26,67 \text{sen}(\alpha) = 16 \text{ kN}$$

Considerando a decomposição da força pontual de intensidade igual a 10 kN, tem-se:

$$P_N^F = 10 \text{sen}(\alpha) = 6 \text{ kN}$$

$$P_V^F = 10 \text{cos}(\alpha) = 8 \text{ kN}$$

Decompondo, finalmente, as reações internas  $H_1$  e  $V_1$  obtém-se:

$$P_N^{V_1} = 5 \text{sen}(\alpha) = 3 \text{ kN}$$

$$P_V^{V_1} = 5 \text{cos}(\alpha) = 4 \text{ kN}$$

$$P_N^{H_1} = 26,67 \cos(\alpha) = 21,34 \text{ kN}$$

$$P_V^{H_1} = 26,67 \sin(\alpha) = 16 \text{ kN}$$

Levando em consideração o sentido de atuação de cada uma das ações decompostas, é possível reconstruir o diagrama de corpo livre da barra ADB. O diagrama atualizado está mostrado na Fig. (7.17). Com base nesta figura é possível a determinação da variação dos esforços solicitantes nesta barra. Considerando o carregamento atuante, verifica-se que o esforço normal será constante e compressivo. Porém, devido à ação do tirante e do carregamento pontual aplicado, os quais introduzem uma força pontual localizada no centro do comprimento da barra, o diagrama deste esforço apresentará uma descontinuidade de valor igual a componente do esforço normal no tirante dirigida ao longo do comprimento da barra. Já o esforço cortante, este será também constante. Porém, assim como no esforço normal, será observada uma descontinuidade neste diagrama, em decorrência da presença da componente do esforço normal do tirante e do carregamento pontual aplicado orientada de forma perpendicular ao eixo da barra. Com relação ao diagrama de momento fletor, verifica-se que, segundo as relações diferenciais, este esforço solicitante apresentará variação linear ao longo do comprimento da barra. No entanto, devido à descontinuidade observada no diagrama de esforço cortante, haverá um “bico”, ou ponto com derivada descontínua, no diagrama de momento fletor, exatamente onde ocorre a descontinuidade no diagrama de esforço cortante. Com base nestes comentários pode-se determinar os diagramas de esforços solicitantes da barra ADB, os quais estão apresentados na Fig. (7.18).

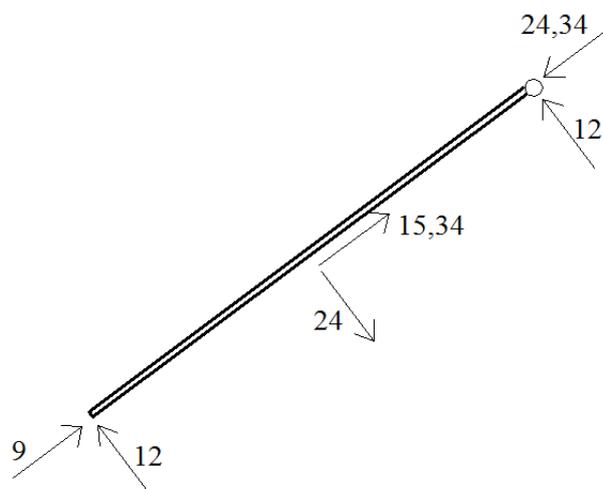


Figura 7.17 Diagrama de corpo livre para a barra ADB.

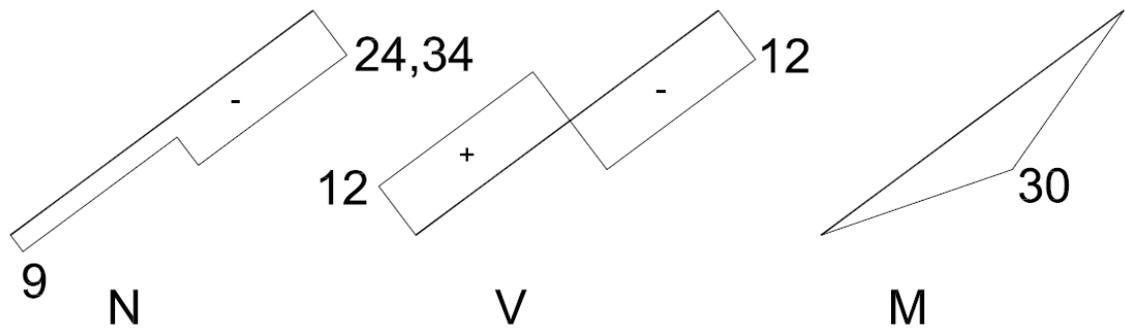


Figura 7.18 Diagramas de esforços solicitantes.

Utilizando a simetria da geometria da estrutura e dos carregamentos, pode-se determinar o diagrama de corpo livre para a barra CEB considerando as ações já decompostas. Esse diagrama está apresentado na Fig. (7.19).

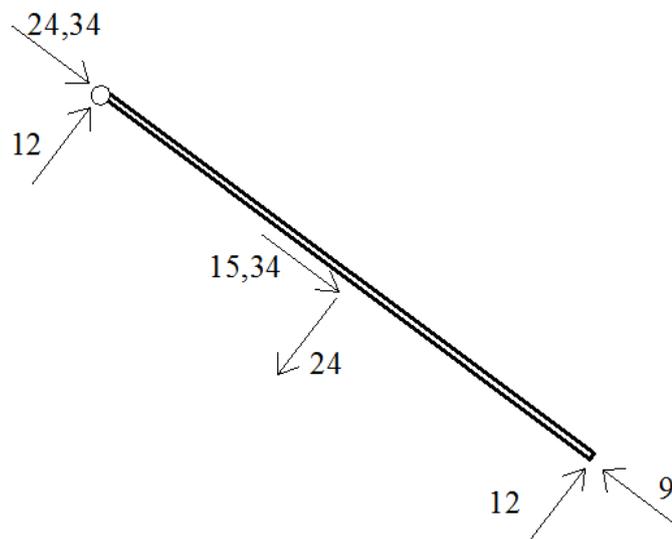


Figura 7.19 Diagrama de corpo livre da barra CEB.

Com base nos comentários efetuados anteriormente para a variação dos esforços solicitantes na barra ADB, pode-se representar os diagramas de esforços solicitantes para a barra CEB. Estes diagramas estão apresentados na Fig. (7.20).

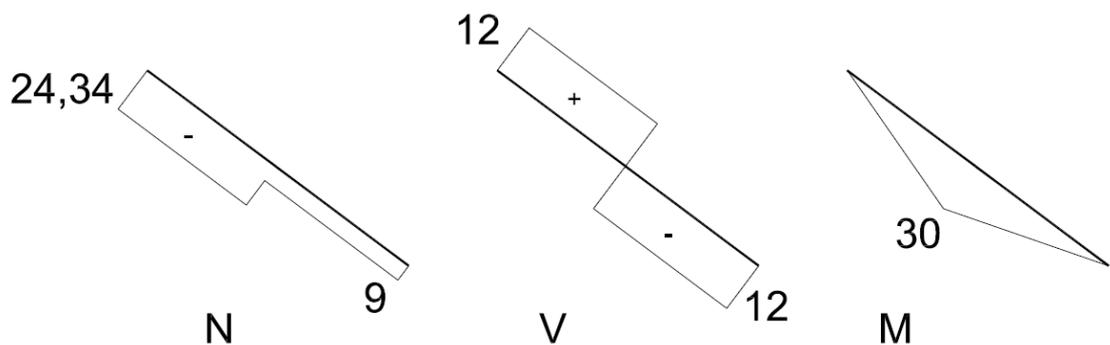


Figura 7.20 Diagramas de esforços solicitantes.

Como parte final deste exemplo, sugere-se que o leitor verifique se o equilíbrio do nó B, onde atua uma força concentrada de 10 kN, é atendido. Para isso, basta verificar se a somatória das forças atuantes sobre o nó é nula.

## 8. – Elemento de Barra Geral: Grelhas

---

### 8.1 – Introdução

As grelhas são estruturas constituídas por elementos de barra geral situados em um mesmo plano, que se interceptam e conseqüentemente passam a interagir mecanicamente com o objetivo de resistir às ações que neles venham a atuar. Estas estruturas estão sujeitas a ações predominantemente perpendiculares ao seu plano, como mostra a Fig. (8.1), tendo como respostas rotações em relação aos eixos das barras que as compõem e o deslocamento perpendicular ao plano formado por suas barras. Dessa forma, nas grelhas estarão presentes apenas esforços cortantes, momentos fletores e momentos torçores.

As grelhas constituem sistemas estruturais mais racionais quando comparado às vigas isoladas, uma vez que permitem melhor redistribuição de carga e conseqüentemente dos esforços internos. Esse tipo de sistema estrutural permite vencer grandes vãos, como ilustrado na Fig. (8.1), possibilitando assim a concepção e o projeto de grandes estruturas.

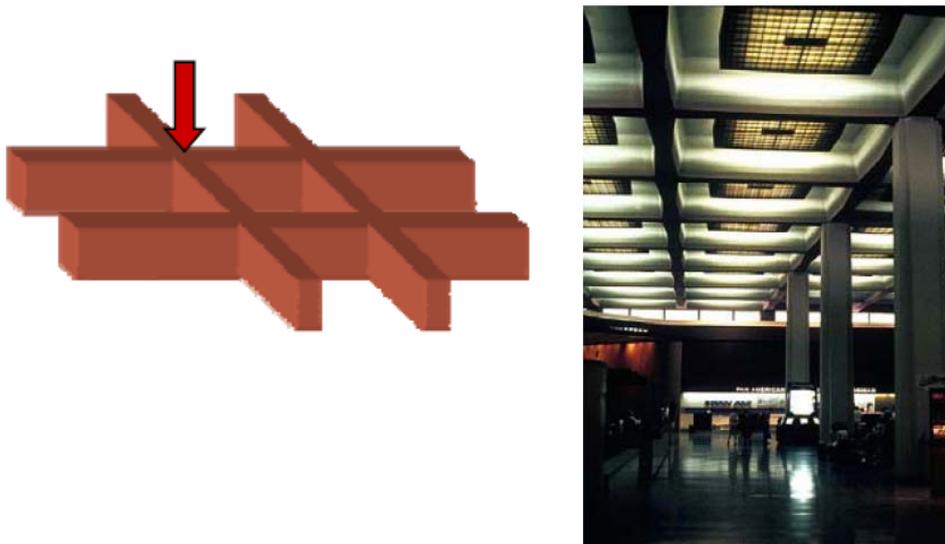


Figura 8.1 Estruturas de grelha.

Neste capítulo serão apresentados três exemplos que objetivam a determinação dos diagramas de esforços solicitantes de grelhas isostáticas. A metodologia a ser empregada é a mesma aplicada nos capítulos anteriores, a qual pode ser resumida como:

- 1) Construção do diagrama de corpo livre. Substituição das condições de vinculação por reações equivalentes;
- 2) Determinação das reações de apoio da estrutura. Aplicação das equações de equilíbrio de corpo rígido;
- 3) Análise de cada elemento de barra geral da grelha de forma isolada. Determinação dos valores das ações nas extremidades das barras;
- 4) Análise da presença de descontinuidades nas barras, como ações concentradas, e estudo da variação dos esforços solicitantes ao longo do comprimento da barra;
- 5) Traçado do diagrama de esforços solicitantes.

A seguir serão apresentados os exemplos que ilustram a aplicação dessa metodologia.

## 8.2 – Exemplo 1

Construa os diagramas de esforços solicitantes da grelha apresentada na Fig. (8.2). Trata-se de uma grelha isostática simplesmente apoiada sobre os nós A, E e F. Nessa estrutura atuam três forças concentradas e uma distribuída, conforme indicado na Fig.(8.2).

A primeira etapa a ser efetuada objetivando a resolução desse exemplo trata da construção do diagrama de corpo livre da estrutura. Substituindo as condições de vinculação da estrutura por reações equivalentes obtém-se o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (8.3). Aplicando as condições de equilíbrio de corpo rígido às ações apresentadas na Fig. (8.3) determinam-se as reações de apoio da estrutura, as quais são iguais a:

$$\sum M_y^A = 0 \Rightarrow 5 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot (1+2) + 10 \cdot 4 - V_E \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_E = 27,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_x^E = 0 \Rightarrow -V_A \cdot 3 + 5 \cdot 3 + V_F \cdot 3 - 10 \cdot 3 = 0 \Rightarrow -3 \cdot V_A + 3 \cdot V_F = 15 \Rightarrow$$

$$V_A - V_F = -5$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow V_A + V_E + V_F - 5 - 10 - 10 - 10 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A + 27,5 + V_F - 45 = 0 \Rightarrow V_A + V_F = 17,5$$

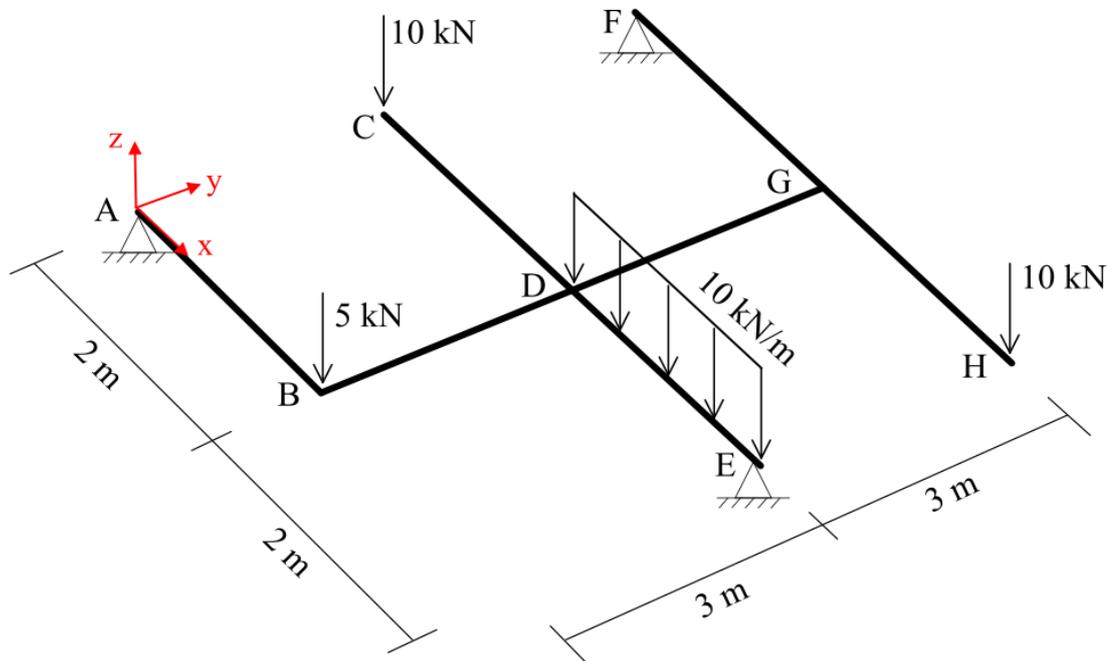


Figura 8.2 Estrutura a ser analisada.

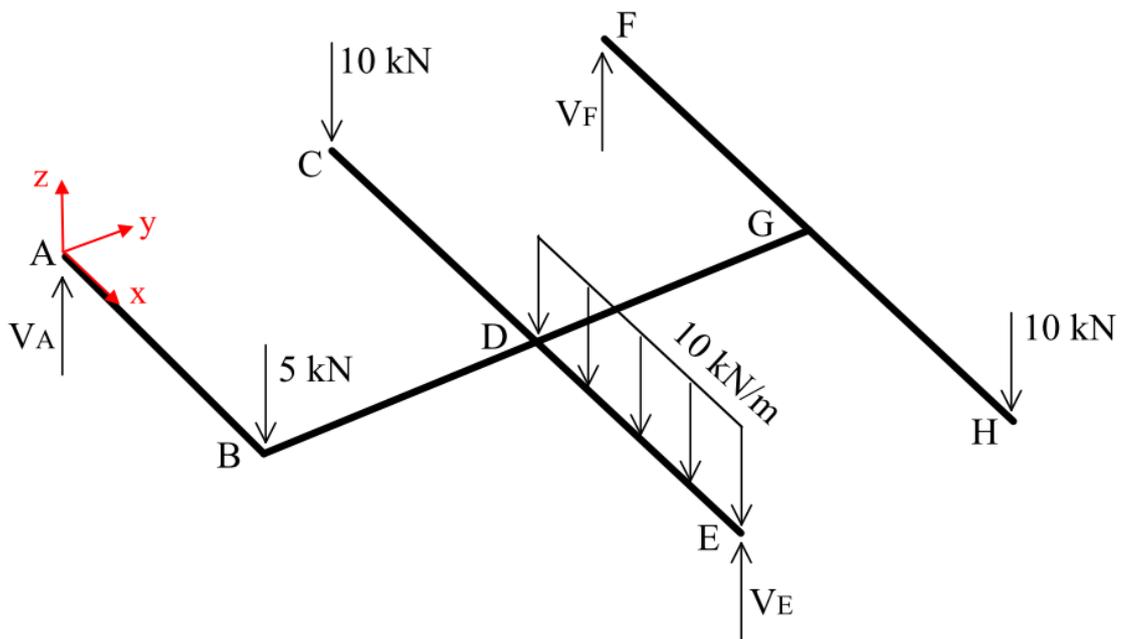


Figura 8.3 Diagrama de corpo livre.

Organizando as duas últimas equações obtidas anteriormente, escritas em função de  $V_A$  e  $V_F$ , em um sistema matricial e em seguida resolvendo-o, obtêm-se as duas reações de apoio ainda não explicitadas. Assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_A \\ V_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ 17,5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_A \\ V_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,25 \\ 11,25 \end{Bmatrix} kN$$

Após a determinação das reações de apoio, cada uma das barras que compõem a grelha considerada deve ser isolada e as ações em suas extremidades determinadas. Este procedimento pode ser iniciado pela barra AB, a qual está apresentada na Fig. (8.4).

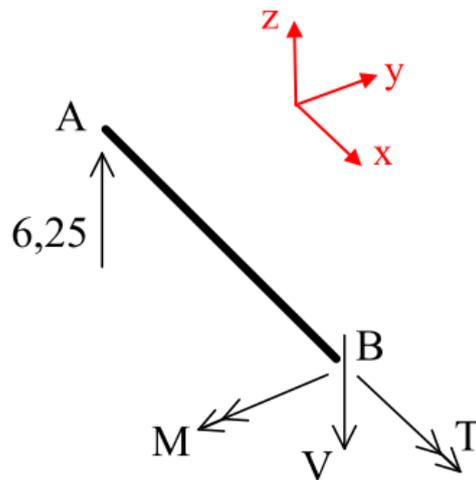


Figura 8.4 Barra AB.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido a barra apresentada na Fig. (8.4) obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 &\Rightarrow T = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow 6,25 \cdot 2 - M = 0 \quad \Rightarrow M = 12,5 kNm \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow 6,25 - V = 0 \quad \Rightarrow V = 6,25 kN \end{aligned}$$

Com base nas relações diferenciais, constata-se que o esforço cortante possui valor constante ao longo do comprimento da barra, enquanto o momento fletor possui variação linear. Assim como o esforço cortante, o momento torçor possui valor constante ao longo da barra, sendo igual a zero. Portanto, com base nessas informações e nos valores das ações nas extremidades das barras, os diagramas de esforços solicitantes para a barra AB podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (8.5).

Antes dos valores das ações nas extremidades da barra BD serem determinados, deve-se considerar o equilíbrio do nó B. Este procedimento, que é necessário devido a transmissão de esforços de uma barra para outra, é efetuado reapplicando sobre o nó B (com sentidos opostos) as ações atuantes sobre a extremidade da barra AB que concorre

ao nó B (3ª lei de Newton). O nó B, bem como os esforços atuantes sobre ele, estão apresentados na Fig. (8.6).

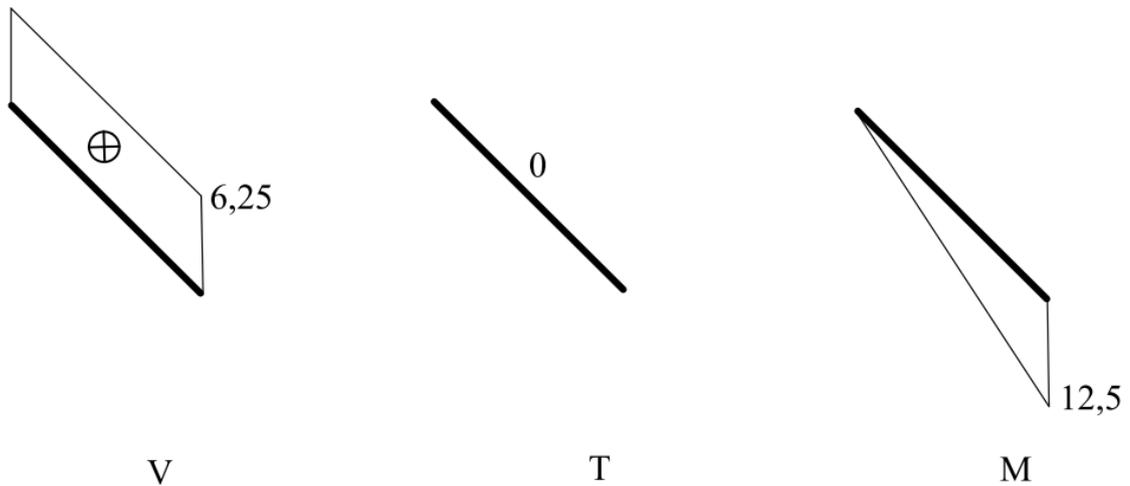


Figura 8.5 Diagramas de esforços solicitantes para a barra AB.

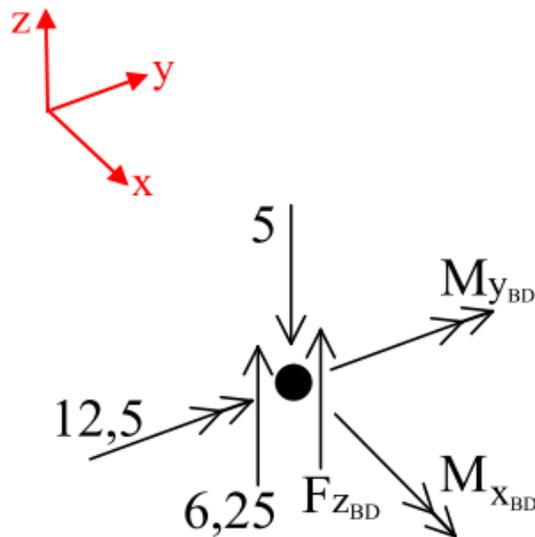


Figura 8.6 Equilíbrio nó B.

Impondo as condições de equilíbrio de corpo rígido às ações apresentadas na Fig. (8.6) obtêm-se:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_{x_{BD}} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow 12,5 + M_{y_{BD}} = 0 \Rightarrow M_{y_{BD}} = -12,5 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 6,25 - 5 + F_{z_{BD}} = 0 \Rightarrow F_{z_{BD}} = -1,25 \text{ kN}$$

Transferindo as ações determinadas acima (com sentidos opostos) para a extremidade da barra BD que concorre ao nó B, obtêm-se a configuração apresentada na

Fig. (8.7). Impondo, sobre a barra mostrada na Fig. (8.7), as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

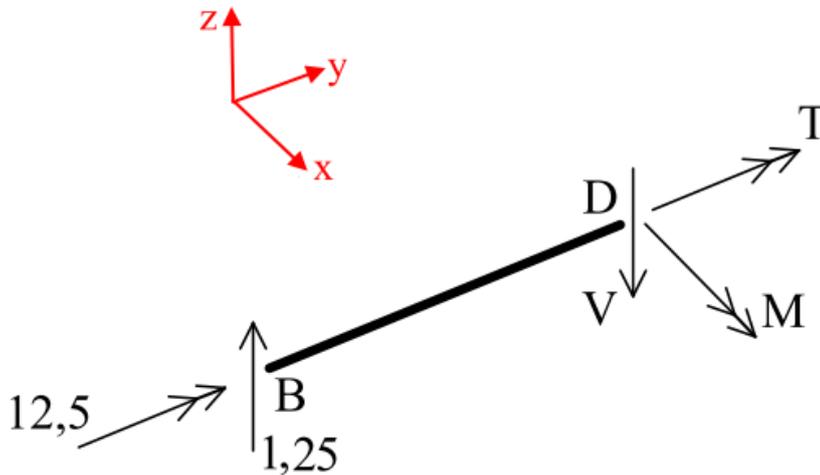


Figura 8.7 Barra BD.

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0 &\Rightarrow -1,25 \cdot 3 + M = 0 &\Rightarrow M = 3,75 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow 12,5 + T = 0 &\Rightarrow T = -12,5 \text{ kNm} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow 1,25 - V = 0 &\Rightarrow V = 1,25 \text{ kN}\end{aligned}$$

De acordo com o apresentado na Fig. (8.7) e nas relações diferenciais, observa-se que o esforço cortante apresentará valor constante ao longo do comprimento da barra, enquanto o momento fletor possuirá variação linear. Como não existem momentos torçores aplicados ao longo do corpo da barra, o momento torçor apresentará valor constante. Portanto, com base nos valores determinados anteriormente para as ações nas extremidades da barra BD, e nas observações descritas, os diagramas de esforços solicitantes para a barra BD podem ser traçados, os quais estão apresentados na Fig. (8.8).

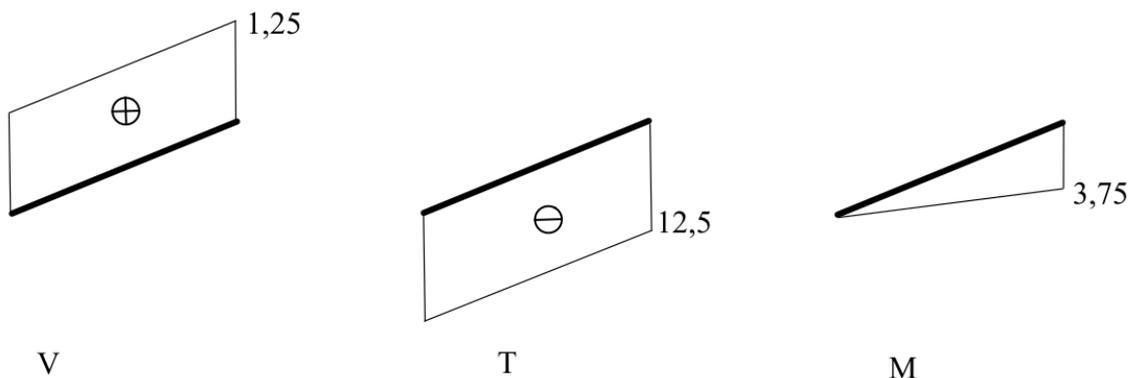


Figura 8.8 Diagramas de esforços solicitantes para a barra BD.

Considerando agora a barra CD, esta deve ser isolada da estrutura e as ações em suas extremidades determinadas para que seus diagramas de esforços solicitantes sejam construídos. Esta barra, assim como as ações em suas extremidades, estão apresentadas na Fig. (8.9). Aplicando sobre a barra apresentada na Fig. (8.9) as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

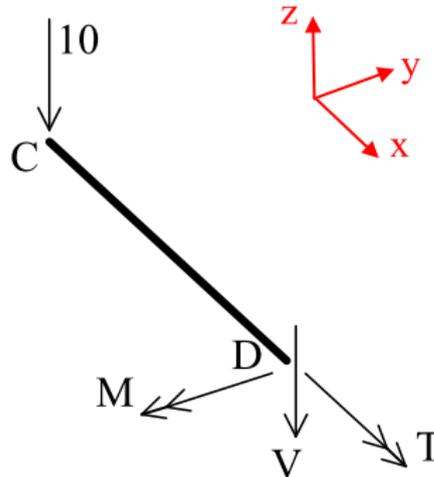


Figura 8.9 Barra CD.

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -10 \cdot 2 - M = 0 \Rightarrow M = -20 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -10 - V = 0 \Rightarrow V = -10 \text{ kN}$$

Para a barra CD, observa-se, com base nas relações diferenciais e nas ações atuantes, que o esforço cortante e o momento torçor apresentarão valores constantes ao longo do corpo da barra. Como o esforço cortante possui variação constante, o momento fletor apresentará variação linear ao longo do comprimento da barra. Com base nessas observações e nos valores das ações nas extremidades da barra, os diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos, como mostrado na Fig. (8.10).

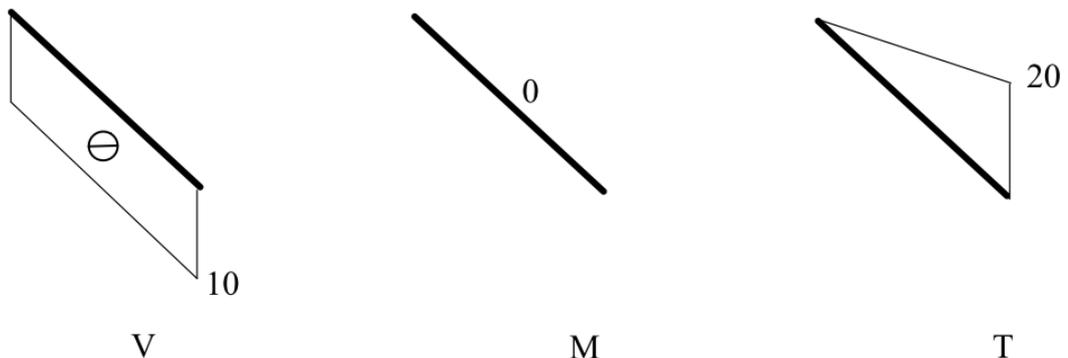


Figura 8.10 Diagramas de esforços solicitantes para a barra CD.

A Fig. (8.11) ilustra a barra DE, isolada do restante da estrutura, e as ações atuantes sobre ela. Aplicando sobre a barra mostrada nesta figura as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

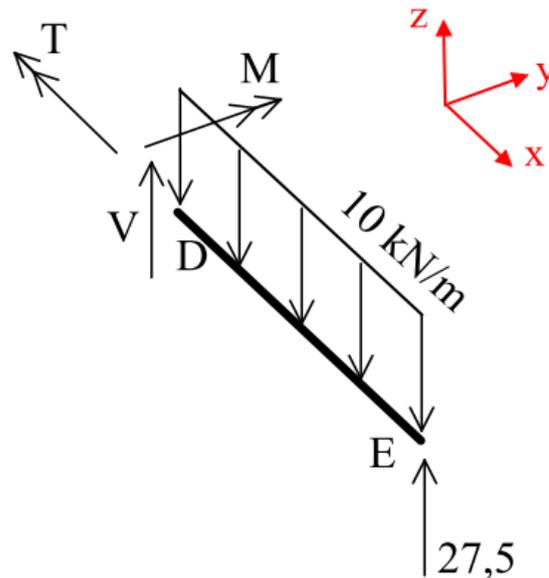


Figura 8.11 Barra DE.

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -27,5 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 1 + M = 0 \Rightarrow M = 35 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 27,5 - 10 \cdot 2 + V = 0 \Rightarrow V = -7,5 \text{ kN}$$

Devido à presença do carregamento uniformemente distribuído nesta barra, constata-se, com base nas relações diferenciais, que o esforço cortante possuirá variação linear ao longo do comprimento da barra, enquanto que para o momento fletor, esta variação será quadrática. Já o momento torçor, este possuirá valor constante ao longo da barra. Assim, a partir destas informações, os diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos, como indicado na Fig. (8.12).

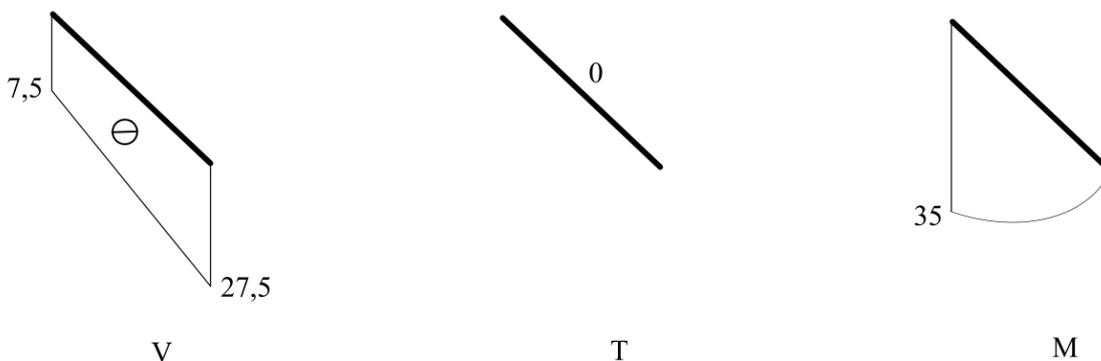


Figura 8.12 Diagramas de esforços solicitantes para a barra DE.

A próxima barra a ser analisada é a GH. Isolando esta barra do restante da estrutura e considerando as ações em suas extremidades, obtém-se a ilustração da Fig. (8.13).

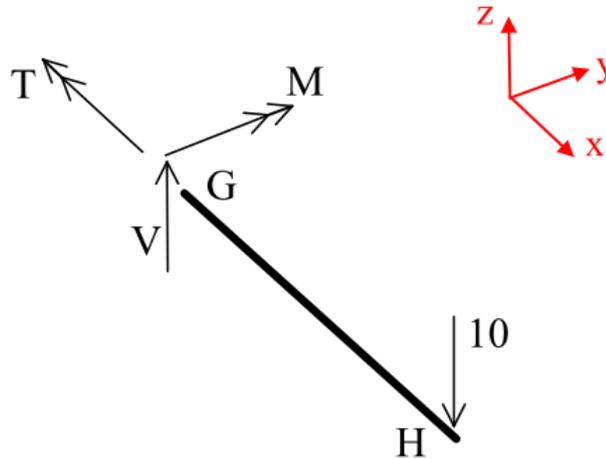


Figura 8.13 Barra GH.

Aplicando as condições de equilíbrio de corpo rígido a barra mostrada na Fig. (8.13) obtém-se:

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0 &\Rightarrow T = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow 10 \cdot 2 + M = 0 \quad \Rightarrow M = -20 \text{ kNm} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow V - 10 = 0 \quad \Rightarrow V = 10 \text{ kN}\end{aligned}$$

Devido à configuração dos carregamentos atuantes na barra analisada, constata-se, a partir das relações diferenciais, que o esforço cortante e o momento torçor possuirão valores constantes ao longo do comprimento da barra. Já o momento fletor apresentará variação linear no domínio da barra. Assim, os diagramas de esforços solicitantes para a barra GH podem ser construídos, como indicado na Fig. (8.14).

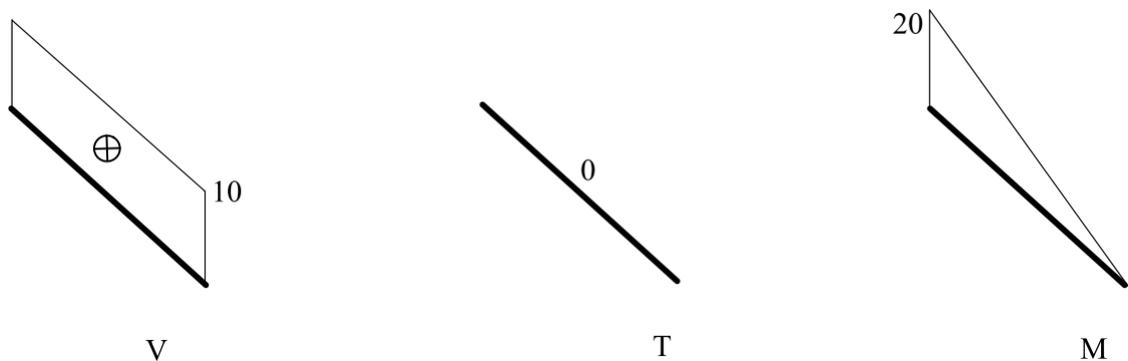


Figura 8.14 Diagramas de esforços solicitantes para a barra GH.

Considerando agora a barra FG, esta deve ser isolada da estrutura e os valores das ações atuantes em seus extremos quantificados para que os diagramas de esforços solicitantes sejam construídos. A barra FG, assim como as ações atuantes em suas extremidades, estão apresentadas na Fig. (8.15).

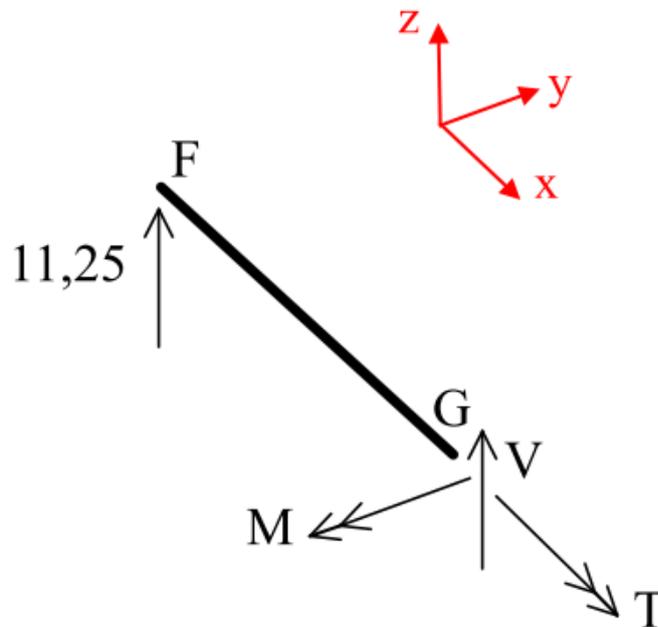


Figura 8.15 Barra FG.

Impondo sobre a barra ilustrada na Fig. (8.15) as equações de equilíbrio de corpo rígido, obtêm-se os valores dos esforços solicitantes na extremidade G, os quais são iguais a:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow 11,25 \cdot 2 - M = 0 \Rightarrow M = 22,5 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 11,25 + V = 0 \Rightarrow V = -11,25 \text{ kN}$$

De acordo com os carregamentos atuantes sobre a barra FG e as relações diferenciais, constata-se que na barra analisada o esforço cortante e o momento torçor apresentarão valores constantes ao longo de toda a extensão da barra. Além disso, como o esforço cortante é constante, o momento fletor possuirá variação linear ao longo da barra. Portanto, com base nessas observações e nos valores das ações nas extremidades da barra, os diagramas de esforços solicitantes para a barra FG podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (8.16).

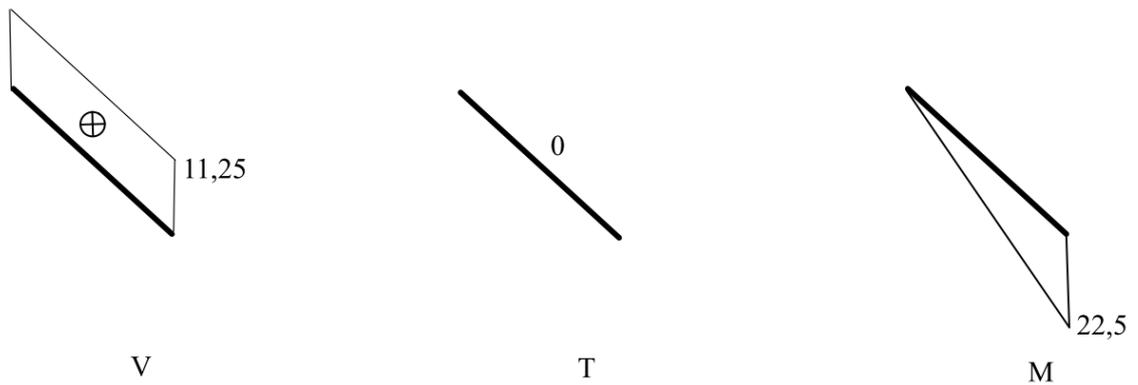


Figura 8.16 Diagramas de esforços solicitantes para a barra FG.

Para que a próxima barra seja analisada, barra DG, o equilíbrio do nó G deve ser efetuado. Este procedimento se faz necessário uma vez que, por meio dele, os valores das ações atuantes na barra DG, na extremidade que concorre ao nó G, podem ser determinados. Para tal finalidade, as ações atuantes sobre os extremos das barras FG e GH que concorrem ao nó G devem ser reaplicadas sobre este nó com sentidos opostos (3ª lei de Newton). Este procedimento é necessário devido à transmissão de esforços de uma barra a outra. O nó G, assim como as ações atuantes sobre ele, estão apresentadas na Fig. (8.17).

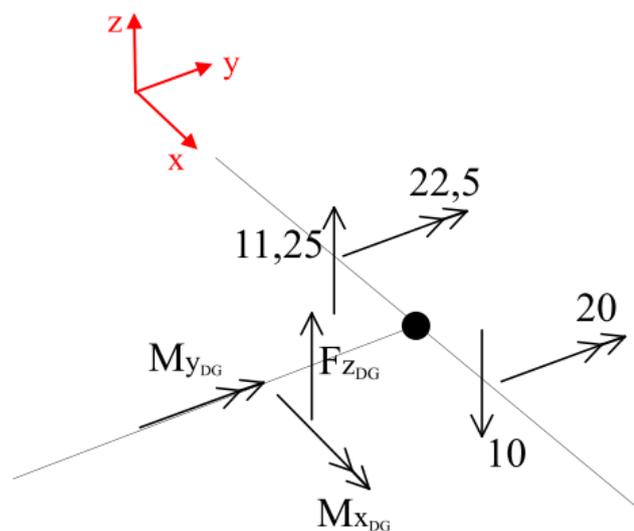


Figura 8.17 Equilíbrio nó G.

Impondo sobre as ações atuantes no G e ilustradas na Fig. (8.17) as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0 &\Rightarrow M_{x_{DG}} = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow 22,5 + 20 + M_{y_{DG}} = 0 \Rightarrow M_{y_{DG}} = -42,5 \text{ kNm} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow 11,25 - 10 + F_{z_{DG}} = 0 \Rightarrow F_{z_{DG}} = -1,25 \text{ kN}\end{aligned}$$

Transferindo as ações determinadas anteriormente (com sentidos opostos) para a extremidade da barra DG que concorre ao nó G, obtém-se o conjunto barra/ações mostrado na Fig. (8.18). Impondo, sobre a barra mostrada na Fig. (8.18), as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

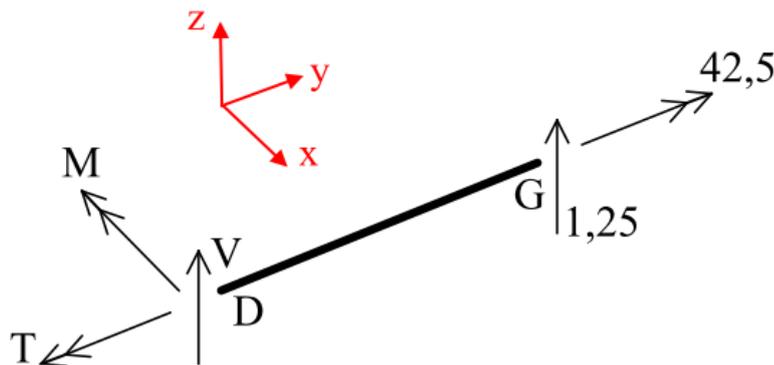


Figura 8.18 Barra DG.

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0 &\Rightarrow -M + 1,25 \cdot 3 = 0 \Rightarrow M = 3,75 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow -T + 42,5 = 0 \Rightarrow T = 42,5 \text{ kNm} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow 1,25 + V = 0 \Rightarrow V = -1,25 \text{ kN}\end{aligned}$$

Para a barra mostrada na Fig. (8.18) constata-se, com base nas relações diferenciais, que o esforço cortante e o momento torçor possuirão valores constantes ao longo do comprimento da barra. Conseqüentemente, como o esforço cortante possui variação constante, o momento fletor apresentará variação linear. Assim, a partir dessas observações, os diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos para a barra DG. Estes diagramas estão apresentados na Fig. (8.19).

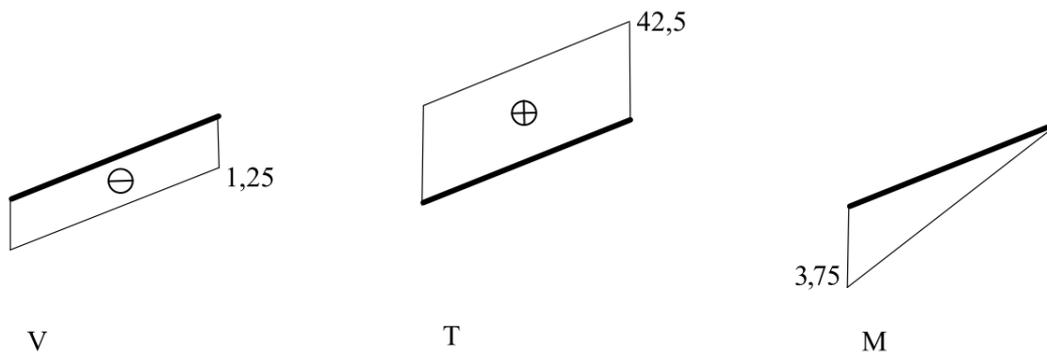


Figura 8.19 Diagramas de esforços solicitantes para a barra DG.

Finalmente, pode-se verificar a correção do exemplo efetuando-se o equilíbrio das ações atuantes sobre o nó D. Reaplicando sobre este nó, com sentidos opostos (3ª lei de Newton), as ações atuantes no extremo D das barras BD, CD, DE e DG, a condição de equilíbrio de corpo rígido deve ser observada. As ações atuantes sobre o nó D estão apresentadas na Fig. (8.20).

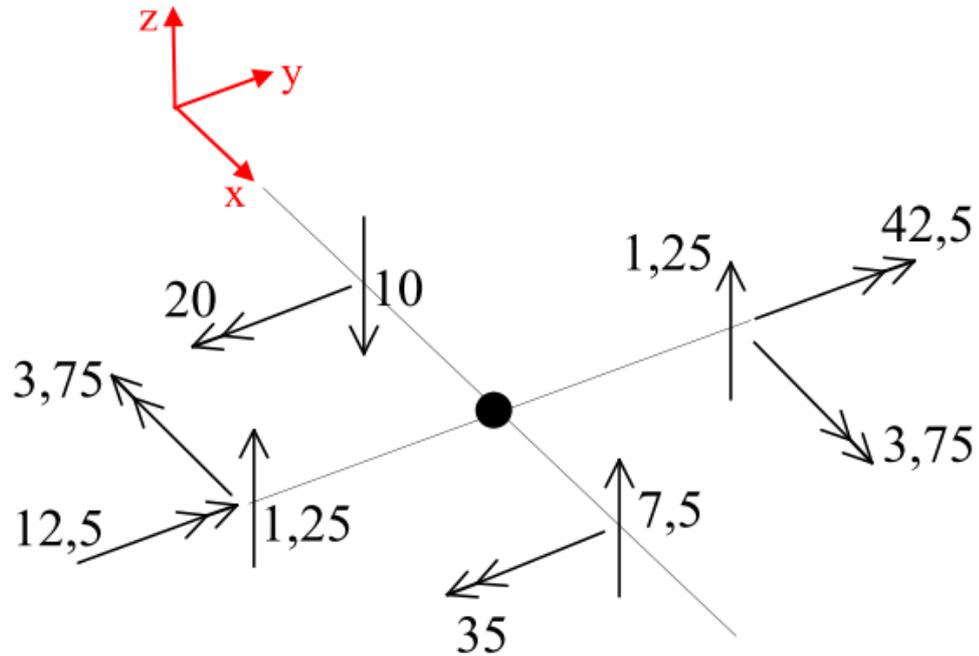


Figura 8.20 Equilíbrio nó D.

Impondo sobre as ações apresentadas na Fig. (8.20) a condição de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -20 + 42,5 - 35 + 12,5 = 0 \Rightarrow OK!$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -3,75 + 3,75 = 0 \Rightarrow OK!$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -10 + 1,25 + 7,5 + 1,25 = 0 \Rightarrow OK!$$

Assim, como a condição de equilíbrio foi atendida, a correção na resolução do exemplo foi observada.

### 8.3 – Exemplo 2

O segundo exemplo deste capítulo visa a determinação dos diagramas de esforços solicitantes da estrutura apresentada na Fig. (8.21). Trata-se de uma grelha de

três barras, isostática, engastada em seu nó E, sendo submetida a duas forças concentradas de intensidades iguais a 10 kN e 20 kN.

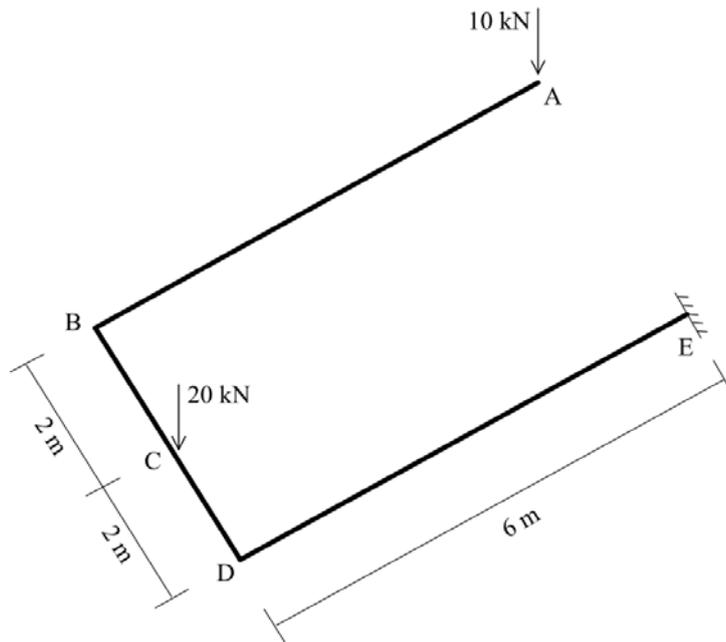


Figura 8.21 Estrutura a ser analisada.

Para que os diagramas de esforços solicitantes sejam construídos, deve-se, primeiramente, determinar o diagrama de corpo livre da estrutura. Este diagrama é construído substituindo-se as condições de vinculação por reações equivalentes, como indicado na Fig. (8.22).

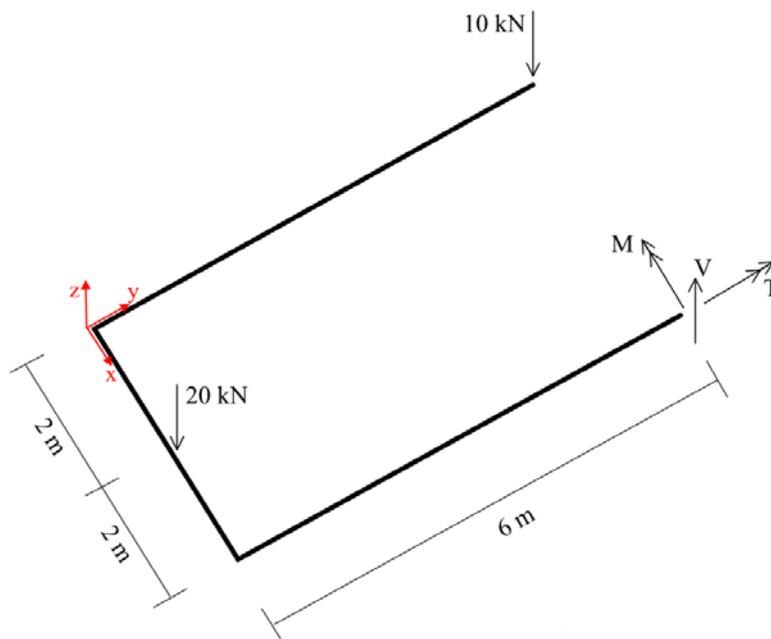


Figura 8.22 Diagrama de corpo livre.

Impondo sobre o corpo apresentado na Fig. (8.22) as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se os valores das reações de apoio. Assim:

$$\begin{aligned}\sum F_z = 0 &\Rightarrow -10 - 20 + V = 0 &\Rightarrow V = 30 \text{ kN} \\ \sum M_y^E = 0 &\Rightarrow T - 20 \cdot 2 - 10 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow T = 80 \text{ kNm} \\ \sum M_x^E = 0 &\Rightarrow -M + 20 \cdot 6 = 0 &\Rightarrow M = 120 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Após serem determinados os valores das reações de apoio, a próxima etapa a ser efetuada envolve a separação de cada uma das barras que compõem a estrutura e a determinação dos valores das ações em seus extremos. Na presente análise, este procedimento será iniciado pela barra AB. Isolando esta barra da estrutura, esta pode ser representada como indicado na Fig. (8.23).

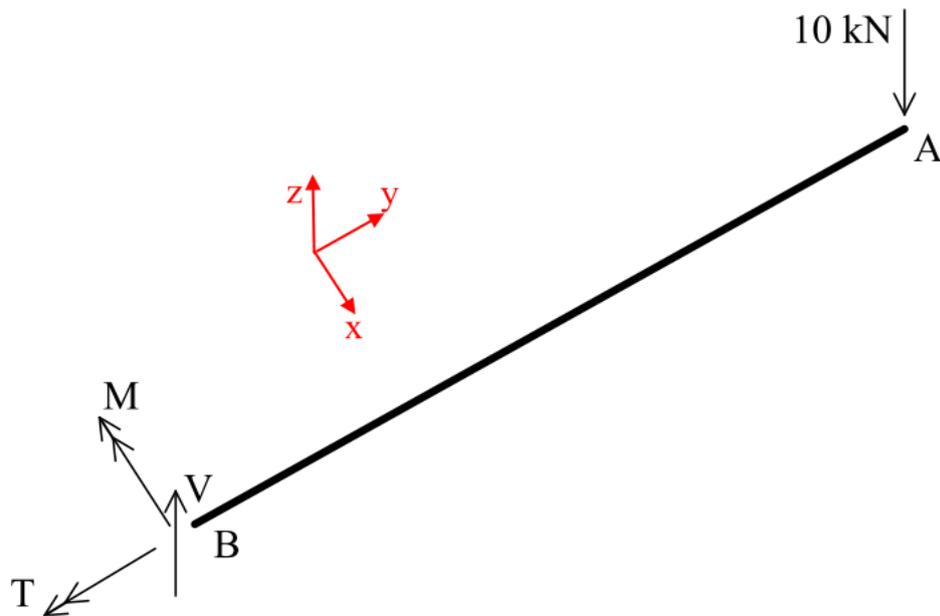


Figura 8.23 Barra AB.

Aplicando sobre a carga e os esforços que atuam na barra AB as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se os valores das ações no extremo B. Dessa forma:

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0 &\Rightarrow -M - 10 \cdot 6 = 0 &\Rightarrow M = -60 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow T = 0 \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow -10 + V = 0 &\Rightarrow V = 10 \text{ kN}\end{aligned}$$

Segundo o carregamento atuante na barra AB, observa-se, de acordo com as relações diferenciais, que o esforço cortante e o momento torçor apresentarão valores constantes ao longo do comprimento da barra. Assim, o momento fletor, nesse domínio, possuirá variação linear. Com base nessas informações e nos valores dos esforços

solicitantes nos extremos da barra AB, os diagramas de esforços solicitantes dessa barra podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (8.24).

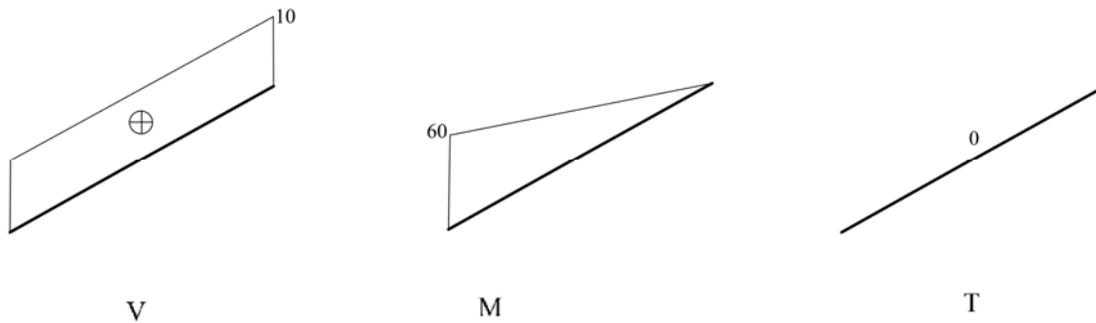


Figura 8.24 Diagramas de esforços solicitantes para a barra AB.

Antes que a barra BD seja considerada, o equilíbrio do nó B deve ser efetuado. Esse procedimento é necessário para que a transmissão de esforços da barra AB para a barra BD seja representada, já que ambas as barras concorrem a este nó. Portanto, devem ser reaplicadas sobre o nó as ações atuantes nos extremos das barras AB e BD, que concorrem ao nó B, com sentidos opostos (3ª lei de Newton). Efetuando este procedimento, obtêm-se a ilustração mostrada na Fig. (8.25).

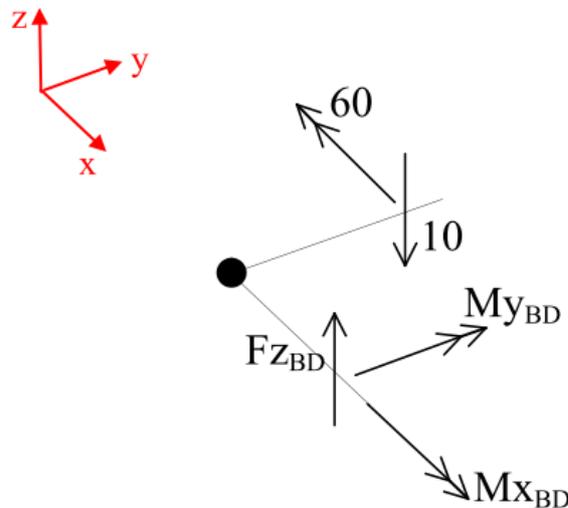


Figura 8.25 Equilíbrio do nó B.

Impondo sobre as ações mostradas na Fig. (8.25) a condição de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se os seguintes valores para as ações no extremo B da barra BD.

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_{x_{BD}} - 60 = 0 \Rightarrow M_{x_{BD}} = 60 \text{ kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{y_{BD}} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -10 + F_{z_{BD}} = 0 \Rightarrow F_{z_{BD}} = 10 \text{ kN}$$

Com base nos valores das ações atuantes no extremo B da barra BD determinadas anteriormente, pode-se isolar esta barra da estrutura para que as ações em seu extremo D sejam calculadas. Os esforços solicitantes e o carregamento atuante sobre a barra BD estão apresentados na Fig. (8.26).

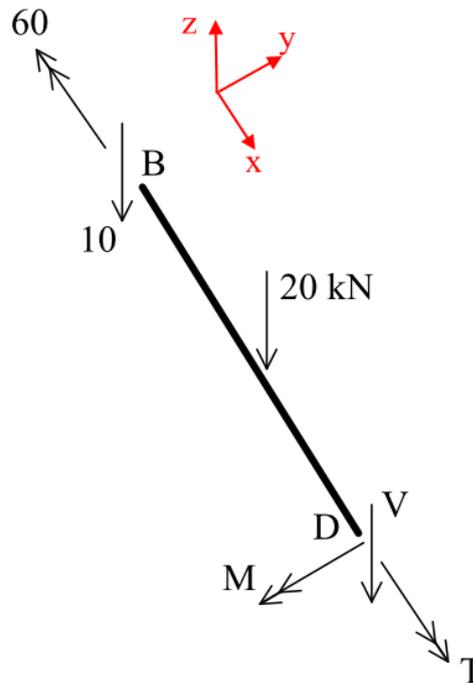


Figura 8.26 Barra BD.

Impondo as condições de equilíbrio de corpo rígido à barra mostrada na Fig. (8.26) obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0 &\Rightarrow -60 + T = 0 &&\Rightarrow T = 60 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow -10 \cdot 4 - 20 \cdot 2 - M = 0 &&\Rightarrow M = -80 \text{ kNm} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow -10 - 20 - V = 0 &&\Rightarrow V = -30 \text{ kN}\end{aligned}$$

Considerando o carregamento atuante na barra BD, observa-se, de acordo com as relações diferenciais, que o esforço cortante apresentará variação constante entre os nós BC e CD. Além disso, sobre o nó C haverá uma descontinuidade no valor do esforço cortante, uma vez que sobre esse nó está aplicada uma força concentrada de intensidade igual a 20 kN. A intensidade dessa descontinuidade será igual à intensidade da força concentrada aplicada, ou seja, igual a 20 kN.

O momento fletor está diretamente associado ao esforço cortante, segundo as relações diferenciais. Assim, entre os nós BC e CD a variação do momento fletor será linear, já que nesses trechos o esforço cortante apresenta variação constante. Além

disso, devido à descontinuidade do esforço cortante sobre o nó C, ocorrerá um ponto com derivada não contínua (“bico”) no diagrama de momento fletor. Já o momento torçor apresentará valor constante ao longo de todo o comprimento da barra.

A partir dessas observações e dos valores das ações nos extremos da barra BD, os diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos. Estes diagramas, para a barra considerada, estão apresentados na Fig. (8.27).

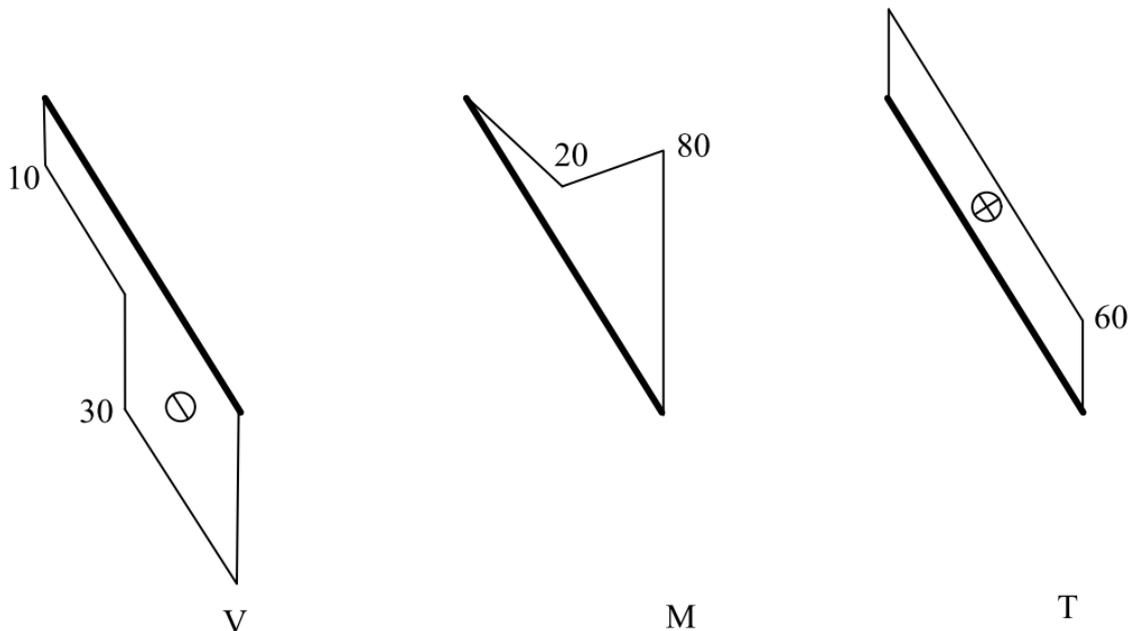


Figura 8.27 Diagramas de esforços solicitantes para a barra BD.

Antes que a última barra da grelha em análise seja considerada, o equilíbrio do nó D deve ser efetuado. Esse procedimento deve ser realizado para que a transmissão de esforços da barra BD para a barra DE seja corretamente representado. Assim, as ações que atuam nos extremos das barras BD e DE, que concorrem ao nó D, devem ser reaplicadas sobre este nó com sentidos opostos (3ª lei de Newton). Efetuando este procedimento, obtêm-se as ações mostradas na Fig. (8.28). Impondo sobre as ações apresentadas nessa figura as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_{x_{DE}} - 60 = 0 \Rightarrow M_{x_{DE}} = 60 \text{ kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{y_{DE}} - 80 = 0 \Rightarrow M_{y_{DE}} = 80 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -30 + F_{z_{DE}} = 0 \Rightarrow F_{z_{DE}} = 30 \text{ kN}$$

Após a realização do equilíbrio do nó D, deve-se agora isolar a barra DE do restante da estrutura, reaplicando sobre seu extremo D as ações determinadas anteriormente com sentidos opostos. Efetuando este procedimento, obtêm-se a

ilustração apresentada na Fig. (8.29), a qual mostra as ações atuantes nos extremos da barra DE.

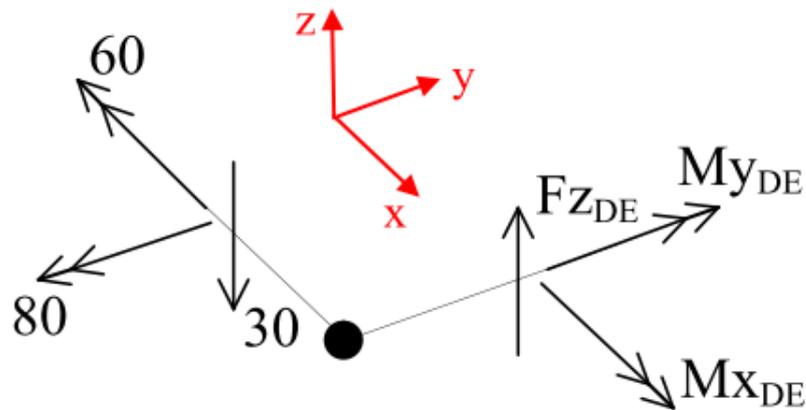


Figura 8.28 Equilíbrio do nó D.

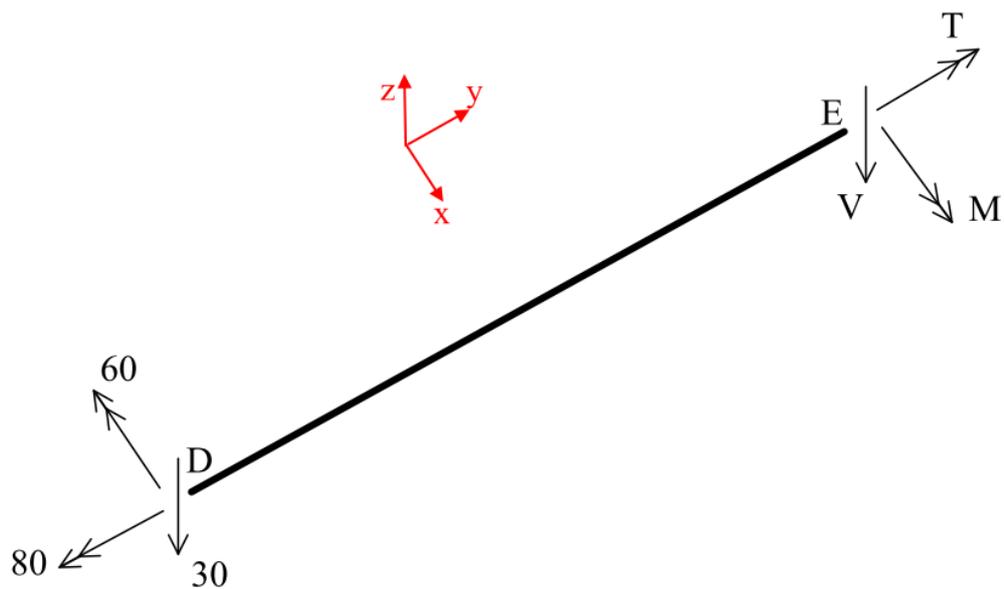


Figura 8.29 Barra DE.

Impondo as equações de equilíbrio de corpo rígido à barra mostrada na Fig. (8.29) obtêm-se:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -60 + M + 30 \cdot 6 = 0 \Rightarrow M = -120 \text{ kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -80 + T = 0 \Rightarrow T = 80 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -30 - V = 0 \Rightarrow V = -30 \text{ kN}$$

Deve-se salientar que os valores obtidos para as ações atuantes no extremo E da barra DE são exatamente os mesmos determinados anteriormente, no cálculo das

reações de apoio. Isso reforça a correção das operações realizadas para a determinação da condição de equilíbrio da estrutura e também a correção na resolução deste exemplo.

Com relação aos diagramas de esforços solicitantes, observa-se, de acordo com as relações diferenciais, os carregamentos atuantes na barra e nas ações em seus extremos, que o esforço cortante e o momento torçor apresentarão valores constantes ao longo do comprimento da barra. Assim, o momento fletor, ao longo do comprimento da barra, apresentará variação linear. Com base nessas informações e nos valores dos esforços solicitantes nos extremos da barra DE, os diagramas de esforços solicitantes dessa barra podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (8.30).

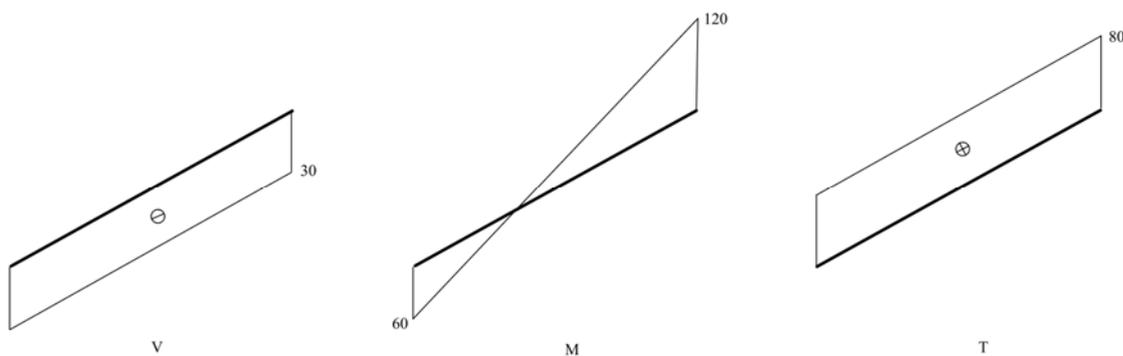


Figura 8.30 Diagramas de esforços solicitantes para a barra DE.

### 8.4 – Exemplo 3

O último exemplo a ser resolvido neste capítulo refere-se à estrutura de grelha apresentada na Fig. (8.31). Trata-se de uma estrutura de grelha isostática, submetida a um carregamento distribuído e a outro concentrado, sendo engastada em seu nó C. Objetiva-se, neste exemplo, a determinação dos diagramas de esforços solicitantes dessa estrutura.

Antes que a resolução desse exemplo seja iniciada, é importante destacar que as duas barras que compõem a estrutura a ser analisada não formam um ângulo reto entre si. Portanto, a transmissão de esforços de uma barra à outra deve ser cuidadosamente avaliada nessa situação. Isso se faz necessário uma vez que, ao contrário dos exemplos anteriores onde as barras formavam ângulos retos entre si, o momento fletor atuante no extremo de uma barra não será exatamente igual ao momento torçor atuante no extremo da barra que se conecta a essa, e vice-versa.

Além disso, na Fig. (8.31), a estrutura está sendo representada em planta, enquanto nos exemplos anteriores as estruturas analisadas foram representadas em perspectiva. Dessa forma, atenção especial deve ser dada a determinação do sentido de atuação das forças e momentos bem como das dimensões da estrutura, para o cálculo dos momentos provocados pelas forças.

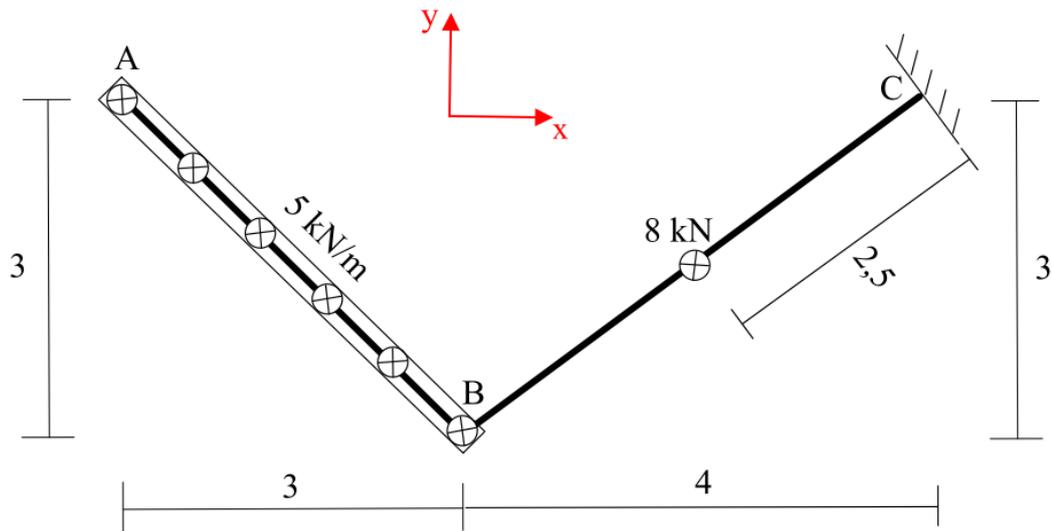


Figura 8.31 Estrutura a ser analisada. Dimensões em metro.

O primeiro passo a ser efetuado objetivando a determinação dos diagramas de esforços solicitantes para a estrutura apresentada na Fig. (8.31) é a construção de seu diagrama de corpo livre. Esse diagrama é construído substituindo-se as condições de vinculações por reações (de apoio) equivalentes aos graus de liberdade restringidos. O diagrama de corpo livre para a grelha a ser analisada está apresentado na Fig. (8.32).

Impondo sobre as ações mostradas na Fig. (8.32) as equações de equilíbrio de corpo rígido, obtêm-se os valores das reações de apoio, as quais são iguais a:

$$\begin{aligned}\sum F_z = 0 &\Rightarrow R_2 - 8 - 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 0 &\Rightarrow R_2 = 29,213 \text{ kN} \\ \sum M_x^C = 0 &\Rightarrow 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 1,5 + 8 \cdot 1,5 + M_{R_x} = 0 &\Rightarrow M_{R_x} = -43,820 \text{ kNm} \\ \sum M_y^C = 0 &\Rightarrow -5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 5,5 - 8 \cdot 2 + M_{R_y} = 0 &\Rightarrow M_{R_y} = 132,673 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Após a determinação das reações de apoio, cada uma das barras que compõem a grelha considerada deve ser isolada e as ações em suas extremidades determinadas. Este procedimento será iniciado pela barra AB, a qual está apresentada na Fig. (8.33).

A barra AB apresentada na Fig. (8.33) não encontra-se totalmente contida nos eixos  $x$  ou  $y$  do sistema de coordenadas cartesiano padrão. Assim, as ações atuantes em seu extremo B, momento fletor e momento torçor, em especial, devem ser determinadas

considerando o sistema de coordenadas auxiliar  $x'y'$ , o qual é definido a partir da orientação do eixo da barra.

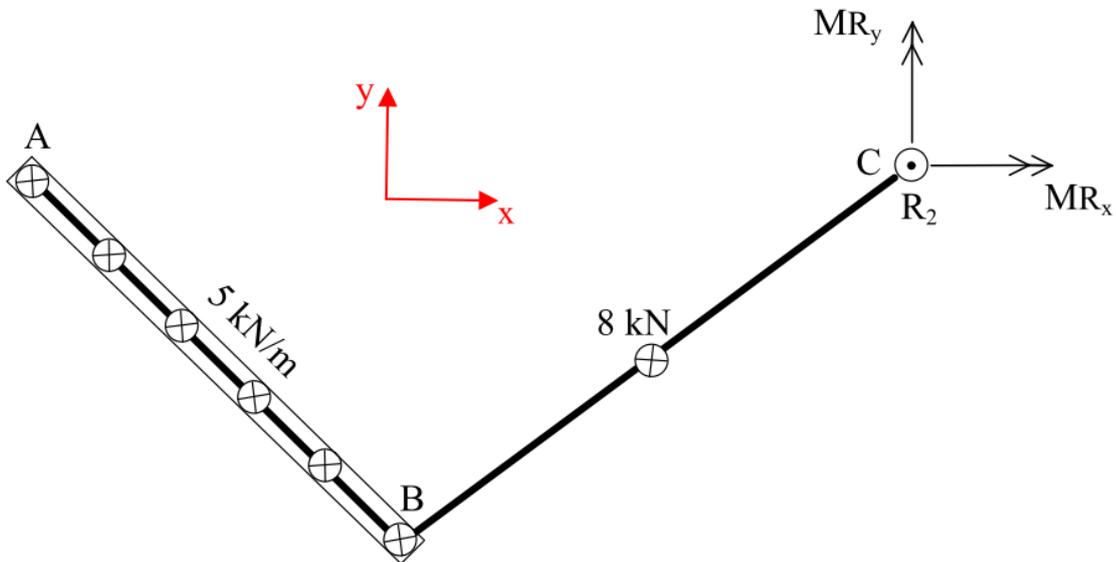


Figura 8.32 Diagrama de corpo livre.

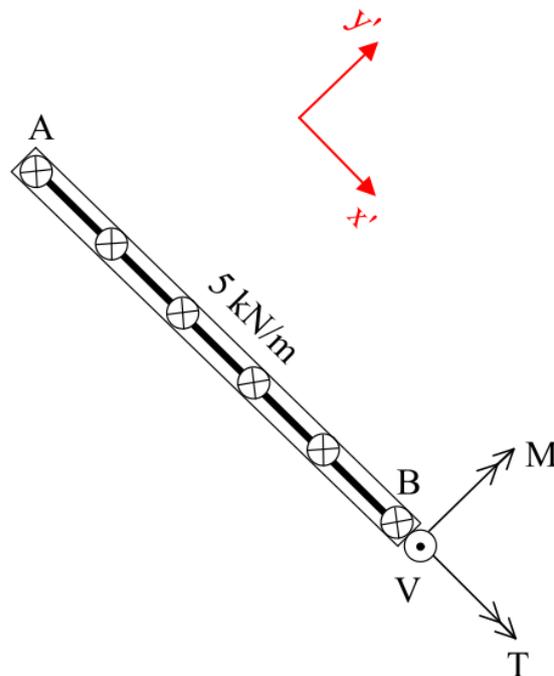


Figura 8.33 Barra AB.

Aplicando sobre as ações mostradas na Fig. (8.33) as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se os valores das ações atuantes no extremo B da barra AB. Assim:

$$\sum M_{x'} = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\sum M_{y'} = 0 \Rightarrow -5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} + M = 0 \Rightarrow M = 45 \text{ kNm}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + V = 0 \Rightarrow V = 21,213 \text{ kN}$$

Conforme apresentado na Fig. (8.33), observa-se a presença de um carregamento uniformemente distribuído nesta barra. Portanto, com base nas relações diferenciais, constata-se que o esforço cortante possuirá variação linear ao longo do comprimento da barra, enquanto que para o momento fletor, esta variação será quadrática. Já o momento torçor, este possuirá valor constante, nulo, ao longo da barra. Assim, a partir destas informações, os diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos, como indicado na Fig. (8.34).

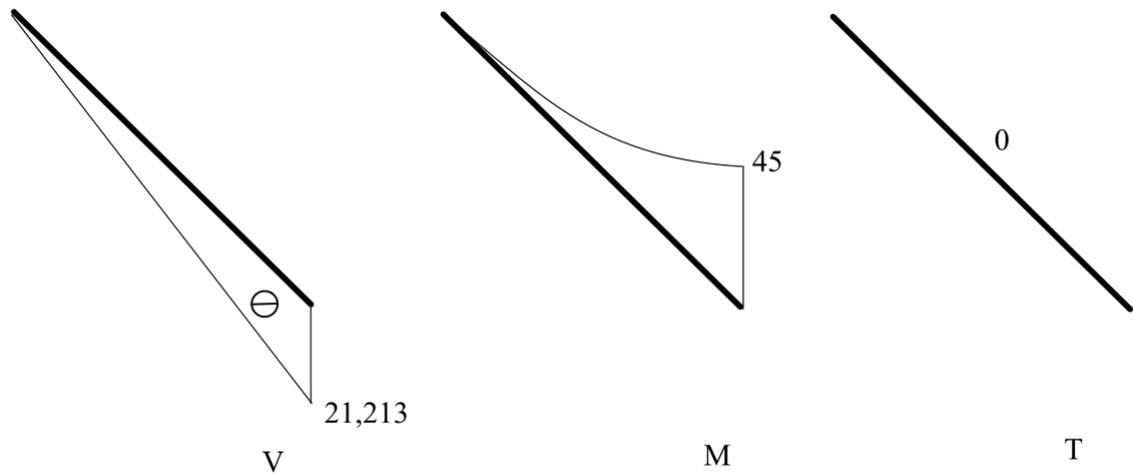


Figura 8.34 Diagramas de esforços solicitantes para a barra AB.

Antes que o equilíbrio da barra BC seja efetuado, deve-se considerar o equilíbrio do nó B. Este procedimento é necessário para que a transmissão de esforços da barra AB para a barra BC seja corretamente representada. Assim, os esforços solicitantes atuantes na extremidade B da barra AB devem ser reaplicados sobre o nó com sentidos opostos (3ª lei de Newton). Em seguida este nó deve ser equilibrado. Conseqüentemente, determinam-se os valores das ações que devem atuar na extremidade B da barra BC para que a condição de equilíbrio seja atendida.

As ações atuantes na extremidade B da barra AB reaplicadas sobre o nó B estão representadas na Fig. (8.35). Deve-se salientar que estas ações estão orientadas segundo o sistema  $x'y'$ , o qual foi definido pela orientação da barra AB. Impondo a condição de equilíbrio de corpo rígido a este nó obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum M_{x'} = 0 &\Rightarrow M_{x'} = 0 \\ \sum M_{y'} = 0 &\Rightarrow -45 + M_{y'} = 0 \quad \Rightarrow M_{y'} = 45 \text{ kNm} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow -21,213 + F_z = 0 \quad \Rightarrow F_z = 21,213 \text{ kN}\end{aligned}$$

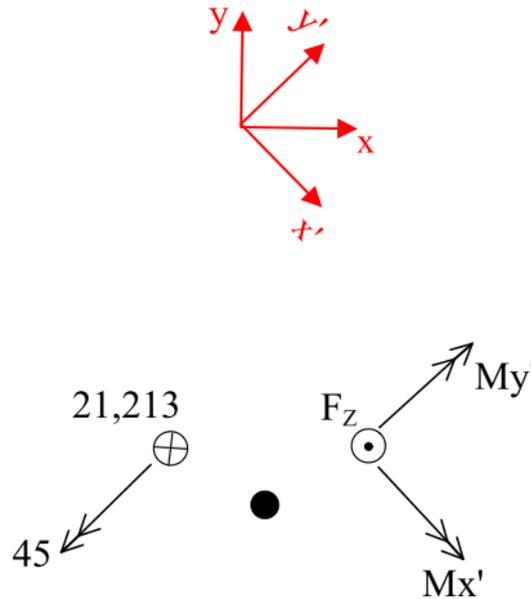
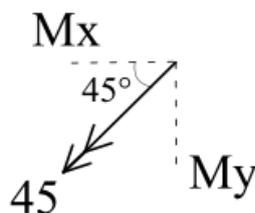


Figura 8.35 Equilíbrio do nó B.

O momento  $M_{y'}$ , determinado acima está orientado segundo o sistema  $x'y'$ , definido de acordo com a orientação da barra AB. Para que esse momento seja reaplicado sobre o extremo B da barra BC, deve-se, primeiramente, decompô-lo em relação ao sistema cartesiano padrão  $xy$ . O momento  $M_{y'}$ , reaplicado sobre o extremo B da barra BC está representado na Fig. (8.36).

Figura 8.36 Decomposição momento  $M_{y'}$ .

As parcelas  $M_x$  e  $M_y$  podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$M_x = M_{y'} \cos(45^\circ) \Rightarrow M_x = 45 \cos(45^\circ) \Rightarrow M_x = 31,820 \text{ kNm}$$

$$M_y = M_{y'} \sin(45^\circ) \Rightarrow M_y = 45 \sin(45^\circ) \Rightarrow M_y = 31,820 \text{ kNm}$$

Assim, a partir dos valores de  $M_x$  e  $M_y$  calculados anteriormente, pode-se representar a barra BC como indicado na Fig. (8.37).

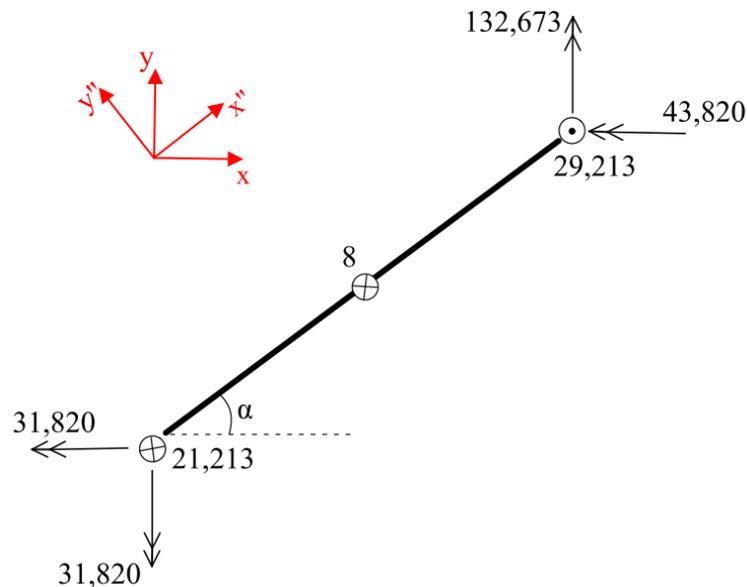


Figura 8.37 Barra BC. Ações definidas no sistema cartesiano padrão.

Conforme indicado na Fig. (8.37), as ações atuantes nos extremos da barra BC estão todas determinadas. Assim, a condição de equilíbrio de corpo rígido pode ser verificada sobre essa barra. Se esta condição for atendida, tem-se um bom indicativo sobre a correção do exercício. Portanto:

$$\sum M_x^C = 0 \Rightarrow -31,820 + 21,213 \cdot 3 + 8 \cdot 1,5 - 43,820 = 0 \quad OK!$$

$$\sum M_y^C = 0 \Rightarrow -31,820 - 21,213 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 132,673 = 0 \quad OK!$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -21,213 - 8 + 29,213 = 0 \quad OK!$$

Assim, como todas as equações de equilíbrio foram atendidas, constata-se que a barra BC está em equilíbrio. A próxima etapa a ser realizada refere-se a decomposição dos momentos atuantes nos extremos da barra BC, definidos em relação ao sistema cartesiano padrão, para o sistema  $x'y'$ . Estes momentos estão representados na Fig. (8.38).

Segundo a geometria da barra BC, constata-se que  $\cos(\alpha) = 0,6$  e  $\sin(\alpha) = 0,8$ . Portanto, pode-se decompor os momentos apresentados na Fig. (8.38) segundo as direções  $x'y'$  da seguinte maneira.



Figura 8.38 Momentos atuantes no extremo B da barra BC.

$$M_{x''1}^1 = 31,820 \cdot \text{sen}(\alpha) \Rightarrow M_{x''1}^1 = 31,820 \cdot 0,6 \Rightarrow M_{x''1}^1 = 19,092 \text{ kNm}$$

$$M_{y''1}^1 = 31,820 \cdot \text{cos}(\alpha) \Rightarrow M_{y''1}^1 = 31,820 \cdot 0,8 \Rightarrow M_{y''1}^1 = 25,456 \text{ kNm}$$

$$M_{x''2}^2 = 31,820 \cdot \text{cos}(\alpha) \Rightarrow M_{x''2}^2 = 31,820 \cdot 0,8 \Rightarrow M_{x''2}^2 = 25,456 \text{ kNm}$$

$$M_{y''2}^2 = 31,820 \cdot \text{sen}(\alpha) \Rightarrow M_{y''2}^2 = 31,820 \cdot 0,6 \Rightarrow M_{y''2}^2 = 19,092 \text{ kNm}$$

Assim, os momentos fletor e torção no extremo B da barra serão dados por:

$$T^B = M_{x''1}^1 + M_{x''2}^2 \Rightarrow T^B = 19,092 + 25,456 \Rightarrow T^B = 44,548 \text{ kNm}$$

$$M^B = -M_{y''1}^1 + M_{y''2}^2 \Rightarrow M^B = -25,456 + 19,092 \Rightarrow M^B = -6,364 \text{ kNm}$$

De forma análoga, os momentos atuantes no extremo C da barra BC, definidos no sistema cartesiano padrão, devem ser decompostos segundo o sistema  $x''y''$ . As componentes desses momentos no sistema  $x''y''$  podem ser determinadas com o auxílio da Fig. (8.39).



Figura 8.39 Momentos atuantes no extremo C da barra BC.

Sabendo que  $\text{cos}(\alpha) = 0,6$  e  $\text{sen}(\alpha) = 0,8$  tem-se:

$$M_{x''1}^1 = 132,673 \cdot \text{sen}(\alpha) \Rightarrow M_{x''1}^1 = 132,673 \cdot 0,6 \Rightarrow M_{x''1}^1 = 79,604 \text{ kNm}$$

$$M_{y''1}^1 = 132,673 \cdot \text{cos}(\alpha) \Rightarrow M_{y''1}^1 = 132,673 \cdot 0,8 \Rightarrow M_{y''1}^1 = 106,138 \text{ kNm}$$

$$M_{x''2}^2 = 43,820 \cdot \text{cos}(\alpha) \Rightarrow M_{x''2}^2 = 43,820 \cdot 0,8 \Rightarrow M_{x''2}^2 = 35,056 \text{ kNm}$$

$$M_{y''2}^2 = 43,820 \cdot \text{sen}(\alpha) \Rightarrow M_{y''2}^2 = 43,820 \cdot 0,6 \Rightarrow M_{y''2}^2 = 26,292 \text{ kNm}$$

Portanto, os momentos fletor e torção atuantes no extremo C da barra BC serão iguais a:

$$T^C = M_{x''}^1 - M_{x''}^2 \Rightarrow T^C = 79,604 - 35,056 \Rightarrow T^C = 44,548 \text{ kNm}$$

$$M^C = M_{y''}^1 + M_{y''}^2 \Rightarrow M^C = 106,138 + 26,292 \Rightarrow M^C = 132,43 \text{ kNm}$$

Considerando a decomposição dos momentos efetuada anteriormente, pode-se definir as ações atuantes nos extremos da barra BC. Esta barra e as ações atuantes sobre ela estão indicadas na Fig. (8.40).

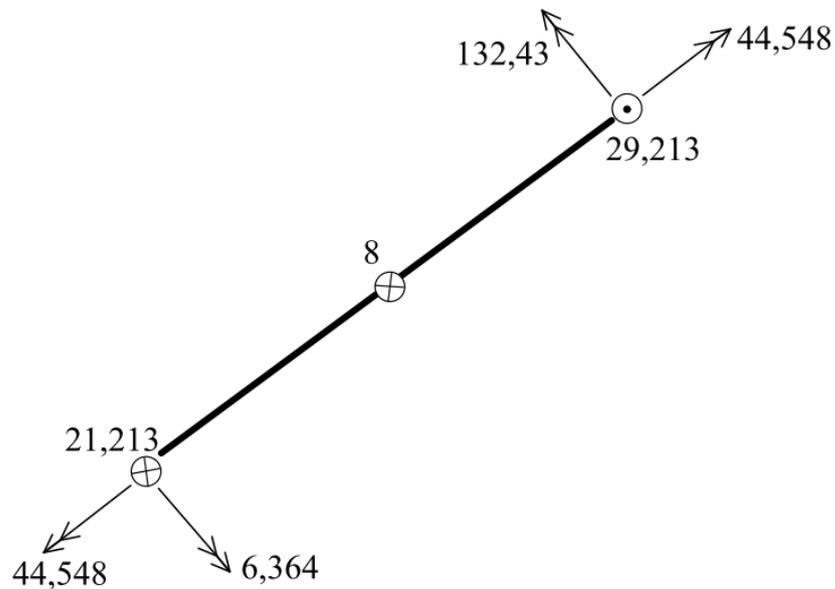


Figura 8.40 Barra BC. Ações definidas no sistema  $x''y''$ .

Com base no carregamento atuante na barra BC, mostrado na Fig. (8.40), observa-se, conforme as relações diferenciais, que o esforço cortante apresentará variação constante nos trechos entre os extremos da barra e o ponto onde atua a carga concentrada de intensidade igual a 8 kN. Além disso, exatamente sobre este ponto, haverá uma descontinuidade no valor do esforço cortante, uma vez que sobre esse ponto está aplicada uma força concentrada. A intensidade dessa descontinuidade será igual à intensidade da força concentrada aplicada, ou seja, igual a 8 kN.

A variação do momento fletor está diretamente associada ao esforço cortante, segundo as relações diferenciais. Assim, nos trechos da barra onde o esforço cortante apresentar variação constante, o momento fletor apresentará variação linear. Além disso, devido à descontinuidade do esforço cortante no ponto onde atua a força concentrada, ocorrerá, nesse mesmo ponto, um “bico” no diagrama de momento fletor, ou seja, haverá um ponto com derivada não contínua. Já o momento torçor possuirá valor constante ao longo de todo o comprimento da barra.

A partir dessas observações e dos valores das ações atuantes nos extremos da barra BC, pode-se construir os diagramas de esforços solicitantes. Estes diagramas estão apresentados na Fig. (8.41).

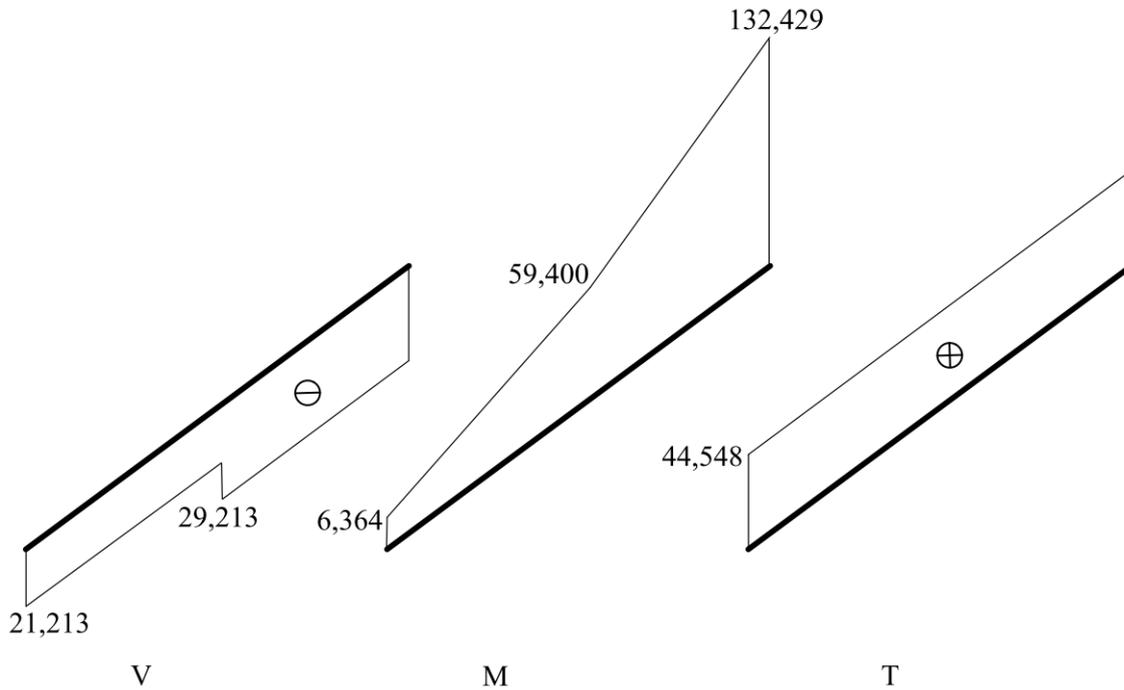


Figura 8.41 Diagramas de esforços solicitantes para a barra BC.

## **9. – Elemento de Barra Geral: Pórticos Tridimensionais**

---

### *9.1 – Introdução*

Os elementos de barra geral são largamente empregados em aplicações tridimensionais no contexto da engenharia de estruturas. Esse elemento estrutural permite o projeto e a execução de diversos tipos de estruturas complexas. Basta verificar a concepção de edifícios, chassis de automóveis e estruturas de máquinas, por exemplo, como mostrado nas Fig. (9.1), Fig. (9.2), Fig. (9.3) e Fig. (9.4).



Figura 9.1 Ponte rolante.



Figura 9.2 Chassi de caminhão.



Figura 9.3 Parthenon.



Figura 9.4 Estádio Ninho do Pássaro em Pequim.

Nessas aplicações, este elemento estrutural é empregado sem nenhuma simplificação em relação a seus graus de liberdade, como efetuado nas vigas, nos pórticos planos e nas grelhas. Assim, simulam-se, com seu uso pleno, os seis GDL no espaço, três deslocamentos e três rotações, por ponto material que compõe a barra.

Neste capítulo será efetuada a determinação dos diagramas de esforços solicitantes de duas estruturas formadas por elementos de barra geral, as quais compõem pórticos tridimensionais. A metodologia a ser seguida é a mesma aplicada nos capítulos anteriores. Assim, determina-se o diagrama de corpo livre da estrutura, calculam-se suas reações de apoio e isola-se barra por barra da estrutura para, com o auxílio das relações diferenciais, construir os diagramas de esforços solicitantes.

Porém, deve-se ressaltar que os elementos de barra geral nessa situação simulam os seis GDL possíveis no espaço. Consequentemente, surgirão na análise estrutural seis esforços solicitantes, os quais correspondem a cada um dos GDL do elemento. Portanto, os diagramas de esforços solicitantes devem contemplar a presença de dois momentos fletores, dois esforços cortantes, um momento torçor e um esforço normal.

O equilíbrio de corpo rígido a ser realizado no caso tridimensional envolve a somatória nula de três forças e três momentos, os quais são orientados ao longo de eixos pré-definidos (pode ser o cartesiano clássico, por exemplo). O equilíbrio de forças, nessa análise, é efetuado levando-se em consideração as direções positiva e negativa dos eixos coordenados adotado. Já o equilíbrio em termos de momentos deve ser efetuado levando-se em conta a direção das forças e dos braços de alavanca. Assumindo que orientação da estrutura siga a dos eixos cartesianos clássica, os momentos podem ser calculados seguindo a definição apresentada no capítulo 2, Eq.(2.4), como:

$$\begin{aligned} M_x &= F_y \Delta z - F_z \Delta y \\ M_y &= -F_x \Delta z + F_z \Delta x \\ M_z &= F_x \Delta y - F_y \Delta x \end{aligned} \quad (9.1)$$

onde  $\Delta x, \Delta y$  e  $\Delta z$  indicam a subtração entre as coordenadas  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, do eixo em torno do qual o momento é calculado e o ponto de atuação da força.

### 9.2 – Exemplo 1

A estrutura a ser analisada no primeiro exemplo deste capítulo refere-se ao pórtico tridimensional apresentado na Fig. (9.5). Trata-se de um pórtico de três barras onde carregamentos distribuídos e concentrados estão presentes. A estrutura está vinculada em seu nó A, onde um engaste está localizado. Objetiva-se nesse exemplo a determinação dos diagramas de esforços solicitantes das três barras que compõem o pórtico.

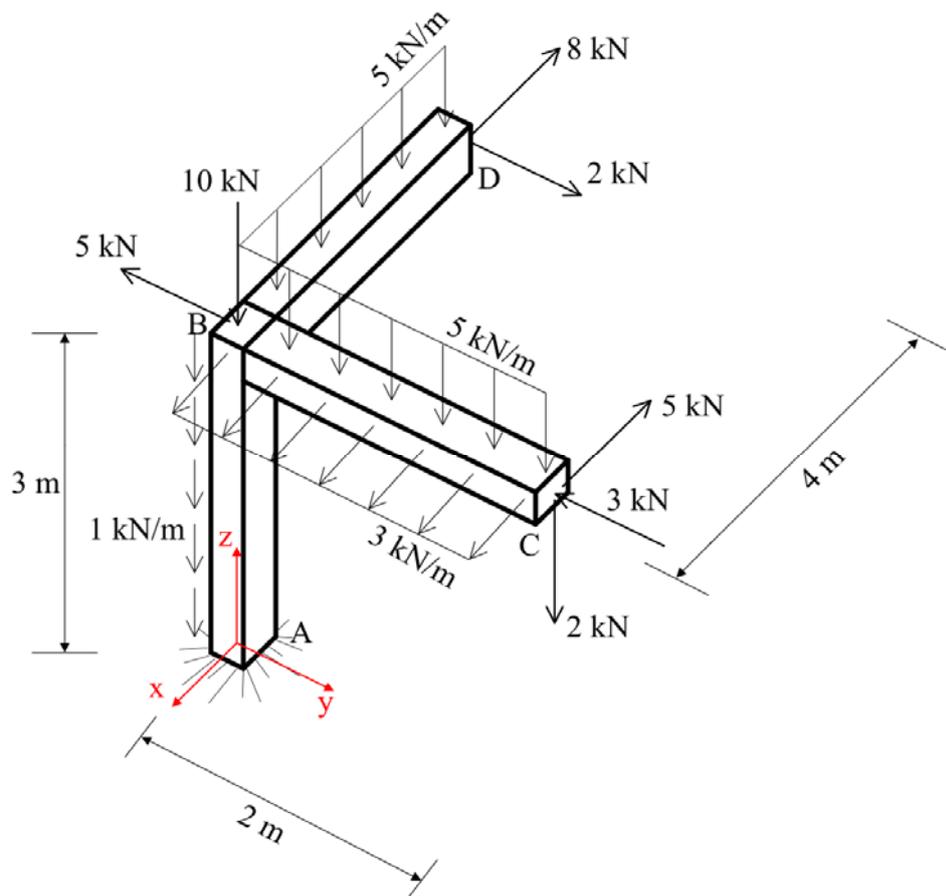


Figura 9.5 Estrutura a ser analisada.

O primeiro passo a ser efetuado para a resolução desse exemplo refere-se à construção do diagrama de corpo livre da estrutura. Esse diagrama, como mostrado na Fig. (9.6), leva em consideração a substituição das condições de vinculação por reações equivalentes. Com base nesse diagrama, determinam-se os valores das reações de apoio da estrutura aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido para o caso tridimensional. Assim, são considerados os equilíbrios de forças nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e as somatórias nulas de momentos em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

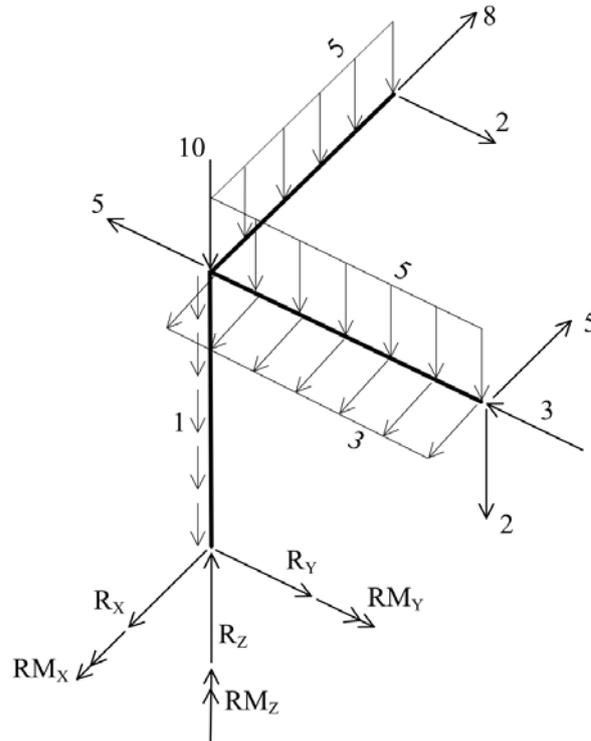


Figura 9.6 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao sistema mostrado na Fig.

(9.6) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_x - 8 - 5 + 3 \cdot 2 = 0 &\Rightarrow R_x = 7kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_y - 5 - 3 + 2 = 0 &\Rightarrow R_y = 6kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow R_z - 1 \cdot 3 - 10 - 5 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 2 = 0 &\Rightarrow R_z = 45kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow R_{mx} + 5 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0 &\Rightarrow R_{mx} = -4kNm \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow R_{my} + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 8 \cdot 3 = 0 &\Rightarrow R_{my} = 61kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow R_{mz} - 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow R_{mz} = 4kNm \end{aligned}$$

Com as reações de apoio calculadas, pode-se isolar cada uma das barras que compõem o pórtico tridimensional e determinar os valores das ações em suas extremidades. Com base nessa informação, nos carregamentos atuantes nas barras e nas relações diferenciais, traçam-se os diagramas de esforços solicitantes.

Esse procedimento será iniciado pela barra BC. Esta barra, assim como os carregamentos sobre ela atuantes, está apresentada na Fig. (9.7). Impondo a condição de equilíbrio de corpo rígido a esta barra, obtêm-se os valores das ações em seus extremos, os quais são iguais a:

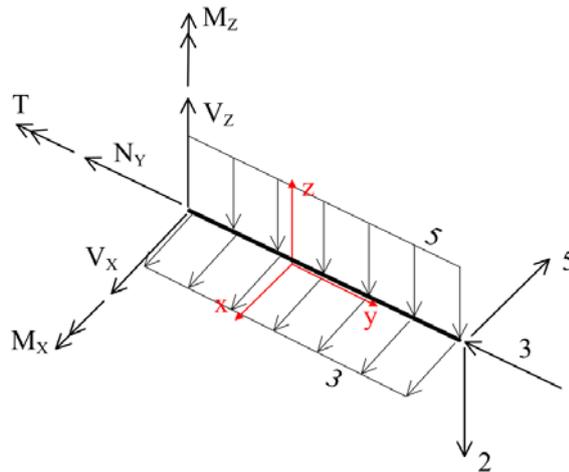


Figura 9.7 Barra BC.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow V_x + 3 \cdot 2 - 5 = 0 &\Rightarrow V_x = -1 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_y - 3 = 0 &\Rightarrow N_y = -3 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow V_z - 5 \cdot 2 - 2 = 0 &\Rightarrow V_z = 12 \text{ kN} \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x - 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 2 \cdot 2 = 0 &\Rightarrow M_x = 14 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow T = 0 \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z - 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 5 \cdot 2 = 0 &\Rightarrow M_z = -4 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Com base nas ações atuantes nos extremos da barra, nos carregamentos atuantes e nas relações diferenciais, observa-se que os esforços cortantes, tanto em  $x$  quanto em  $z$ , possuirão variação linear. Isso se deve a presença de carregamentos distribuídos nessas direções. Conseqüentemente, os momentos fletores atuantes em torno desses eixos apresentarão variação quadrática.

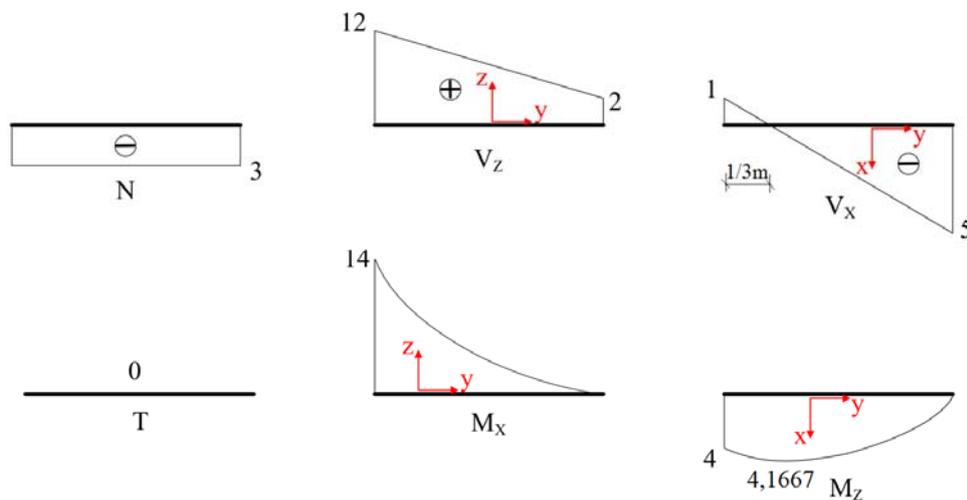


Figura 9.8 Diagramas de esforços solicitantes para a barra BC.

O esforço normal será compressivo e constante, enquanto os esforços de torção nessa barra são nulos. Com base nesses comentários, os diagramas de esforços solicitantes podem ser traçados, os quais são apresentados na Fig. (9.8).

A próxima barra a ser analisada é a delimitada pelos nós B e D. Isolando esta barra do restante da estrutura, esta pode ser representada como mostrado na Fig. (9.9).

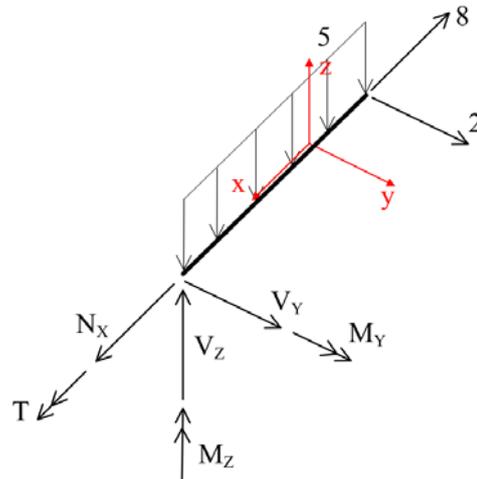


Figura 9.9 Barra BD.

Impondo sobre a barra BD a condição de equilíbrio de corpo rígido, determinam-se os valores das ações em seus extremos. Assim:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_x - 8 = 0 &\Rightarrow N_x = 8kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_y + 2 = 0 &\Rightarrow V_y = -2kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow V_z - 5 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow V_z = 20kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow T = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y - 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 0 &\Rightarrow M_y = 40kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z - 2 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow M_z = 8kNm \end{aligned}$$

Considerando as ações atuantes nos extremos da barra BD, nos carregamentos atuantes e nas relações diferenciais, constata-se que o esforço normal nessa barra será constante, trativo e de intensidade igual a 8 kN. Já o momento torçor será nulo para toda a extensão da barra. Devido à presença de uma carga distribuída no eixo z, o esforço cortante nesse eixo apresentará variação linear, o que conduz a variação quadrática no momento fletor atuante em torno do eixo y. Já o esforço cortante no eixo y apresentará variação constante, uma vez que nenhuma carga distribuída atua nessa direção ao longo do comprimento da barra. Assim, o momento fletor em torno do eixo z possuirá variação

linear. Com base nesses comentários, os diagramas de esforços solicitantes para a barra analisada podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (9.10).

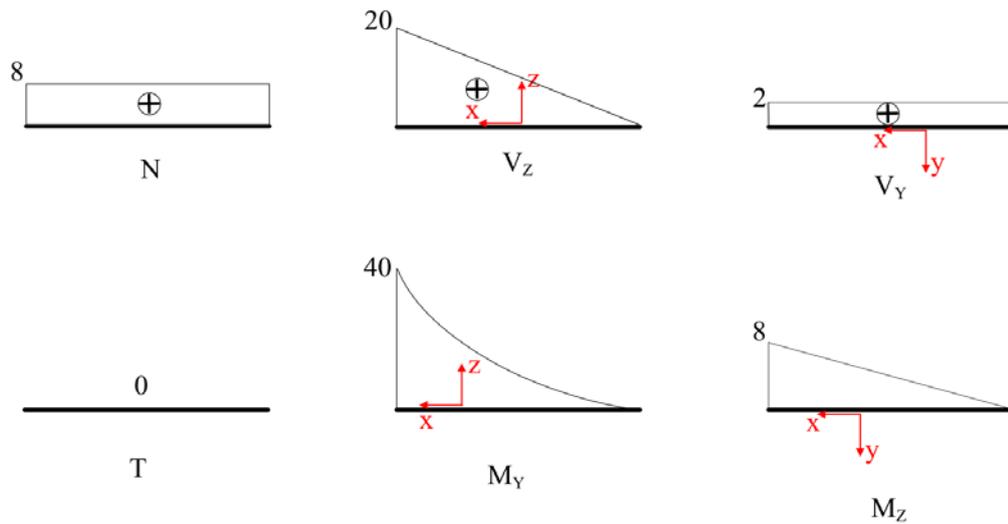


Figura 9.10 Diagramas de esforços solicitantes para a barra BD.

Antes que o equilíbrio da última barra desse pórtico seja considerado, deve-se efetuar o equilíbrio do nó B, o qual realiza a ligação entre as três barras da estrutura. Esse procedimento é efetuado reaplicando sobre o nó B as ações atuantes nas extremidades das barras que concorrem a esse nó com sentidos contrários (3ª lei de Newton).

Se a estrutura está em equilíbrio, qualquer parte constituinte desta deverá também estar em equilíbrio. Portanto, impondo sobre os esforços mostrados na Fig. (9.11), que nada mais são que as ações atuantes no extremo B das barras AB, BC e BD, a condição de equilíbrio de corpo rígido determinam-se os valores das ações no extremo B da barra AB. Assim:

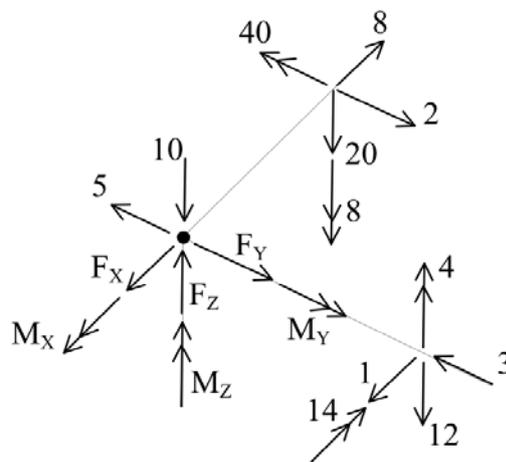


Figura 9.11 Equilíbrio nó B.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_x - 8 + 1 = 0 &\Rightarrow F_x = 7kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -5 - 3 + F_y + 2 = 0 &\Rightarrow F_y = 6kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow F_z - 10 - 12 - 20 = 0 &\Rightarrow F_z = 42kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x - 14 = 0 &\Rightarrow M_x = 14kNm \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y - 40 = 0 &\Rightarrow M_y = 40kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z + 4 - 8 = 0 &\Rightarrow M_z = 4kNm \end{aligned}$$

Dessa forma, os valores das ações determinados anteriormente podem ser transferidos para o extremo B da barra AB. Para tal finalidade, basta reaplicar, com sentidos opostos, as ações incógnitas calculadas sobre o nó B. Efetuando este procedimento obtém-se o diagrama de corpo livre da barra AB, o qual está ilustrado na Fig. (9.12).

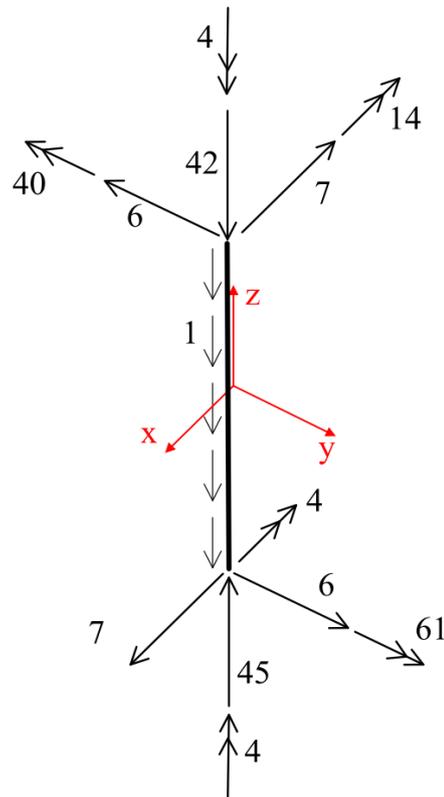


Figura 9.12 Barra AB.

Conforme ilustrado na Fig. (9.12), todas as ações atuantes sobre a barra são conhecidas. Assim, pode-se verificar a correção do exercício por meio do equilíbrio de corpo rígido desta barra. Como todas as ações são conhecidas, as somatórias de forças e momentos devem resultar nulas para que o equilíbrio seja observado. Portanto, aplicando sobre esta barra as equações de equilíbrio de corpo rígido obtém-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow 7 - 7 = 0 && \Rightarrow OK! \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow 6 - 6 = 0 && \Rightarrow OK! \\ \sum F_z &= 0 \Rightarrow 45 - 1 \cdot 3 - 42 = 0 && \Rightarrow OK! \\ \sum M_x &= 0 \Rightarrow -14 + 6 \cdot 3 - 4 = 0 && \Rightarrow OK! \\ \sum M_y &= 0 \Rightarrow -40 - 7 \cdot 3 + 61 = 0 && \Rightarrow OK! \\ \sum M_z &= 0 \Rightarrow 4 - 4 = 0 && \Rightarrow OK!\end{aligned}$$

Conforme mostrado anteriormente, as somatórias de forças e momentos resultaram nulas, o que indica a correção na resolução deste exemplo. Com base nesse resultado os diagramas de esforços solicitantes podem ser construídos. Conhecendo-se os valores das ações nos extremos da barra e os carregamentos atuantes, as relações diferenciais podem ser empregadas para tal fim.

Verifica-se que não atuam na barra AB carregamentos distribuídos perpendiculares ao seu eixo. De acordo com as relações diferenciais, isso faz com que os esforços cortantes apresentem variação constante e os momentos fletores variação linear ao longo da barra. Já o esforço normal apresentará variação linear ao longo do comprimento da barra. Esse comportamento é observado devido a presença de um carregamento distribuído atuante na direção paralela ao eixo da barra. Já o momento torçor, este é constante e de intensidade igual a 4 kNm. Com base nesses comentários, os diagramas de esforços solicitantes para a barra AB podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (9.13).

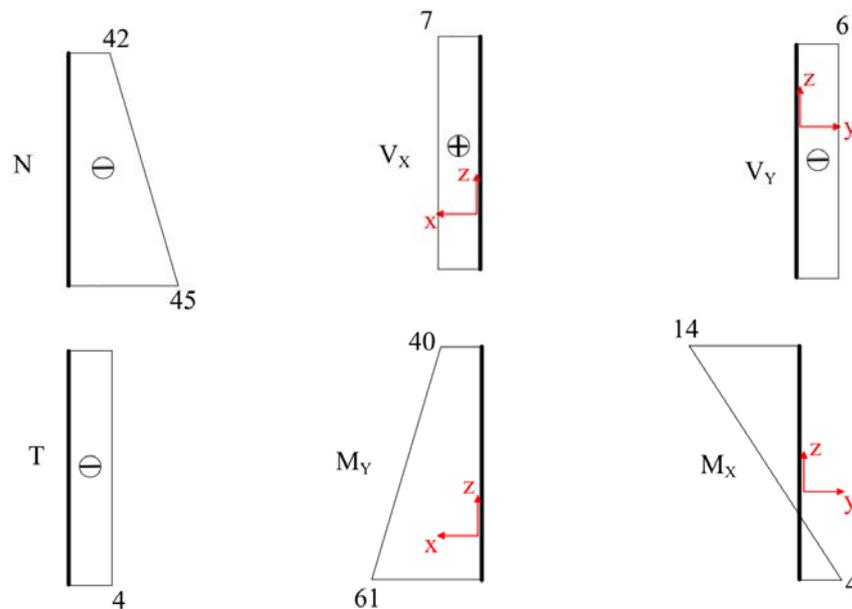


Figura 9.13 Diagramas de esforços solicitantes para a barra AB.

### 9.3 – Exemplo 2

O último exemplo desse capítulo objetiva a determinação dos diagramas de esforços solicitantes da estrutura apresentada na Fig. (9.14). Trata-se de um pórtico tridimensional formado por três barras, o qual é solicitado por carregamentos distribuídos e concentrados, sendo engastado em seu nó A.

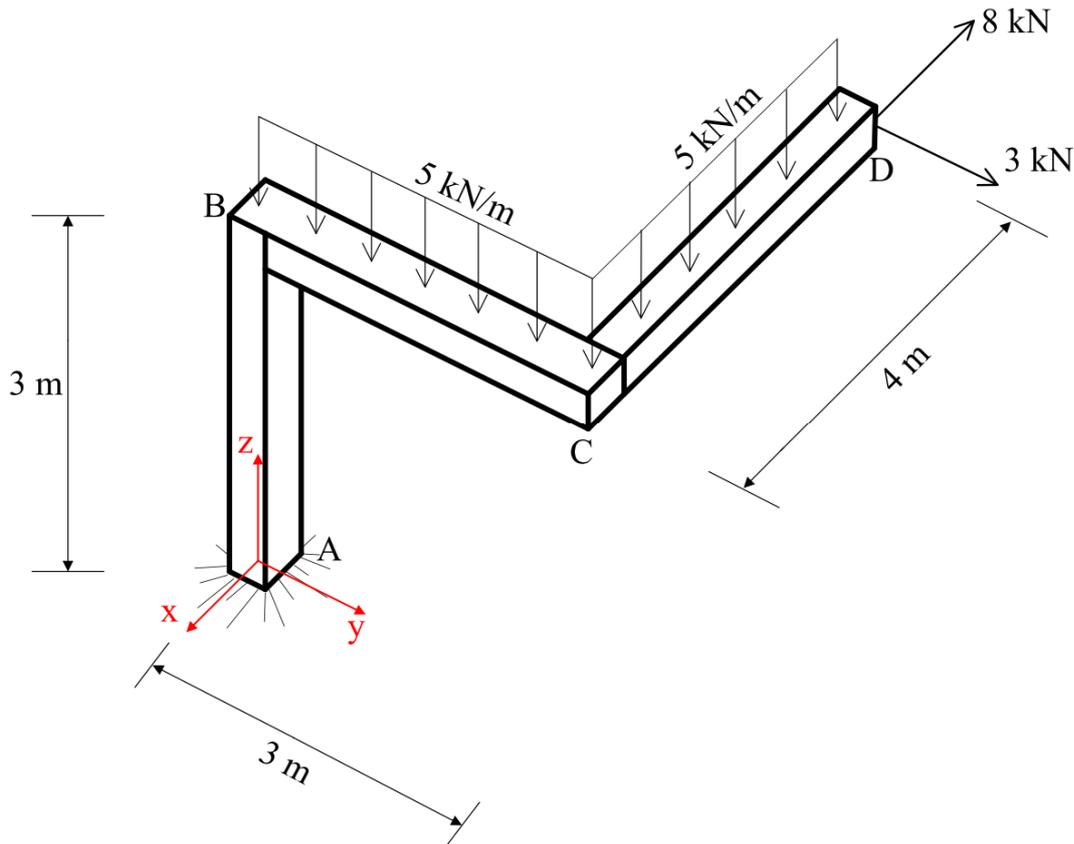


Figura 9.14 Estrutura a ser analisada.

Para que os diagramas de esforços solicitantes sejam determinados deve-se, inicialmente, calcular as reações de apoio da estrutura. Para isso, deve-se construir seu diagrama de corpo livre, o qual é obtido substituindo-se as condições de vinculação por reações (de apoio) referentes aos GDL restringidos. Para a estrutura em análise, o diagrama de corpo livre está apresentado na Fig. (9.15). Com base nas ações apresentadas na Fig.(9.15), as reações de apoio são determinadas impondo-se as equações de equilíbrio de corpo rígido para o caso tridimensional. Portanto, são impostas as condições de equilíbrio de forças nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e somatórias nulas de momentos em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Efetuando esse equilíbrio obtêm-se:

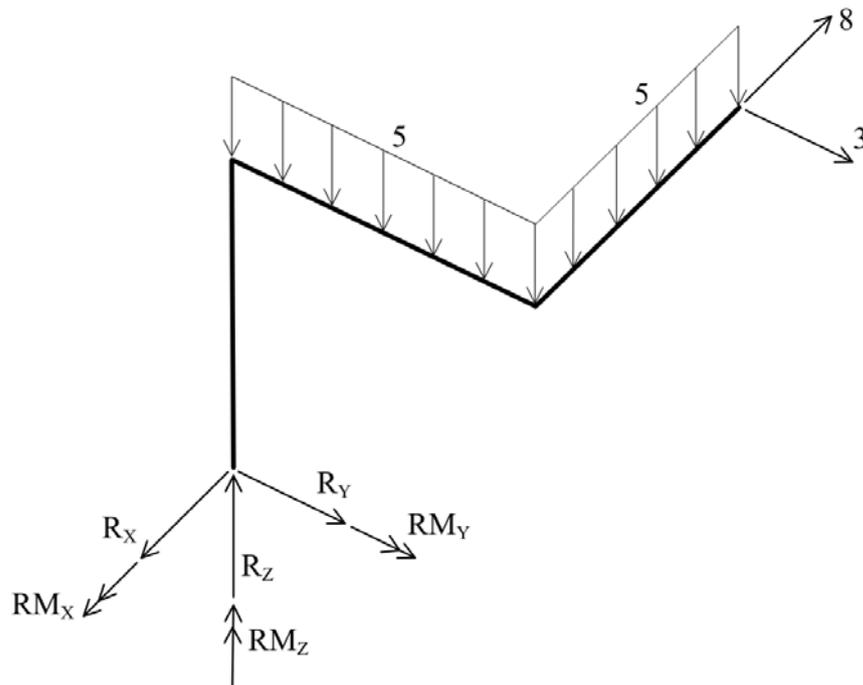


Figura 9.15 Diagrama de corpo livre da estrutura.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_x - 8 = 0 &&\Rightarrow R_x = 8kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_y + 3 = 0 &&\Rightarrow R_y = -3kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow R_z - 5 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 0 &&\Rightarrow R_z = 35kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow R_{mx} - 5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 5 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 0 &&\Rightarrow R_{mx} = 91,5kNm \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow R_{my} - 8 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 0 &&\Rightarrow R_{my} = 64kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow R_{mz} - 8 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0 &&\Rightarrow R_{mz} = -12kNm \end{aligned}$$

Com as reações de apoio determinadas, pode-se isolar cada uma das barras que compõem a estrutura. Em seguida calculam-se os valores das ações nos extremos de cada uma dessas barras e traçam-se os diagramas de esforços solicitantes para cada uma delas. Este procedimento, nesse exemplo, será iniciado pela barra AB. Isolando-a do restante da estrutura obtém-se o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (9.16). Impondo sobre as ações apresentadas nessa figura as condições de equilíbrio de corpo rígido obtém-se:

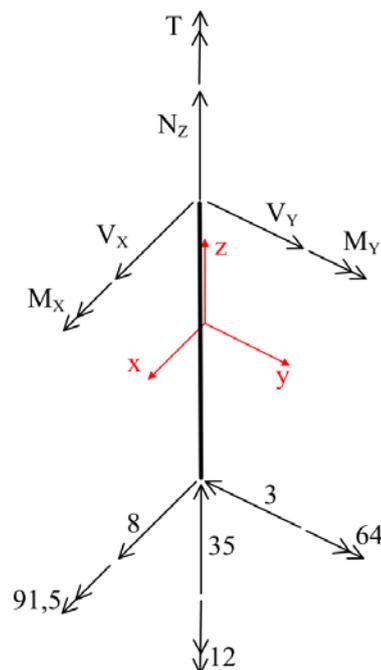


Figura 9.16 Barra AB.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow V_x + 8 = 0 &\Rightarrow V_x = -8 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -3 + V_y = 0 &\Rightarrow V_y = 3 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow 35 + N_z = 0 &\Rightarrow N_z = -35 \text{ kN} \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow 91,5 + M_x - 3 \cdot 3 = 0 &\Rightarrow M_x = -82,5 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow 64 + M_y - 8 \cdot 3 = 0 &\Rightarrow M_y = -40 \text{ kNm} \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow -12 + T = 0 &\Rightarrow T = 12 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Com base nas ações e carregamentos apresentados na Fig. (9.16), constata-se que os esforços cortantes apresentarão variação constante ao longo do comprimento da barra, enquanto os momentos fletores possuirão variação linear. Esse tipo de comportamento para esses esforços solicitantes, segundo as relações diferenciais, deve-se a ausência de carregamentos distribuídos ao longo do comprimento da barra. Já o esforço normal e momento torçor apresentarão variação constante ao longo do comprimento da barra sendo iguais a -35 kN e 12 kNm, respectivamente. Com base nessas informações, os diagramas de esforços solicitantes podem ser traçados, sendo os mesmos apresentados na Fig. (9.17).

A próxima barra a ser estudada é a BC. Porém, antes de isolá-la da estrutura, deve-se efetuar o equilíbrio do nó B, nó este que faz a conexão entre as barras AB e BC, para que a intensidade das ações atuantes no extremo B da barra BC seja calculada.

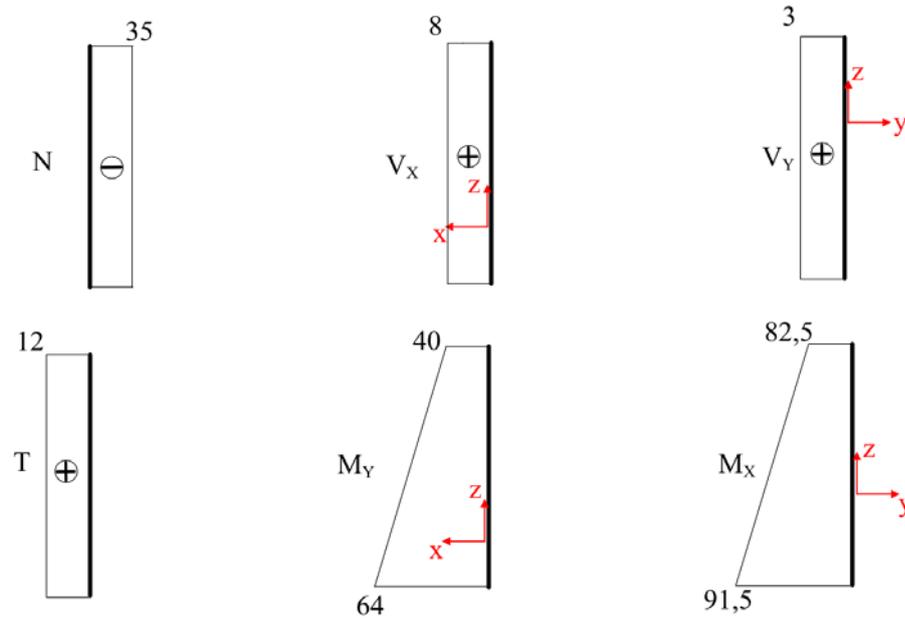


Figura 9.17 Diagramas de esforços solicitantes para a barra AB.

O equilíbrio do nó B é efetuado impondo-se a condição de equilíbrio de corpo rígido ao nó considerando as ações atuantes no extremo B das barras que concorrem a este nó, reaplicadas com sentido oposto ao de atuação destes no extremo das respectivas barras (3ª lei de Newton). As ações atuantes sobre o nó B estão apresentadas na Fig. (9.18). Impondo a condição de equilíbrio de corpo rígido a essas ações obtém-se:

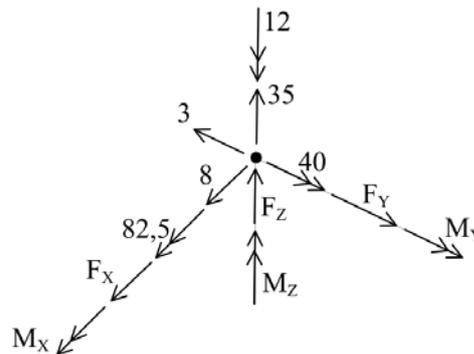


Figura 9.18 Equilíbrio nó B.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_x + 8 = 0 &\Rightarrow F_x = -8 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -3 + F_y = 0 &\Rightarrow F_y = 3 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow 35 + F_z = 0 &\Rightarrow F_z = -35 \text{ kN} \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x + 82,5 = 0 &\Rightarrow M_x = -82,5 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y + 40 = 0 &\Rightarrow M_y = -40 \text{ kNm} \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow -12 + M_z = 0 &\Rightarrow M_z = 12 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Portanto, as ações determinadas anteriormente podem ser transferidas para o extremo B da barra BC. Para isso, basta reaplicar, com sentidos opostos, as ações incógnitas calculadas sobre o nó B. Efetuando este procedimento obtém-se o diagrama de corpo livre da barra BC, o qual está ilustrado na Fig. (9.19).

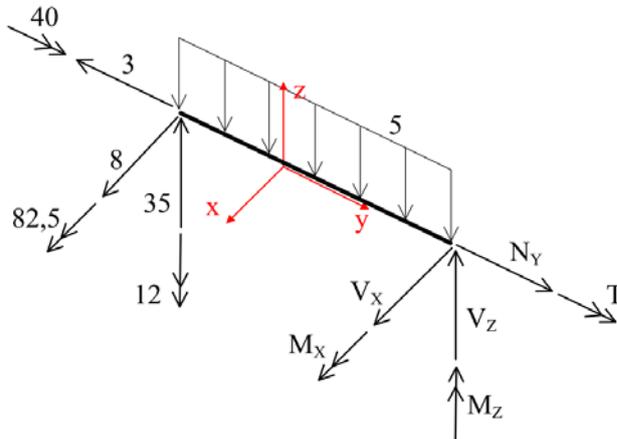


Figura 9.19 Barra BC.

Impondo-se a condição de equilíbrio de corpo rígido a barra apresentada na Fig. (9.19), obtêm-se os valores das ações em seus extremos, os quais são iguais a:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow V_x + 8 = 0 &\Rightarrow V_x = -8kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -3 + N_y = 0 &\Rightarrow N_y = 3kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow 35 - 5 \cdot 3 + V_z = 0 &\Rightarrow V_z = -20kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow 82,5 - 5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + M_x - 20 \cdot 3 = 0 &\Rightarrow M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow 40 + T = 0 &\Rightarrow T = -40kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow -12 + 8 \cdot 3 + M_z = 0 &\Rightarrow M_z = -12kNm \end{aligned}$$

Com base nas ações atuantes nos extremos da barra BC, nos carregamentos atuantes e nas relações diferenciais, constata-se que o esforço normal nessa barra será constante, trativo e de intensidade igual a 3 kN. Já o momento torçor apresentará variação constante ao longo da extensão da barra. Devido à presença de uma carga distribuída na direção do eixo z, o esforço cortante nesse eixo apresentará variação linear, o que conduzirá a variação quadrática do momento fletor atuante em torno do eixo x. Já o esforço cortante no eixo x apresentará variação constante, uma vez que nenhuma carga distribuída atua nessa direção ao longo do comprimento da barra. Assim, o momento fletor em torno do eixo z possuirá variação linear. Com base nesses

comentários, os diagramas de esforços solicitantes para a barra analisada podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (9.20).

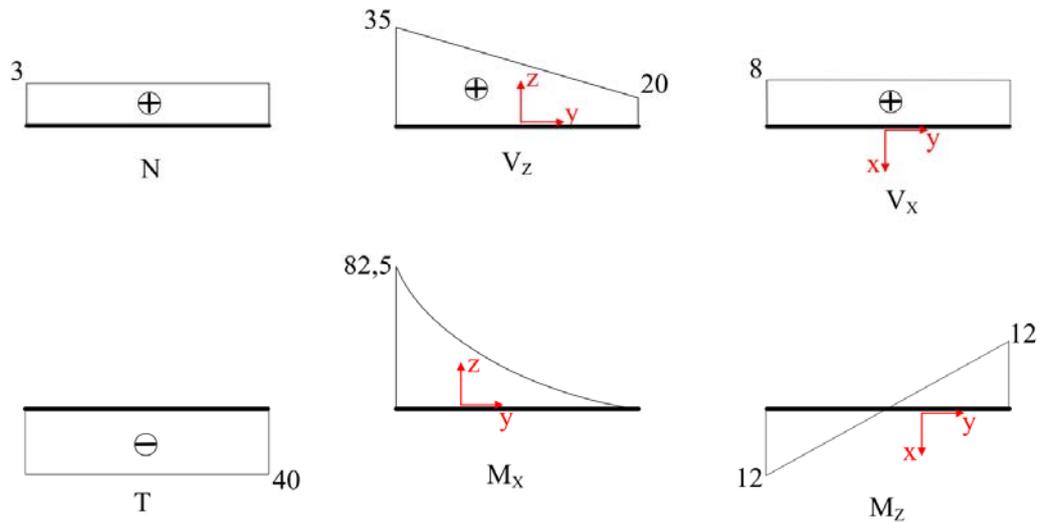


Figura 9.20 Diagramas de esforços solicitantes para a barra BC.

Para que a última barra do pórtico tridimensional considerado seja analisada, deve-se efetuar o equilíbrio do nó C. Esse equilíbrio é efetuado reaplicando-se sobre o referido nó as ações atuantes nos extremos das barras que concorrem a esse nó com sentidos opostos ao (3ª lei de Newton). As ações atuantes sobre o nó C estão mostradas na Fig. (9.21). Impondo a condição de equilíbrio de corpo rígido nessas ações obtém-se:

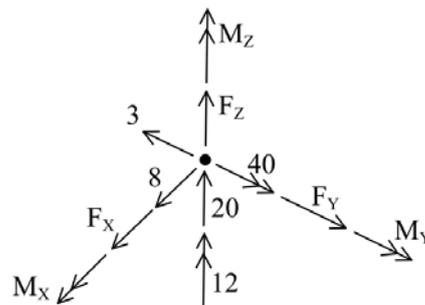


Figura 9.21 Equilíbrio nó C.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_x + 8 = 0 &\Rightarrow F_x = -8kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -3 + F_y = 0 &\Rightarrow F_y = 3kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow 20 + F_z = 0 &\Rightarrow F_z = -20kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x + 0 = 0 &\Rightarrow M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y + 40 = 0 &\Rightarrow M_y = -40kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow 12 + M_z = 0 &\Rightarrow M_z = -12kNm \end{aligned}$$

Assim, com o equilíbrio do nó C efetuado, pode-se transferir as ações incógnitas calculadas para o extremo C da barra CD. Para tanto, basta reaplicar, com sentidos opostos, as ações incógnitas determinadas anteriormente. Efetuando este procedimento obtém-se o diagrama de corpo livre da barra CD, o qual está ilustrado na Fig. (9.22).

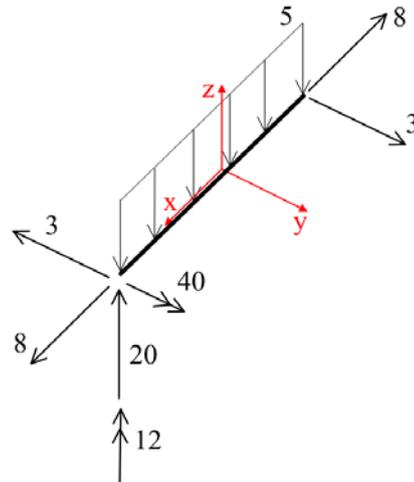


Figura 9.22 Barra CD.

Conforme ilustrado na Fig. (9.22), todas as ações atuantes sobre a barra são conhecidas. Assim, pode-se verificar a correção do exercício por meio do equilíbrio de corpo rígido desta barra. Como todas as ações são conhecidas, as somatórias de forças e momentos devem resultar nulas para que o equilíbrio seja observado. Dessa forma:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 8 - 8 = 0 \Rightarrow OK!$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0 \Rightarrow OK!$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow 20 - 5 \cdot 4 = 0 \Rightarrow OK!$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow OK!$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow 40 - 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 0 \Rightarrow OK!$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow 12 - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow OK!$$

Conforme apresentado anteriormente, as somatórias de forças e momentos resultaram nulas, o que indica a correção na resolução deste exemplo. Com base nesse resultado os diagramas de esforços solicitantes para essa barra podem ser construídos.

Considerando as ações atuantes nos extremos da barra CD, os carregamentos atuantes nessa barra e as relações diferenciais, verifica-se que o esforço cortante ao longo de  $z$  possuirá variação linear e o momento fletor atuante em torno do eixo  $y$  apresentará variação quadrática. Esse comportamento se deve, segundo as relações

diferenciais, a presença de uma carga distribuída atuando na direção do eixo  $z$ . Já o esforço cortante no eixo  $y$  apresentará variação constante, uma vez que nenhuma carga distribuída atua nessa direção ao longo do comprimento da barra. Conseqüentemente, o momento fletor em torno do eixo  $z$  possuirá variação linear. O esforço normal nessa barra será constante, trativo e de intensidade igual a 8 kN. Já o momento torçor possui intensidade nula ao longo da extensão da barra. Com base nesses comentários, os diagramas de esforços solicitantes para a barra analisada podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (9.23).

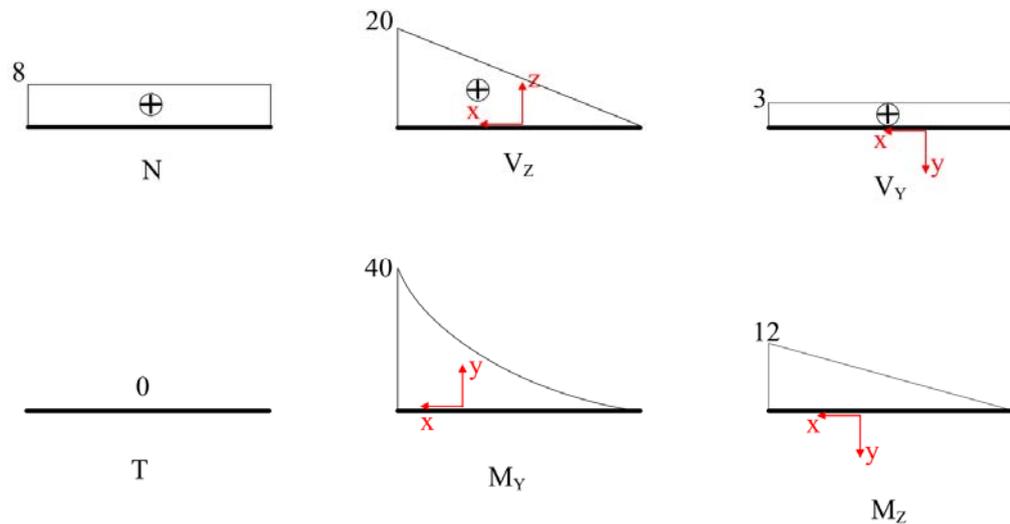


Figura 9.23 Diagramas de esforços solicitantes para a barra CD.

## 10. – Estruturas Mistas Tridimensionais

---

### *10.1 – Introdução*

O acoplamento entre elementos de barra simples e elementos de barra geral no caso tridimensional permite a análise, a modelagem e o projeto de estruturas complexas no contexto da engenharia de estruturas. Por meio desse tipo de acoplamento, sistemas estruturais de complexa geometria e comportamento mecânico podem ser considerados, como os apresentados nas Fig. (10.1), Fig. (10.2) e Fig. (10.3).



Figura 10.1 Corpo Humano.



Figura 10.2 Ponte.



Figura 10.3 Ponte Rodoviária.

No acoplamento entre elementos de barra simples e barra geral esforços normais devem ser determinados nos elementos de barra simples, enquanto nos elementos de barra geral esforços normais, esforços cortantes, momentos fletores e momentos torçores devem ser quantificados. Os procedimentos de análise estática e traçado dos diagramas de esforços solicitantes de estruturas compostas por esses elementos estruturais de forma isolada foram apresentados nos capítulos 3 e 9. No presente capítulo, a novidade encontra-se na transmissão dos esforços dos elementos de barra simples para os elementos de barra geral. Assim, esse capítulo contém uma extensão, para o caso tridimensional, das análises apresentadas no capítulo 7. Dois exemplos envolvendo a análise estrutural de estruturas mistas tridimensionais serão apresentados, de forma a ilustrar suas potenciais aplicações.

### 10.2 – Exemplo 1

A estrutura a ser analisada neste item refere-se à apresentada na Fig. (10.4), a qual envolve o acoplamento entre dois elementos de barra geral e três elementos de barra simples no caso tridimensional. Carregamentos distribuídos e concentrados atuam sobre os elementos de barra geral, enquanto na treliça tridimensional apenas uma força concentrada atua na conexão entre suas três barras simples. A estrutura é vinculada em seus nós A e E onde engastes são aplicados. Objetiva-se, nesse exemplo, a determinação dos diagramas de esforços solicitantes dos elementos que compõem a estrutura.

O primeiro passo a ser considerado para a resolução deste exemplo trata da determinação dos esforços normais atuantes nos elementos de barra simples. Para alcançar tal objetivo, deve ser efetuado o equilíbrio do nó F. Com base nos procedimentos apresentado no capítulo 3, pode-se aplicar o método dos nós, o qual requer a determinação dos versores unitários que definem a geometria das barras. Esse procedimento conduz a:

$$\begin{aligned} \overline{L_{FB}} &= \frac{((2-2)i + (0-4)j + (0-3)k)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}} & \Rightarrow & \overline{L_{FB}} = \frac{(0i - 4j - 3k)}{5} \\ \overline{L_{FC}} &= \frac{((4-2)i + (0-4)j + (0-3)k)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-3)^2}} & \Rightarrow & \overline{L_{FC}} = \frac{(2i - 4j - 3k)}{\sqrt{29}} \\ \overline{L_{FD}} &= \frac{((4-2)i + (8-4)j + (0-3)k)}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2}} & \Rightarrow & \overline{L_{FD}} = \frac{(2i + 4j - 3k)}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

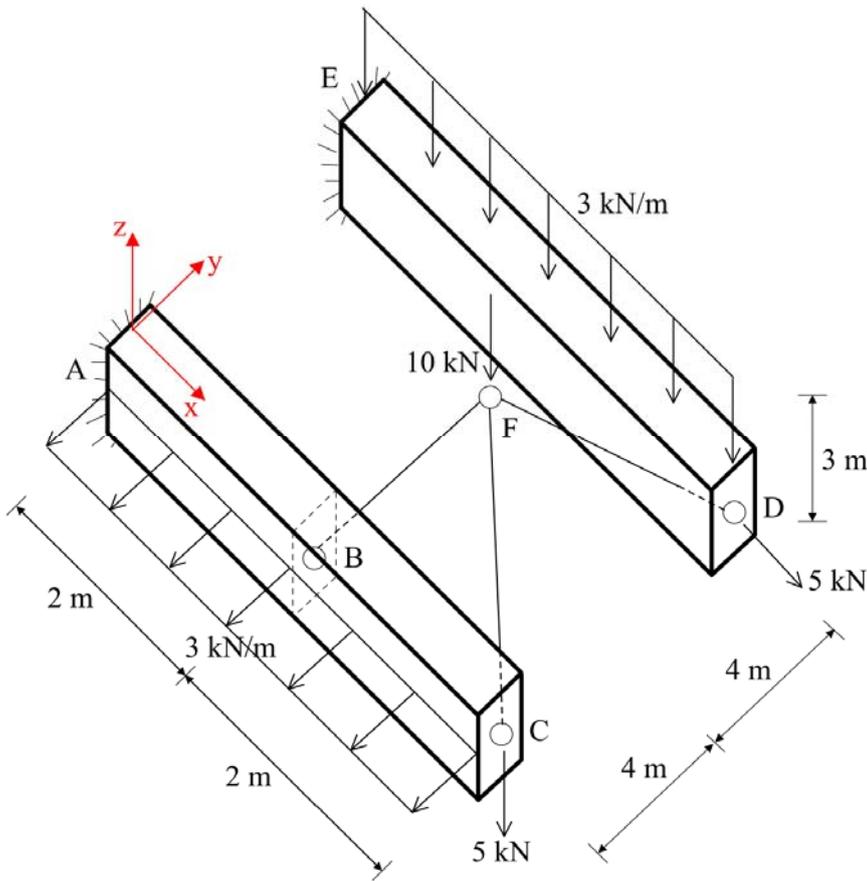


Figura 10.4 Estrutura a ser analisada.

Sabendo que o esforço normal possui orientação paralela ao eixo geométrico que define a barra, constata-se que suas componentes podem ser definidas utilizando os versores unitários calculados anteriormente. Portanto, os esforços normais na treliça tridimensional analisada podem ser obtidos multiplicando os versores unitários que definem as geometrias de suas barras pela norma do esforço normal, resultado em:

$$\vec{N}_{FB} = (0i - 4j - 3k) \frac{N_{FB}}{5}$$

$$\vec{N}_{FC} = (2i - 4j - 3k) \frac{N_{FC}}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{N}_{FD} = (2i + 4j - 3k) \frac{N_{FD}}{\sqrt{29}}$$

Considerando que a força externa atuante sobre o nó F pode ser definida como  $\vec{F} = (0i + 0j - 10k)$ , pode-se efetuar o equilíbrio desse nó por meio das seguintes condições:

$$\sum F_X = \sum F_Y = \sum F_Z = 0$$

Para o caso em estudo pode-se escrever que:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 & \left\{ \begin{aligned} 0N_{FB} + \frac{2}{\sqrt{29}}N_{FC} + \frac{2}{\sqrt{29}}N_{FD} &= 0 \\ -\frac{4}{5}N_{FB} - \frac{4}{\sqrt{29}}N_{FC} + \frac{4}{\sqrt{29}}N_{FD} &= 0 \\ -\frac{3}{5}N_{FB} - \frac{3}{\sqrt{29}}N_{FC} - \frac{3}{\sqrt{29}}N_{FD} - 10 &= 0 \end{aligned} \right. \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum F_Z = 0 \end{cases}$$

Reorganizando as três equações anteriores de uma maneira matricial, a qual é mais facilmente resolvida com o auxílio de calculadoras, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{\sqrt{29}} & -\frac{3}{\sqrt{29}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{FB} \\ N_{FC} \\ N_{FD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema matricial anteriormente apresentado, composto por três equações e três incógnitas, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0,3714 & 0,3714 \\ -0,8 & -0,7428 & 0,7428 \\ -0,6 & -0,5571 & -0,5571 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{FB} \\ N_{FC} \\ N_{FD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \therefore \begin{Bmatrix} N_{FB} \\ N_{FC} \\ N_{FD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16,667 \\ 8,975 \\ -8,975 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

A próxima etapa a ser realizada envolve a transmissão dos esforços solicitantes atuantes nas barras da treliça tridimensional para os elementos de barra geral que a suportam. Essa transmissão de esforços deve ser efetuada em cada um dos nós de

conexão entre os elementos de barra simples e elementos de barra geral. Devido à terceira lei de Newton, ação e reação, os esforços solicitantes atuantes sobre o elemento de barra simples devem ser aplicados com sentidos contrários sobre o elemento de barra geral. Iniciando esse procedimento pelo nó B, pode-se determinar a força sobre ele atuante devido à ação da barra simples FB da seguinte maneira:

$$\vec{F}_B = -\overline{L_{FB}} N_{FB} \rightarrow \vec{F}_B = -(0i - 4j - 3k) \frac{1}{5} (-16,667) \rightarrow$$

$$\vec{F}_B = (0i - 13,334j - 10k)$$

Para os demais nós do acoplamento barras simples/barras geral procedimento semelhante deve ser efetuado. Para o nó C obtém-se:

$$\vec{F}_C = -\overline{L_{FC}} N_{FC} \rightarrow \vec{F}_C = -(2i - 4j - 3k) \frac{1}{\sqrt{29}} 8,975 \rightarrow$$

$$\vec{F}_C = (-3,333i + 6,666j + 5k)$$

Já para o nó D, as seguintes componentes de força são obtidas:

$$\vec{F}_D = -\overline{L_{FD}} N_{FD} \rightarrow \vec{F}_D = -(2i + 4j - 3k) \frac{1}{\sqrt{29}} (-8,975) \rightarrow$$

$$\vec{F}_D = (3,333i + 6,666j - 5k)$$

Até o presente momento, apenas a transmissão da força externa atuante sobre o nó F para os elementos de barra simples e sua aplicação sobre os elementos de barra geral foi considerado. De forma a comprovar a correção dos procedimentos efetuados até aqui, deve-se verificar se a somatória das forças  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{F}_C$  e  $\vec{F}_D$  resulta a força externa aplicada. Isso deve ser constatado uma vez que forças não podem ser criadas nem eliminadas durante o processo de equilíbrio. Assim:

$$\left( \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D \right) = (0i - 13,334j - 10k) + (-3,333i + 6,666j + 5k) +$$

$$(3,333i + 6,666j - 5k) \rightarrow \left( \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D \right) = (0i - 0j - 10k)$$

O resultado anterior concorda com o vetor que define a força externa aplicada, ou seja,  $\vec{F} = (0i + 0j - 10k)$ . Portanto, a análise dos elementos de barra geral pode ser

iniciada, já que o equilíbrio da treliça tridimensional foi verificado assim como sua transmissão de esforços.

A análise dos elementos de barra geral será iniciada pela barra AC. Considerando as forças aplicadas nessa barra decorrentes da presença da treliça tridimensional e os demais carregamentos externos, obtém-se a representação mostrada na Fig. (10.5).

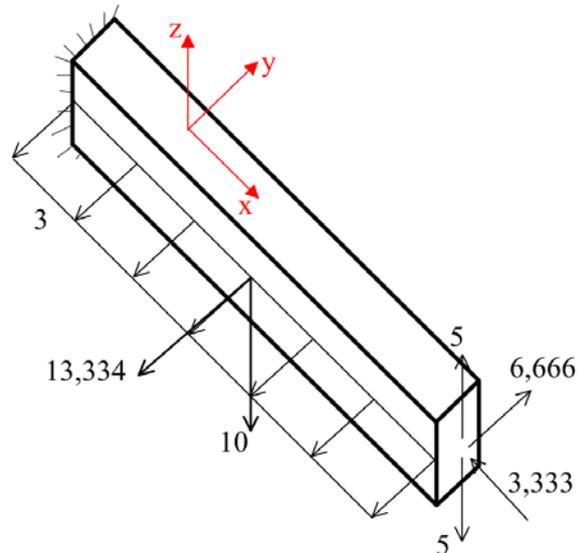


Figura 10.5 Barra AC.

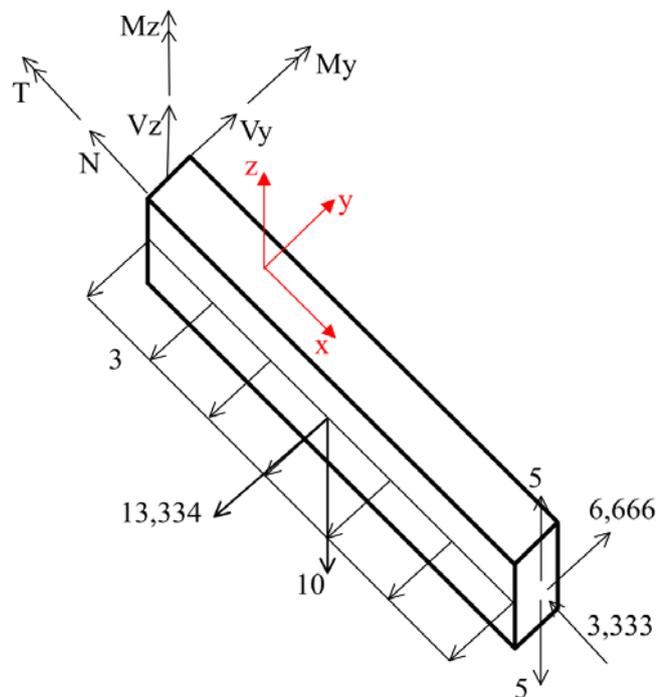


Figura 10.6 Diagrama de corpo livre da barra AC.

Substituindo a vinculação atuante na barra, ou seja o engaste atuante sobre o nó A, por reações de apoio equivalentes aos graus de liberdade restringidos obtém-se o diagrama de corpo livre dessa barra, o qual está apresentado na Fig. (10.6). Impondo as condições de equilíbrio de corpo rígido no caso tridimensional ao sistema apresentado na Fig. (10.6) obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N - 3,333 = 0 &\Rightarrow N = -3,333 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_y - 3 \cdot 4 - 13,334 + 6,666 = 0 &\Rightarrow V_y = 18,668 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow V_z - 10 + 5 - 5 = 0 &\Rightarrow V_z = 10 \text{ kN} \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow -T = 0 &\Rightarrow T = 0 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow M_y = -20 \text{ kNm} \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z - 3 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 13,334 \cdot 2 + 6,666 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow M_z = 24 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Com base nas reações de apoio calculadas anteriormente, nos carregamentos atuantes nessa barra e nas relações diferenciais, observa-se que o esforço cortante atuante na direção  $y$  possui variação linear, sendo uma descontinuidade nesse diagrama observada no ponto B. Essa descontinuidade decorre da presença de uma força concentrada nesse ponto, a qual deve-se à reação da treliça tridimensional sobre a barra geral tridimensional. Consequentemente, o momento fletor orientado na direção  $z$  apresentará variação quadrática, sendo um ponto com derivada não contínua (“bico”) observado no ponto B. Já o esforço cortante atuante na direção  $z$  possui comportamento constante por trechos ao longo do comprimento da barra. Este esforço solicitante possui valor igual a 10 entre os pontos A e B e valor nulo do ponto B até o ponto C. Esse comportamento deve-se a ausência de carregamentos distribuídos orientados na direção  $z$  e a uma força concentrada atuante no ponto B. O momento fletor atuante na direção  $y$  possuirá variação linear do ponto A ao ponto B e valor nulo do ponto B ao ponto C, em conformidade à variação observada para o esforço cortante na direção  $z$ . O esforço normal será compressivo constante e de intensidade igual a 3,333 kN ao longo de toda a extensão da barra. Já o momento torçor será nulo em todos os pontos da barra AC. Com base nos comentários apresentados nesse parágrafo, os diagramas de esforços solicitantes para a barra considerada podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (10.7).

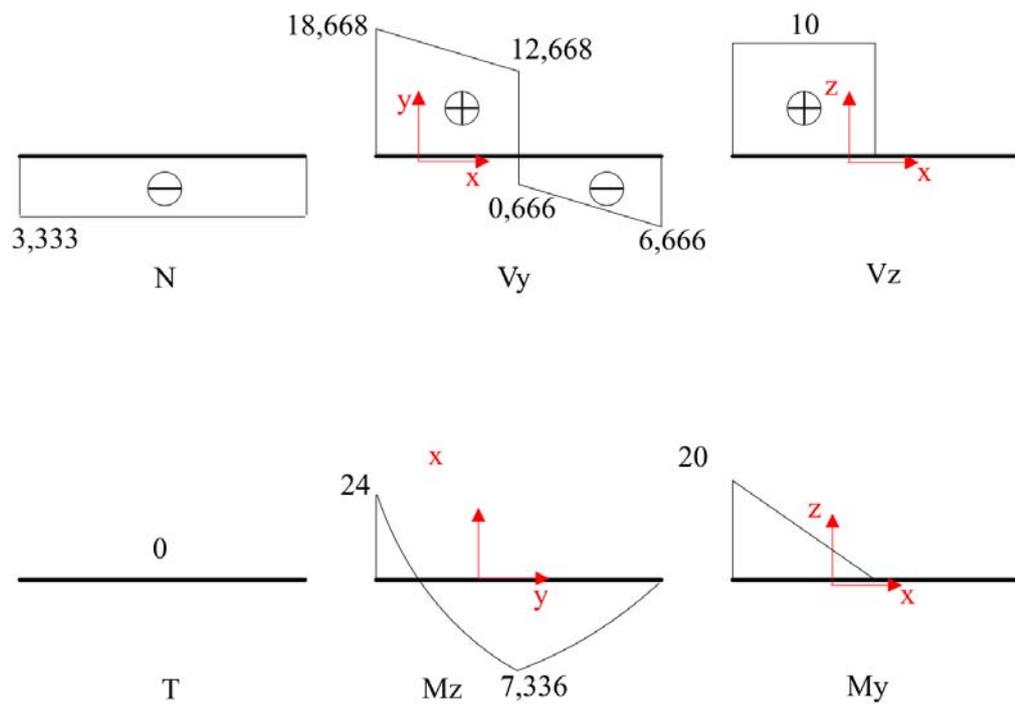


Figura 10.7 Diagramas de esforços solicitantes para a barra AC.

A próxima barra a ser analisada refere-se à barra definida pelos nós DE. Os carregamentos atuantes nessa barra bem como a condição de vinculação presente estão ilustrados na Fig. (10.8).

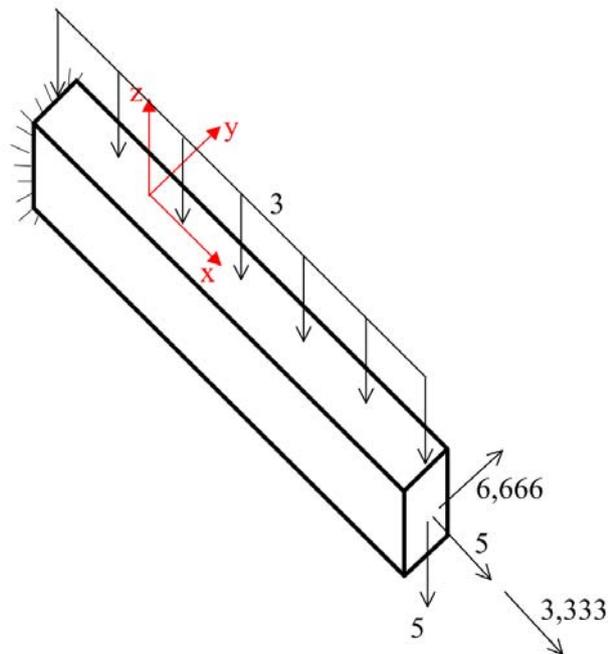


Figura 10.8 Barra DE.

Para a construção dos diagramas de esforços solicitantes dessa barra, deve-se inicialmente determinar seu diagrama de corpo livre. Substituindo a vinculação atuante na barra, ou seja o engaste atuante sobre o nó E, por reações de apoio equivalentes aos graus de liberdade restringidos obtém-se a representação mostrada na Fig. (10.9). Impondo sobre o sistema apresentado na Fig. (10.9) a condição de equilíbrio de corpo rígido no caso tridimensional obtém-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -N + 5 + 3,333 = 0 &\Rightarrow N = 8,333kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_y + 6,666 = 0 &\Rightarrow V_y = -6,666kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow V_z - 3 \cdot 4 - 5 = 0 &\Rightarrow V_z = 17kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow T = 0 &\Rightarrow T = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y + 3 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow M_y = -44kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z + 6,666 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow M_z = -26,664kNm\end{aligned}$$

Considerando as ações atuantes nos extremos da barra DE, os carregamentos atuantes e as relações diferenciais, constata-se que o esforço normal nessa barra será constante, trativo e de intensidade igual a 8,333 kN. Já o momento torçor será nulo para toda a extensão da barra. Devido à presença de um carregamento distribuído orientado ao longo do eixo z, o esforço cortante nesse eixo apresentará variação linear, o que conduz a variação quadrática do momento fletor atuante em torno do eixo y.

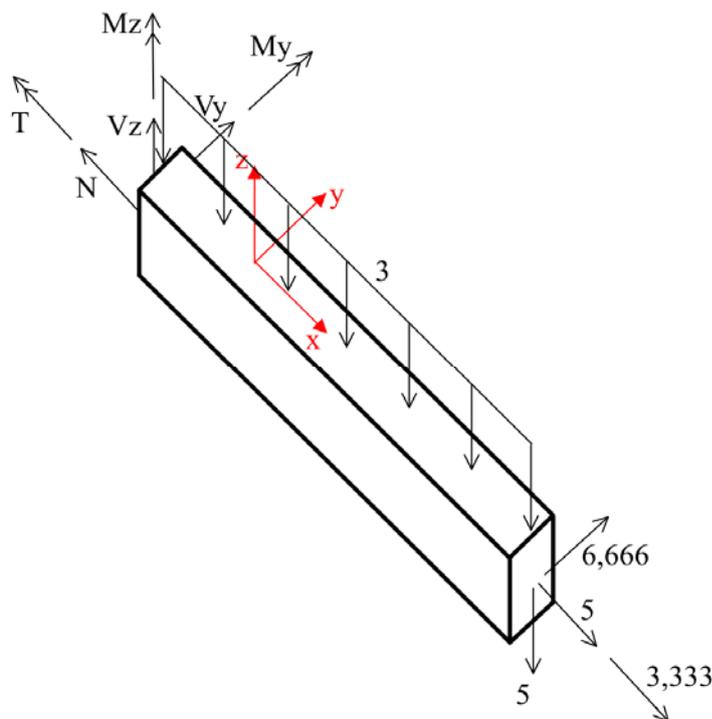


Figura 10.9 Diagrama de corpo livre da barra DE.

Já o esforço cortante no eixo  $y$  apresentará variação constante, uma vez que nenhum carregamento distribuído atua nessa direção ao longo da barra. Assim, o momento fletor em torno do eixo  $z$  possuirá variação linear. Com base nesses comentários, os diagramas de esforços solicitantes para a barra analisada podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (10.10).

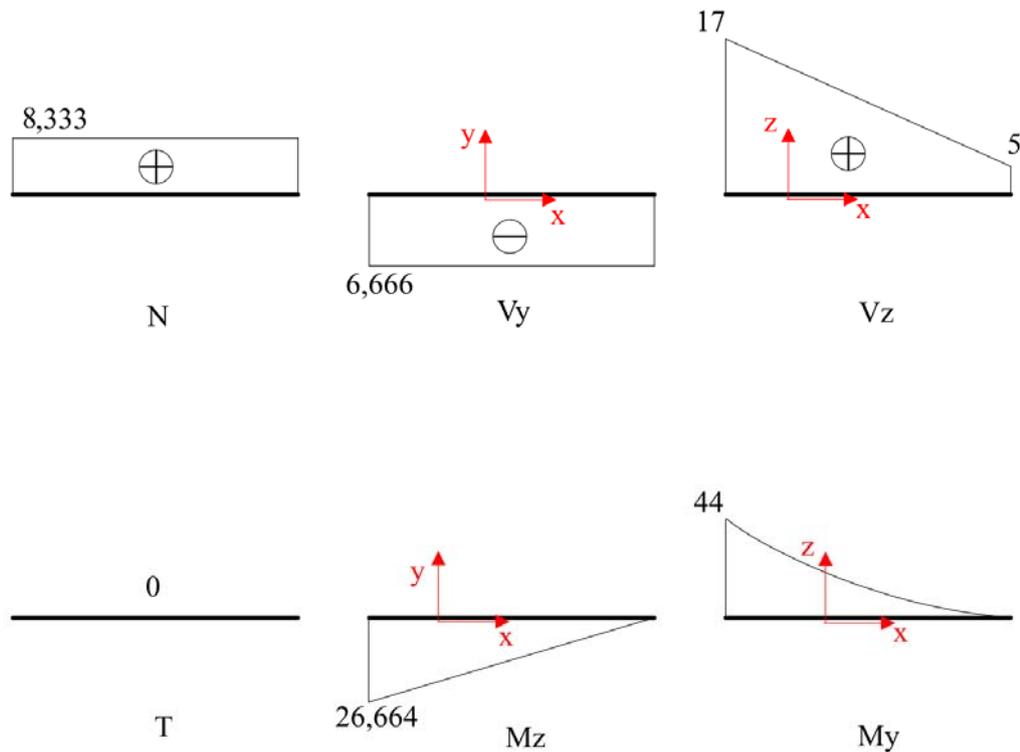


Figura 10.10 Diagramas de esforços solicitantes para a barra DE.

### 10.3 – Exemplo 2

O segundo exemplo desse capítulo objetiva a determinação dos diagramas de esforços solicitantes da estrutura apresentada na Fig. (10.11). Trata-se de uma estrutura tridimensional formada pelo acoplamento de três elementos de barra simples e dois elementos de barra geral. Esta estrutura é solicitada por dois carregamentos distribuídos atuantes nos elementos de barra geral e por duas forças concentradas atuantes sobre o nó no qual convergem as barras simples, nó D. Além disso, a estrutura é vinculada por meio de um engaste em seu nó A e um apoio simples em seu nó E.

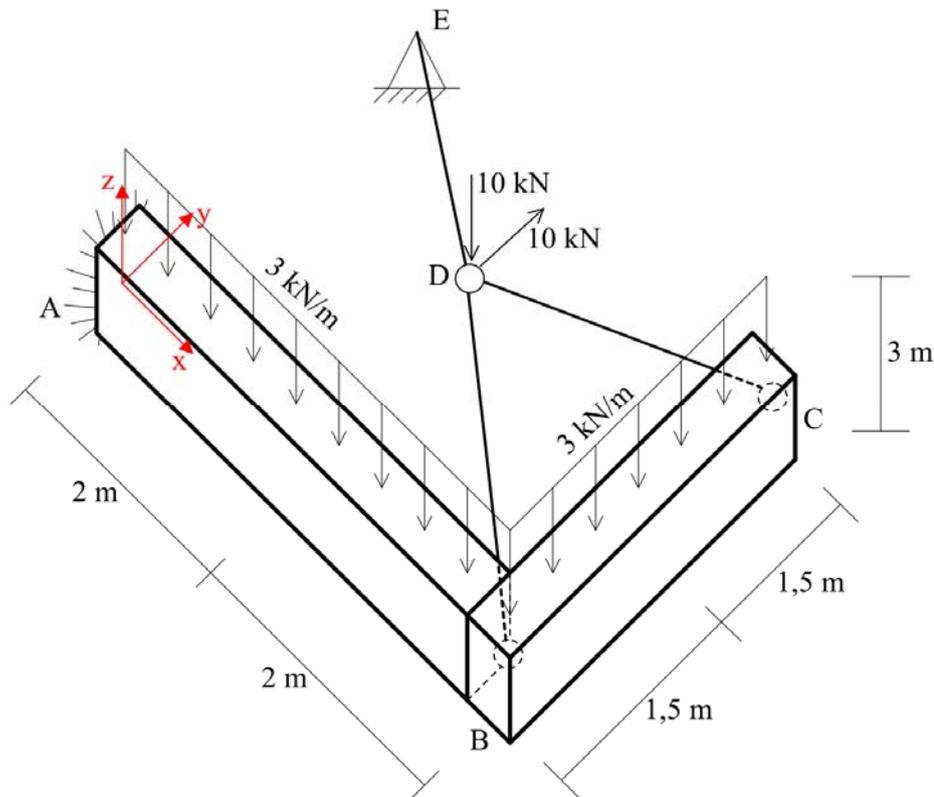


Figura 10.11 Estrutura a ser analisada.

Para que a construção dos diagramas de esforços solicitantes seja possível, deve-se efetuar, inicialmente, a determinação dos esforços normais atuantes nas barras da treliça tridimensional. Essa etapa é realizada aplicando o método dos nós sobre o nó D. Porém, antes de impor as condições de equilíbrio de ponto material no caso tridimensional sobre este nó, deve-se determinar os versores que definem a geometria das barras que concorrem ao nó citado. Esses versores são determinados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \overline{L_{DB}} &= \frac{((4-2)i + (0-1,5)j + (0-3)k)}{\sqrt{2^2 + (-1,5)^2 + (-3)^2}} &\Rightarrow \overline{L_{DB}} &= \frac{(2i - 1,5j - 3k)}{\sqrt{15,25}} \\ \overline{L_{DC}} &= \frac{((4-2)i + (3-1,5)j + (0-3)k)}{\sqrt{2^2 + 1,5^2 + (-3)^2}} &\Rightarrow \overline{L_{DC}} &= \frac{(2i + 1,5j - 3k)}{\sqrt{15,25}} \\ \overline{L_{DE}} &= \frac{((0-2)i + (3-1,5)j + (0-3)k)}{\sqrt{(-2)^2 + 1,5^2 + (-3)^2}} &\Rightarrow \overline{L_{DE}} &= \frac{(-2i + 1,5j - 3k)}{\sqrt{15,25}} \end{aligned}$$

O esforço normal possui orientação paralela ao eixo geométrico da barra no qual atua. Portanto, as componentes dos esforços normais, definidas segundo os eixos

cartesianos, podem ser determinadas por meio dos versores unitários calculados anteriormente. Multiplicando os versores unitários que definem as geometrias das barras pela norma do respectivo esforço normal obtêm-se as componentes do esforço normal segundo os eixos cartesianos. Para a treliça tridimensional considerada, os esforços normais podem ser definidos como:

$$\vec{N}_{DB} = (2i - 1,5j - 3k) \frac{N_{DB}}{\sqrt{15,25}}$$

$$\vec{N}_{DC} = (2i + 1,5j - 3k) \frac{N_{DC}}{\sqrt{15,25}}$$

$$\vec{N}_{DE} = (-2i + 1,5j - 3k) \frac{N_{DE}}{\sqrt{15,25}}$$

Com base na ilustração apresentada na Fig. (10.11), constata-se que a força externa atuante sobre o nó D pode ser definida como  $\vec{F} = (0i + 10j - 10k)$ . Assim, pode-se efetuar o equilíbrio desse nó por meio das seguintes condições:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

Para a estrutura em análise pode-se escrever que:

$$\sum F_x = 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{15,25}} N_{DB} + \frac{2}{\sqrt{15,25}} N_{DC} - \frac{2}{\sqrt{15,25}} N_{DE} = 0 \\ \frac{1,5}{\sqrt{15,25}} N_{DB} + \frac{1,5}{\sqrt{15,25}} N_{DC} + \frac{1,5}{\sqrt{15,25}} N_{DE} + 10 = 0 \\ \frac{3}{\sqrt{15,25}} N_{DB} - \frac{3}{\sqrt{15,25}} N_{DC} - \frac{3}{\sqrt{15,25}} N_{DE} - 10 = 0 \end{array} \right.$$

Reescrevendo as três equações anteriores de uma forma matricial, a qual é mais facilmente resolvida com o auxílio de equipamentos eletrônicos, obtém-se:

$$\frac{1}{\sqrt{15,25}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1,5 & 1,5 & 1,5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{DB} \\ N_{DC} \\ N_{DE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema matricial determinado anteriormente, composto por três equações e três incógnitas, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{DB} \\ N_{DC} \\ N_{DE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,5085 \\ -13,0170 \\ -6,5085 \end{Bmatrix} kN$$

Os esforços normais nas barras simples determinados anteriormente devem ser aplicados sobre os elementos de barra geral sobre os quais se apoiam a treliça tridimensional. Sabendo que esse processo deve ser efetuado considerando os efeitos de ação e reação (terceira lei de Newton), deve-se aplicar sobre cada um dos nós de elementos de barra geral onde a treliça tridimensional é apoiada o esforço solicitante atuante no extremo da barra simples que concorre ao nó de conexão com sentido contrário ao observado no elemento de barra simples. Assim, a força decorrente da presença da treliça tridimensional sobre o nó B pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\vec{F}_B = -\overline{L_{DB}} N_{DB} \rightarrow \vec{F}_B = -(2i - 1,5j - 3k) \frac{1}{\sqrt{15,25}} 6,5085 \rightarrow$$

$$\vec{F}_B = (-3,333i + 2,50j + 5,0k)$$

Para os nós C e E, as forças decorrentes da presença da treliça tridimensional podem ser calculadas de maneira similar. Portanto, para o nó C tem-se:

$$\vec{F}_C = -\overline{L_{DC}} N_{DC} \rightarrow \vec{F}_C = -(2i + 1,5j - 3k) \frac{1}{\sqrt{15,25}} (-13,0170) \rightarrow$$

$$\vec{F}_C = (6,666i + 5,00j - 10,0k)$$

Já para o nó E, as seguintes componentes de força são obtidas:

$$\vec{F}_E = -\overline{L_{DE}} N_{DE} \rightarrow \vec{F}_E = -(-2i + 1,5j - 3k) \frac{1}{\sqrt{15,25}} (-6,5085) \rightarrow$$

$$\vec{F}_E = (-3,333i + 2,50j - 5,0k)$$

De forma a comprovar a correção dos procedimentos relacionados à transmissão de esforços efetuados até o presente momento, deve-se verificar se a somatória das forças  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{F}_C$  e  $\vec{F}_E$  resulta a força externa aplicada. Isso deve ser constatado uma vez que forças não podem ser criadas nem eliminadas durante o processo de equilíbrio. Portanto:

$$\left( \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_E \right) = (-3,333i + 2,50j + 5,0k) + (6,666i + 5,00j - 10,0k) +$$

$$(-3,333i + 2,50j - 5,0k) \rightarrow \left( \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_E \right) = (0i + 10j - 10k)$$

O vetor obtido da soma das forças aplicadas sobre os nós B, C e E é igual ao vetor que define a força externa aplicada, ou seja,  $\vec{F} = (0i + 10j - 10k)$ . Portanto, a análise dos elementos de barra geral pode ser iniciada, já que o equilíbrio da treliça tridimensional foi verificado assim como sua transmissão de esforços.

Antes que a análise estrutural dos elementos de barra geral seja iniciada, deve-se aplicar sobre estes as forças decorrentes da ação da treliça tridimensional. O pórtico tridimensional a ser analisado, os carregamentos atuantes e sua vinculação estão apresentados na Fig. (10.12).

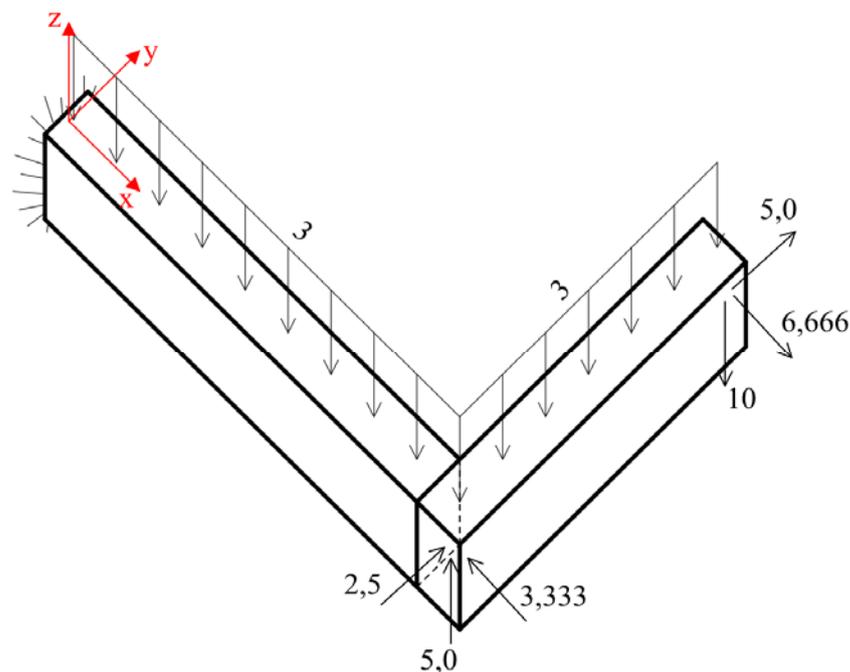


Figura 10.12 Pórtico tridimensional a ser analisado.

A primeira barra geral a ser analisada é a definida pelos nós B e C. Isolando esta barra do restante da estrutura, irão surgir, no ponto de separação da barra do restante da estrutura, esforços solicitantes que atuam no sentido de restaurar a condição de equilíbrio. A barra delimitada pelos nós B e C com os carregamentos concentrados e distribuído atuantes e as ações em seu extremo B estão apresentados na Fig. (10.13).

Impondo sobre o sistema apresentado na Fig. (10.13) as condições de equilíbrio de corpo rígido no caso tridimensional obtêm-se:

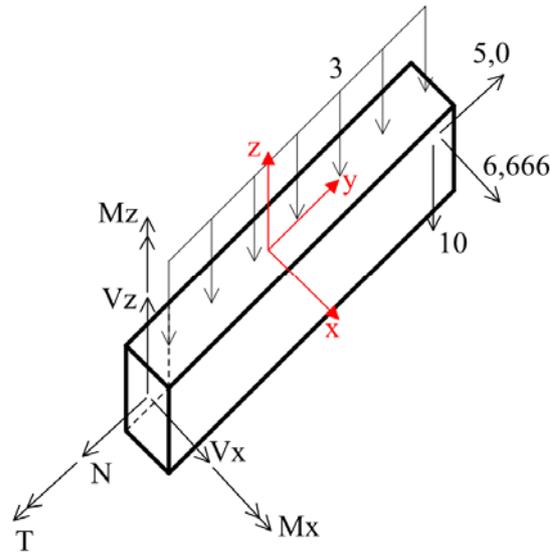


Figura 10.13 Barra BC.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow V_x + 6,666 = 0 &\Rightarrow V_x = -6,666 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N + 5 = 0 &\Rightarrow N = 5 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow V_z - 3 \cdot 3 - 10 = 0 &\Rightarrow V_z = 19 \text{ kN} \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x - 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 10 \cdot 3 = 0 &\Rightarrow M_x = 43,50 \text{ kNm} \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow T = 0 &\Rightarrow T = 0 \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z - 6,666 \cdot 3 = 0 &\Rightarrow M_z = 20 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Com base nas ações e carregamentos apresentados na Fig. (10.13) e nas relações diferenciais, constata-se que o esforço cortante atuante na direção  $x$  apresentará variação constante ao longo do comprimento da barra BC. Já o momento fletor orientado na direção  $z$ , o qual é associado ao cortante  $x$ , possuirá variação linear. O comportamento para esses dois esforços solicitantes, segundo as relações diferenciais, deve-se a ausência de carregamentos distribuídos orientados na direção  $x$  ao longo do comprimento da barra. O esforço cortante atuante na direção  $z$  possui variação linear ao longo do comprimento da barra, enquanto o momento fletor associado, atuante na direção  $x$ , apresentará variação quadrática. Constata-se que o esforço normal é trativo, constante e de intensidade igual a 5,0 kN ao longo de toda a extensão da barra. Já o momento torçor será nulo em todos os pontos da barra BC. Com base nos comentários apresentados nesse parágrafo, os diagramas de esforços solicitantes para a barra considerada podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (10.14).

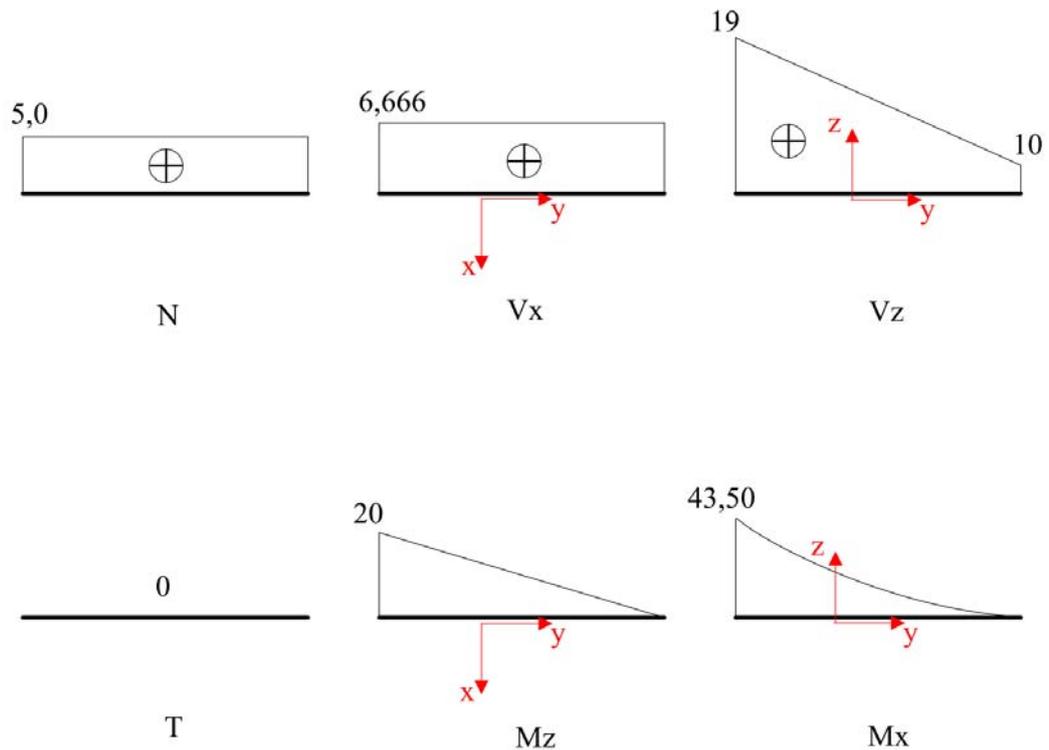


Figura 10.14 Diagramas de esforços solicitantes para a barra BC.

A próxima barra a ser estudada é a definida pelos nós A e B. Porém, antes de isolá-la da estrutura, deve-se efetuar o equilíbrio do nó B, nó este que faz a conexão entre as barras AB e BC, para que assim as intensidades das ações atuantes no extremo B da barra AB sejam calculadas.

O equilíbrio do nó B é efetuado impondo-se a condição de equilíbrio de corpo rígido ao referido nó, considerando as ações atuantes no extremo B das barras que concorrem a este nó, reaplicadas com sentido oposto ao de atuação destes no extremo das respectivas barras (3ª lei de Newton). As ações atuantes sobre o nó B estão apresentadas na Fig. (10.15). Impondo a condição de equilíbrio de corpo rígido a essas ações obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_x - 3,333 + 6,666 = 0 &\Rightarrow F_x = -3,333 \text{ kN} \\
 \sum F_y = 0 &\Rightarrow 2,5 + 5 + F_y = 0 &\Rightarrow F_y = -7,5 \text{ kN} \\
 \sum F_z = 0 &\Rightarrow -19 + 5 + F_z = 0 &\Rightarrow F_z = 14 \text{ kN} \\
 \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x - 43,50 = 0 &\Rightarrow M_x = 43,50 \text{ kNm} \\
 \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y = 0 &\Rightarrow M_y = 0 \\
 \sum M_z = 0 &\Rightarrow -20 + M_z = 0 &\Rightarrow M_z = 20 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

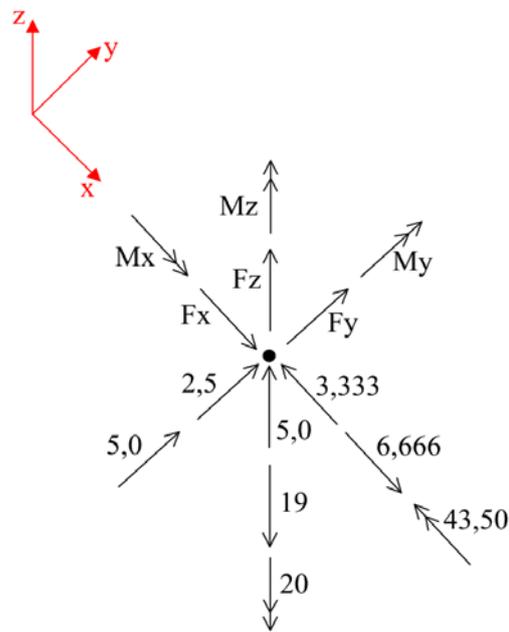


Figura 10.15 Equilíbrio nó B.

Portanto, as ações determinadas anteriormente podem ser transferidas para o extremo B da barra AB. Para isso, basta reaplicar, com sentidos opostos, as ações incógnitas calculadas sobre o nó B. Efetuando este procedimento obtém-se o diagrama de corpo livre da barra AB, o qual é ilustrado na Fig. (10.16).

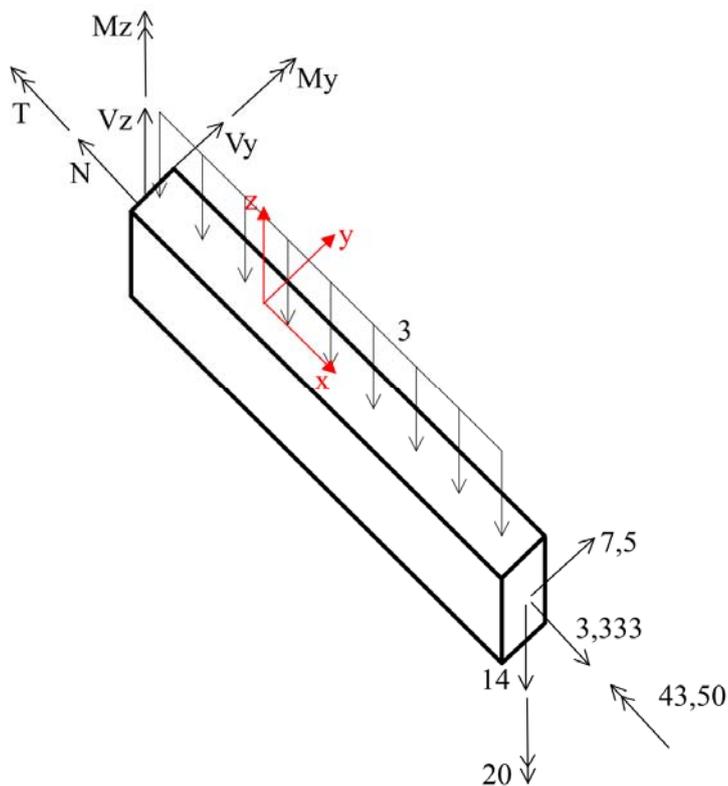


Figura 10.16 Barra AB.

Impondo-se a condição de equilíbrio de corpo rígido a barra apresentada na Fig. (10.16), obtêm-se os valores das ações em seus extremos, os quais são iguais a:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N + 3,333 = 0 &\Rightarrow N = 3,333kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_y + 7,5 = 0 &\Rightarrow V_y = -7,5kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow -14 - 3 \cdot 4 + V_z = 0 &\Rightarrow V_z = 26kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow -T - 43,50 = 0 &\Rightarrow T = -43,50kNm \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y + 3 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 14 \cdot 4 = 0 &\Rightarrow M_y = -80kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow -20 + 7,5 \cdot 4 + M_z = 0 &\Rightarrow M_z = -10kNm \end{aligned}$$

Com base nas ações atuantes nos extremos da barra AB, nos carregamentos atuantes e nas relações diferenciais, constata-se que o esforço normal nessa barra será constante, trativo e de intensidade igual a 3,333 kN. Já o momento torçor apresentará variação constante ao longo da extensão da barra, sendo seu valor igual a 43,50 kNm. Devido à presença de uma carga distribuída orientada na direção do eixo  $z$ , o esforço cortante nesse eixo apresentará variação linear, o que conduzirá a variação quadrática do momento fletor atuante em torno do eixo  $y$ . Já o esforço cortante no eixo  $y$  apresentará variação constante, uma vez que nenhuma carga distribuída atua nessa direção ao longo do comprimento da barra. Assim, o momento fletor em torno do eixo  $z$  possuirá variação linear. Com base nesses comentários, os diagramas de esforços solicitantes para a barra analisada podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (10.17).

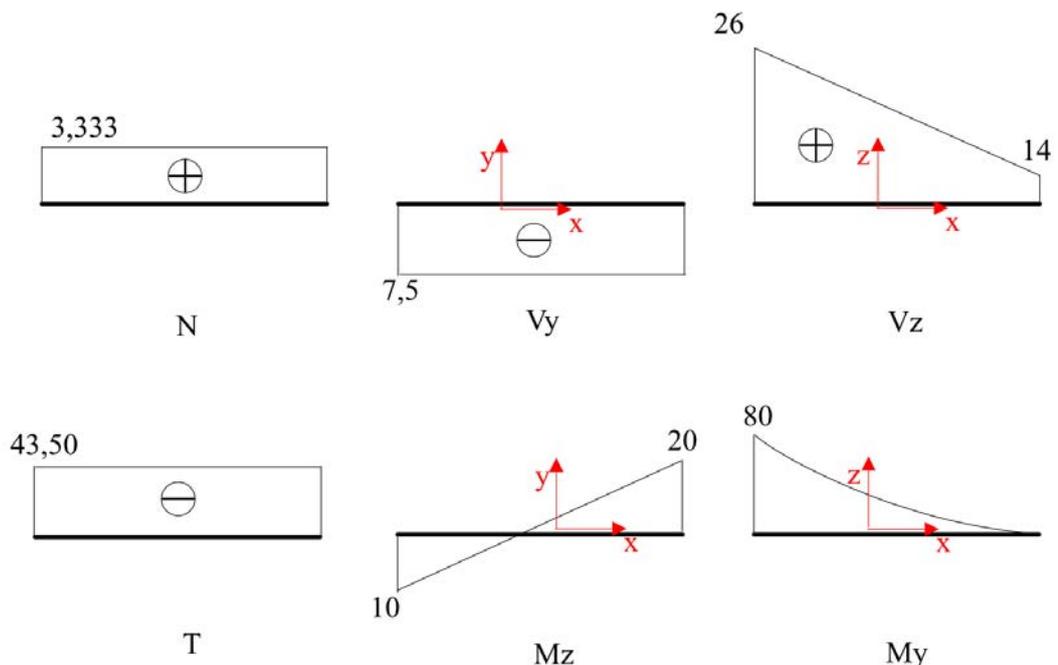


Figura 10.17 Diagramas de esforços solicitantes para a barra AB.

## 11. – Cabos

---

### 11.1 – Introdução

Cabos são elementos estruturais que resistem unicamente a solicitações de tração. Dessa forma, os cabos podem ser considerados como um caso particular dos elementos de barra simples. Esses elementos estruturais são muito utilizados em estruturas de pontes, como mostrado na Fig. (11.1), linhas de transmissão, teleféricos, entre outros.

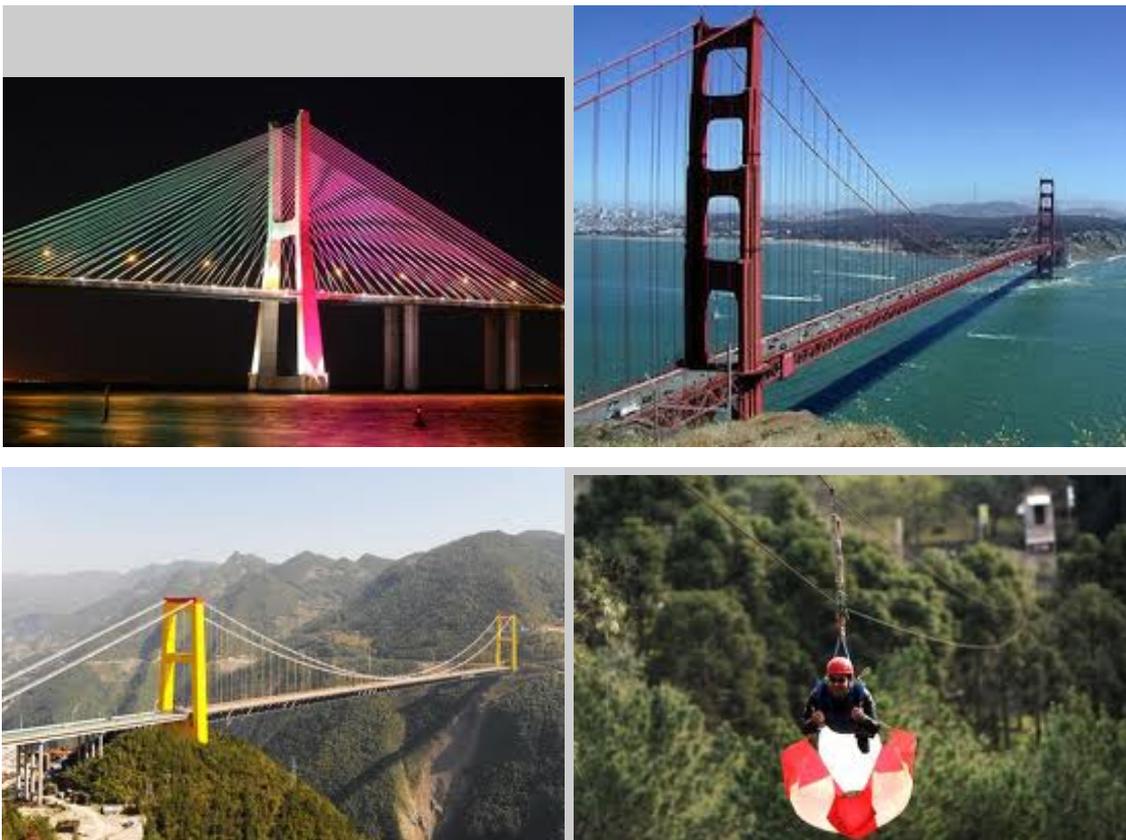


Figura 11.1 Estruturas que utilizam cabos.

Os cabos podem ser divididos em duas categorias, dependendo do carregamento solicitante: *Cabos que suportam carga concentrada* e *Cabos que suportam carga*

*distribuída*. A seguir serão discutidos aspectos específicos relacionados a cada uma dessas categorias.

### 11.2 – Cabos que Suportam Carga Concentrada

Nessa categoria enquadram-se os cabos que apresentam cargas concentradas em determinados pontos localizados ao longo de seu comprimento como mostra a Fig. (11.2). Por simplicidade, pode-se assumir que os cabos são flexíveis, ou seja, não possuem resistência à flexão. Além disso, assume-se também que seu peso próprio é tão pequeno comparado com a intensidade das ações aplicadas que este pode ser desprezado.

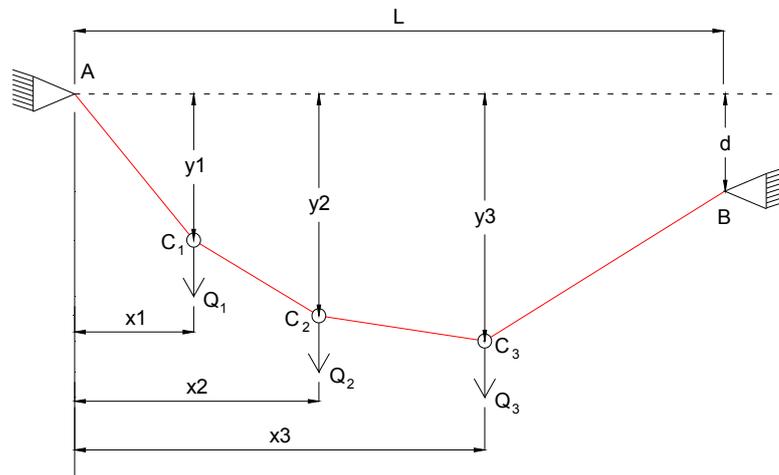


Figura 11.2 Cabos com carga concentrada.

A Fig. (11.2) apresenta um cabo fixo nos pontos A e B, suas extremidades, sendo submetido à ação dos carregamentos concentrados  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , atuantes nos pontos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , respectivamente. Admite-se que as projeções horizontais da distância do ponto de fixação A até cada uma das cargas seja conhecida ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ) e que as projeções horizontais e verticais entre os pontos de fixação A e B também o são.

O objetivo da análise estrutural nesse problema trata da determinação das projeções verticais da distância de A até cada ponto, bem como a tração exercida no cabo. Para tal fim, deve-se, inicialmente, construir o diagrama de corpo livre do cabo. Para o cabo apresentado na Fig. (11.2), o diagrama de corpo livre assume a forma ilustrada na Fig. (11.3).

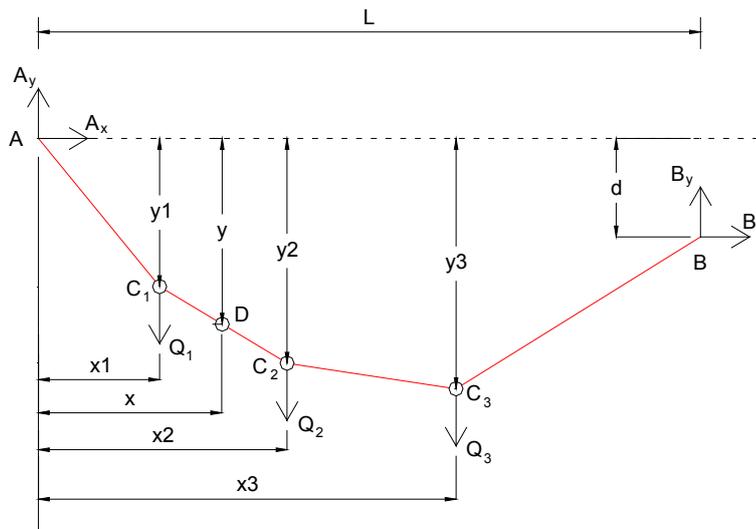


Figura 11.3 Diagrama de corpo livre do cabo.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao sistema apresentado na Fig. (11.3), ou seja,  $(\sum F_x, \sum F_y, \sum M_z^B)$ , observa-se que nesse problema existem quatro incógnitas, as quais estão relacionadas às reações dos apoios A e B ( $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$  e  $B_y$ ). Como existem apenas três equações de equilíbrio para o caso plano, deve-se obter uma equação adicional para que o problema apresente uma solução única. Essa equação pode ser determinada conhecendo-se as coordenadas  $x$  e  $y$  de um ponto qualquer pertencente ao cabo, como o ponto D, por exemplo. Traçando o diagrama de corpo livre do trecho que vai de um apoio fixo até o ponto D, como mostrado na Fig. (11.4), e impondo o equilíbrio em termos de momentos ( $\sum M_z^D = 0$ ) obtêm-se as reações dos apoios A e B.

Em seguida, deve-se construir o diagrama de corpo livre para cada ponto do cabo que contenha uma carga concentrada. Nesses pontos, a condição de equilíbrio de corpo rígido deve ser atendida. Assim, obtêm-se a projeção vertical da distância de A até esse ponto. Como exemplo, considere o equilíbrio do ponto  $C_2$  apresentado na Fig. (11.5).

Aplicando a condição de somatória de momentos nula em relação ao ponto seccionado obtém-se:

$$\sum M_{C_2} = 0 \Rightarrow -A_x \cdot y_2 - A_y \cdot x_2 + Q_1(x_2 - x_1) = 0 \quad (11.1)$$

Como  $x_1$  e  $x_2$  são conhecidas, determina-se  $y_2$ .

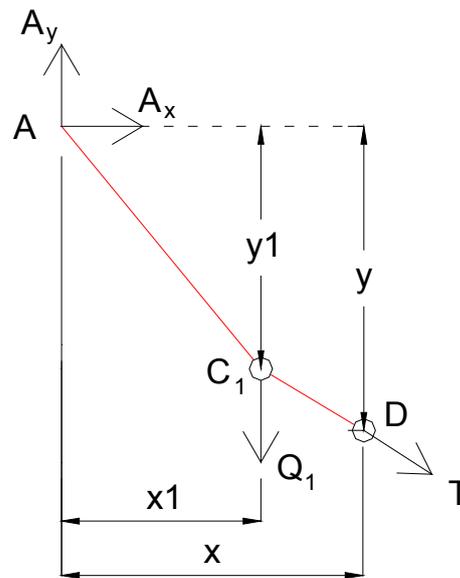
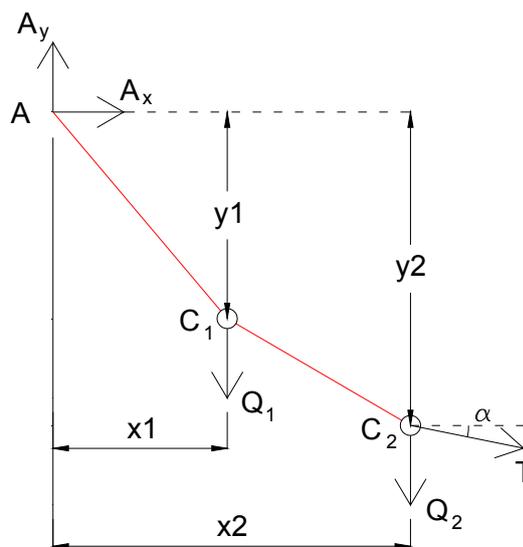


Figura 11.4 Diagrama de corpo livre do trecho AD.

Figura 11.5 Diagrama de corpo livre do trecho AC<sub>2</sub>.

As forças internas nos diversos trechos do cabo resumem-se ao esforço de tração (T) orientado na direção tangente ao cabo no ponto analisado. Esse esforço pode ser facilmente determinado pela expressão apresentada na Eq.(11.2):

$$T \cos \alpha = -A_x \quad (11.2)$$

Portanto, a tração máxima ocorrerá nos pontos em que o  $\cos \alpha$  for mínimo, ou seja, adjacente a um dos dois suportes.

## 11.2.1 – Exemplo 1

Na Fig. (11.6) é apresentada uma estrutura composta por cabos solicitados por ações concentradas. Sabendo que as dimensões  $a$  e  $b$  são iguais a 4,8 m, determine as componentes da reação do apoio E e a intensidade da tração máxima no cabo.

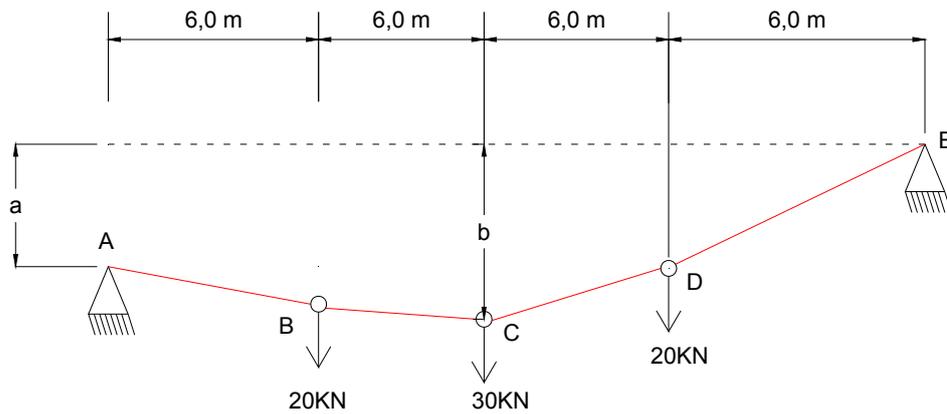


Figura 11.6 Estrutura a ser analisada.

Para a solução desse exemplo deve-se, inicialmente, construir o diagrama de corpo livre da estrutura. Substituindo as condições de vinculação por forças equivalentes aos graus de liberdade restringidos obtém-se o diagrama ilustrado na Fig. (11.7).

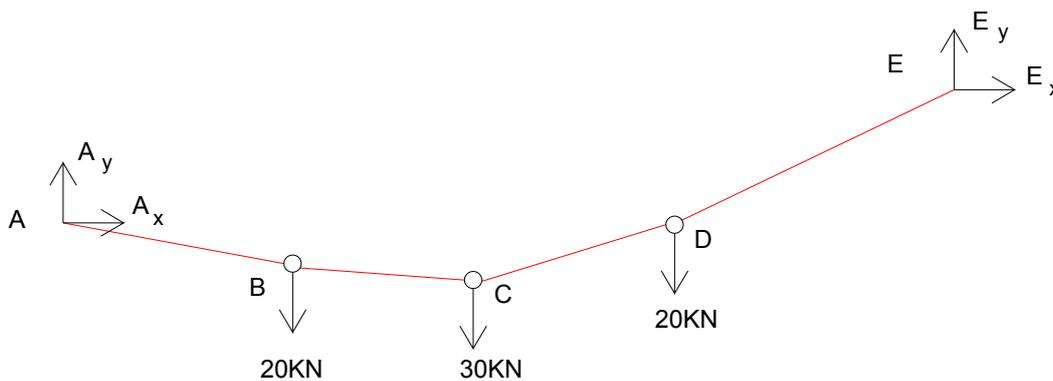


Figura 11.7 Diagrama de corpo livre.

Aplicando, sobre o conjunto de forças mostrado na Fig. (11.7), as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x + E_x = 0 \\
 \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y + E_y - 20 - 30 - 20 = 0 \Rightarrow A_y + E_y = 70 \\
 \sum M_E = 0 &\Rightarrow -A_y \cdot 24 + A_x \cdot 4,8 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 12 + 20 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \\
 &A_x - 5 \cdot A_y = -175
 \end{aligned}
 \tag{11.3}$$

Com base nas equações obtidas anteriormente constata-se que têm-se três relações e quatro incógnitas a serem determinadas. Portanto, o sistema é não determinado. Para que as incógnitas sejam determinadas de forma única, uma equação adicional deve ser considerada. Esta equação é escrita efetuando uma secção no cabo em seu nó C, como apresenta a Fig. (11.8). Aplicando a condição de somatório nula de momentos ao corpo livre mostrado na Fig. (11.8) obtém-se:

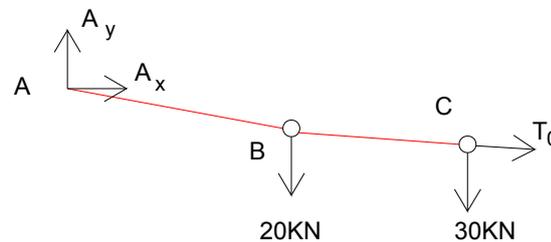


Figura 11.8 Diagrama de corpo livre do trecho AC.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -A_y \cdot 12 + A_x \cdot 0 + 20 \cdot 6 = 0 \Rightarrow A_y = 10 \text{ kN}$$

Substituindo o resultado obtido para  $A_y$  nas Eq.(11.3) obtém-se:

$$E_y = 60 \text{ kN}, A_x = -125 \text{ kN}, E_x = 125 \text{ kN}$$

A tração máxima ocorrerá no trecho onde a inclinação entre o eixo que define o cabo e o eixo horizontal for maior. Assim, a tração máxima será encontrada no trecho DE. O diagrama de corpo livre desse trecho está mostrado na Fig. (11.9).

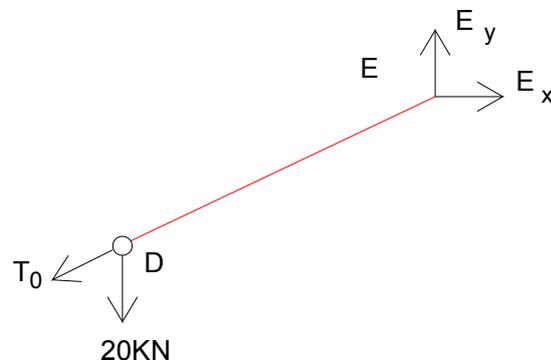


Figura 11.9 Diagrama de corpo livre do trecho DE.

A fim de encontrar o valor da tração nesse trecho, deve-se, inicialmente, determinar o valor de  $y_D$ . Para isso, impõe-se a condição de somatória nula de momentos em relação ao ponto D, o que resulta em:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -125 \cdot y_D + 60 \cdot 6 \Rightarrow y_D = 2,88m$$

Em seguida, determina-se o ângulo do cabo com a horizontal facilmente como:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2,88}{6} \Rightarrow 25,64^\circ$$

Por fim, impõe-se o equilíbrio das forças na direção horizontal:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow E_x - T \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow T = 138,65kN$$

### 11.3 – Cabos que Suportam Cargas Distribuídas

Em estruturas onde os cabos são solicitados por carregamentos distribuídos, estes tendem a configurar uma curva. Nessa situação, o cabo será solicitado por uma força interna de tração (T) dirigida ao longo da tangente a esta curva.

O objetivo da análise estrutural de problemas desse tipo é a determinação da intensidade do esforço de tração em qualquer ponto do cabo. Nesse item, serão analisados casos particulares de cabos submetidos a dois tipos diferentes de carregamentos distribuídos: Carga uniformemente distribuída ao longo da horizontal, formando o chamado cabo parabólico, e a Carga uniformemente distribuída ao longo do próprio cabo, formando a catenária.

#### *11.3.1 – Caso Geral*

Como caso geral, deve-se considerar um cabo fixo nos pontos A e B e submetido a uma carga distribuída, com formato qualquer, ao longo do seu comprimento, como mostra a Fig. (11.10). Para a determinação da tração em qualquer ponto do cabo, constrói-se, inicialmente, o diagrama de corpo livre da parte compreendida pelo ponto mais baixo, C, e um ponto qualquer, D, como apresenta a Fig. (11.11).

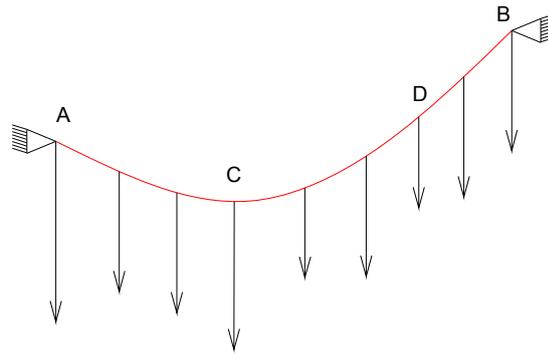


Figura 11.10 Caso geral de cabo com carga distribuída.

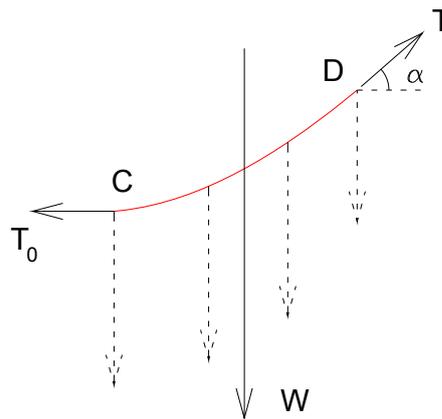


Figura 11.11 Diagrama de corpo livre CD.

Sendo  $T_0$  o esforço de tração em C, o qual é horizontal,  $T$  o esforço de tração no ponto qualquer, D, o qual é dirigido ao longo da tangente ao cabo no ponto seccionado, e  $W$  a resultante do carregamento distribuído no trecho considerado, CD, verifica-se que as equações que governam o problema são as Eq.(11.4), Eq.(11.5), Eq.(11.6) e Eq.(11.7). Estas equações podem ser facilmente verificadas com o auxílio da Fig. (11.12).

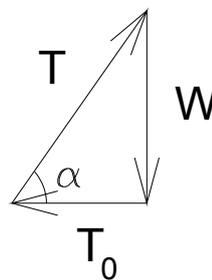


Figura 11.12 Resultante de forças.

$$T \cos(\alpha) = T_0 \quad (11.4)$$

$$T \sin(\alpha) = W \quad (11.5)$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad (11.6)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{W}{T_0} \quad (11.7)$$

Com base nas Eq.(11.6) e Eq.(11.7), verifica-se que a tração  $T$  é mínima no ponto mais baixo do cabo e máxima em um dos pontos de fixação do cabo. As quatro últimas equações serão agora particularizadas para os casos envolvendo curvas parabólicas e catenária.

### 11.3.2 – Caso Parabólico

Considerando primeiramente o caso parabólico, este configura-se pelo fato do cabo estar submetido a um carregamento uniformemente distribuído ao longo de sua projeção horizontal, como mostra a Fig. (11.13).

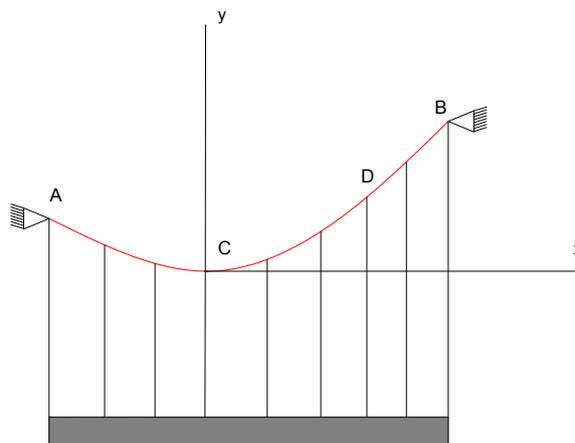


Figura 11.13 Cabo com carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento.

Na Fig. (11.13),  $q$  representa a intensidade do carregamento distribuído por unidade de comprimento medida horizontalmente.

Adotando o ponto mais baixo, C, do cabo como a origem do sistema coordenado e traçando o diagrama de corpo livre, têm-se:

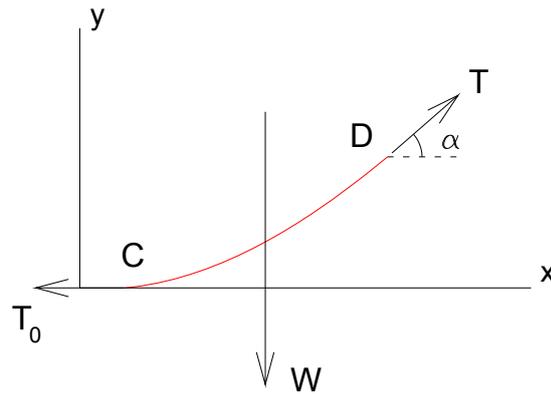


Figura 11.14 Diagrama de corpo livre do trecho CD.

Sendo  $W$  a resultante da carga distribuída no trecho CD, sua intensidade é dada por:

$$W = q \cdot x \quad (11.8)$$

Substituindo a Eq.(11.8) nas Eq.(11.6) e Eq.(11.7), obtém-se o módulo e a direção de atuação do esforço de tração em D. Assim:

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2 x^2} \quad (11.9)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{qx}{T_0}$$

Como a distância entre D e a linha de ação da resultante  $W$  é igual à metade da projeção horizontal da distância de C até D, a somatória dos momentos em relação a D é expressa por:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - T_0 \cdot y = 0 \quad (11.10)$$

Assim,  $y$  pode ser determinado como:

$$y = \frac{qx^2}{2T_0} \quad (11.11)$$

De acordo com a Eq.(11.11), percebe-se que a forma final do cabo corresponde a uma parábola com eixo vertical e vértice na origem das coordenadas.

Quando os suportes A e B do cabo estão na mesma cota, a distância entre esses pontos é denominada de vão ( $L$ ), enquanto que a projeção vertical da distância desses suportes até o ponto mais baixo é denominada flecha ( $h$ ). Sendo  $L$  e  $h$  conhecidos de um cabo submetido a uma carga  $q$  por unidade de comprimento horizontal, então a tensão mínima  $T_0$  pode ser encontrada substituindo  $x = L/2$  e  $y = h$  na Eq. (11.11).

Quando os suportes estão em cotas diferentes, como na Fig. (11.15), a posição do ponto mais baixo do cabo pode não ser conhecida. Portanto as coordenadas  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $x_B$  e  $y_B$  dos suportes devem ser determinadas. Para isto, essas coordenadas devem satisfazer a Eq. (11.11) e as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= L \\ y_B - y_A &= d \end{aligned} \quad (11.12)$$

onde L e d correspondem as projeções horizontal e vertical da distância entre os dois suportes, respectivamente.

O comprimento do cabo entre o ponto inferior C e o apoio B é obtido pela seguinte relação:

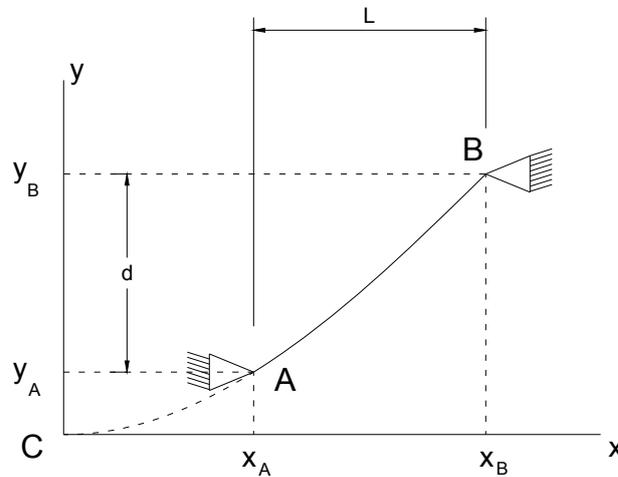


Figura 11.15 Cabo com suportes em cotas diferentes.

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (11.13)$$

Derivando a Eq.(11.11) em relação à ordenada  $x$ , obtém-se  $dy/dx = q \cdot x/T_0$ . Substituindo esse resultado na Eq.(11.13) e usando o teorema do binômio para desenvolver o radical numa série infinita, tem-se:

$$\begin{aligned} S_B &= \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{q^2 x^2}{T_0^2}\right)^2} dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{q^2 x^2}{2 \cdot T_0^2} - \frac{q^4 x^4}{8 \cdot T_0^4} + \dots\right) dx \\ S_B &= x_B \left(1 + \frac{q^2 x_B^2}{6 \cdot T_0^2} - \frac{q^4 x_B^4}{40 \cdot T_0^4} + \dots\right) \end{aligned} \quad (11.14)$$

Sabendo que  $q \cdot x_B^2 / 2T_0 = y_B$  tem-se:

$$S_B = x_B \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{y_B}{x_B} \right)^2 - \frac{2}{5} \cdot \left( \frac{y_B}{x_B} \right)^4 + \dots \right] \quad (11.15)$$

A série converge para valores da razão  $y_B/x_B$  menores que 0,5. Em geral, essa razão é muito pequena. Assim, apenas os dois primeiros termos da série são normalmente suficientes.

### 11.3.3 – Exemplo 2

Um cabo preso a um apoio A passa sobre uma roldana em B e suporta uma carga P. Sendo a flecha do cabo igual a 0,5 m e sua massa por unidade de comprimento igual a 0,75 Kg/m, determine: a intensidade da carga P, a inclinação do cabo em B e o comprimento total do cabo de A até B. Como a razão da flecha para o vão é pequena, pode-se considerar o cabo como parabólico. Desprezar o peso próprio do cabo entre os pontos B e D.

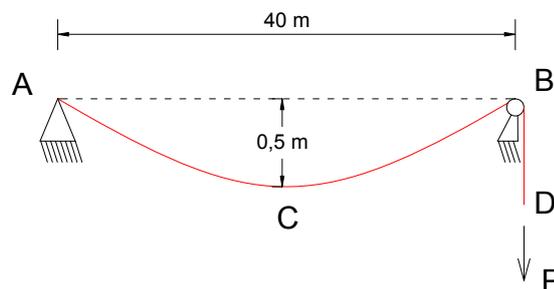


Figura 11.16 Estrutura a ser analisada.

Para a determinação da intensidade da carga P aplicada, deve-se construir o diagrama de corpo livre envolvendo o ponto mais baixo do cabo, C, e o ponto B. Esse diagrama está apresentado na Fig. (11.17).

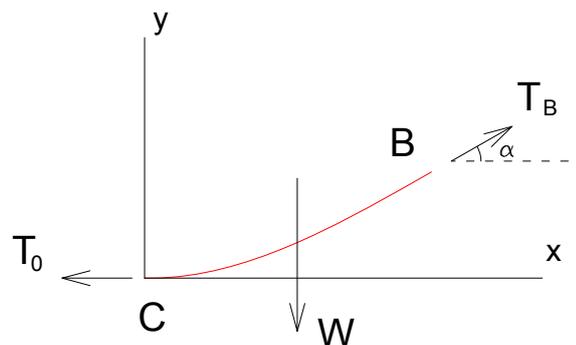


Figura 11.17 Diagrama de corpo livre no trecho considerado.

Como a carga é uniformemente distribuída ao longo da horizontal, pode-se transformar o peso do cabo em carregamento como:

$$q = (0,75 \text{ kg/m}) \cdot (9,81 \text{ m/s}^2) = 7,36 \text{ N/m}$$

Sabendo que a carga é distribuída em relação a projeção horizontal do cabo, a resultante do carregamento distribuído é dado por:

$$W = q \cdot x_B \Rightarrow W = 7,36 \cdot 20 \Rightarrow W = 147,2 \text{ N}$$

Deve-se ressaltar que  $W$  é aplicada no ponto médio entre C e B. Efetuando a somatória dos momentos em relação a B, considerando as forças mostradas na Fig. (11.17), tem-se:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 147,2 \cdot 10 - T_0 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow T_0 = 2944 \text{ N}$$

Calculando  $T_B$  por meio da Eq.(11.6) tem-se:

$$T_B = \sqrt{T_0^2 + W^2} = \sqrt{2944^2 + 147,2^2} = 2948 \text{ N}$$

Como o esforço de tração em cada um dos lados da roldana é a mesmo tem-se que:

$$P = T_B = 2948 \text{ N}$$

Aplicando agora a Eq.(11.7), pode-se determinar a inclinação do cabo em B como:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{W}{T_0} = \frac{147,2}{2944} = 0,05 \Rightarrow \alpha = \arctan(0,05) \Rightarrow \alpha = 2,9^\circ$$

Finalmente, pode-se empregar a Eq.(11.15) entre C e B, considerando apenas a aproximação quadrática da série, para a determinação do comprimento do cabo. Assim:

$$S_B = x_B \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{y_B}{x_B} \right)^2 + \dots \right] = 20 \cdot \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{0,5}{20} \right)^2 + \dots \right] = 20,00833 \text{ m}$$

O comprimento total do cabo é o dobro do valor calculado acima. Portanto:

$$\text{Comprimento} = 2S_B = 40,0167 \text{ m}$$

#### 11.3.4 – Caso Catenária

Os cabos enquadrados no caso catenária são aqueles submetidos à cargas uniformemente distribuídas ao longo do próprio comprimento, e não mais em relação à sua projeção horizontal como no caso parabólico, como mostra a Fig. (11.18).

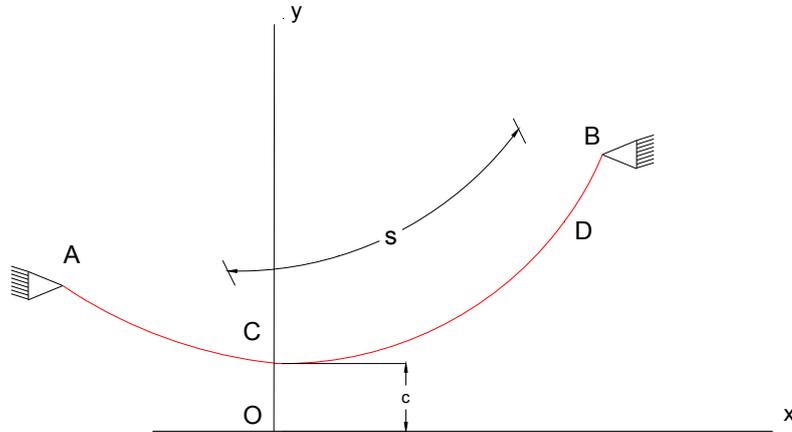


Figura 11.18 Cabo submetido à carga uniformemente distribuída ao longo do próprio comprimento.

Denominando a carga distribuída por unidade de comprimento medida ao longo do cabo,  $q$ , a resultante dessa carga,  $W$ , corresponde ao produto entre  $q$  e o comprimento,  $s$ , da porção do cabo que está sendo analisada. Portanto:

$$W = q \cdot s \quad (11.16)$$

Substituindo  $W$  na Eq.(11.6), obtém-se a tração num ponto D qualquer. Assim:

$$T = \sqrt{T_0^2 + q^2 s^2} \quad (11.17)$$

Objetivando simplificar os cálculos, denomina-se  $c$  a constante apresentada na Eq.(11.18).

$$c = T_0/q \quad (11.18)$$

Assim, obtém-se:

$$T_0 = q \cdot c \quad (11.19)$$

$$W = q \cdot s \quad (11.20)$$

$$T = q \cdot \sqrt{c^2 + s^2} \quad (11.21)$$

A Fig. (11.19) representa o diagrama de corpo livre do trecho CD do cabo. Como a distância de D até o ponto de aplicação da resultante da carga não é conhecida, deve-se analisar um elemento infinitesimal de comprimento  $ds$  do cabo e obter a equação da curva formada pelo cabo através da integração da resultante encontrada na porção  $ds$  ao longo do comprimento do cabo.

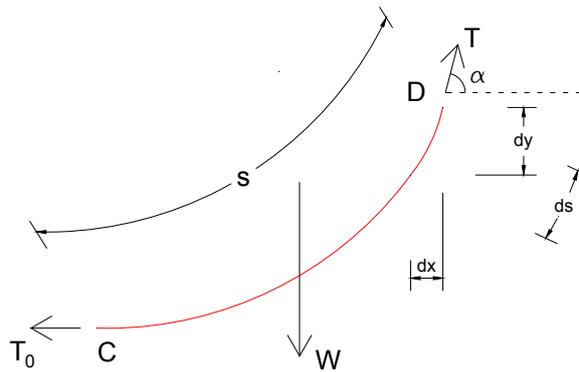


Figura 11.19 Diagrama de corpo livre do trecho CD.

Portanto, inicialmente, pode-se escrever a projeção horizontal desse elemento infinitesimal da seguinte forma:

$$dx = ds \cdot \cos(\theta) \quad (11.22)$$

Como  $\cos(\theta) = T_0/T$ , utiliza-se essa relação juntamente com as Eq.(11.19) e Eq.(11.21) na Eq.(11.22). Assim:

$$dx = ds \cdot \cos(\theta) = \frac{T_0}{T} ds = \frac{q \cdot c \cdot ds}{q \cdot \sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} \quad (11.23)$$

Tomando como origem do sistema coordenado um ponto a uma distância  $c$  do ponto C mostrado na Fig. (11.18), realiza-se a integral da Eq.(11.23) de  $C(0,c)$  a  $D(x,y)$ . Dessa forma:

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} = c \left[ \sinh^{-1} \frac{s}{c} \right]_0^s = c \cdot \sinh^{-1} \frac{s}{c} \quad (11.24)$$

Exprimindo na Eq.(11.24) o comprimento  $s$  da porção CD do cabo, têm-se:

$$s = c \cdot \sinh \frac{x}{c} \quad (11.25)$$

Por meio da Fig. (11.19), observa-se que  $dy = dx \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$  e  $\operatorname{tg}(\alpha) = W/T_0$ . Utilizando essas expressões, juntamente com as Eq.(11.19), Eq.(11.20) e Eq.(11.25), obtém-se a expressão que relaciona as coordenadas  $x$  e  $y$ . Essa expressão é apresentada na Eq.(11.26).

$$dy = dx \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{W}{T_0} dx = \frac{s}{c} dx = \sinh \frac{x}{c} dx \quad (11.26)$$

Integrando a expressão acima de  $C(0,c)$  até  $D(x,y)$  e utilizando as identidades trigonométricas  $\frac{d\sinh(z)}{dz} = \cosh(z)$ ,  $\frac{d\cosh(z)}{dz} = \sinh(z)$ ,  $\sinh(0)=0$  e  $\cosh(0)=1$ , obtém-se:

$$y - c = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = c \left[ \cosh \frac{x}{c} \right]_0^x = c \left( \cosh \frac{x}{c} - 1 \right) \quad (11.27)$$

$$y = c \cdot \cosh \frac{x}{c} \quad (11.28)$$

A Eq.(11.28) consiste na equação de uma catenária com eixo vertical. A constante  $c$  é denominada parâmetro da catenária. Utilizando as Eq.(11.25) e Eq.(11.28), e sabendo que  $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ , têm-se a relação entre  $y$  e  $s$ :

$$y^2 - s^2 = c^2 \quad (11.29)$$

Exprimindo o valor de  $s^2$  e substituindo na Eq.(11.21), têm-se:

$$T = q \cdot y \quad (11.30)$$

### 11.3.5 – Exemplo 3

Um cabo uniforme, pesando 50N/m está suspenso por dois suportes A e B como mostra a Fig. (11.20). Para essa estrutura, determine os valores máximo e mínimo da tração no cabo e o comprimento do cabo.

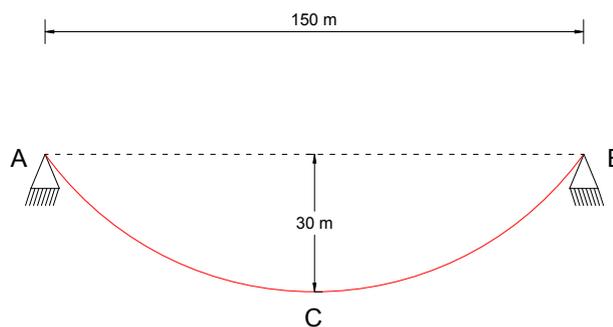


Figura 11.20 Estrutura a ser analisada.

A origem das coordenadas é colocada a uma distância  $c$  abaixo do ponto inferior do cabo, como indica a Fig. (11.21).

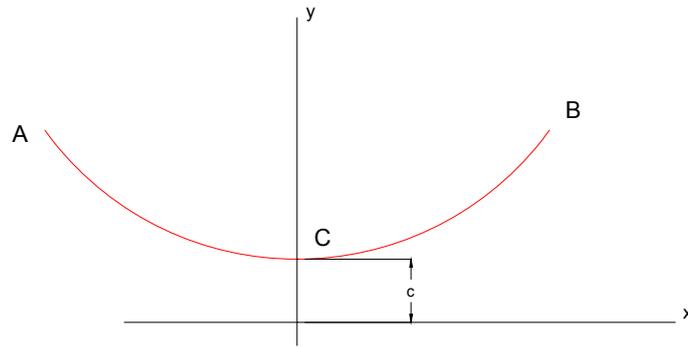


Figura 11.21 Localização da origem e o ponto inferior do cabo.

Utilizando a Eq.(11.28), sabendo que as coordenadas do ponto B são iguais a  $x_B = 75$  e  $y_B = 30 + c$  tem-se:

$$30 + c = c \cdot \cosh\left(\frac{75}{c}\right) \Rightarrow \frac{30}{c} + 1 = \cosh\left(\frac{75}{c}\right)$$

A expressão acima é do tipo não linear. Assim, o termo  $c$  deve ser determinado por meio de um processo iterativo. Para a equação considerada esse termo é igual a:

$$c = 98,4$$

Dessa forma:

$$y_B = 30 + c = 128,4m$$

Portanto, com base nas Eq.(11.19) e Eq.(11.30) obtêm-se os valores extremos das trações no cabo, as quais são iguais a:

$$T_{\min} = T_0 = 50 \cdot 98,4 = 4920N$$

$$T_{\max} = T_B = 50 \cdot 128,4 = 6420N$$

O comprimento do cabo é encontrado utilizando a Eq.(11.29) no trecho CB:

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2 \Rightarrow s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = 128,4^2 - 98,4^2 \Rightarrow s_{CB} = 82,5m$$

O comprimento final é o dobro do comprimento do trecho CB. Assim:

$$s_{AB} = 2 \cdot s_{CB} \Rightarrow s_{AB} = 165m$$

## **12. – Tensão e Deformação**

---

### 12.1 – Introdução

Um dos objetivos básicos da Mecânica dos Materiais (*Resistência dos Materiais e Mecânica dos Sólidos*) é o desenvolvimento de relações entre carregamentos externos aplicados a um corpo deformável, solicitações internas e deformações provocadas por estes. Nesse contexto, as *solicitações internas*, as quais podem ser compreendidas por meio de nosso próprio corpo quando fazemos algum movimento que *solicita* a nossa musculatura, estão associadas ao conceito de **tensão**. Já a mudança de forma (geométrica) de um determinado objeto após ser solicitado por qualquer ação externa, que pode ser percebida por meio da flexão de uma régua flexível, está associada ao conceito de deformação. Como esses dois fenômenos são acionados pela mesma ação externa, é intuitivo perceber que deve haver uma relação única entre deformações e tensões, que para o caso de corpos elásticos lineares, é denominada Lei de Hooke (1678).

Os conceitos de tensão e deformação bem como a compreensão da Lei de Hooke são fundamentais para o bom entendimento do campo da Mecânica dos Materiais e, portanto, indispensáveis à formação de um bom engenheiro.

### 12.2 – Tensão Normal Média

O conceito de tensão foi utilizado nos séculos passados para a compreensão sobre as causas das falhas em estruturas. Sob um mesmo nível de carregamento externo, estruturas compostas por um mesmo material observavam a segurança e a falha conforme as dimensões da seção transversal dos elementos que as compunham eram

variadas. As tensões foram inicialmente estudadas por pesquisadores renomados como Galileo (1638), Mariotte (1688) e Hooke (1678).

Para introduzir o conceito de tensão, deve-se considerar o elemento de barra simples mostrado na Fig. (12.1), o qual está em equilíbrio quando exposto a duas forças trativas de intensidade  $F$ .

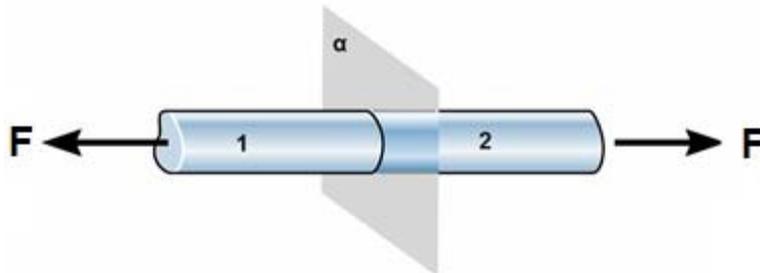


Figura 12.1 Barra prismática tracionada.

Assume-se ainda que essa barra seja seccionada por um plano  $\alpha$ , ortogonal ao seu eixo, dividindo-a em duas porções. Como a barra está em equilíbrio, cada elemento isolado da barra seccionada deverá estar também em equilíbrio. Portanto, no plano  $\alpha$  surgirá o esforço normal  $N$ , o qual restaura o equilíbrio originalmente observado, como mostrado na Fig. (12.2).



Figura 12.2 Representação do esforço solicitante normal.

Deve-se ressaltar que o esforço normal  $N$  será resistido pelo material que compõe a barra (terceira lei de Newton). Assim, as partículas do material, localizadas na seção transversal da barra, deverão reagir mecanicamente para equilibrar o esforço normal atuante. Portanto, a somatória das reações de cada uma dessas partículas, presentes na seção transversal da barra, deverá ser igual a  $N$ . Assumindo, por simplificação, que o esforço  $N$  seja igualmente resistido por todas as partículas da seção transversal, como mostra a Fig. (12.3), pode-se definir a grandeza tensão normal média,  $\sigma_m$ , que será associada à integridade da barra e conseqüentemente ao seu equilíbrio.



Figura 12.3 Tensão normal média.

A tensão é dita normal, pois atua de forma normal a um plano (área) de referência, no presente caso ao plano  $\alpha$ . Matematicamente, a tensão normal média é definida pela relação mostrada na Eq.(12.1), cuja intensidade é dada pela razão entre o esforço normal atuante e a área da seção transversal do elemento estrutural. Com base nessa equação, constata-se que a unidade de medida da tensão é força/área.

$$\sigma_m = \frac{N}{A} \quad (12.1)$$

Deve-se informar que para os materiais de uso corrente na engenharia, a tensão normal média resistente é obtida por meio de ensaios experimentais. Assim, a verificação sobre a falha de um dado elemento estrutural é feita com base nas tensões atuantes sobre ele, as quais são comparadas à sua tensão resistente.

### 12.3– Exemplo 1

Determine as tensões normais médias nas barras da treliça apresentada na Fig. (12.4), sabendo que as áreas da seção transversal das duas barras são iguais a:  $A_1 = 10\text{cm}^2$  e  $A_2 = 15\text{cm}^2$ .

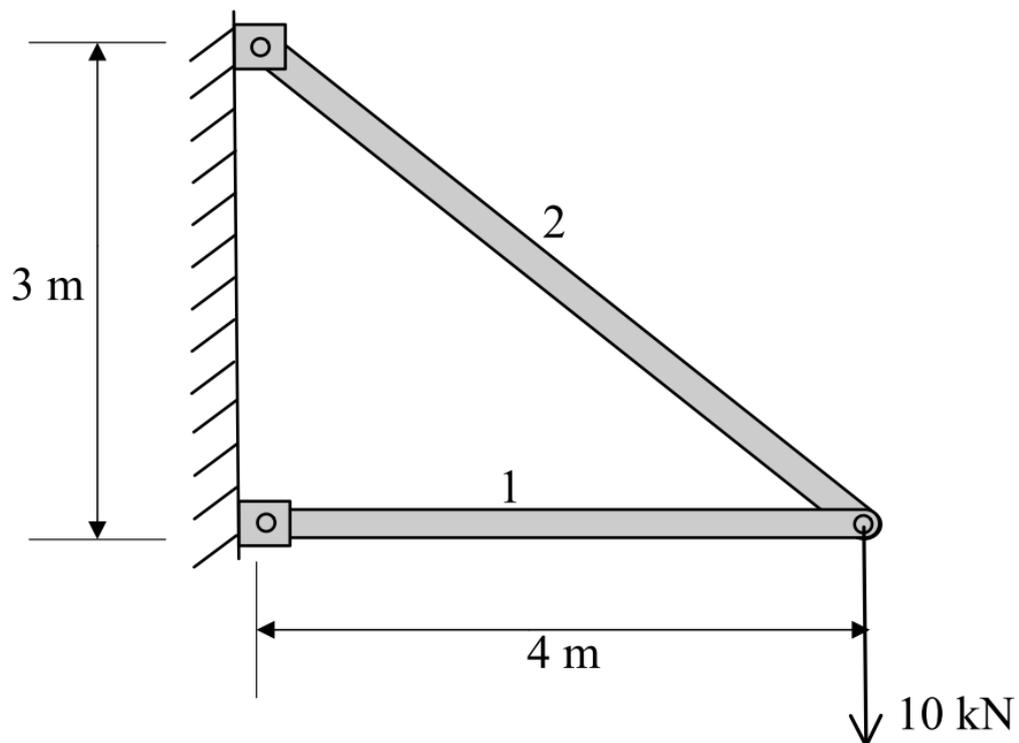


Figura 12.4 Estrutura a ser analisada.

Este problema pode ser resolvido aplicando-se o método dos nós. Deve-se aplicar as equações de equilíbrio de ponto material sobre o nó onde a força de 10 kN é aplicada. O diagrama de corpo livre deste nó é mostrado na Fig. (12.5). Sabendo que  $\text{Sen}(\beta) = \frac{3}{5}$  e  $\text{Cos}(\beta) = \frac{4}{5}$ , o equilíbrio desse nó resulta nas seguintes equações.

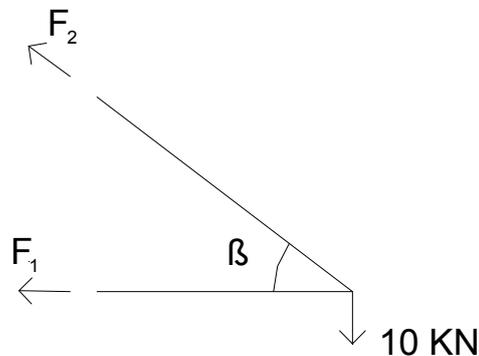


Figura 12.5 Diagrama de corpo livre.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_2 \text{sen}(\beta) - 10 = 0 \Rightarrow F_2 = 16,667 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1 - F_2 \text{cos}(\beta) = 0 \Rightarrow F_1 = -13,333 \text{ kN}$$

Assim, as tensões normais médias, nas duas barras que compõem a treliça, podem ser calculadas empregando a Eq.(12.1). Portanto:

$$\sigma_{m1} = \frac{-13,333}{10} = -1,333 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{m2} = \frac{16,667}{15} = 1,111 \text{ kN/cm}^2$$

Deve-se ressaltar que o sinal negativo observado na tensão da barra 1 indica que a mesma está submetida a uma tensão de compressão. Deve-se também chamar a atenção do leitor para o fato de que, apesar da barra 2 estar solicitada por um esforço normal de maior intensidade, esta apresenta tensão normal menor. Assim, desprezando os efeitos de flambagem, essa barra romperia após a falha da barra 1.

#### 12.4 – Tensão Cisalhante Média

Após a compreensão do conceito de tensão normal média, pode-se questionar se a presença de uma força atuando não mais normal, mas sim paralela ao plano (área) da seção transversal de um elemento de barra provoca tensões. A resposta a esta pergunta é positiva, sendo este o caso da atuação do esforço cortante. Nessa situação, as tensões

médias provocadas pelo esforço cortante são denominadas tensões cisalhantes médias ou tensões de cisalhamento médias.

Para compreender a atuação das tensões de cisalhamento, deve-se considerar o corpo apresentado na Fig. (12.6), o qual consiste de duas chapas conectadas em seus extremos, sendo solicitadas por duas forças de intensidade  $F$ , que atuam no sentido de provocar o corte (separação) das chapas. Assume-se que este corpo esteja em equilíbrio estático sob a atuação dessas ações externas.

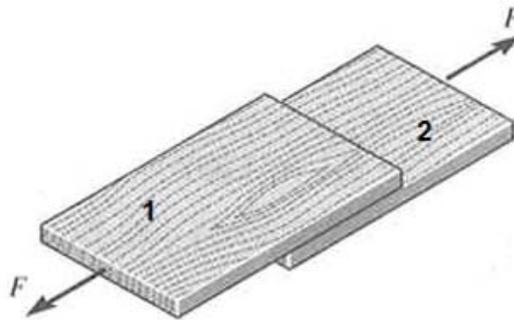


Figura 12.6 Corpo em equilíbrio solicitado ao corte.

Separando as chapas mostradas na Fig. (12.6), surgirão esforços solicitantes que atuarão no sentido de reestabelecer a condição de equilíbrio originalmente observada, antes da separação. Se um corpo está em equilíbrio, cada porção isolada deste corpo encontra-se também em equilíbrio. A Fig. (12.7) ilustra a separação das chapas e o surgimento do esforço cortante  $V$ .

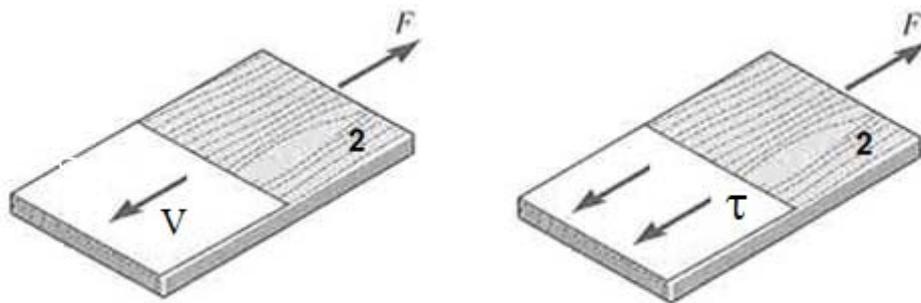


Figura 12.7 Esforço solicitante e tensão de cisalhamento média.

O esforço cortante deverá ser resistido pelas partículas do material que compõem a região onde este esforço atua. Portanto, a somatória das reações mecânicas de cada uma das partículas que contribuem para a resistência do material deverá ser igual ao esforço cortante para que o equilíbrio seja satisfeito. Assumindo que todas as partículas da área de atuação do esforço cortante contribuam uniformemente para a resistência do

material, como mostra a Fig. (12.7), pode-se definir a grandeza tensão de cisalhamento média,  $\tau_m$ , como uma medida da sollicitação do carregamento externo, com relação ao esforço cortante, sobre o material.

A tensão é denominada cisalhante, ou também de cisalhamento, uma vez que está orientada na direção paralela ao plano (área) em que esta grandeza deseja ser mensurada. Matematicamente, a tensão de cisalhamento média,  $\tau_m$ , é definida pela relação mostrada na Eq.(12.2). Com base nessa equação, constata-se que, assim como para  $\sigma_m$ , a unidade de medida da tensão cisalhante é força/área.

$$\tau_m = \frac{V}{A} \quad (12.2)$$

Embora de simples determinação, deve-se enfatizar que a utilização das Eq.(12.1) e Eq.(12.2) pode conduzir a aproximações grosseiras nos valores das tensões em problemas práticos. Isso se deve ao fato de que, em muitos problemas de engenharia, as tensões não serem uniformemente distribuídas sobre a área analisada. Nesses problemas onde concentradores de tensão estão presentes, deve-se considerar a utilização de coeficientes de segurança. Além disso, na grande maioria das estruturas, as tensões normal e cisalhante atuam conjuntamente.

### 12.5 – Exemplo 2

Na Fig. (12.8) é apresentado um sistema estrutural que suporta uma força igual a 600 kN. Essa força é resistida por um pino de diâmetro igual a 0,25 m. Com base nesse sistema, determine a tensão de cisalhamento média que atua sobre o pino.

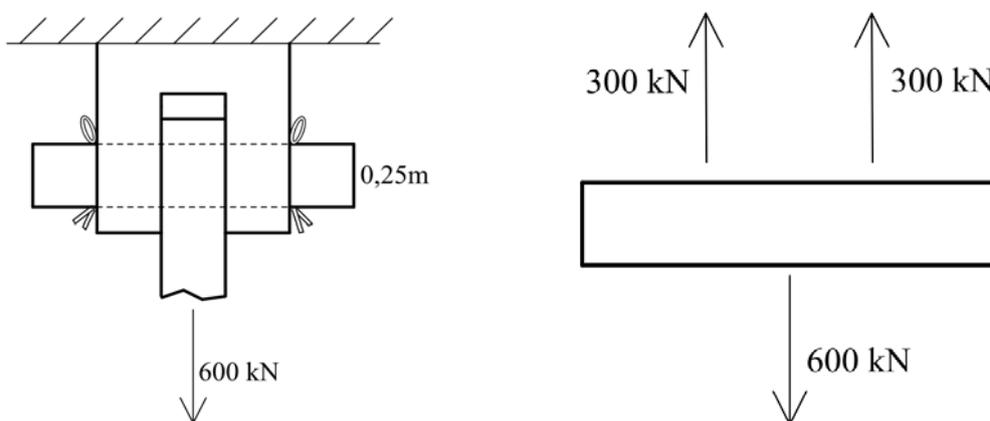


Figura 12.8 Sistema a ser analisado.

Na Fig. (12.8) é apresentado o diagrama de corpo livre do pino que suporta a ação de 600 kN. Traçando o diagrama de esforço cortante deste pino, o qual será omitido nessa resolução por simplicidade, verifica-se que o esforço cortante máximo será igual a 300 kN. Assim, utilizando a Eq.(12.2) verifica-se que a tensão cisalhante média será igual a:

$$\tau = \frac{300}{\frac{(\pi 0,25^2)}{4}} = 6111,55 \text{ kN/m}^2$$

### 12.6 – Tensões Médias em Planos Quaisquer

Conforme discutido nos itens anteriores, as tensões atuantes na estrutura, decorrentes das ações externas e esforços internos, dependem do plano (área) analisado assim como da direção de atuação dos esforços neste plano. Para ilustrar esta dependência, deve-se considerar a barra simples mostrada na Fig. (12.9), a qual está tracionada sob a ação de duas forças de intensidade  $F$ . Deseja-se analisar as tensões atuantes ao longo de um plano que secciona a barra em duas partes, como ilustrado na Fig. (12.9). Este plano apresenta uma inclinação  $\theta$  em relação ao eixo da barra.

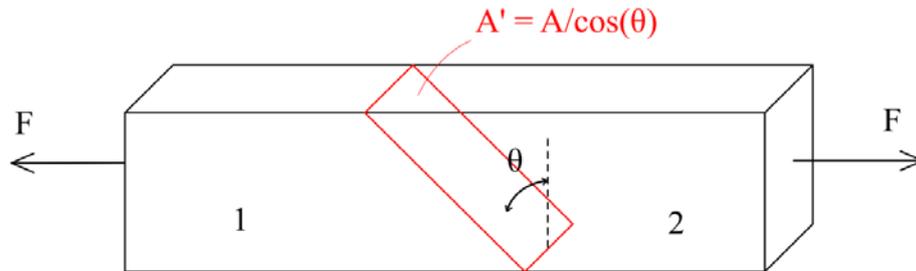


Figura 12.9 Análise das tensões em planos quaisquer.

Analisando o elemento 1, observa-se que, após a separação da barra, surgirá uma tensão equivalente  $T_m$  decorrente da resultante dos esforços solicitantes atuantes no plano inclinado. A tensão equivalente  $T_m$  e o elemento 1 estão ilustrados na Fig. (12.10).

A tensão equivalente pode ser determinada dividindo a resultante dos esforços solicitantes no plano inclinado,  $F$ , pela área inclinada, a qual é igual a  $A/\cos(\theta)$ .

Assim:

$$T_m = \frac{F}{A'} = \frac{F}{A/\cos(\theta)}$$

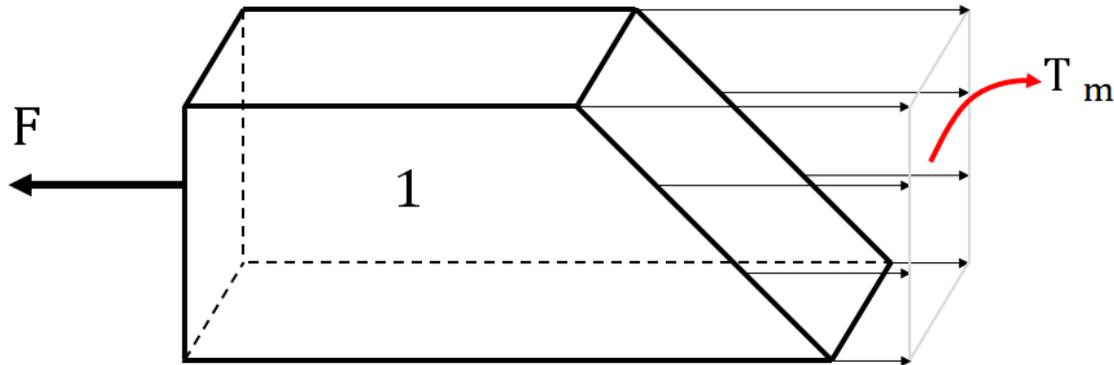


Figura 12.10 Tensão resultante no plano inclinado.

A determinação das tensões normal e de cisalhamento médias no plano inclinado é efetuada calculando-se as componentes da força  $F$  atuantes ao longo das direções normal e paralela ao plano inclinado. Assim, como mostra a Fig. (12.11), a componente normal é igual a  $F\cos(\theta)$  e a componente cortante é dada por  $F\sin(\theta)$ .

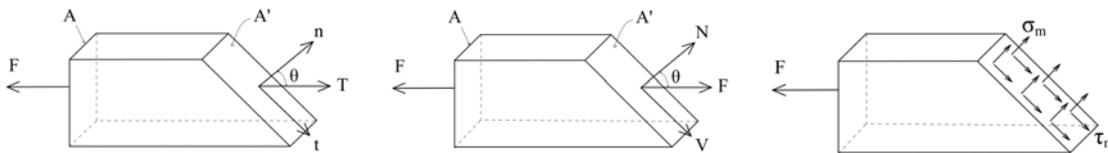


Figura 12.11 Tensão resultante no plano inclinado.

Aplicando as Eq.(12.1) e Eq.(12.2) no problema estudado obtêm-se que:

$$\sigma_m = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma_m^{(\theta)} = \frac{F \cos(\theta)}{A/\cos(\theta)} \Rightarrow \sigma_m^{(\theta)} = \frac{F}{A} \cos^2(\theta) \quad (12.3)$$

$$\tau_m = \frac{V}{A} \Rightarrow \tau_m^{(\theta)} = \frac{F \sin(\theta)}{A/\cos(\theta)} \Rightarrow \tau_m^{(\theta)} = \frac{F}{A} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (12.4)$$

Deve-se enfatizar que tanto a tensão normal quanto a tensão de cisalhamento dependem do plano considerado e conseqüentemente de sua inclinação. Segundo as Eq.(12.3) e Eq.(12.4), constata-se que a tensão normal tem seu valor máximo para a inclinação igual a zero e a tensão de cisalhamento tem seu valor máximo para a inclinação de  $45^\circ$ .

Além disso, no plano onde a tensão normal é máxima a tensão de cisalhamento é nula. E o plano onde a tensão de cisalhamento é máxima está rotacionado em  $45^\circ$  com relação ao plano em que a tensão normal é máxima. Essas conclusões serão discutidas em mais detalhes no capítulo 23.

### 12.7 – Exemplo 3

A Fig. (12.12) mostra um sistema estrutural composto por três elementos prismáticos, os quais resistem ao carregamento aplicado de 600 N por meio de forças de contato. Determine as tensões médias nas áreas de contato  $A_i$ .

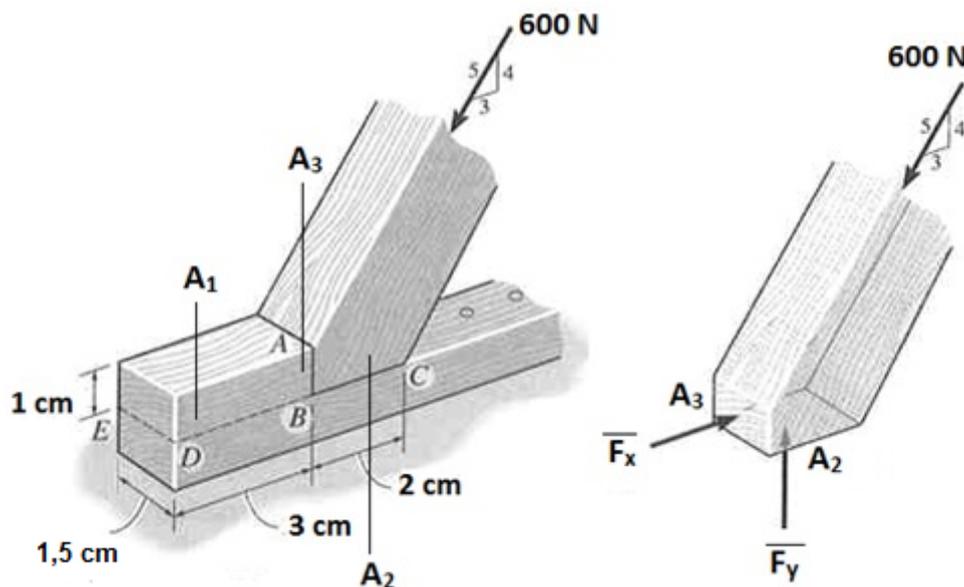


Figura 12.12 Sistema a ser analisado.

Na Fig. (12.12) é apresentado o diagrama de corpo livre do sistema analisado. Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido a este sistema estrutural, determinam-se as ações normais às áreas  $A_2$  e  $A_3$ , as quais são  $\bar{F}_y$  e  $\bar{F}_x$  respectivamente.

Assim:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{F}_x - 600 \cdot \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow \bar{F}_x = 360 N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \bar{F}_y - 600 \cdot \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow \bar{F}_y = 480 N$$

Assim, na interface que contém a área  $A_2$ , a tensão normal média é dada por:

$$\sigma_m = \frac{480}{2 \cdot 1,5} = 160 \text{ N/cm}^2$$

Já na interface que contém a área  $A_3$ , a tensão normal média é dada por:

$$\sigma_m = \frac{360}{1 \cdot 1,5} = 240 \text{ N/cm}^2$$

Na interface que contém a área  $A_1$ , o esforço é transmitido por meio de tensões de cisalhamento. Assim, a tensão de cisalhamento média atuante sobre a área  $A_1$  é dada por:

$$\tau_m = \frac{360}{3 \cdot 1,5} = 80 \text{ N/cm}^2$$

### 12.8 – Deformação

Quando uma ação externa é aplicada a um corpo deformável, este tende a alterar sua forma inicial. A mudança de forma deste corpo, a qual é provocada pela variação dos deslocamentos dos pontos que o compõe, como mostra a Fig. (12.13), é denominada deformação. As deformações são observadas experimentalmente podendo ser de grande magnitude, como em elásticos, ou mesmo imperceptíveis como nas edificações.

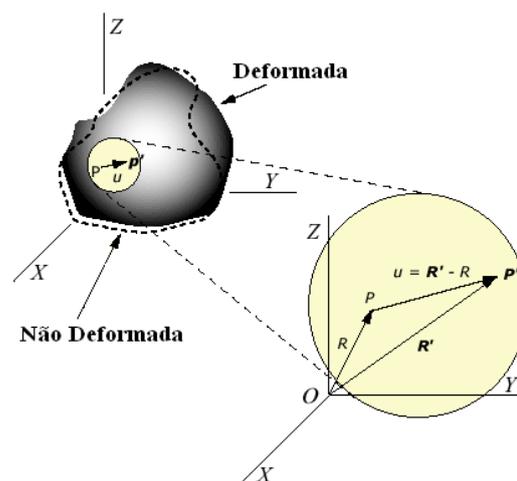


Figura 12.13 Configuração não deformada e deformada de um corpo.

As deformações podem ser normais ou distorcionais segundo a solitação atuante sobre a estrutura. A deformação normal está associada ao alongamento ou encurtamento do elemento considerado. Assumindo que o elemento analisado seja

infinitesimal de comprimento  $dl$ , como mostrado na Fig. (12.14), a deformação normal,  $\varepsilon$ , pode ser definida, matematicamente como:

$$\varepsilon = \frac{(dl + \delta dl) - dl}{dl} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta dl}{dl} \quad (12.5)$$

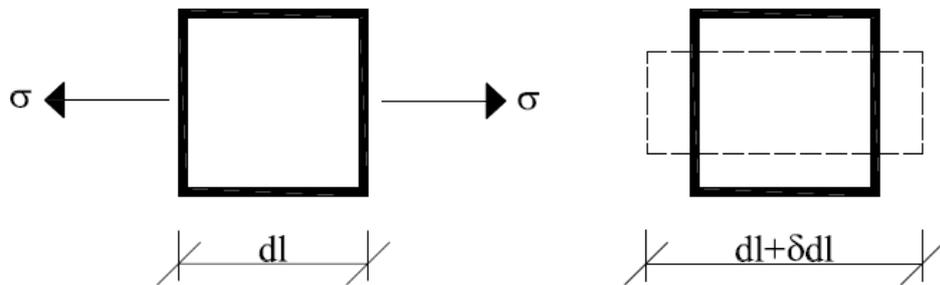


Figura 12.14 Deformação normal, alongamento.

Portanto, a deformação normal pode ser definida por meio da variação do comprimento do elemento dividida por seu comprimento inicial. Conforme apresentado na Eq.(12.5), a deformação normal é uma grandeza adimensional.

Já a deformação distorcional está associada à distorção dos elementos que compõem a estrutura. Assumindo, novamente, que a análise seja efetuada com um elemento de dimensões infinitesimais, como mostrado na Fig. (12.15), a deformação distorcional é determinada com base na variação do ângulo entre duas arestas do elemento infinitesimal analisado. Considerando que as arestas estejam inicialmente perpendiculares, a deformação distorcional,  $\gamma$ , é definida como:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (12.6)$$

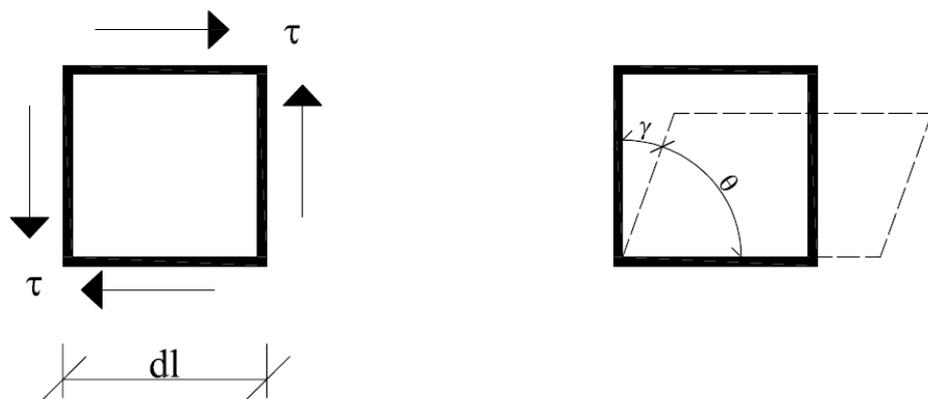


Figura 12.15 Deformação distorcional.

Como  $\gamma$  é dada por meio de uma variação angular, sua unidade de medida é radianos.

### 12.9 – Exemplo 4

A Fig. (12.16) mostra um elemento retangular deformado após a atuação de ações externas. Com base em sua configuração deformada, determine a deformação distorcional neste elemento, a deformação normal ao longo da aresta AD e a deformação normal ao longo da diagonal do elemento que une os pontos DB.

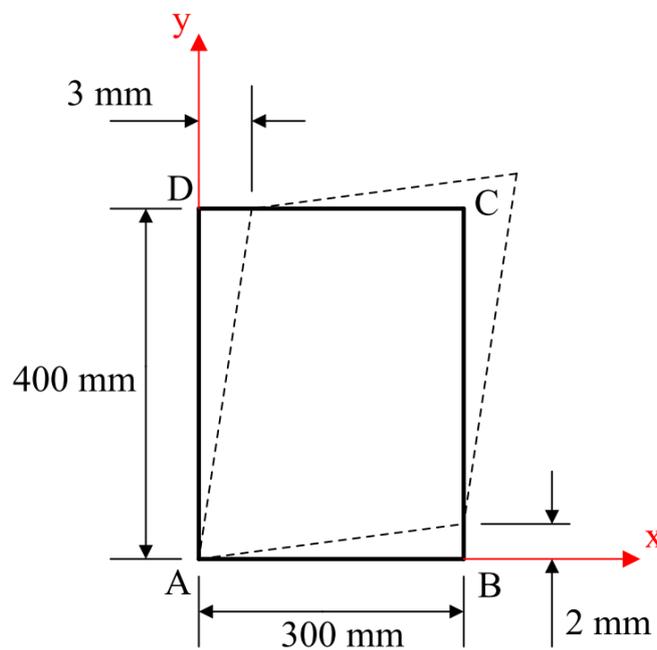


Figura 12.16 Elemento Deformado.

A deformação distorcional é dada pela variação angular das arestas do elemento após a atuação dos carregamentos externos, Eq.(12.6). Como o elemento considerado deforma-se angularmente ao longo de suas arestas AD e AB, a deformação  $\gamma$  será composta por duas variações angulares. Assim:

$$\gamma = \text{Arctg}\left(\frac{2}{300}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{3}{400}\right) \Rightarrow \gamma = 1,1416 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

Já a deformação normal ao longo do lado AD pode ser determinada utilizando-se a Eq.(12.5). Então:

$$\varepsilon_{AD} = \frac{\sqrt{400^2 + 3^2} - 400}{400} \Rightarrow \varepsilon_{AD} = 2,812 \times 10^{-5}$$

Finalmente, a deformação normal ao longo da diagonal DB poderá também ser calculada utilizando a Eq.(12.5). Assim:

$$\varepsilon_{DB} = \frac{\sqrt{(300-3)^2 + (400-2)^2} - \sqrt{300^2 + 400^2}}{\sqrt{300^2 + 400^2}} \Rightarrow \varepsilon_{DB} = -6,797 \times 10^{-3}$$

### 12.10 – Componentes de Tensão no Caso Tridimensional

Os problemas apresentados até o momento foram essencialmente unidimensionais, ou seja, devido às condições de contorno e às hipóteses de modelagem surgiram apenas uma tensão normal e uma tensão de cisalhamento na estrutura considerada. Além disso, foi assumida variação uniforme dessas tensões nas áreas de interesse. Porém, muitos dos problemas encontrados no cotidiano da engenharia de estruturas não podem ser classificados como unidimensionais ou as tensões não são uniformemente distribuídas. Nesses problemas, as tensões variam de ponto material a ponto material que compõe a estrutura devendo, portanto, ser definidas e mensuradas pontualmente.

Para efetuar uma representação e descrição mais precisas do comportamento das tensões ao longo do material estrutural, deve-se determinar a distribuição dos esforços internos para cada ponto material que compõe o corpo considerado. Para tanto, deve-se considerar o corpo apresentado na Fig. (12.17), o qual está em equilíbrio quando submetido a um conjunto de forças externas. Para estudar os esforços internos atuantes nesse corpo, deve-se seccioná-lo por meio de um plano  $\alpha$ .

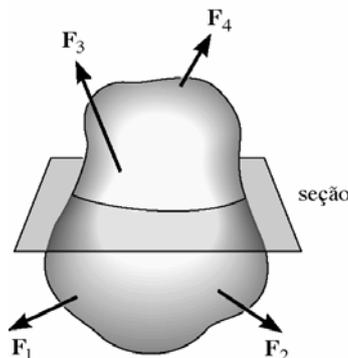


Figura 12.17 Corpo tridimensional em equilíbrio.

Assumindo que o corpo encontra-se inicialmente em equilíbrio, conclui-se que cada porção material que o compõe deverá estar também em equilíbrio após o seccionamento. Portanto, separando o corpo ao longo do plano  $\alpha$ , verifica-se que as porções inferior e superior do corpo seccionado, que estavam inicialmente em equilíbrio, deverão permanecer em equilíbrio. Para que isso ocorra, esforços solicitantes surgem objetivando o reestabelecimento da condição de equilíbrio. Tais esforços solicitantes dão origem às *Tensões* ( $T$ ), as quais nada mais são do que respostas mecânicas do corpo às ações externas aplicadas, atuantes em cada um dos pontos materiais que compõem o plano de secção.

Considerando que as tensões variam pontualmente, a condição de equilíbrio será reestabelecida pela somatória das respostas mecânicas de cada ponto material do corpo, como mostrado na Fig. (12.18).

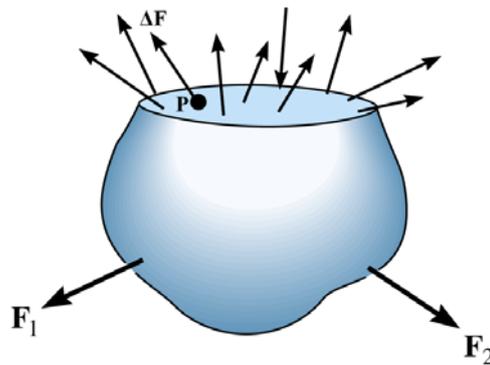


Figura 12.18 Surgimento das tensões.

Assim, tomando um ponto  $P$  localizado sob o plano  $\alpha$ , pode-se determinar sua contribuição, em termos de força  $\Delta F$ , para o equilíbrio por meio da Eq.(12.7).

$$\Delta F = T \Delta A \quad (12.7)$$

onde  $\Delta A$  é a área de atuação das tensões  $T$ .

Desta forma, pode-se definir a tensão atuando em um ponto como sendo “a intensidade da força, por unidade de área, atuante em uma dada área de referência”. Matematicamente a tensão atuante em um ponto pode ser definida como:

$$T = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (12.8)$$

Deve-se observar que a tensão depende da intensidade da força  $\Delta F$  e também da orientação desta em relação à área  $\Delta A$  considerada. Lembrando que a tensão pode ser

classificada como normal ou de cisalhamento se a força estiver orientada de maneira normal ou paralela a área considerada, respectivamente.

Como as tensões atuantes em um dado ponto dependem do plano (área) de referência considerado, normal ou paralelo, não se pode dizer que as componentes de tensão descritas até agora definam o estado de tensão em um ponto. De forma a definir o estado de tensão em um ponto, deve-se considerar o corpo apresentado na Fig. (12.19), no qual isola-se um ponto e atribui-lhe dimensões infinitesimais.

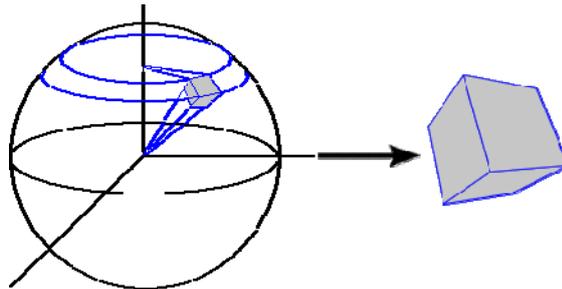


Figura 12.19 Corpo em equilíbrio. Análise da tensão em um ponto.

A partir deste elemento infinitesimal, que representa o ponto em análise, pode-se definir o estado de tensão escrevendo-se três componentes de tensão para cada uma de suas faces, como mostrado na Fig.(12.20). Sobre cada uma das faces do elemento atuam uma tensão normal e duas tensões de cisalhamento. As tensões normal e de cisalhamento são definidas pelas letras gregas  $\sigma$  e  $\tau$ , respectivamente.

Na nomenclatura das tensões são empregados dois índices. O primeiro deles refere-se à orientação do vetor normal ao plano onde a tensão considerada atua. O segundo índice indica o eixo no qual a tensão está orientada. Assim, a tensão  $\tau_{xy}$  indica uma tensão de cisalhamento que atua em um plano cujo vetor normal está orientado ao longo do eixo  $x$ . Além disso, esta tensão está orientada ao longo do eixo  $y$ .

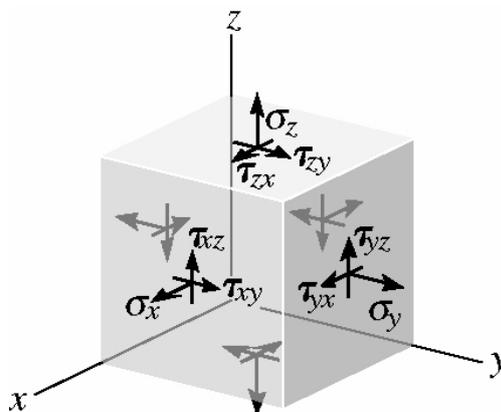


Figura 12.20 Estado de tensão em um ponto.

As tensões são consideradas positivas quando o sinal de seus dois índices forem ambos positivos ou negativos. Assim, se o vetor normal ao plano onde a tensão considerada atua estiver orientado no sentido positivo de um eixo coordenado e, além disso, a tensão estiver também orientada ao longo do sentido positivo do outro eixo coordenado, a tensão será positiva. A tensão será também positiva se o vetor normal ao plano considerado e a tensão estiverem ambos orientados ao longo do sentido negativo dos referidos eixos coordenados. Para casos contrários aos descritos neste parágrafo, a tensão será negativa. Como exemplo, todas as tensões ilustradas na Fig. (12.20) são positivas.

Ao longo de cada uma das faces do elemento infinitesimal que representa o ponto em análise atuam três tensões. Assim, existem dezoito componentes de tensão que definem o estado de tensão no ponto. Porém, na ausência de forças de corpo (como o peso próprio, por exemplo), essas componentes devem estar relacionadas entre si para que a condição de equilíbrio seja verificada. Para mostrar a relação entre as componentes de tensão, deve-se aplicar o princípio da superposição dos efeitos, o qual foi discutido no capítulo 1. Assim, o estado de tensão mostrado na Fig. (12.20) será decomposto em dois: no primeiro, apenas tensões normais atuam e no segundo deles apenas tensões de cisalhamento estarão presentes. Para mostrar a relação existente entre as tensões normais, deve-se considerar o primeiro caso, onde apenas tensões normais estão presentes no ponto em análise. Nessa situação, o estado de tensão mostrado na Fig. (12.20) pode ser modificado para o apresentado na Fig. (12.21). Para que esse elemento esteja em equilíbrio, a somatória de forças ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  deve ser nula.

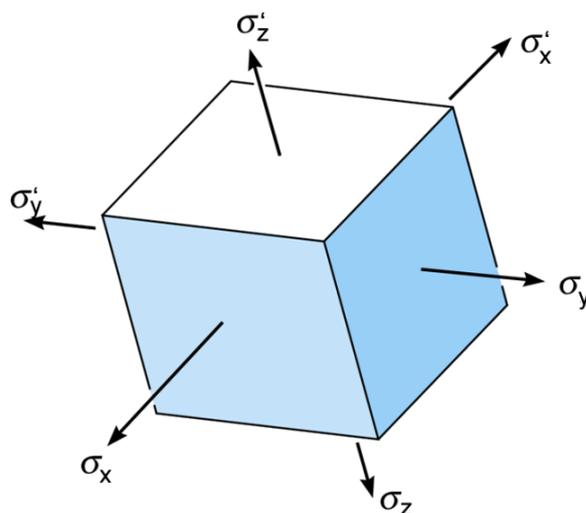


Figura 12.21 Elemento infinitesimal submetido a tensões normais.

Impondo esta condição, pode-se, primeiramente, efetuar a somatória das forças ao longo da direção  $x$ . Assim:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_x \Delta y \Delta z - \sigma'_x \Delta y \Delta z = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma'_x \quad (12.9)$$

Analogamente, pode-se efetuar o equilíbrio de forças ao longo das direções  $y$  e  $z$ . Por meio desses equilíbrios, os quais serão omitidos aqui por simplicidade, pode-se concluir que:

$$\sigma_y = \sigma'_y \quad ; \quad \sigma_z = \sigma'_z \quad (12.10)$$

Portanto, das seis tensões normais atuantes no ponto em análise, verifica-se que conhecendo-se apenas três delas é possível definir o estado de tensão normal do ponto.

Para a análise da dependência entre as tensões de cisalhamento, o princípio da superposição dos efeitos será novamente aplicado. Assim, as tensões de cisalhamento atuantes nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  serão consideradas separadamente. Os elementos infinitesimais contendo as tensões de cisalhamento nos planos mencionados estão apresentados na Fig. (12.22). Considerando o primeiro elemento desta figura, o equilíbrio de forças ao longo do eixo  $x$  conduz a:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau_{yx} \Delta x \Delta z - \tau'_{yx} \Delta y \Delta z = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = \tau'_{yx} \quad (12.11)$$

Efetuada o equilíbrio semelhante para os demais elementos apresentados na Fig. (12.22), o qual será omitido por simplicidade, pode-se facilmente concluir que:

$$\tau_{xy} = \tau'_{xy} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau'_{xz} \quad ; \quad \tau_{zx} = \tau'_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau'_{yz} \quad ; \quad \tau_{zy} = \tau'_{zy} \quad (12.12)$$

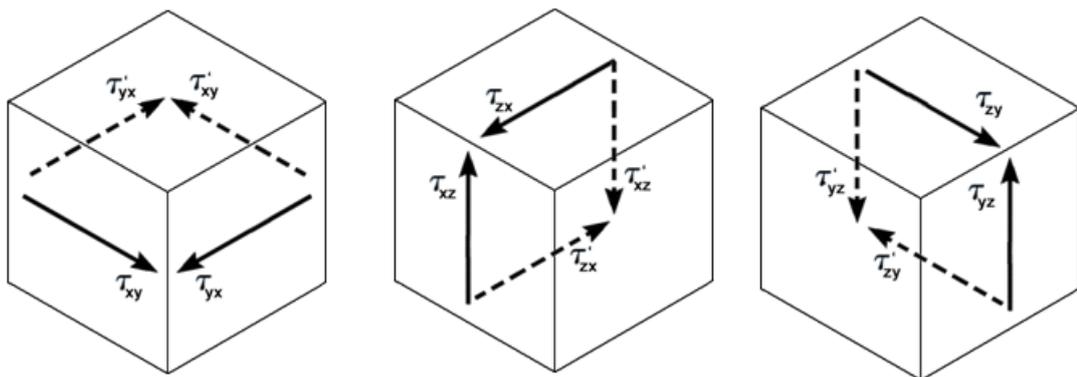


Figura 12.22 Elementos infinitesimais submetidos a tensões de cisalhamento.

Para que a condição de equilíbrio de um corpo seja verificada, além da somatória das forças, a somatória dos momentos em relação a qualquer ponto do espaço deve ser também nula. Assim, considerando o primeiro elemento infinitesimal apresentado na Fig. (12.22), a somatória dos momentos em torno do eixo  $z$  conduz a:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy} \Delta y \Delta z \frac{\Delta x}{2} + \tau'_{xy} \Delta y \Delta z \frac{\Delta x}{2} - \tau_{yx} \Delta x \Delta z \frac{\Delta y}{2} - \tau'_{yx} \Delta x \Delta z \frac{\Delta y}{2} = 0 \quad (12.13)$$

Simplificando a Eq.(12.12) obtém-se:

$$\tau_{xy} + \tau'_{xy} - \tau_{yx} - \tau'_{yx} = 0 \quad (12.14)$$

Utilizando os resultados obtidos nas Eq.(12.11) e Eq.(12.12) têm-se:

$$\tau_{xy} + \tau_{xy} - \tau_{yx} - \tau_{yx} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (12.15)$$

De forma análoga, impondo a condição de somatória nula de momentos para os demais elementos mostrados na Fig. (12.22), pode-se facilmente concluir que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (12.16)$$

Portanto, as componentes de tensão em um ponto, que dão origem ao estado de tensão, compõem um tensor, o qual pode ser representado como mostra a Eq.(12.17).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

Portanto, apesar de existirem 18 componentes de tensão em um ponto, o estado de tensão é caracterizado conhecendo-se apenas 6 delas. O estado de tensão é representado por meio de um tensor simétrico, como mostra a Eq.(12.17).

### 12.11 – Exemplo 5

Um dado ponto material de um corpo possui o estado de tensão mostrado a seguir. Determine as componentes de tensão representadas pelo ponto de interrogação.

$$\begin{bmatrix} 10 & ? & 9 \\ 3 & 2 & ? \\ ? & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Com base na Eq.(12.17) verifica-se que o tensor de tensões, para um corpo de propriedades mecânicas isotrópicas, é simétrico. Portanto, o tensor de tensões para o caso em questão é o mostrado abaixo.

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

### 12.12 – Componentes de Deformação no Caso Tridimensional

Conforme apresentado no item 12.10, as tensões no interior de corpos variam de ponto a ponto. Assim, como uma correspondência entre tensões e deformações, as deformações variarão também de ponto para ponto. As Fig. (12.23) e Fig. (12.24) ilustram a atuação das deformações normal e distorcional, respectivamente.

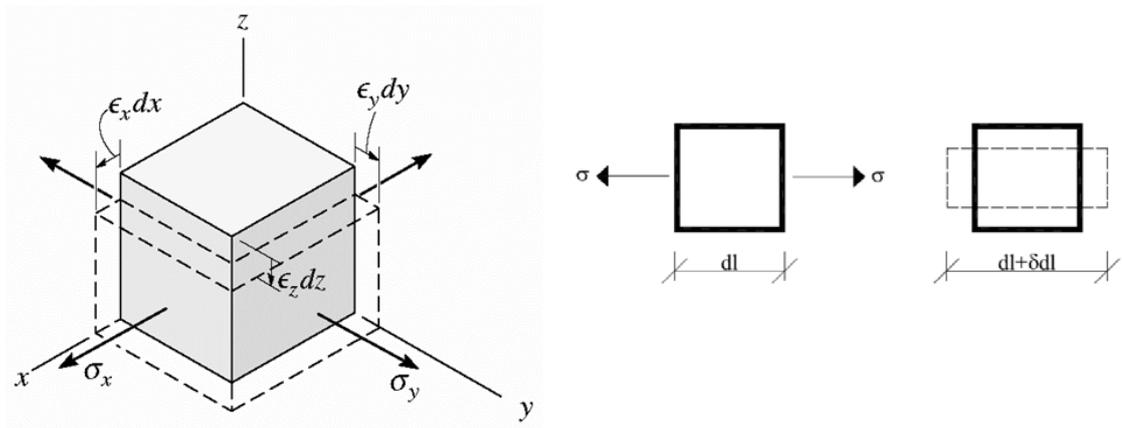


Figura 12.23 Deformação normal.

Matematicamente, as deformações normais podem ser determinadas com base na razão entre a variação do comprimento do elemento analisado e seu comprimento inicial (ver item 12.8). Assumindo que o deslocamento do corpo apresentado na Fig. (12.23) tenha ocorrido na direção  $x$ , sua deformação normal pode ser calculada como:

$$\varepsilon_x = \frac{dl + \delta dl - dl}{dl} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\delta dl}{dl} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\delta dx}{dx} \quad (12.18)$$

De forma análoga, pode-se definir as componentes da deformação normal atuantes ao longo das direções  $y$  e  $z$  como:

$$\varepsilon_y = \frac{\delta dy}{dy} \quad \varepsilon_z = \frac{\delta dz}{dz} \quad (12.19)$$

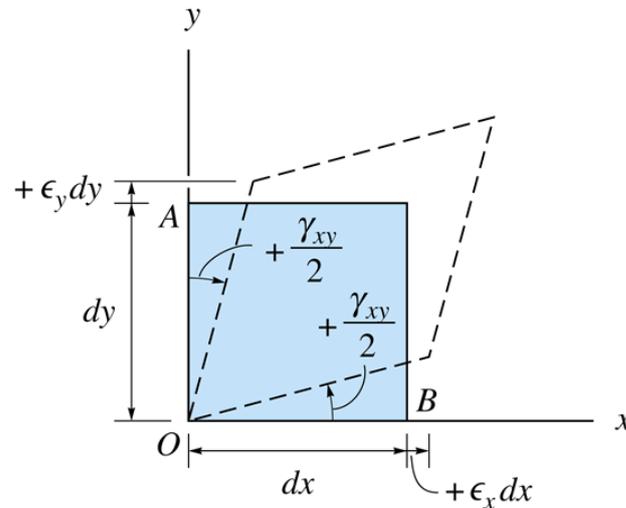


Figura 12.24 Deformação distorcional.

Com relação às deformações distorcionais, estas são determinadas com base na variação do ângulo de duas arestas que compõem o elemento de dimensões infinitesimais representativo do ponto antes e depois da deformação (ver item 12.8). Considerando que as arestas estejam inicialmente perpendiculares, como mostrado na Fig. (12.24), a deformação distorcional,  $\gamma$ , é definida como:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (12.20)$$

Considerando ainda que o plano que contém o elemento mostrado na Fig. (12.24) seja o  $xy$ , a deformação distorcional mostrada é a  $\gamma_{xy}$ . De maneira análoga, as deformações distorcionais atuantes nos planos  $xz$  e  $yz$  dão origem às  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , respectivamente. De forma a uniformizar a notação das deformações, pode-se definir as seguintes variáveis:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad (12.21)$$

Assim, as deformações podem ser representadas por meio de um tensor, como mostra a equação seguinte:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \Rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

Deve-se lembrar que, embora não demonstrado nesse texto, a relação  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  com  $i, j \rightarrow x, y, z$  é válida. Tal relação pode ser intuitivamente percebida com base no conteúdo apresentado durante o estudo das componentes de tensão.

As deformações são representadas por meio de um tensor simétrico, Eq.(12.22). Assim como nas tensões, o estado de deformação é definido se seis componentes de deformação forem conhecidas.

## **13. – Propriedades dos Materiais e Lei de Hooke**

---

### 13.1 – Introdução

Quando um corpo deformável é submetido a um dado conjunto de ações externas, os pontos desse corpo deslocam-se diferencialmente gerando deformação. Sendo assim, pode-se perguntar se existe alguma relação entre os carregamentos aplicados, ou as tensões que este gera, e as deformações no corpo. Muitas vezes o conhecimento sobre o comportamento mecânico de um dado material é necessário para a verificação quanto a sua adequação em um determinado sistema estrutural.

As propriedades relacionadas à resistência mecânica dos materiais podem ser determinadas por meio de ensaios experimentais, dentre os quais o de tração uniaxial é um dos mais utilizados. Outros testes podem também ser aplicados, como aqueles frequentemente necessários na análise de solos, sendo normatizados pela ASTM (*American Society of Testing and Materials*). Em um ensaio de tração uniaxial, o objetivo central é a determinação da relação entre a tensão normal média e a deformação normal média do material para diferentes níveis de sollicitação. Para a realização desse ensaio, utiliza-se um corpo de prova padronizado, o qual depende do material. Em seguida, são medidas, por meio de extensômetros, as deformações em um ponto suficientemente distante das extremidades. Isso ocorre pelo fato de, nos extremos, o estado de tensão não ser uniforme devido à presença das garras que seguram o corpo de prova. A intensidade do carregamento imposto é conhecida uma vez que ela é aplicada por um equipamento hidráulico, sendo documentada a cada incremento. Esse equipamento é provido de juntas de rotação nos extremos para que seja aplicada uma tração uniforme, sem efeitos de flexão.

A partir dos dados obtidos no ensaio de tração, é possível a determinação dos vários pares de valores de tensão e deformação no corpo de prova e finalmente a

construção de um gráfico com esses resultados. A curva resultante é chamada de diagrama tensão-deformação.

Usualmente, esse diagrama é mostrado na sua forma convencional, também denominado de diagrama tensão-deformação convencional, usando a tensão nominal ou de engenharia. Essa tensão é obtida dividindo-se a força aplicada,  $F$ , pela área da seção transversal inicial do corpo de prova,  $A_0$ . Assim:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Da mesma forma, a deformação específica nominal ou de engenharia é obtida diretamente do extensômetro elétrico, ou por meio da divisão da variação no comprimento nominal do corpo de prova,  $\delta$ , por seu comprimento nominal original,  $L_0$ . Assim:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

Se os pontos  $(\sigma_i, \varepsilon_i)$  forem representados em um gráfico, a curva resultante é chamada de diagrama tensão-deformação convencional. Apesar de ser geral, isso é, valer para outros materiais, deve-se salientar que a presença da variabilidade no processo de produção dos materiais torna praticamente impossível a obtenção de resultados iguais, para o mesmo material, em ensaios consecutivos.

### 13.2 – Diagrama Tensão x Deformação Uniaxial

Considerando que o material em estudo seja o aço, uma curva  $\sigma \times \varepsilon$  convencional típica é apresentada na Fig. (13.1), a qual pode ser dividida em quatro regiões.

*Região 1* → região caracterizada pelo comportamento elástico. Assim, uma estrutura nessa condição volta a sua configuração indeformada se o carregamento for removido. Nessa região, as tensões são linearmente relacionadas às deformações até  $\sigma = \sigma_{lp}$ . A variável  $\sigma_{lp}$  é conhecida como limite de proporcionalidade. Para tensões entre  $\sigma_{lp}$  e  $\sigma_E$ , essa última denominada de tensão de escoamento, ainda observa-se regime elástico. Porém, nesse trecho a curva tende a se arquear não sendo mais linear.

Deve-se mencionar que  $\sigma_{ip}$  é de difícil determinação experimental, sendo, portanto, muitas vezes, inferido como uma porcentagem de  $\sigma_E$ . Deseja-se que as estruturas sejam dimensionadas para atuarem nesta região. Assim, as deformações presentes serão elásticas, ou seja, recuperáveis e não permanentes.

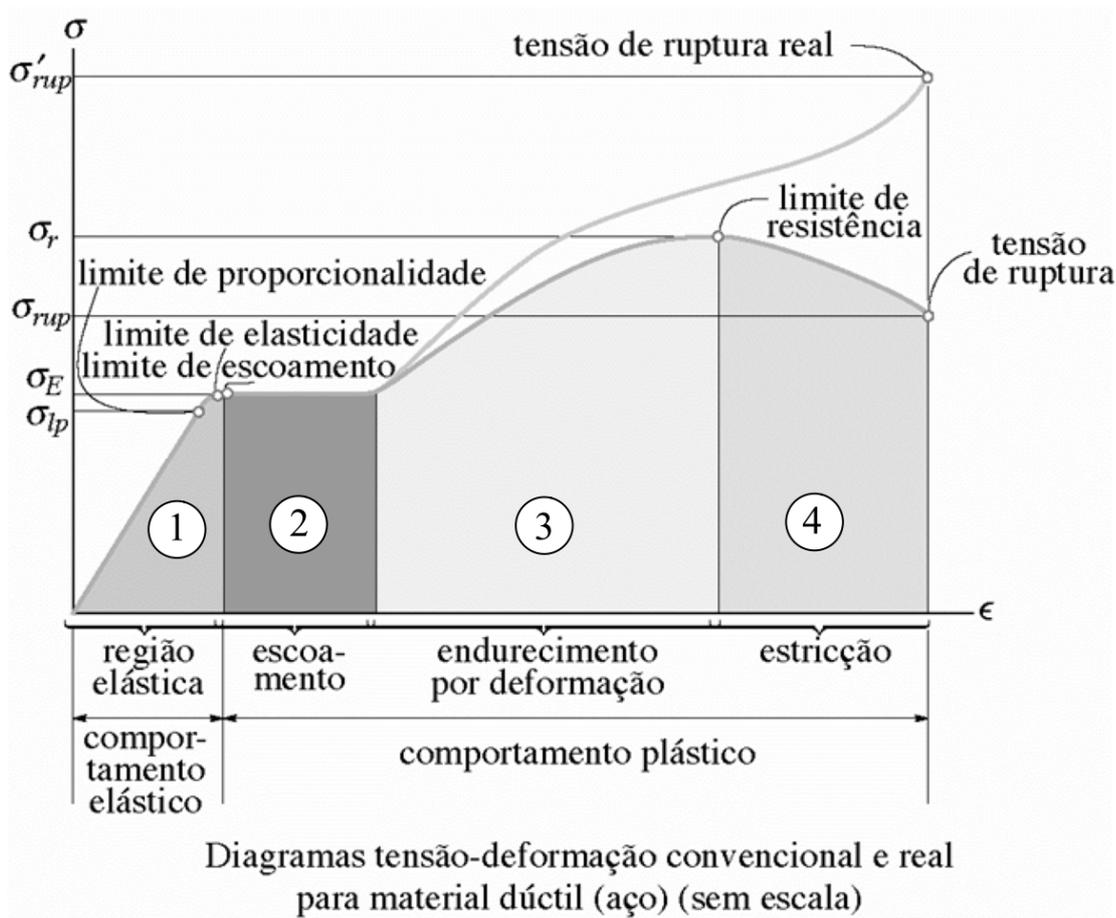


Figura 13.1 Diagrama Tensão x Deformação de engenharia e real.

*Região 2* → a região 2 é caracterizada por uma acomodação dos cristais que compõem o material, a qual gera deformações permanentes. Essa região é conhecida por escoamento. Uma carga que provoque uma tensão maior que  $\sigma_E$  causará deformações denominadas plásticas, as quais são permanentes, provocando mudanças permanentes nas propriedades do material. Nessa região, as deformações crescem sem aumento significativo da tensão.

*Região 3* → após o trecho de escoamento, a estrutura interna do material fica organizada de forma diferente, assim gerando a região 3. Nessa região o material

suporta um acréscimo no nível de tensão até que este alcance  $\sigma_r$ , conhecido por tensão última. O acréscimo da tensão nessa região é conhecido como encruamento.

*Região 4* → A região 4 é conhecida como estricção. Nesse trecho ocorre a localização da deformação em um dado ponto do corpo de prova. Nesse ponto, a área da seção transversal diminuirá até ocorrer a ruptura com a tensão igual a  $\sigma_{rup}$  (tensão de ruptura). O ponto onde ocorre a ruptura é denominado de ponto de estricção, ou seja, o ponto onde a seção transversal foi progressivamente reduzida.

Outra maneira de expressar o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  é através da utilização dos valores verdadeiros de tensão e deformação, os quais conduzem a construção do diagrama tensão-deformação verdadeiro. Como discutido anteriormente, constata-se que em todas as regiões, e de forma mais acentuada nas regiões 3 e 4, a área da seção transversal da barra vai sendo progressivamente reduzida. Assim, de acordo com a expressão da tensão normal média,  $\sigma_m = N/A$ , é de se esperar que a tensão normal aumente mais acentuadamente nessas duas regiões, devido à redução da área da seção transversal. Portanto, calculando a tensão em cada incremento de carga considerando a área da seção transversal verdadeira, tem-se o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  verdadeiro. Esse diagrama é caracterizado pela curva cinza, ilustrada na Fig. (13.1), que concorre ao ponto  $\sigma'_{rup}$ , o qual é denominado de tensão de ruptura. Assim como as tensões, as deformações são também calculadas com base no comprimento verdadeiro do corpo de prova  $L_R$ , ou seja,  $\varepsilon = \delta / L_R$ . Portanto, o diagrama tem esse nome, por utilizar os valores verdadeiros, ou reais, das grandezas  $\sigma$  e  $\varepsilon$ .

Existem outros materiais que apresentam diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  diferentes do mostrado na Fig. (13.1). Como exemplo, citam-se os materiais dúcteis (como alguns tipos de aços) e tipos de borracha (comportamento elástico não linear). Esses diagramas característicos são mostrados na Fig. (13.2).

Com base nas representações mostradas nas Fig. (13.1) e Fig.(13.2), verifica-se que de acordo com o material tem-se um diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  característico. Na verdade, esses diagramas dependem da estrutura interna do material, sendo que a análise micro estrutural é desenvolvida pela ciência dos materiais.

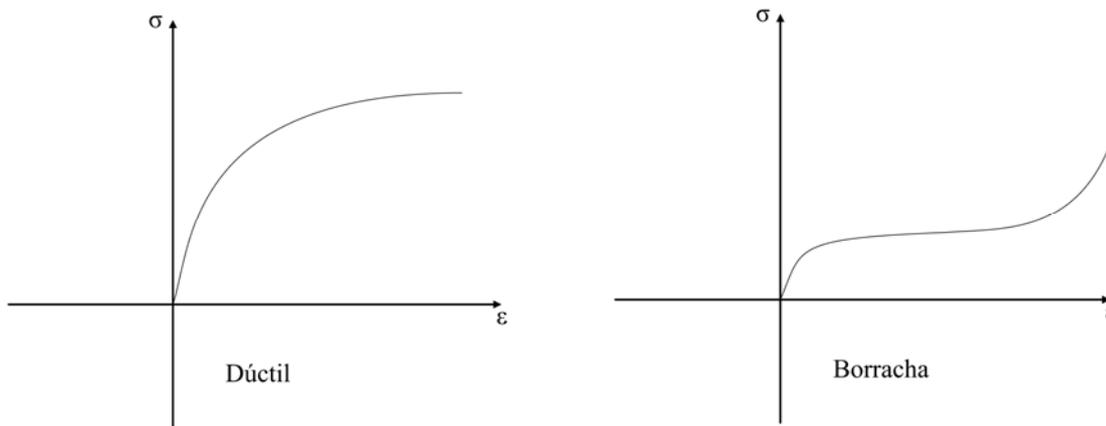
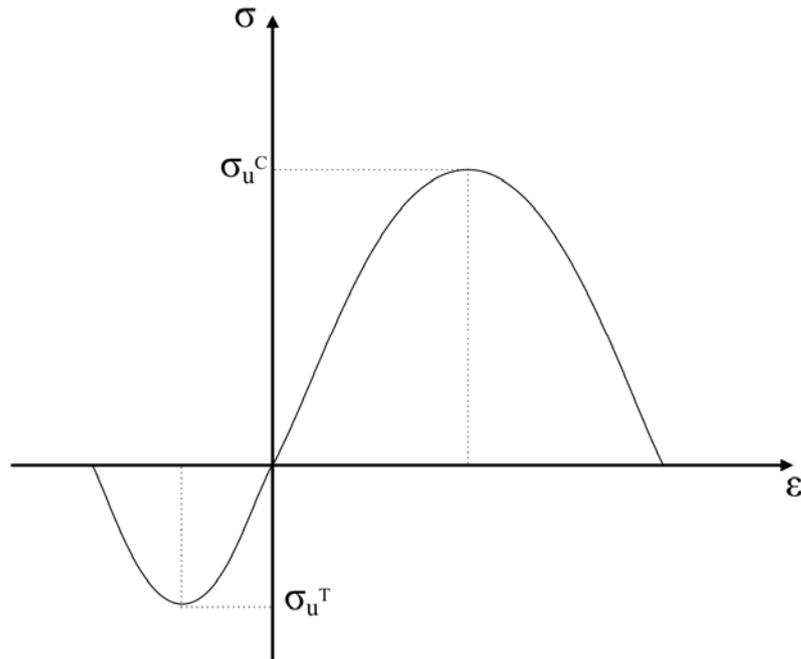


Figura 13.2 Diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  para outros tipos de materiais.

Outro material de grande interesse e utilização na engenharia de estruturas é o concreto. Seu diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  unidimensional pode ser visualizado na Fig.(13.3). É do conhecimento dos engenheiros que o concreto comporta-se mecanicamente de forma diferente a solicitações de tração e compressão. Esse material tem resistência uniaxial maior à solicitações de compressão do que à solicitações de tração (aproximadamente dez vezes maior). A queda de resistência do concreto deve-se ao processo de crescimento de fissuras nesse material. Primeiro, na interface entre agregado e pasta, e depois na pasta (pode ser que o agregado se rompa dependendo do tipo de agregado).

Esse material apresenta comportamento mecânico não linear. Até 30% de  $\sigma_u^c$  o material pode ser considerado como elástico linear. Depois desse ponto, deformações permanentes surgirão no material em decorrência do processo de propagação de fissuras. Depois do ponto  $\sigma_u^c$ , tem-se uma região denominada amolecimento onde as deformações aumentam mesmo reduzindo-se a carga aplicada (na verdade nesse trecho as fissuras representam uma considerável parcela da seção transversal. Assim, a seção diminui nesse trecho. Tem-se uma equivalência com a região 4 do diagrama do aço).

Na tração o comportamento é semelhante, porém o trecho de amolecimento é menos acentuado. Para mais detalhes, sugere-se que o leitor busque livros de mecânica dos materiais que abordem microestruturas dos materiais.

Figura 13.3 Diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  para o concreto.

### 13.3 – O Coeficiente de Poisson

Quando um corpo deformável é submetido a uma força axial trativa, ele não apenas será alongado longitudinalmente, mas também contraído transversalmente. Para compreender este fenômeno, deve-se, inicialmente, considerar um material facilmente deformável. Constata-se que estirando-o, sua seção transversal diminuirá, como mostra a Fig. (13.4). Analogamente, se o mesmo corpo for comprimido axialmente, sua seção transversal será aumentada.

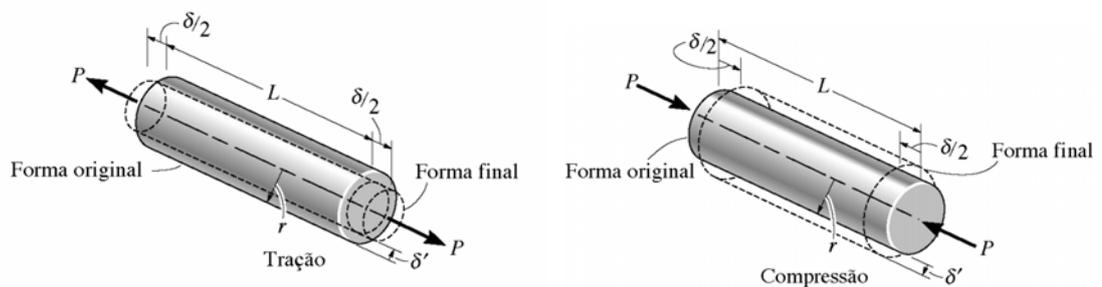


Figura 13.4 Efeito da deformação lateral.

Com base nas ilustrações apresentadas na Fig. (13.4), verifica-se que, quando a barra é estirada, ela aumenta seu comprimento de um valor  $\delta$  e sua seção transversal é

contraída de um valor  $\delta'$ . O mesmo ocorre para a barra comprimida, porém seu comprimento é reduzido em  $\delta$  e sua seção transversal é aumentada em  $\delta'$ .

Assim, as deformações normais longitudinal (direção axial) e transversal (direção transversal) podem ser expressas por:

$$\varepsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \quad e \quad \varepsilon_{transv} = \frac{\delta'}{r} \quad (13.1)$$

Por volta dos anos de 1800, o pesquisador francês Poisson constatou que quando o material é solicitado no domínio elástico (região 1) a relação entre essas deformações é uma constante, uma vez que as elongações  $\delta$  e  $\delta'$  são proporcionais. Isso ocorre porque nessa região as tensões e deformações são linearmente dependentes. Essa constante, conhecida como coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), possui um valor numérico único para um material homogêneo e isotrópico. Matematicamente, esse coeficiente pode ser assim definido:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{transv}}{\varepsilon_{long}} \quad (13.2)$$

O sinal negativo é utilizado tendo em vista que uma elongação longitudinal (deformação específica positiva) gera uma contração transversal (deformação específica negativa) e vice-versa. Para os aços de utilização corrente em engenharia, o valor do coeficiente de Poisson é igual a 0,33 (1/3), enquanto para os concretos, este valor depende da proporção entre os agregados estando, normalmente, dentro do intervalo 0,15 a 0,20.

### 13.4 – Lei de Hooke

Muitos materiais utilizados no campo da engenharia apresentam dependência linear entre  $\sigma$  e  $\varepsilon$  na região elástica, região 1 do diagrama apresentado na Fig. (13.1). Portanto, um aumento na tensão normal gera um aumento proporcional na deformação normal. Esse fato foi descoberto por Robert Hooke em 1676 (quando este efetuava experimentos em molas) e deu origem a conhecida Lei de Hooke, a qual pode ser matematicamente expressa como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (13.3)$$

Na Eq.(13.3), a variável  $E$  representa a constante de proporcionalidade entre  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , sendo conhecida como Módulo de Elasticidade Longitudinal ou Módulo de Young (após Thomas Young ter publicado alguns estudos sobre ele em 1807). Deve-se ressaltar que a Eq.(13.3) representa realisticamente o comportamento mecânico do material apenas na parte inicial da curva  $\sigma \times \varepsilon$ , ou seja, até o limite de proporcionalidade. Além disso, deve-se perceber que o parâmetro  $E$  está associado à inclinação da reta  $\sigma \times \varepsilon$  nessa região. Assim:

$$E = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_p} \quad (13.4)$$

onde  $p$  indica proporcionalidade.

O módulo de elasticidade longitudinal é uma propriedade mecânica de cada material. Para os aços de utilização corrente, seu valor é igual a  $E_{aço}=200$  GPa. Já para os concretos, esse valor é da ordem de  $E_{conc}=25$  GPa, uma vez que este valor depende da dosagem utilizada.

### 13.5 – Relação Tensão x Deformação ao Cisalhamento

No início deste capítulo foi discutido o ensaio de tração (compressão) uniaxial de um elemento estrutural. Foi visto que o corpo alonga-se (comprime-se) e que sua seção transversal diminui (aumenta). Além disso, foi apresentada a Lei de Hooke, a qual associa tensões e deformações normais. Foi definido que para a região elástica essas grandezas estão relacionadas por meio de uma propriedade do material conhecida como módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ . Porém, o que ocorre quando o ensaio de caracterização do material é repetido aplicando não mais uma tração ou compressão simples, mas sim um estado de cisalhamento puro?

Sabe-se que as tensões de cisalhamento estão diretamente relacionadas às deformações distorcionais. Assim, em um ensaio de cisalhamento puro, as grandezas obtidas serão  $\tau$  e  $\gamma$ . Existem procedimentos normatizados para a realização de ensaios de cisalhamento puro. Dentre estes, um conhecido procedimento é aquele em que o estado de cisalhamento puro é induzido por meio da aplicação de uma torção pura ao corpo de prova. Toma-se um tubo de parede fina e aplica-se o momento de torção. Em seguida mede-se o ângulo de giro resultante, o qual permite a determinação da relação

entre  $\tau$  e  $\gamma$ . Na Fig. (13.5) é apresentado um diagrama  $\tau$  e  $\gamma$  característico para aços de utilização corrente em engenharia.

Analogamente ao ensaio de tração uniaxial, o material, quando sujeito a um estado de cisalhamento puro, apresentará comportamento elástico linear até que o nível de tensão atinja o limite de proporcionalidade  $\tau_p$ . A fase de encruamento será também observada. Essa região engloba as tensões no intervalo entre  $\tau_p$  e a tensão cisalhante última,  $\tau_u$ . Finalmente, o material gradativamente perderá sua resistência ao cisalhamento, quando este atinge a tensão de ruptura,  $\tau_R$ , e a deformação de ruptura,  $\gamma_R$ . Deve-se ressaltar a presença de uma fase elástica no diagrama apresentado na Fig. (13.5). É desejável que as estruturas sejam projetadas levando-se em consideração o fato de os materiais que a compõem serem solicitados a níveis de tensão que não ultrapassem o limite elástico. Isso é necessário para evitar o surgimento de deformações permanentes na estrutura, as quais inviabilizarão sua utilização.

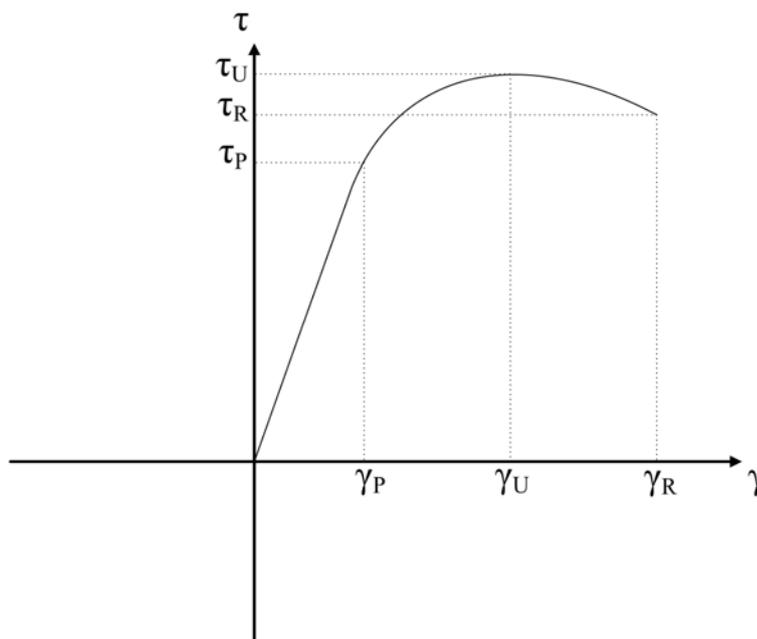


Figura 13.5 Diagrama  $\tau$  x  $\gamma$  para aços de utilização corrente.

Como observado no diagrama apresentado na Fig. (13.5), o trecho que envolve o comportamento elástico é também linear. Assim, a Lei de Hooke para tensões de cisalhamento pode ser escrita como:

$$\tau = G\gamma \quad (13.5)$$

onde  $G$  é denominado de Módulo de Elasticidade transversal.

O módulo de elasticidade transversal é dado pela inclinação da reta compreendida entre a origem e o ponto  $(\tau_p, \gamma_p)$ . Assim como o módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ ,  $G$  é uma propriedade do material sendo mensurada por meio de unidade de tensão.

Utilizando os conhecimentos da teoria da elasticidade, é possível determinar uma relação entre  $E$  e  $G$  para materiais homogêneos e isotrópicos. Essa relação é mostrada na Eq.(13.6).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (13.6)$$

Essa relação será de grande utilidade na resolução dos problemas que serão discutidos neste texto.

### 13.6 – Exemplo 1

Uma barra de diâmetro  $D_0 = 25$  mm e comprimento inicial  $L_0 = 250$  mm está submetida a um ensaio de tração. Sabendo que uma força de 165 kN alonga seu comprimento em 1,20 mm, calcule o módulo de elasticidade longitudinal do material e a contração do diâmetro da barra. Sabe-se que  $G = 26$  GPa e  $\sigma_p = 440$  MPa. Em seguida, determine a tensão normal verdadeira atuante no corpo de prova.

Para que a determinação do módulo de elasticidade longitudinal da barra seja efetuada, deve-se, inicialmente, verificar se a barra encontra-se no regime elástico. Nessa situação a tensão normal atuante deve ser menor que o limite de proporcionalidade. Assim, utilizando a Eq.(13.1) tem-se:

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{165}{\frac{\pi \cdot (0,025)^2}{4}} = 336135 \frac{kN}{m^2} \Rightarrow 336,135 MPa < \sigma_p$$

Portanto, a barra encontra-se no regime elástico. Assim, a deformação normal na barra pode ser calculada como:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} = \frac{1,20}{250} = 0,00480$$

O módulo de elasticidade longitudinal pode ser determinado empregando-se a lei de Hooke. Portanto:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{336,1}{0,0048} = 70020 \text{ MPa} \cong 70 \text{ GPa}$$

A contração no diâmetro da barra, devido à tração atuante, pode ser calculada utilizando o coeficiente de Poisson. Para esse material,  $\nu$  pode ser determinado por meio da Eq.(13.6). Assim:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow 26 = \frac{70}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = 0,346$$

Sabendo que as deformações lateral e longitudinal estão relacionadas através da Eq.(13.2) tem-se:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}} \Rightarrow 0,346 = -\frac{\varepsilon_{trans}}{0,0048} \Rightarrow \varepsilon_{trans} = -0,00166$$

Assim a contração será:

$$\varepsilon_{trans} = \frac{\delta'}{D_0} \Rightarrow \delta' = -0,00166 \cdot 25 \Rightarrow \delta' = -0,0415 \text{ mm}$$

Com base na contração do diâmetro do corpo de prova determinado anteriormente, pode-se calcular o valor do diâmetro verdadeiro. Assim:

$$D_{ver} = D_0 - \delta' \Rightarrow D_{ver} = 25 - 0,0415 \Rightarrow D_{ver} = 24,9585 \text{ mm}$$

Em seguida, o valor da tensão normal verdadeira pode ser assim calculado:

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{165}{\frac{\pi \cdot (0,0249585)^2}{4}} = 337263 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow 337,263 \text{ MPa}$$

A diferença entre as tensões calculadas considerando as situações indeformada e deformada pode ser assim mensurada:

$$1 - \frac{336,135}{337,263} \Rightarrow 0,0033 \Rightarrow 0,33\%$$

A diferença encontrada é muito pequena. Portanto, em aplicações práticas, pode-se analisar estruturalmente o corpo em sua configuração indeformada sem perdas significativas de representatividade.

## 14. – Barras Carregadas Axialmente

---

### 14.1 – Deslocamentos em Estruturas Carregadas Axialmente

A partir dos conceitos apresentados nos capítulos 12 e 13, onde tensões, deformações e a lei de Hooke foram tratadas, pode-se formular um problema envolvendo a análise mecânica de estruturas onde a determinação dos deslocamentos de barras axialmente carregadas seja o foco. A determinação dos deslocamentos nessas estruturas permite uma interessante aplicação estrutural, a qual está relacionada à determinação de esforços solicitantes em estruturas hiperestáticas.

Para formular o problema em questão, deve-se considerar a barra simples mostrada na Fig. (14.1), a qual é solicitada por um carregamento distribuído paralelo ao seu eixo, cuja intensidade seja igual a  $p(x)$ .

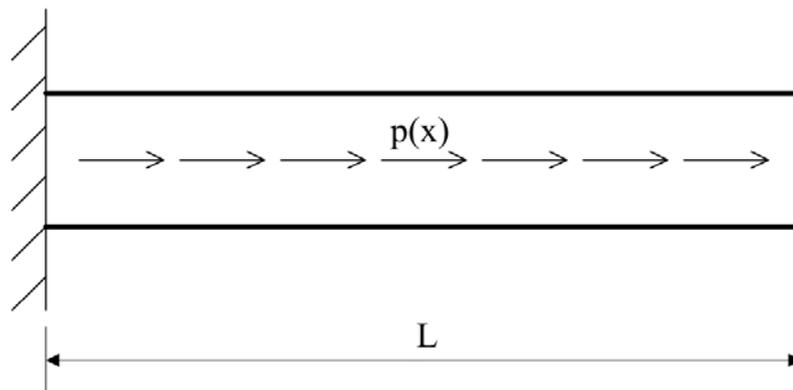


Figura 14.1 Elemento de barra axialmente carregado.

Assumindo que o elemento de barra esteja em equilíbrio sob a ação dessas condições de vinculação e carregamento, pode-se seccionar a estrutura e analisar os efeitos do carregamento sobre uma fatia de comprimento infinitesimal  $dx$ . O elemento infinitesimal considerado, assim como o esforço normal atuante, estão apresentados na Fig. (14.2).

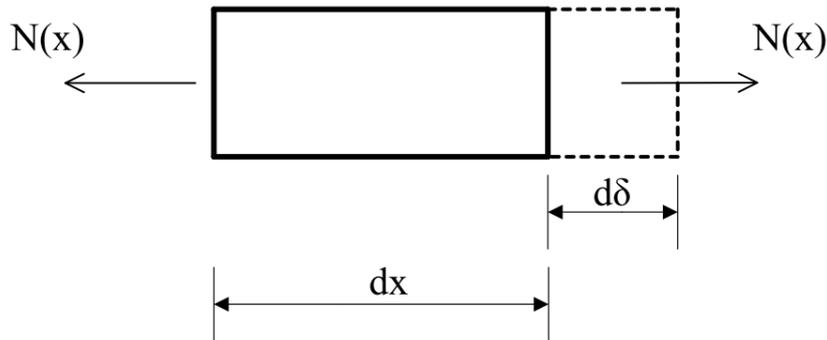


Figura 14.2 Deformação do elemento axialmente carregado.

Conforme mostrado na Fig.(14.2), verifica-se que a condição de equilíbrio é atendida no elemento analisado. Porém, observa-se um alongamento do elemento devido à ação do esforço normal atuante. Com base nos conceitos apresentados no capítulo 12, sabe-se que a tensão normal média e a deformação normal média são calculadas por  $\sigma_m = N(x)/A$  e  $\varepsilon = d\delta/dx$ , respectivamente. Portanto, para o problema analisado, pode-se utilizar a lei de Hooke para a obtenção de uma expressão que relacione o esforço normal atuante,  $N(x)$ , ao deslocamento da barra,  $d\delta$ . Assim, a lei de Hooke pode ser reescrita utilizando estas considerações da seguinte maneira:

$$\frac{N(x)}{A} = E \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow d\delta = \frac{N(x)}{AE} dx \quad (14.1)$$

Assim, o deslocamento total da barra pode ser obtido integrando a Eq.(14.1) ao longo do comprimento da barra. Assim:

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{AE} dx \quad (14.2)$$

Deve-se ressaltar que em diversas aplicações de engenharia, os elementos estruturais podem apresentar variação nas dimensões de sua seção transversal ao longo de seu comprimento. Isso faz com que o termo representativo da área da seção transversal,  $A$ , dependa também do comprimento da barra,  $x$ , o que deve ser levado em consideração na integração da Eq.(14.2).

Por outro lado, em outras tantas aplicações de engenharia, como nas estruturas de treliça (planas ou tridimensionais), tanto o esforço normal quanto a área da seção transversal não apresentam variação em relação ao comprimento do elemento. Portanto, essas grandezas são constantes em relação ao comprimento do elemento, facilitando

sobremaneira a avaliação da Eq.(14.2). Nessas condições, a Eq.(14.2) transforma-se em uma somatória, uma vez que envolve apenas termos constantes ao longo do comprimento da barra. Assim, para essas estruturas tem-se:

$$\delta = \frac{NL}{AE} \quad (14.3)$$

### 14.2 – Exemplo 1

Nesse exemplo, deve-se calcular o deslocamento horizontal do ponto A sabendo que a barra mostrada na Fig. (14.3) está submetida a duas forças axiais pontuais de intensidades iguais a 6,0 kN, ponto B, e 18,0 kN no ponto A. Esta estrutura é composta por dois diferentes materiais, cujos módulos de elasticidade longitudinais são  $E_{CB} = 200GPa$  e  $E_{BA} = 70GPa$ . Esta barra possui seção transversal circular maciça de diâmetro igual a 12 mm.

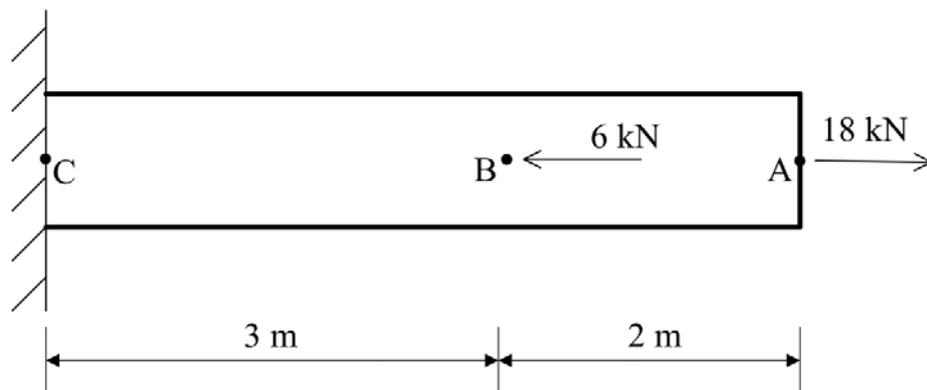


Figura 14.3 Estrutura a ser analisada.

Sabendo que a seção transversal da barra é circular maciça, sua área pode ser determinada por meio da seguinte equação:

$$A = \pi(6 \cdot 10^{-3})^2 = 1,131 \cdot 10^{-4} m^2$$

Para a determinação dos deslocamentos axiais da estrutura, deve-se determinar o valor do esforço normal atuante ao longo do comprimento da barra. Para tal fim, deve-se construir o diagrama de esforço normal da barra, o qual está apresentado na Fig. (14.4).

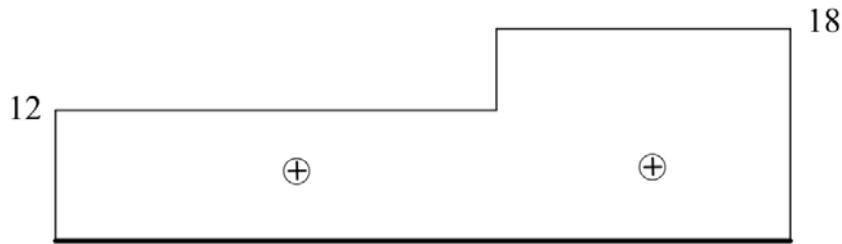


Figura 14.4 Diagrama de esforço normal.

Com base no valor do esforço normal em cada trecho que define a barra, verifica-se que a variação deste é constante. Assim, pode-se determinar o deslocamento da estrutura utilizando a Eq.(14.3). Portanto:

$$\delta_B^{CB} = \frac{12 \cdot 3}{200 \cdot 10^6 \cdot 1,131 \cdot 10^{-4}} = 1,5915 \cdot 10^{-3} m$$

$$\delta_A^{BA} = \frac{18 \cdot 2}{70 \cdot 10^6 \cdot 1,131 \cdot 10^{-4}} = 4,5471 \cdot 10^{-3} m$$

$$\delta_A = \delta_B^{CB} + \delta_A^{BA} = 6,1387 \cdot 10^{-3} m$$

### 14.3 – Exemplo 2

Além da importância do conhecimento dos deslocamentos nas estruturas de barra simples, a determinação dessa grandeza permite a resolução de problemas estaticamente indeterminados. Nesses tipos de problemas, a equação decorrente do deslocamento da estrutura fornece uma condição de compatibilidade, a qual deve ser atendida para a solução do problema.

Para ilustrar a aplicação da equação do deslocamento axial na resolução de problemas estaticamente indeterminados, deve-se determinar as reações de apoio axiais da estrutura mostrada na Fig. (14.5). Trata-se de uma barra onde atua uma força concentrada de intensidade igual a 20 kN sobre o ponto B. A barra possui seção transversal circular maciça de diâmetro igual a 5,0 mm. Além disso, existe um espaço (folga) entre o ponto C e o anteparo que impede o deslocamento axial do extremo direito da barra (apoio). Sabendo que o módulo de elasticidade longitudinal da barra é igual a  $E = 200 GPa$ , e que sob a ação do carregamento aplicado o contato entre o ponto C e o anteparo existe, determine as reações de apoio da estrutura.

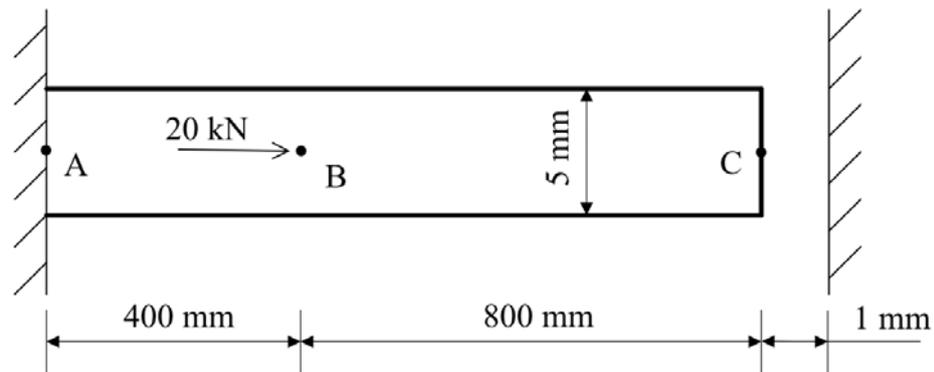


Figura 14.5 Estrutura a ser analisada.

Como o diâmetro da barra é igual a 5,0 mm, a área da seção transversal pode ser determinada da seguinte forma:

$$A = \pi 2,5^2 \Rightarrow A = 19,63 \text{ mm}^2 \Rightarrow A = 19,63 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Sabendo que o contato entre o ponto C e o apoio existe, o diagrama de corpo livre do sistema pode ser construído, o qual é apresentado na Fig. (14.6). Deve-se enfatizar que os sentidos das reações  $F_A$  e  $F_C$  foram arbitrados, sendo seu sentido correto verificado ao final da resolução.

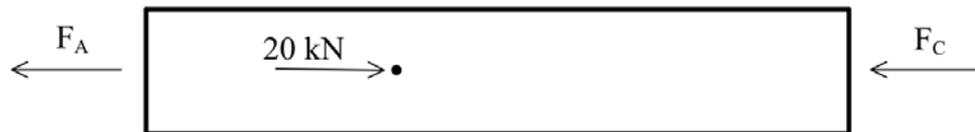


Figura 14.6 Diagrama de corpo livre.

Com base no diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (14.6) a seguinte equação de equilíbrio pode ser escrita:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_A + 20 - F_C = 0 \Rightarrow F_A + F_C = 20 \quad (14.4)$$

Sabendo que o contato entre o ponto C e o apoio ocorre, verifica-se que a condição de compatibilidade para o problema prevê que o deslocamento da barra deve ser igual à folga existente, ou seja, igual a 1,0 mm. Sabendo que o esforço normal no trecho AB é igual a  $F_A$  e no trecho BC igual a  $-F_C$ , pode-se calcular a condição de compatibilidade da seguinte maneira:

$$\delta_{AC} = \frac{F_A \cdot 0,400}{200 \cdot 10^6 \cdot 19,63 \cdot 10^{-6}} + \frac{-F_C \cdot 0,800}{200 \cdot 10^6 \cdot 19,63 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^{-3} \quad (14.5)$$

$$1,0188 \cdot 10^{-4} F_A - 2,0377 \cdot 10^{-4} F_C = 1 \cdot 10^{-3}$$

Resolvendo as Eq.(14.4) e Eq.(14.5) conjuntamente obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,0188 \cdot 10^{-4} & -2,0377 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 1 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_A \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16,60 \\ 3,40 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Como o sinal das reações de apoio determinadas por meio do sistema de equações anterior resultou positivo, isso indica que os sentidos inicialmente arbitrados estão corretos.

### 14.4 – Exemplo 3

O terceiro exemplo deste capítulo objetiva a determinação das reações de apoio da estrutura mostrada na Fig. (14.7). Trata-se de uma coluna formada por dois materiais distintos cujos módulos de elasticidade longitudinal são iguais a  $E_1 = 22 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$  e  $E_2 = 10 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ . Essa coluna é solicitada por uma força pontual de intensidade igual a 9,0 kN, a qual atua no sentido de comprimir a coluna. Despreze os efeitos de concentração de tensão. A seção transversal da estrutura é circular sendo que o material 1 está posicionado no núcleo da coluna, como indicado na Fig. (14.7).

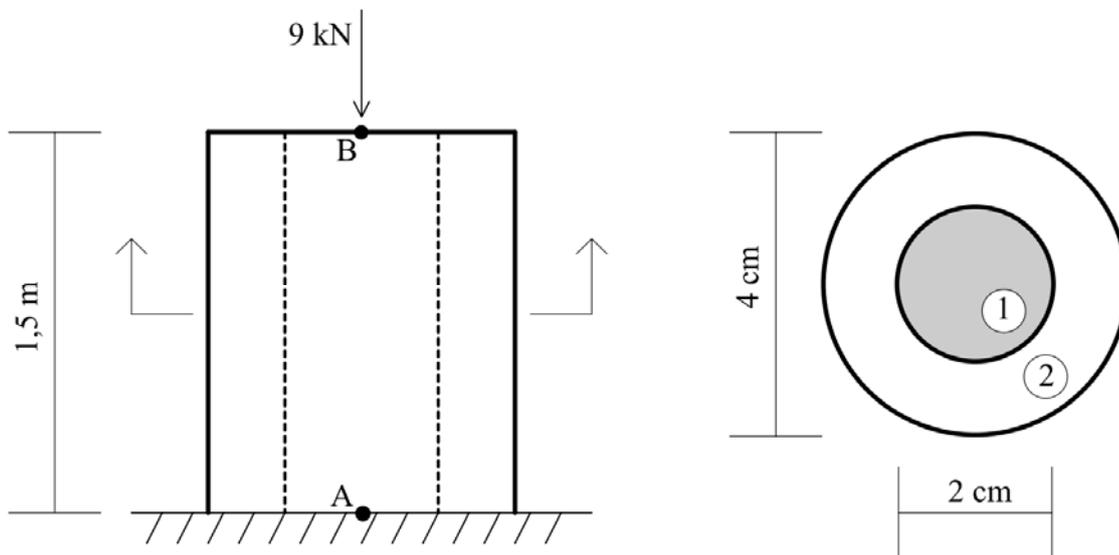


Figura 14.7 Estrutura a ser analisada.

Com base na estrutura a ser analisada, e na disposição dos materiais 1 e 2, obtém-se o diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (14.8). Considerando as reações ilustradas nesta figura, a seguinte equação de equilíbrio pode ser escrita:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 - 9 = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = 9 \quad (14.6)$$

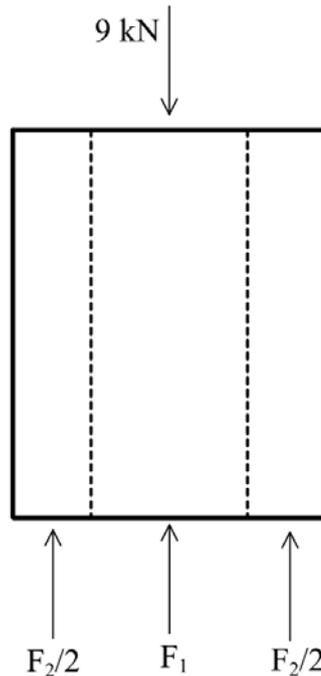


Figura 14.8 Diagrama de corpo livre.

O próximo passo a ser efetuado trata da determinação da condição de compatibilidade do problema, a qual envolve o cálculo dos deslocamentos na estrutura. Para que a estrutura analisada resista ao carregamento aplicado monoliticamente, ou seja, de forma que os materiais 1 e 2 resistam ao esforço conjuntamente, a deformação normal nestes materiais deve ser igual. Além disso, o deslocamento axial provocado pelo carregamento atuante deve ser igual nesses materiais. Assim, a condição de compatibilidade do problema prevê que o deslocamento no ponto B, para os materiais 1 e 2, seja igual. Portanto:

$$\delta_B^1 = \delta_B^2$$

$$\frac{F_1 \cdot 1,50}{22 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (0,01)^2} = \frac{F_2 \cdot 1,50}{10 \cdot 10^3 \cdot (\pi \cdot 0,02^2 - \pi \cdot 0,01^2)} \Rightarrow F_1 - 0,7333F_2 = 0 \quad (14.7)$$

Resolvendo conjuntamente as Eq.(14.6) e Eq.(14.7) tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0,7333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,80768 \\ 5,19232 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Com base nas reações normais determinadas acima, pode-se avaliar a tensão normal média atuante em cada material. Para isso, deve-se aplicar a Eq.(12.1). Assim:

$$\sigma_{m1} = \frac{3,80768}{\pi 0,01^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{m1} = 12120,2218 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{m2} = \frac{5,19232}{\pi 0,02^2 - \pi 0,01^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{m2} = 5509,2226 \text{ kN/m}^2$$

Verifica-se que a tensão normal média no material 2 é menor que a tensão normal média atuante sobre o material 1. Isso se deve ao fato do material 2 possuir maior área de seção transversal para suportar o carregamento atuante, embora atue sobre ele a maior reação normal. Apesar das tensões normais médias resultarem valores diferentes, um parâmetro interessante que deve ser avaliado é a deformação normal em cada material. Aplicando a lei de Hooke obtém-se:

$$\varepsilon_1 = \frac{12120,2218}{22 \cdot 10^3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = 0,55092$$

$$\varepsilon_2 = \frac{5509,2226}{10 \cdot 10^3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = 0,55092$$

Isso mostra que ambos os materiais apresentam a mesma deformação normal quando solicitados pelo carregamento externo, indicando que a coluna deforma-se monoliticamente.

### 14.5 – Aplicação do Princípio da Superposição dos Efeitos. Método das Forças

O princípio da superposição dos efeitos pode ser utilizado para a resolução de diversos problemas envolvendo estruturas hiperestáticas. Através dessa abordagem, condições de compatibilidade, escritas em termos de deslocamento, são determinadas para os pontos onde atuam as diversas vinculações hiperestáticas.

Por meio dessa metodologia, a estrutura hiperestática é transformada em uma estrutura isostática equivalente, por meio da remoção de condições de vinculação. As reações de apoio correspondentes às vinculações removidas são consideradas como ações externas aplicadas. Então, os deslocamentos correspondentes às vinculações removidas, vinculações hiperestáticas, são calculados para permitir a aplicação das condições de compatibilidade. Assim, a estrutura deve ser analisada, inicialmente, considerando os carregamentos externos atuantes e a modificação das condições de vinculação, de forma a transformar a estrutura hiperestática em uma isostática

equivalente. Em seguida, as reações de apoio hiperestáticas são aplicadas, uma a uma, como ações externas. Assim, os deslocamentos sobre as vinculações hiperestáticas são determinados e as condições de compatibilidade são definidas. Na Fig. (14.9) ilustra-se a aplicação desse método em uma estrutura de barra onde apenas uma reação hiperestática está presente. Deve-se ressaltar que, através dessa abordagem, a estrutura é analisada quantas vezes forem as ações hiperestáticas presentes. No problema mostrado na Fig. (14.9), a estrutura é analisada para o problema inicial, contendo a estrutura isostática equivalente e o carregamento atuante. Determina-se, nessa análise, o deslocamento correspondente à vinculação removida,  $\delta$ . Em seguida, a estrutura é novamente analisada considerando a aplicação da reação horizontal do apoio direito,  $P$ . Assim, como a análise anterior, determina-se o deslocamento no ponto da vinculação removida,  $\delta'$ . Então, a condição de compatibilidade é escrita para o apoio direito, uma vez que neste ponto o deslocamento horizontal é nulo devido à presença do apoio fixo. Assim, essa condição é expressa por:  $\delta + \delta' = 0$ . Deve-se ressaltar que  $\delta$  é expresso em função dos carregamentos externos, enquanto  $\delta'$  depende da intensidade da reação  $P$ . Portanto, determina-se o valor de  $P$  necessário para que o deslocamento desse ponto seja nulo. Deve-se enfatizar que este método permite a análise de estruturas submetidas a condições de contorno complexas. Portanto, possui uso geral na análise de estruturas.

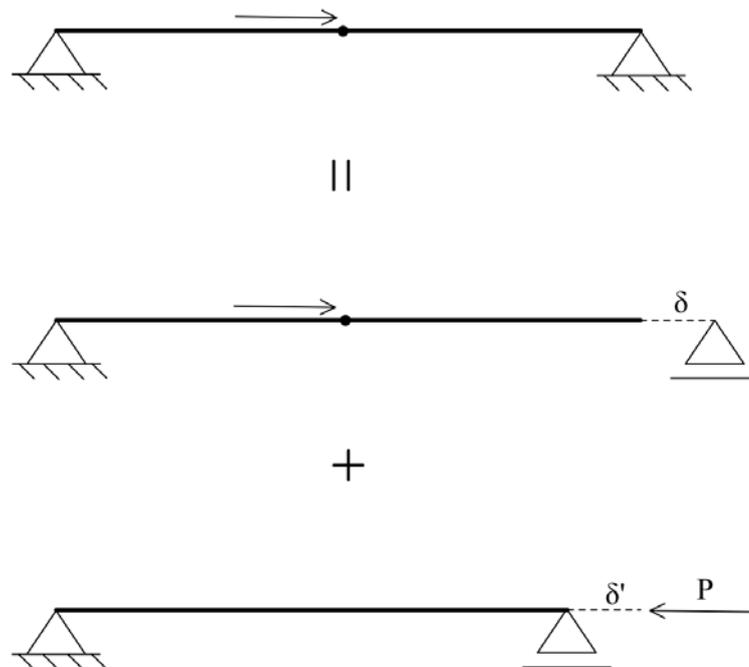


Figura 14.9 Aplicação simples do princípio da superposição dos efeitos.

14.6 – Exemplo 4

Neste exemplo, objetiva-se determinar as tensões normais médias atuantes ao longo dos elementos de barra simples que compõem a estrutura mostrada na Fig. (14.10).

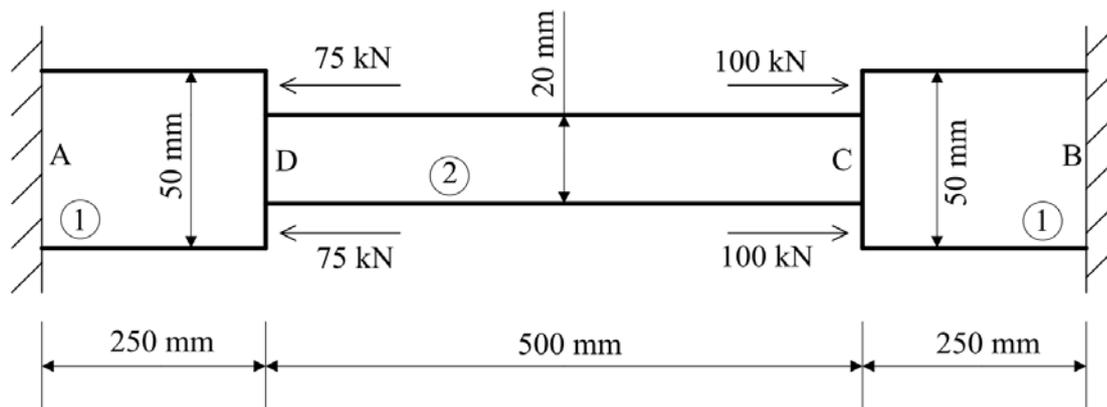


Figura 14.10 Estrutura a ser analisada. Dimensões em mm.

Trata-se de uma barra engastada em seus extremos sendo submetida a um conjunto de ações externas axialmente concentradas. Esta barra é composta por dois diferentes materiais, cujos módulos de elasticidade longitudinal são iguais a  $E_1 = 101\text{GPa}$  e  $E_2 = 200\text{GPa}$ . Os elementos que compõem a barra possuem seção transversal circular maciça, onde os diâmetros estão apresentados na Fig. (14.10).

Este problema será resolvido utilizando-se o princípio da superposição dos efeitos. Assim, a estrutura, que é hiperestática, será transformada em uma estrutura isostática equivalente por meio da retirada do engaste localizado na extremidade direita. Na sequência, a estrutura isostática equivalente e os carregamentos atuantes serão considerados na determinação do deslocamento axial da extremidade direita da barra. O procedimento descrito nas duas frases anteriores compõem o que será chamado nessas notas de problema 0. Em seguida, a reação de apoio atuante sobre o nó B,  $F_B$ , será considerada como uma ação externa. Então, o deslocamento do nó B, para esse carregamento, será calculado. Esse problema será denominado nesse exemplo de problema 1. Finalmente, a condição de compatibilidade do problema poderá ser escrita, a qual prevê que o deslocamento no ponto B do problema 0 adicionado ao deslocamento

neste mesmo ponto do problema 1 deve ser nulo. A Fig. (14.11) ilustra esquematicamente estas etapas.

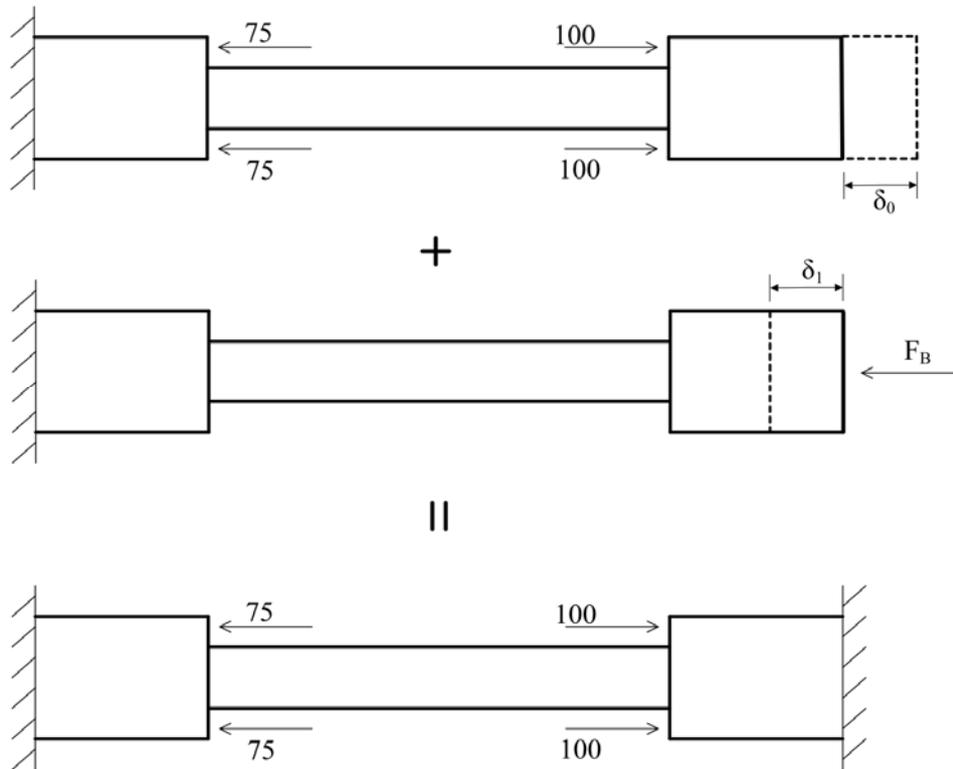


Figura 14.11 Etapas da superposição dos efeitos.

### Problema 0

O problema 0 envolve a estrutura e as condições de contorno apresentados na Fig. (14.12). Assim, o objetivo deste problema é a obtenção do deslocamento axial do ponto B. Para isso, deve-se determinar o diagrama de esforço normal da barra. Efetuando o equilíbrio, facilmente determina-se este diagrama, o qual está apresentado na Fig. (14.13).

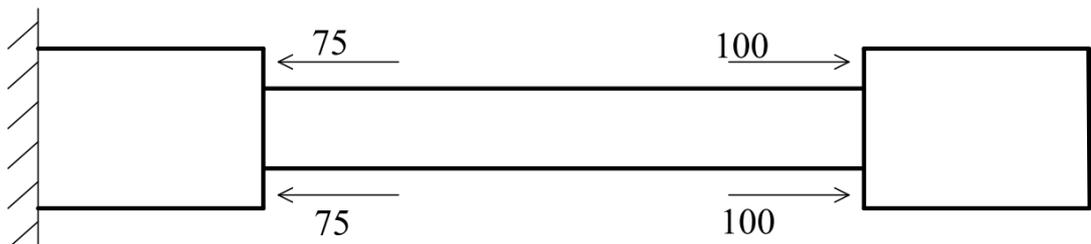


Figura 14.12 Estrutura considerada no problema 0.

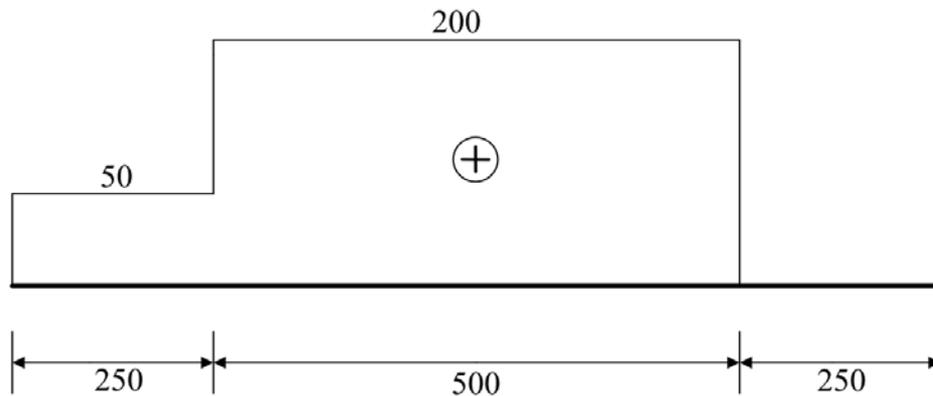


Figura 14.13 Diagrama de esforço normal para o problema 0.

Aplicando a Eq.(14.3) obtém-se:

$$\delta_0 = \frac{50 \cdot 0,250}{101 \cdot 10^6 \pi (25 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{200 \cdot 0,50}{200 \cdot 10^6 \pi (10 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \delta_0 = 1,65458 \cdot 10^{-3} m$$

### Problema 1

No problema 1, deve-se utilizar a estrutura isostática equivalente, sendo a reação de apoio hiperestática atuante sobre o ponto B, considerada como uma ação externa aplicada. Esse problema está apresentado na Fig. (14.14).

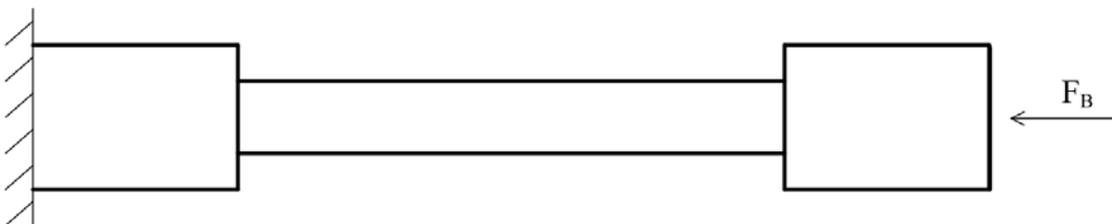


Figura 14.14 Estrutura considerada no problema 1.

Para a aplicação da Eq.(14.3), deve-se construir o diagrama de esforço normal para a estrutura mostrada na Fig. (14.14). Este diagrama está apresentado na Fig. (14.15).

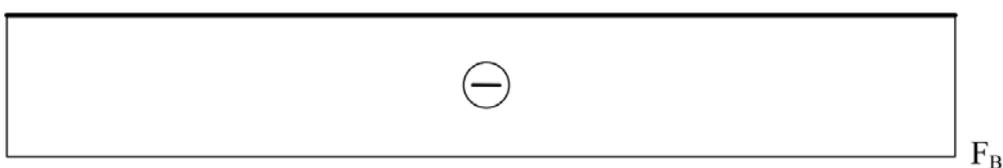


Figura 14.15 Diagrama de esforço normal para o problema 1.

Assim:

$$\delta_1 = \frac{-F_B \cdot 0,250}{101 \cdot 10^6 \pi (25 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{-F_B \cdot 0,50}{200 \cdot 10^6 \pi (10 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{-F_B \cdot 0,250}{101 \cdot 10^6 \pi (25 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$\delta_1 = -1,0479 \cdot 10^{-5} F_B$$

Como o ponto B do problema inicial, apresentado na Fig. (14.10), não é deslocável, a seguinte condição de compatibilidade pode ser definida:

$$\delta_0 + \delta_1 = 0$$

Utilizando os resultados obtidos anteriormente neste exemplo, pode-se escrever que:

$$1,65458 \cdot 10^{-3} - 1,0479 \cdot 10^{-5} F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 157,89 \text{ kN}$$

Com base no resultado obtido para o valor da reação  $F_B$ , sinal positivo, verifica-se que o sentido arbitrado para esta força no problema 1 é o verdadeiro. Portanto, com o conhecimento da intensidade e sentido de  $F_B$ , pode-se facilmente efetuar o equilíbrio de corpo rígido da estrutura analisada, uma vez que esta torna-se isostática. Efetuando este procedimento, obtêm-se o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (14.16).

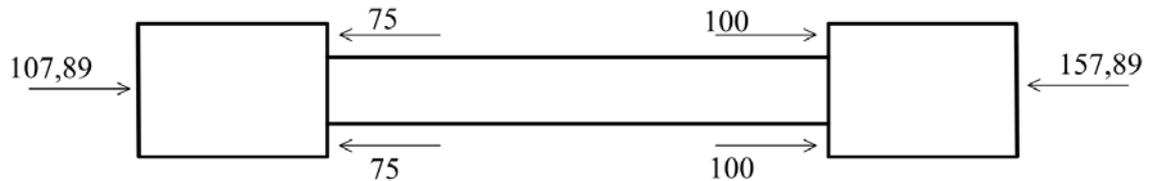


Figura 14.16 Diagrama de corpo livre para a estrutura analisada.

Assim, com base no apresentado na Fig. (14.16), pode-se facilmente determinar as tensões normais médias atuantes nos elementos que compõem a estrutura analisada. Para isso, deve-se calcular os valores dos esforços solicitantes normais atuantes em cada barra que compõe a estrutura ilustrada na Fig. (14.10). Então, divide-se este valor pela área da seção transversal onde o esforço atua e obtêm-se o valor da tensão normal média. Efetuando este procedimento obtêm-se:

$$\sigma_{mAD} = \frac{-107,89}{\pi (25 \cdot 10^{-3})^2} = -54,947 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{mDC} = \frac{42,11}{\pi (10 \cdot 10^{-3})^2} = 134,40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{mBC} = \frac{-157,89}{\pi (25 \cdot 10^{-3})^2} = -80,41 \text{ MPa}$$

Finalmente, pode-se também analisar o deslocamento relativo entre os trechos AD e CB. Para isso, basta que sejam calculados os deslocamentos de cada um destes trechos isoladamente e, em seguida, estes devem ser subtraídos de forma a verificar seu deslocamento relativo. Aplicando a Eq.(14.3) tem-se:

$$\delta_{AD} = \frac{-107,89 \cdot 0,25}{101 \cdot 10^6 \pi (25 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \delta_{AD} = -1,36 \cdot 10^{-4} m \quad \text{encurta}$$

$$\delta_{CB} = \frac{-157,89 \cdot 0,25}{101 \cdot 10^6 \pi (25 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \delta_{CB} = -1,99 \cdot 10^{-4} m \quad \text{encurta}$$

Assim, o deslocamento relativo pode ser obtido como:

$$\Delta\delta = \delta_{AD} - \delta_{CB} \Rightarrow \Delta\delta = -1,36 \cdot 10^{-4} - (-1,99 \cdot 10^{-4}) \Rightarrow \Delta\delta = 6,30 \cdot 10^{-5} m$$

O resultado apresentado anteriormente indica que estes trechos aproximaram-se (de  $\Delta\delta$ ) após a ação dos carregamentos.

### 14.7 – Exemplo 5

Determine as tensões normais médias atuantes nos elementos estruturais verticalmente dispostos na estrutura mostrada na Fig. (14.17). Esta estrutura é composta por dois elementos de barra simples verticalmente posicionados, os quais suportam uma barra rígida submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade igual a 3,0 kN/m. Os elementos de barra simples apresentam módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E = 210 \text{ GPa}$  e área de seção transversal igual a  $A = 1,0 \text{ cm}^2$ .

A estrutura considerada neste exemplo é hiperestática, uma vez que aplicando apenas as equações de equilíbrio de corpo rígido, para o caso plano, não é possível a determinação de todas as reações de apoio da estrutura, as quais totalizam quatro. Assim, uma dessas reações deverá ser determinada por meio de uma equação de compatibilidade escrita em termos de deslocamento. Este exemplo será resolvido aplicando-se o princípio da superposição dos efeitos.

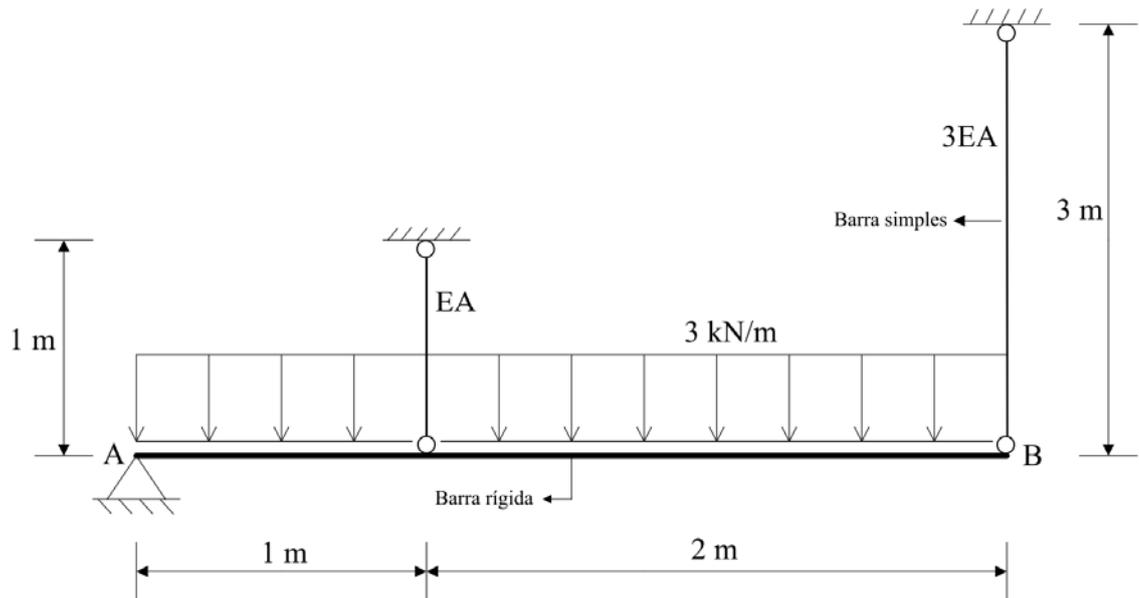


Figura 14.17 Estrutura a ser analisada.

*Problema 0*

O problema zero será composto pela estrutura isostática equivalente e o carregamento externo atuante. Nesse exemplo, a estrutura isostática equivalente considerada é a apresentada na Fig. (14.18), a qual conduz ao diagrama de corpo livre apresentado nesta mesma figura.

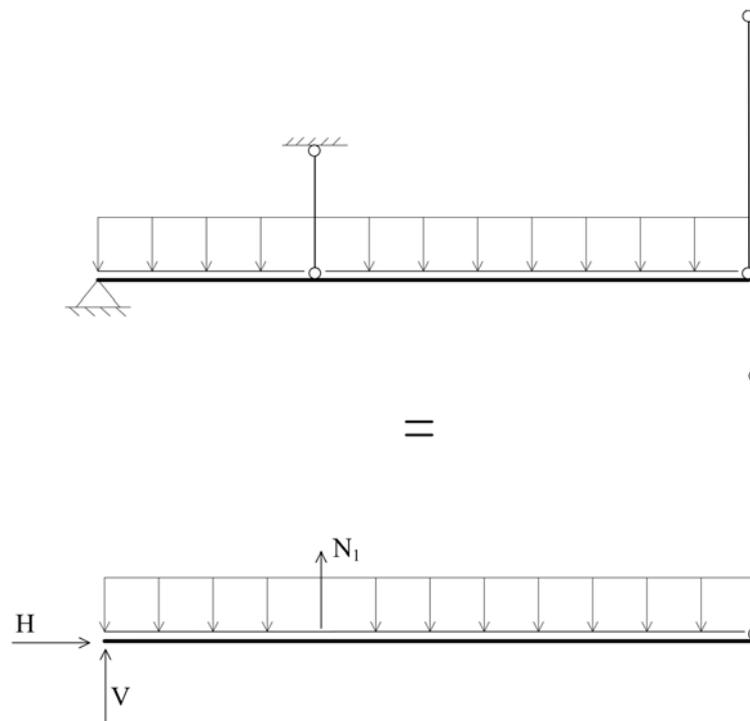


Figura 14.18 Estrutura considerada no problema 0.

Impondo as condições de equilíbrio de corpo rígido à estrutura apresentada na Fig. (14.18) obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 && \Rightarrow H = 0 \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow N_1 \cdot 1,0 - 3,0 \cdot 3,0 \cdot 1,5 = 0 && \Rightarrow N_1 = 13,5 \text{ kN} \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow 13,5 + V - 3,0 \cdot 3,0 = 0 && \Rightarrow V = -4,5 \text{ kN}\end{aligned}$$

Com base no valor obtido para  $N_1$ , pode-se determinar o deslocamento axial da barra vertical de comprimento igual a 1,0m. Aplicando a Eq.(14.3) tem-se:

$$\delta_1^0 = \frac{N_1 L}{EA} \Rightarrow \delta_1^0 = \frac{13,5 \cdot 1}{EA} \Rightarrow \delta_1^0 = \frac{13,5}{EA}$$

A partir do deslocamento calculado acima, pode-se determinar o valor do deslocamento observado no ponto onde a vinculação hiperestática foi retirada. Sabendo que a barra horizontal é rígida, este deslocamento pode ser determinado utilizando semelhança de triângulos, como apresentado na Fig. (14.19).

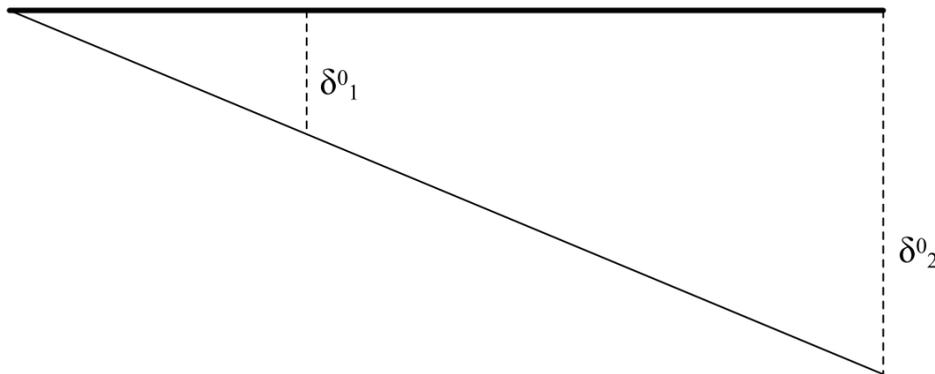


Figura 14.19 Deslocamento ponto B problema 0.

Assim:

$$1m \rightarrow \delta_1^0$$

$$3m \rightarrow \delta_2^0$$

$$\delta_2^0 = 3\delta_1^0 \Rightarrow \delta_2^0 = 3 \cdot \frac{13,5}{EA} \Rightarrow \delta_2^0 = \frac{40,5}{EA}$$

Assim, pode-se escrever que:

$$\delta_2^0 = \delta_B^0 = \frac{40,5}{EA}$$

*Problema 1*

O problema 1 envolve a aplicação da reação hiperestática desprezada no problema 0 sobre a estrutura isostática equivalente. Assim, nesse problema, a estrutura a ser considerada é a apresentada na Fig. (14.20).

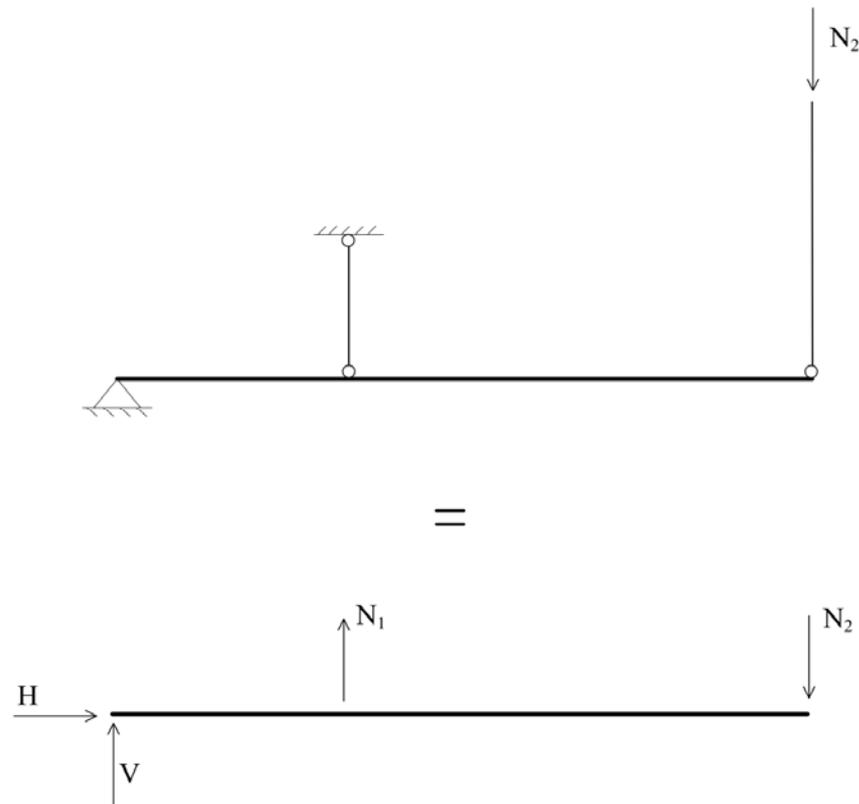


Figura 14.20 Estrutura considerada no problema 1.

Com base no diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (14.20) pode-se efetuar o equilíbrio de corpo rígido, o qual conduzirá a determinação das reações incógnitas. Assim:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow H = 0 \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow N_1 \cdot 1,0 - N_2 \cdot 3,0 = 0 \Rightarrow N_1 = 3,0N_2 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow N_1 + V - N_2 = 0 \Rightarrow V = -2,0N_2 \end{aligned}$$

O deslocamento do ponto onde a vinculação hiperestática foi retirada pode ser obtido somando-se o deslocamento do ponto B, apresentado na Fig. (14.17), pertencente à barra rígida ao deslocamento axial da barra vertical conectada ao ponto B. O deslocamento observado na barra simples de comprimento igual a 1,0m pode ser determinado com base na Eq.(14.3). Assim, nessa barra o deslocamento é igual a:

$$\delta_1^1 = \frac{3N_2 \cdot 1}{EA} \Rightarrow \delta_1^1 = \frac{3N_2}{EA}$$

Já o deslocamento do ponto B pode ser determinado considerando o fato de que a barra horizontal é rígida. Assim, nesse ponto, o deslocamento é calculado utilizando-se a semelhança dos triângulos mostrada na Fig. (14.21).

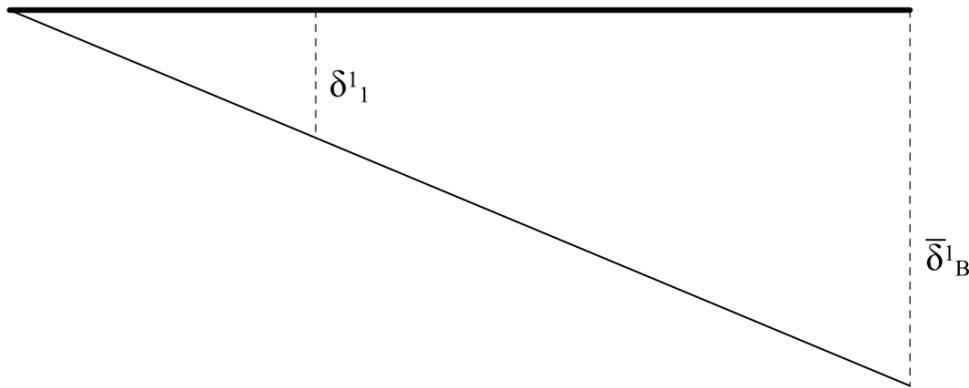


Figura 14.21 Deslocamento ponto B problema 1.

$$1m \rightarrow \delta_1^1$$

$$3m \rightarrow \delta_B^1$$

$$\delta_B^1 = 3\delta_1^1 \Rightarrow \delta_B^1 = 3 \cdot \frac{3N_2}{EA} \Rightarrow \delta_B^1 = \frac{9N_2}{EA}$$

Devido à atuação do esforço  $N_2$ , a barra vertical de comprimento igual a 3,0 m tem seu comprimento encurtado, uma vez que este esforço foi arbitrado como compressivo. Assim, este encurtamento é dado por:

$$\delta_{BB}^- = \frac{-N_2 \cdot 3}{3EA} \Rightarrow \delta_{BB}^- = \frac{-N_2}{EA}$$

Consequentemente, o deslocamento do ponto onde a vinculação hiperestática foi retirada pode ser determinado, para o problema 1, somando-se, em módulo, os valores de  $\delta_B^1$  e  $\delta_{BB}^-$ , já que ambos os deslocamentos estão orientados no mesmo sentido (vertical para baixo). Assim:

$$\delta_B^1 = \left| \delta_B^1 \right| + \left| \delta_{BB}^- \right| \Rightarrow \delta_B^1 = \frac{9N_2}{EA} + \frac{N_2}{EA} \Rightarrow \delta_B^1 = \frac{10N_2}{EA}$$

Sabendo que no ponto onde o deslocamento foi calculado, para os problemas 0 e 1, existe um apoio onde o deslocamento é nulo, pode-se escrever a seguinte condição de compatibilidade:

$$\delta_B^0 + \delta_B^1 = 0$$

Portanto:

$$\frac{40,5}{EA} + \frac{10N_2}{EA} = 0 \Rightarrow N_2 = -4,05 \text{ kN}$$

Com base no resultado obtido acima, verifica-se que o sentido arbitrado para o esforço  $N_2$  no problema 1 está incorreto. Seu sentido correto é trativo e não compressivo como assumido inicialmente.

Com base no valor de  $N_2$  determinado anteriormente, pode-se calcular o valor do esforço normal atuante sobre o outro elemento de barra simples presente na estrutura. Para tal fim, deve-se efetuar o equilíbrio de corpo rígido do sistema mostrado na Fig. (14.22). Assim:

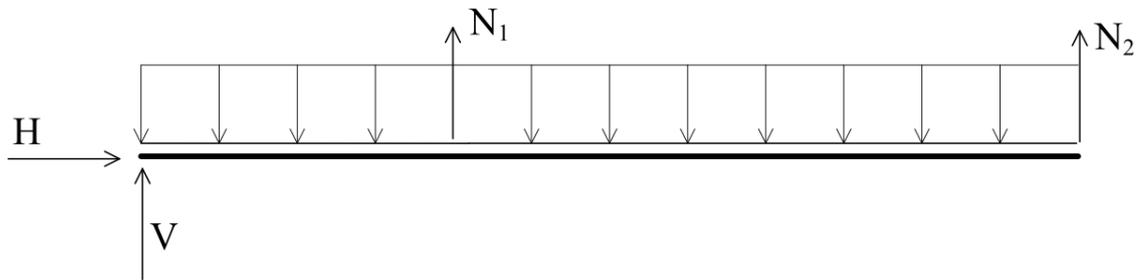


Figura 14.22 Equilíbrio de corpo rígido.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N_1 \cdot 1,0 - 3,0 \cdot 3,0 \cdot 1,5 + 4,05 \cdot 3,0 = 0 \Rightarrow N_1 = 1,35 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1,35 + V - 3,0 \cdot 3,0 + 4,05 = 0 \Rightarrow V = 3,6 \text{ kN}$$

Assim, as tensões normais médias nos elementos de barra simples são dadas por:

$$\sigma_{m1} = \frac{N_1}{A} \Rightarrow \sigma_{m1} = \frac{1,35}{1,0} \Rightarrow \sigma_{m1} = 1,35 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{m2} = \frac{N_2}{A} \Rightarrow \sigma_{m2} = \frac{4,05}{1,0} \Rightarrow \sigma_{m2} = 4,05 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

14.8 – Exemplo 6

Neste exemplo objetiva-se a determinação dos valores dos esforços solicitantes normais atuantes ao longo dos elementos de barra simples verticalmente posicionados para suportarem uma barra horizontal rígida, como mostra a Fig.(14.23). Esta estrutura é duplamente hiperestática e deve ser analisada considerando o princípio da superposição dos efeitos.

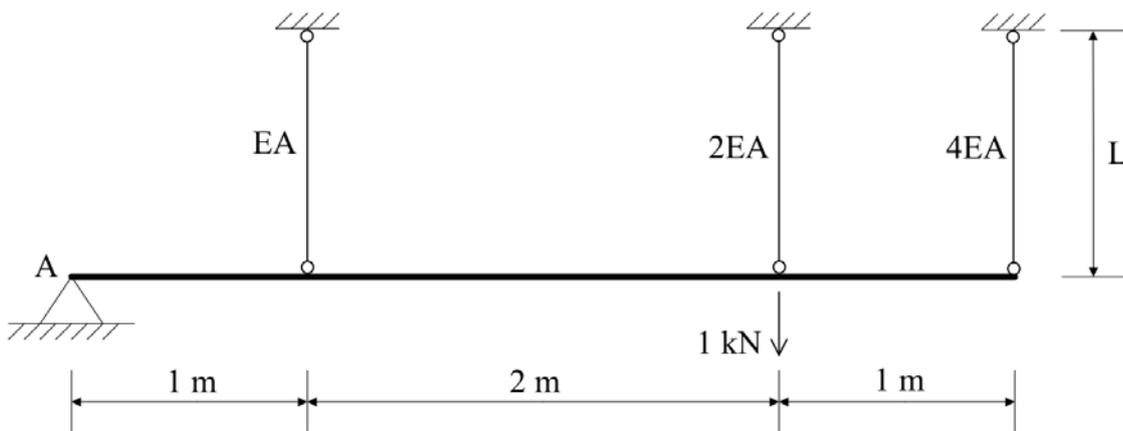


Figura 14.23 Estrutura a ser analisada.

*Problema 0*

O problema 0 é composto pela estrutura isostática equivalente e por todos os carregamentos externos aplicados. Para a estrutura em questão, este problema é composto pelo sistema apresentado na Fig. (14.24).

Efetuando o equilíbrio de corpo rígido do sistema apresentado na Fig. (14.24) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow H = 0 \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow N_1 \cdot 1,0 - 1,0 \cdot 3,0 = 0 \Rightarrow N_1 = 3,0 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow 3,0 + V - 1,0 = 0 \Rightarrow V = -2,0 \text{ kN} \end{aligned}$$

Os deslocamentos dos pontos onde as vinculações hiperestáticas foram retiradas podem ser determinados, para este problema, através do conhecimento do deslocamento da barra simples onde atua o esforço normal  $N_1$ . Assim, nessa barra, o deslocamento axial é igual a:

$$\delta_N = \frac{3L}{EA}$$

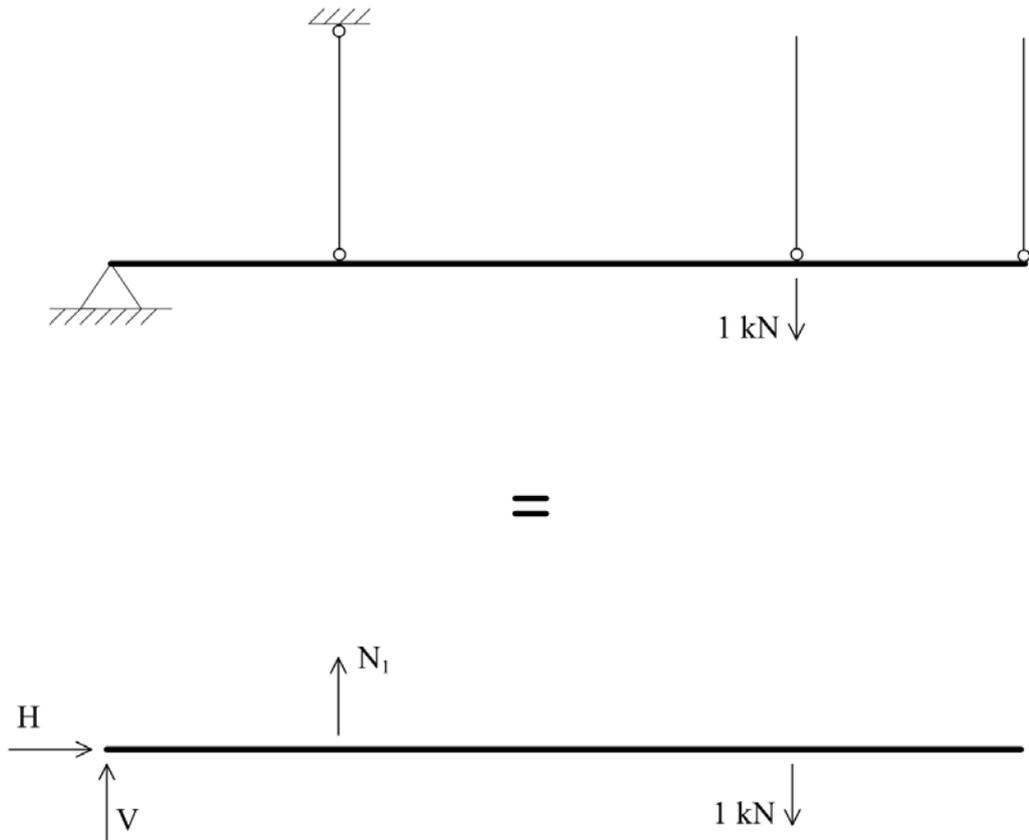


Figura 14.24 Estrutura a ser analisada.

Assim, sabendo que a barra horizontal é rígida, os demais deslocamentos de interesse podem ser obtidos com o auxílio da Fig. (14.25) e com a aplicação da técnica de semelhança de triângulos. Portanto:

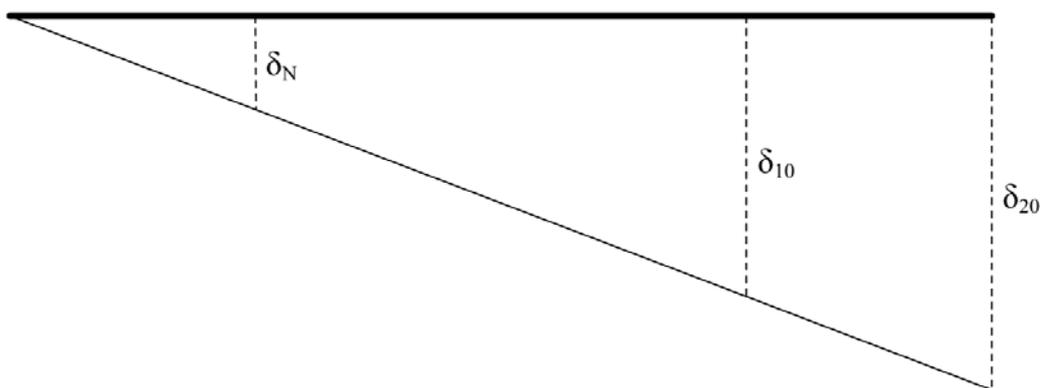


Figura 14.25 Deslocamentos na barra rígida problema 0.

$$\begin{array}{l} \delta_{10} \rightarrow 3 \\ \delta_N \rightarrow 1 \end{array} \Rightarrow \delta_{10} = 3\delta_N \Rightarrow \delta_{10} = \frac{9L}{EA}$$

$$\begin{aligned} \delta_{20} \rightarrow 4 \\ \delta_N \rightarrow 1 \end{aligned} \Rightarrow \delta_{20} = 4\delta_N \Rightarrow \delta_{20} = \frac{12L}{EA}$$

### Problema 1

No problema 1, deve-se calcular os deslocamentos nos pontos onde as vinculações hiperestáticas foram retiradas, considerando a estrutura isostática equivalente e a aplicação de uma das reações hiperestáticas removidas. Para o problema 1, o sistema considerado está apresentado na Fig. (14.26).

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao sistema estrutura/carregamentos mostrado na Fig. (14.26) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow H = 0 \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow N_1 \cdot 1,0 - N_2 \cdot 3,0 = 0 \Rightarrow N_1 = 3N_2 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow N_1 + V - N_2 = 0 \Rightarrow V = -2N_2 \end{aligned}$$

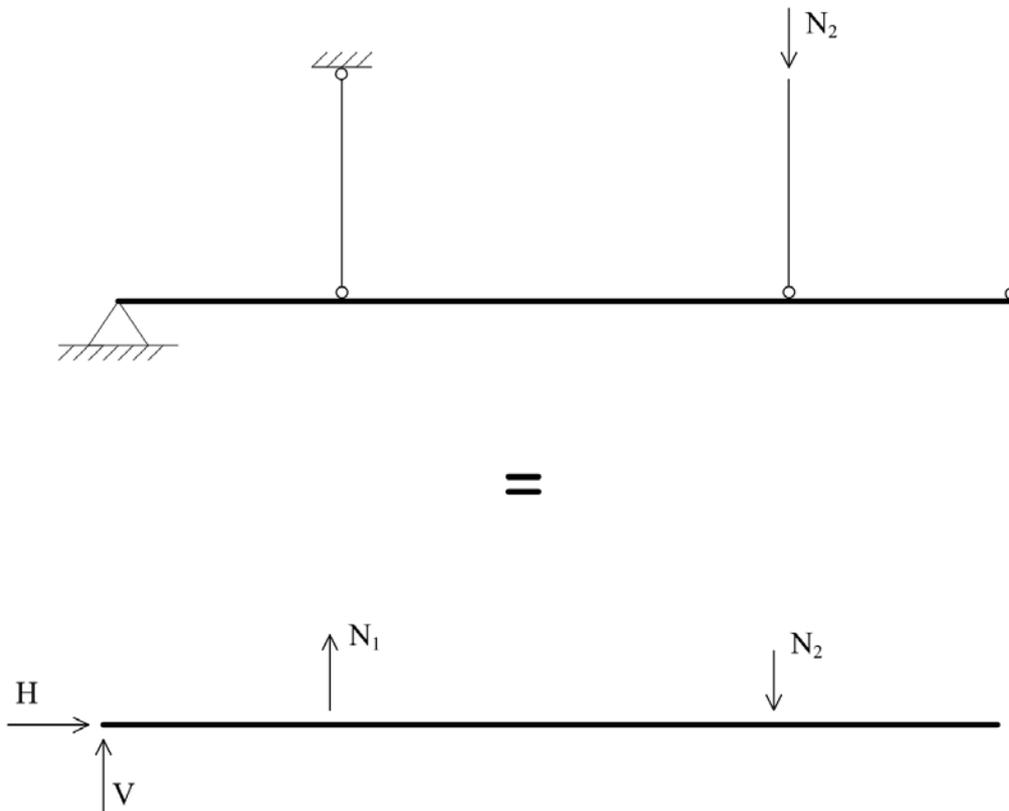


Figura 14.26 Estrutura considerada no problema 1.

Assim, o deslocamento axial observado na barra onde atua o esforço normal  $N_1$ , é dado por:

$$\delta_{N_1} = \frac{3N_2L}{EA}$$

O deslocamento da extremidade da barra onde atua o esforço normal  $N_2$  pode ser determinado somando-se o deslocamento da barra rígida, no ponto de conexão desta com a referida barra simples, ao encurtamento da barra simples devido à ação de  $N_2$ . O deslocamento dos pontos da barra rígida pode ser determinado em função do deslocamento  $\delta_{N_1}$ , como mostra a Fig. (14.27).

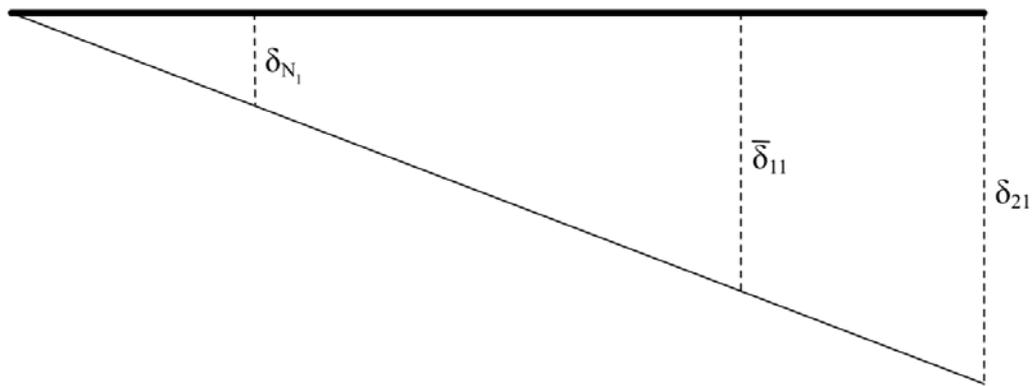


Figura 14.27 Deslocamentos na barra rígida problema 1.

Aplicando a técnica de semelhança de triângulos aos elementos apresentados na Fig. (14.27) tem-se:

$$\begin{array}{l} \bar{\delta}_{11} \rightarrow 3 \\ \delta_{N_1} \rightarrow 1 \end{array} \Rightarrow \bar{\delta}_{11} = 3\delta_{N_1} \Rightarrow \bar{\delta}_{11} = \frac{9N_2L}{EA}$$

Se adicionarmos ao termo de deslocamento calculado acima o deslocamento axial da barra simples devido à ação de  $N_2$ , obtém-se:

$$\delta_{11} = \bar{\delta}_{11} + \frac{N_2L}{2EA} \Rightarrow \delta_{11} = \frac{9N_2L}{EA} + \frac{N_2L}{2EA} \Rightarrow \delta_{11} = \frac{19N_2L}{2EA}$$

Finalmente, pode-se calcular o deslocamento do ponto sobre o vínculo hiperestático removido do elemento de barra simples posicionado no extremo direito da estrutura. Para esse ponto, como o esforço normal atuante na barra simples que o contém é nulo, o deslocamento da barra rígida, na conexão com a referida barra simples, é também o deslocamento desejado. Assim, utilizando o apresentado na Fig. (14.27) obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta_{21} &\rightarrow 4 \\ \delta_{N_1} &\rightarrow 1 \end{aligned} \Rightarrow \delta_{21} = 4\delta_{N_1} \Rightarrow \delta_{21} = \frac{12N_2L}{EA}$$

*Problema 2*

No problema 2, a estrutura a ser resolvida é a apresentada na Fig. (14.28). Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido a este sistema obtêm-se:

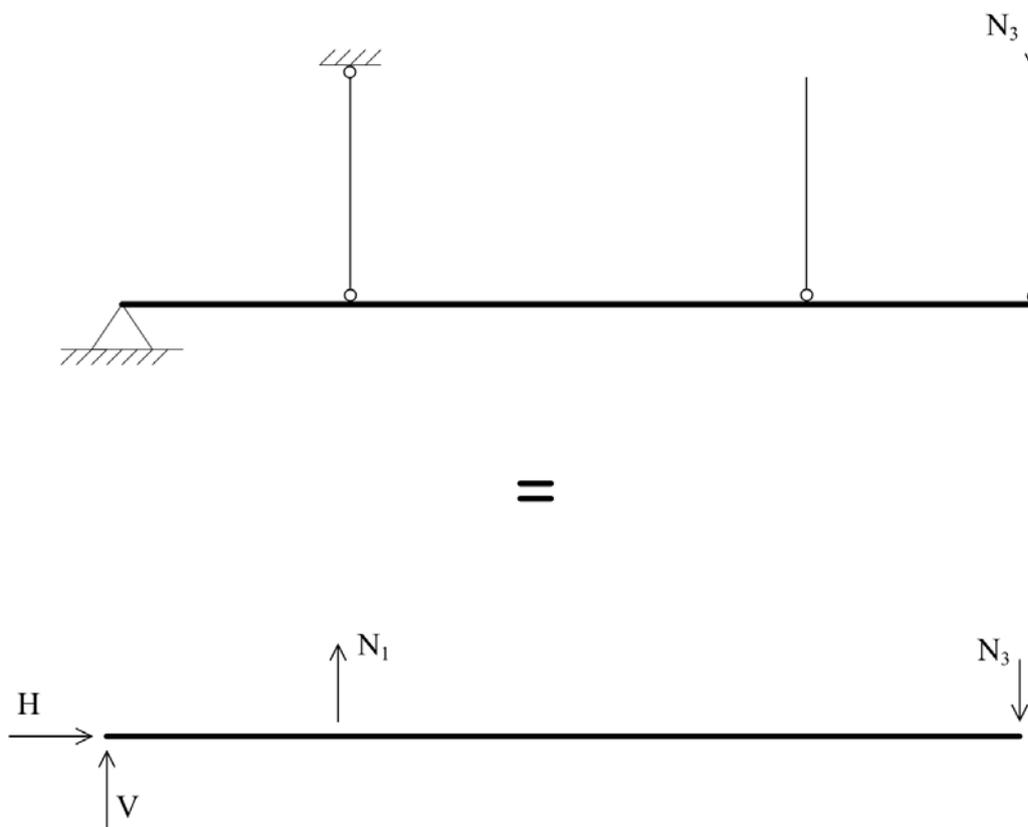


Figura 14.28 Estrutura considerada no problema 2.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow H = 0 \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow N_1 \cdot 1,0 - N_3 \cdot 4,0 = 0 \Rightarrow N_1 = 4N_3 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow N_1 + V - N_3 = 0 \Rightarrow V = -3N_3 \end{aligned}$$

Assim, pode-se determinar o deslocamento axial da barra onde atua o esforço normal  $N_1$ . Aplicando a Eq.(14.3) obtêm-se:

$$\delta_{N_1} = \frac{4N_3L}{EA}$$

Os deslocamentos nos pontos onde os apoios hiperestáticos foram removidos podem ser determinados de forma semelhante ao efetuado no problema 1. Assim, para a

barra simples central, este deslocamento pode ser determinado com base no deslocamento da barra rígida, como mostra a Fig. (14.29). Portanto:

$$\begin{aligned} \delta_{12} &\rightarrow 3 \\ \delta_{N_1} &\rightarrow 1 \end{aligned} \Rightarrow \delta_{12} = 3\delta_{N_1} \Rightarrow \delta_{12} = \frac{12N_3L}{EA}$$

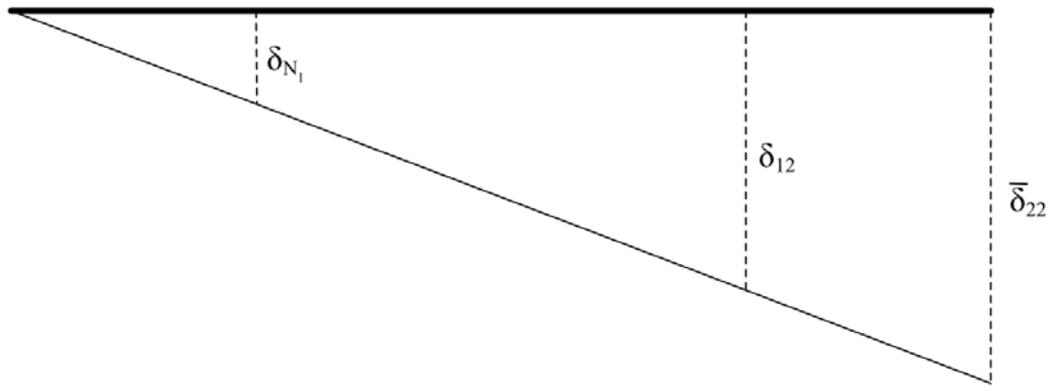


Figura 14.29 Deslocamentos na barra rígida problema 2.

Já o deslocamento do ponto localizado sobre o apoio hiperestático da barra simples da extremidade direita da estrutura deve ser calculado considerando o deslocamento da barra rígida e o deslocamento da barra simples, a qual encurta-se em decorrência da ação de  $N_3$ . Assim:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{22} &\rightarrow 4 \\ \delta_{N_1} &\rightarrow 1 \end{aligned} \Rightarrow \bar{\delta}_{22} = 4\delta_{N_1} \Rightarrow \bar{\delta}_{22} = \frac{16N_3L}{EA}$$

$$\delta_{22} = \bar{\delta}_{22} + \frac{N_3L}{4EA} \Rightarrow \delta_{22} = \frac{16N_3L}{EA} + \frac{N_3L}{4EA} \Rightarrow \delta_{22} = \frac{65N_3L}{4EA}$$

De posse dos deslocamentos calculados nos problemas 0, 1 e 2 nos pontos onde as vinculações hiperestáticas foram retiradas, pode-se escrever as seguintes equações de compatibilidade:

$$\delta_{10} + \delta_{11} + \delta_{12} = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} + \delta_{22} = 0$$

Substituindo os termos respectivos tem-se:

$$\frac{9L}{EA} + \frac{19N_2L}{2EA} + \frac{12N_3L}{EA} = 0$$

$$\frac{12L}{EA} + \frac{12N_2L}{EA} + \frac{65N_3L}{4EA} = 0$$

Escrevendo as duas equações acima em um sistema matricial obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} 19/2 & 12 \\ 12 & 65/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ -12 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema acima, determinam-se os esforços normais nas barras consideradas, as quais são iguais a:

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,216 \\ -0,578 \end{Bmatrix} kN$$

O sinal negativo obtido na resposta de  $N_2$  e  $N_3$  indica que o sentido arbitrado na resolução dos problemas 1 e 2 não estão corretos. Assim, nas barras analisadas, os esforços são trativos e não compressivos.

Para a determinação do esforço normal na barra simples localizada a esquerda da estrutura, pode-se utilizar o seguinte diagrama de corpo livre:

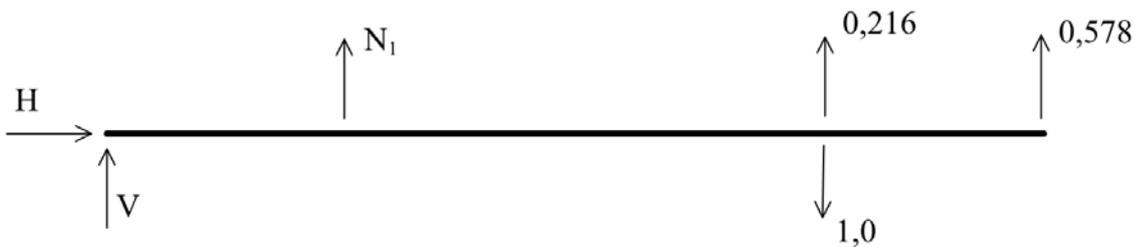


Figura 14.30 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao sistema mostrado na Fig. (14.30) têm-se:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow H = 0 \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow N_1 \cdot 1,0 + 0,216 \cdot 3 + 0,578 \cdot 4 - 1,0 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_1 = 0,04 kN \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow 0,04 + 0,216 + 0,578 - 1,0 + V = 0 \Rightarrow V = 0,166 kN \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a barra simples que possui o maior esforço solicitante normal é a posicionada no extremo direito da estrutura. O autor deixa uma pergunta, a qual deve ser refletida pelo leitor: existe alguma relação entre o fato desta barra possuir a maior relação EA e o maior esforço normal?

14.9 – Exemplo 7

Determine as reações de apoio da estrutura apresentada na Fig. (14.31). Trata-se de uma estrutura contendo duas barras inclinadas e uma vertical sendo solicitada por uma força vertical de intensidade igual a 10 kN. Todas as barras possuem módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E = 200 \text{ GPa}$  e área de seção transversal igual a  $A = 10 \text{ cm}^2$ . Esta estrutura é hiperestática e deve ser analisada utilizando o princípio da superposição de efeitos.

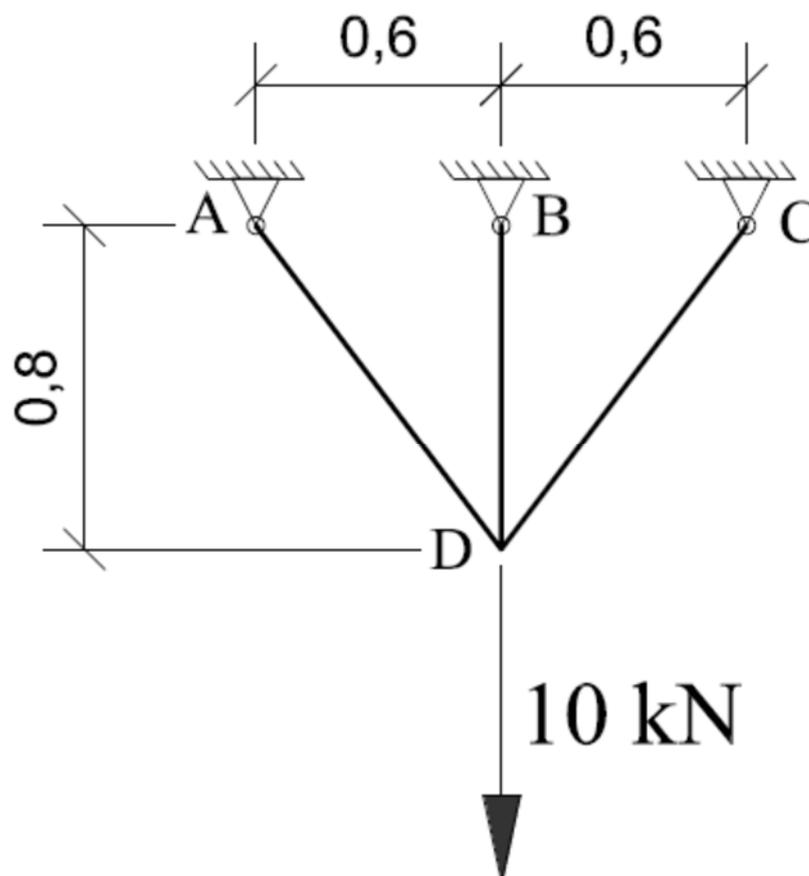


Figura 14.31 Estrutura a ser analisada. Dimensões em metro.

As reações de apoio neste exemplo serão determinadas utilizando o princípio da superposição dos efeitos. Esta estrutura apresenta uma única reação de apoio hiperestática. Isso se deve ao fato da resultante das reações dos apoios A e C estar orientada ao longo das barras AD e CD, respectivamente. Portanto, basta que a remoção de um apoio seja efetuada para torná-la isostática equivalente. Neste exemplo, será removida a vinculação atuante sobre o nó B, a qual dá origem a uma reação de apoio

vertical, sendo que os problemas 0 e 1 deverão ser resolvidos. Em cada um destes problemas, deve-se determinar o deslocamento vertical do nó B para que em seguida seja imposta a condição de compatibilidade.

### Problema 0

O problema 0 é composto pela estrutura isostática equivalente e pelo carregamento externo atuante. Para a estrutura em análise, o sistema estrutural a ser considerado é o apresentado na Fig. (14.32), sendo que nessa mesma figura é apresentado seu diagrama de corpo livre.

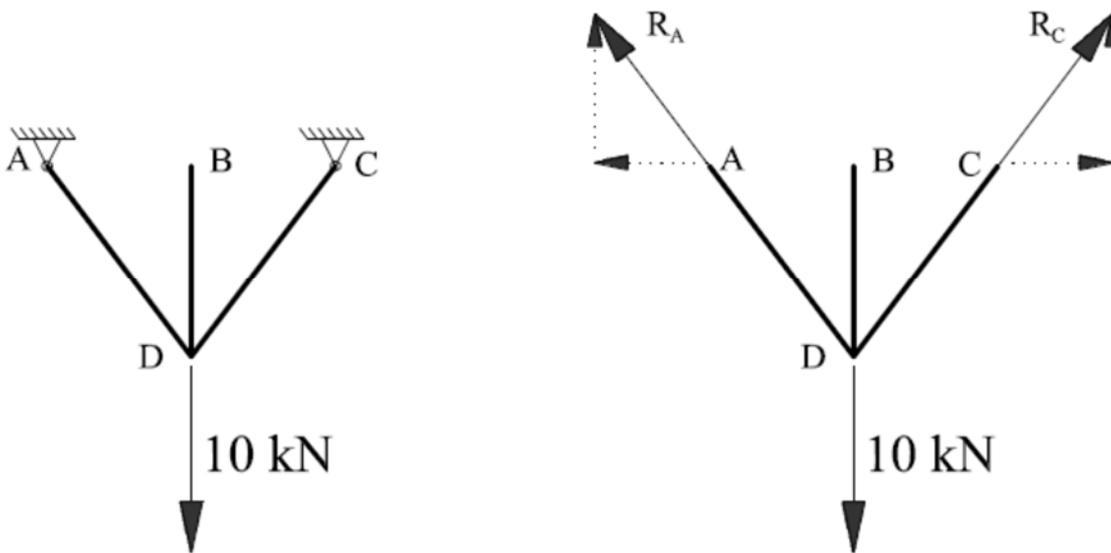


Figura 14.32 Estrutura considerada no problema 0 e seu diagrama de corpo livre.

Efetuada o equilíbrio de corpo rígido do sistema apresentado na Fig. (14.32) obtêm-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -R_A \frac{0,6}{1,0} + R_C \frac{0,6}{1,0} = 0 \Rightarrow R_A = R_C$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \frac{0,8}{1,0} + R_C \frac{0,8}{1,0} - 10 = 0 \Rightarrow R_A = R_C = 6,25 \text{ kN}$$

Os alongamentos nas barras AD e CD podem ser calculados utilizando a Eq.(14.3). Os esforços normais nestas barras são iguais, assim como a área da seção transversal, o material e o comprimento. Portanto os alongamentos nestas barras serão iguais. Dessa forma:

$$\delta_{AD} = \delta_{CD} = \frac{6,25 \cdot 1,0}{200 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \delta_{AD} = \delta_{CD} = 3,125 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Deve-se enfatizar que os alongamentos das barras AD e CD são orientados ao longo de seus eixos. Portanto, para que o deslocamento vertical do nó B seja determinado, deslocamento alvo do problema 0, deve-se decompor o deslocamento das barras inclinadas em relação a direção vertical. Para auxiliar nesta tarefa, serão utilizadas as ilustrações apresentadas na Fig. (14.33).

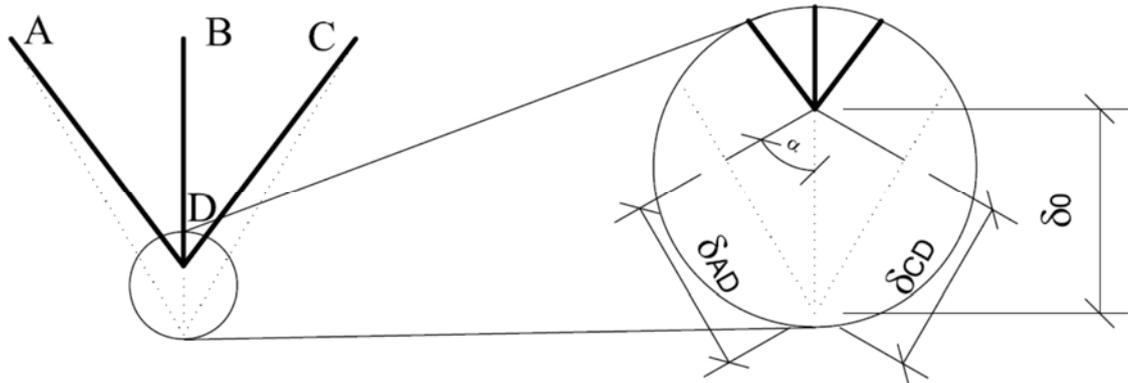


Figura 14.33 Decomposição dos alongamentos na direção vertical.

Lembrando que é válida a hipótese de pequenos deslocamentos, constata-se que as configurações estruturais deslocada e indeslocada são praticamente as mesmas. Nesse sentido, utilizando geometria básica verifica-se que  $\text{sen}(\alpha) = \frac{0,8}{1,0} \Rightarrow \text{sen}(\alpha) = 0,8$ .

Assim, o deslocamento  $\delta_0$  assume o seguinte valor:

$$\delta_0 = \frac{\delta_{AD}}{\text{sen}(\alpha)} \Rightarrow \delta_0 = \frac{3,125 \cdot 10^{-5}}{0,8} \Rightarrow \delta_0 = 3,9063 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Deve-se enfatizar que o esforço normal na barra BD é nulo. Portanto, o deslocamento vertical do nó D,  $\delta_0$ , é igual ao deslocamento do nó B e, portanto, igual ao deslocamento alvo do problema 0.

### Problema 1

No problema 1, deve-se determinar o deslocamento vertical do nó B considerando como ação externa aplicada a reação da vinculação removida para transformar a estrutura hiperestática em uma isostática equivalente. Para o problema 1, o sistema estrutural considerado está apresentado na Fig. (14.34). Nesta mesma figura é apresentado seu diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao sistema estrutura/carregamentos mostrado na Fig. (14.34) obtêm-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -R_A \frac{0,6}{1,0} + R_C \frac{0,6}{1,0} = 0 \Rightarrow R_A = R_C$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \frac{0,8}{1,0} + R_C \frac{0,8}{1,0} - R_B = 0 \Rightarrow R_A = R_C = 0,625R_B$$

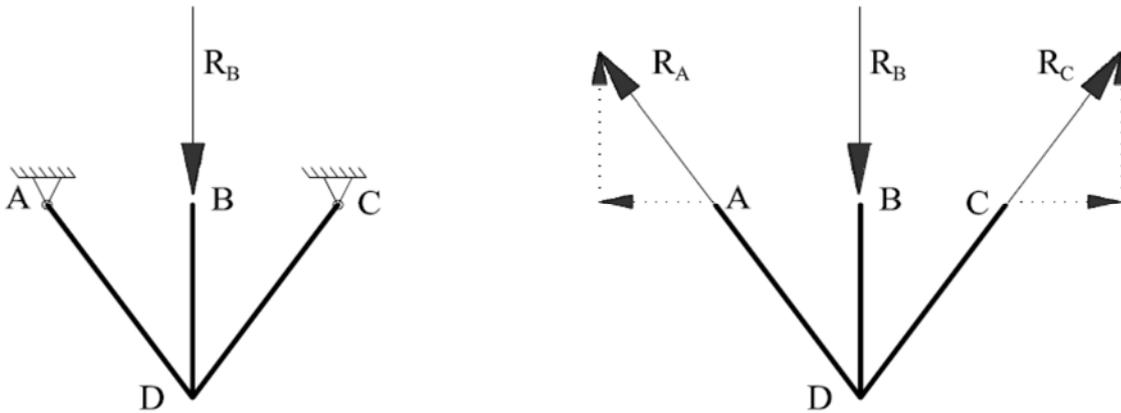


Figura 14.34 Estrutura considerada no problema 1 e seu diagrama de corpo livre.

Os alongamentos nas barras AD e CD serão iguais devido a igualdade entre seus comprimentos, área de seção transversal, material e intensidade do esforço normal atuante. Portanto, nestas barras o alongamento pode ser determinado por meio da Eq.(14.3), sendo igual a :

$$\delta_{AD} = \delta_{CD} = \frac{0,625R_B \cdot 1,0}{200 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \delta_{AD} = \delta_{CD} = 3,125 \cdot 10^{-6} R_B$$

O alongamento determinado anteriormente refere-se à direção paralela ao eixo das barras AD e CD. Assim, este alongamento deve ser decomposto e sua componente vertical deve ser determinada, a qual irá se referir ao deslocamento vertical do nó D.

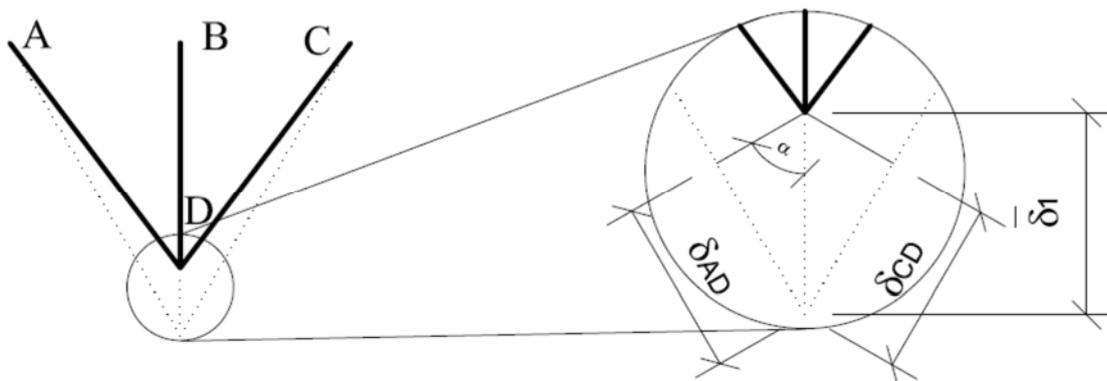


Figura 14.35 Decomposição dos alongamentos na direção vertical.

Com o auxílio das ilustrações apresentadas na Fig. (14.35) pode-se decompor este alongamento da seguinte forma:

$$\bar{\delta}_1 = \frac{\delta_{AD}}{\text{sen}(\alpha)} \Rightarrow \bar{\delta}_1 = \frac{3,125 \cdot 10^{-6} R_B}{0,8} \Rightarrow \bar{\delta}_1 = 3,9063 \cdot 10^{-6} R_B$$

Constata-se que a barra BD possui esforço normal não nulo. Isso provocará, para o sentido assumido de  $R_B$ , um encurtamento da barra BD. Dessa forma, ao deslocamento  $\bar{\delta}_1$  (deslocamento vertical do nó D), deve-se adicionar o encurtamento da barra BD para que o deslocamento do problema 1 seja determinado. Assim, o deslocamento do nó B, para o problema 1, é o seguinte:

$$\delta_1 = \bar{\delta}_1 + \frac{R_B L}{EA} \Rightarrow \delta_1 = 3,9063 \cdot 10^{-6} R_B + \frac{R_B \cdot 0,8}{200 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow$$

$$\delta_1 = 7,9063 \cdot 10^{-6} R_B$$

Como os deslocamentos alvos dos problemas 0 e 1 foram determinados, pode-se agora impor a condição de compatibilidade do problema. Dessa forma:

$$\delta_0 + \delta_1 = 0 \Rightarrow 3,9063 \cdot 10^{-5} + 7,9063 \cdot 10^{-6} R_B = 0 \Rightarrow R_B = -4,9408 \text{ kN}$$

O valor da reação  $R_B$  resultou negativo, conforme determinado anteriormente. Isso indica apenas que o sentido assumido para esta reação no problema 1 não é o verdadeiro. O sentido correto é contrário ao assumido no problema 1. Com base nesta resposta, pode-se reconstruir o diagrama de corpo livre da estrutura considerando o valor correto de  $R_B$ , como mostra a Fig. (14.36).

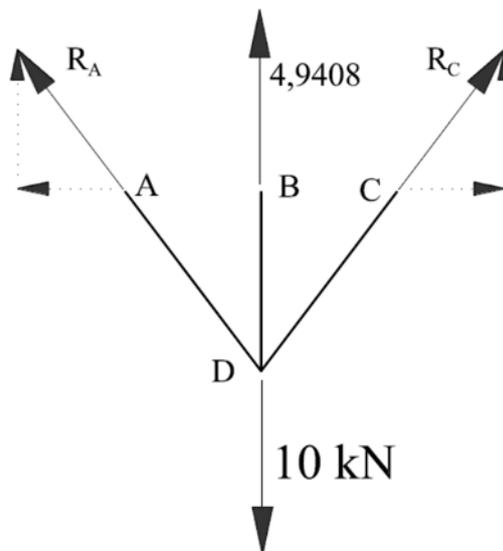


Figura 14.36 Diagrama de corpo livre da estrutura com  $R_B$ .

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido às ações apresentadas na Fig. (14.36) obtêm-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -R_A \frac{0,6}{1,0} + R_C \frac{0,6}{1,0} = 0 \Rightarrow R_A = R_C$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \frac{0,8}{1,0} + R_C \frac{0,8}{1,0} + 4,9408 - 10 = 0 \Rightarrow R_A = R_C = 3,162 \text{ kN}$$

### 14.10 – Efeitos de Temperatura

As dimensões dos corpos dependem da temperatura na qual estas são mensuradas. Sabe-se que as variações de temperatura causam mudanças nas dimensões dos corpos, sendo que, com exceção da água, aumentos de temperatura causam dilatação e diminuições de temperatura provocam contração nos corpos. Se o comprimento do elemento apresenta variação, deformações e conseqüentemente tensões associadas ao efeito térmico estarão presentes.

Para o caso de uma barra composta por um material homogêneo e isótropo, exposta a um dado gradiente de temperatura, o acréscimo (ou redução) no comprimento desta pode ser determinado avaliando-se a equação apresentada na Eq.(14.8):

$$\delta_T = \int_0^L \alpha \Delta T(x) dx \quad (14.8)$$

sendo:  $\Delta T$  a variação de temperatura no ponto considerado,  $L$  o comprimento do elemento analisado,  $\alpha$  é denominado coeficiente linear de expansão térmica, o qual é uma propriedade do material. Finalmente,  $\delta_T$  é o valor da variação do comprimento da barra devido ao efeito da temperatura.

Deve-se destacar que se a temperatura aplicada for uniforme ao longo de todo o elemento, a integral apresentada na Eq.(14.8) torna-se uma somatória. Nessa situação tem-se:

$$\delta_T = \sum_{n=1} \delta_i = \sum_{n=1} \alpha_i \cdot \Delta T_i \cdot L_i \quad (14.9)$$

Deve-se também ressaltar que em estruturas isostáticas, as ações térmicas não provocam esforços na estrutura, apenas variação em seu comprimento. Porém, quando estruturas hiperestáticas são consideradas, as ações térmicas provocam esforços que não podem ser desprezados. Na Fig. (14.37) são apresentadas duas falhas em estruturas de

trilhos de trem causadas por efeitos de temperatura. Devido à magnitude das consequências da falha observada, percebe-se que os efeitos de temperatura não devem ser desprezados, especialmente nos dias atuais onde as mudanças climáticas e o aumento na amplitude da variação das temperaturas sazonais estão cada vez mais acentuados.

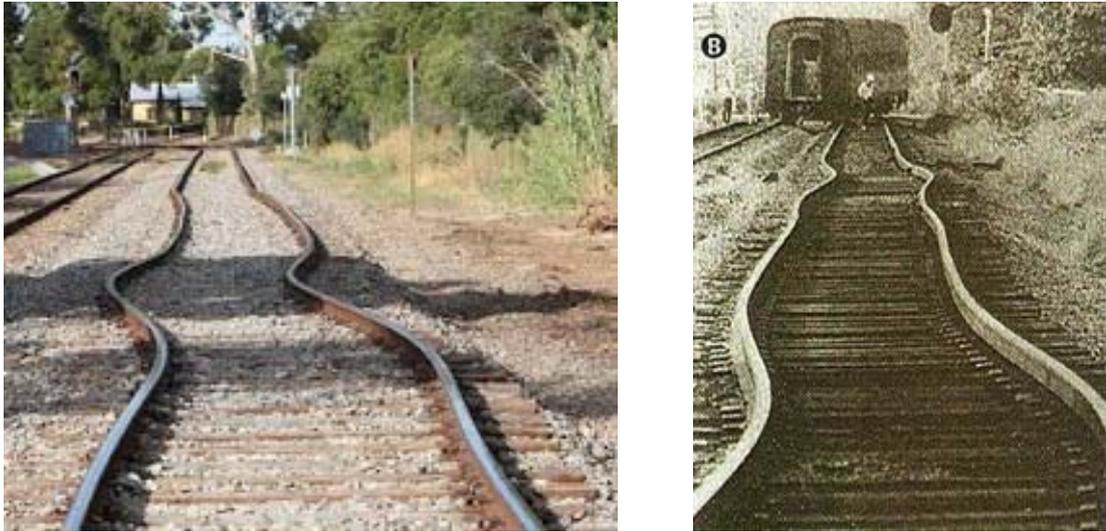


Figura 14.37 Efeito de temperatura em trilhos de trem. Falhas e consequências.

### 14.11 – Exemplo 8

Neste exemplo será analisada uma estrutura submetida a uma variação de temperatura positiva igual a  $\Delta T = 60^\circ$ . Trata-se da coluna mostrada na Fig. (14.38), a qual possui seção transversal quadrada, sendo engastada em seus extremos. Sabendo que o material apresenta coeficiente linear de expansão térmica igual a  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{C^\circ}$  e módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E = 200 \text{ GPa}$ , determine a tensão normal média atuante na coluna em decorrência desta ação térmica.

Sabendo que a variação de temperatura é positiva, a ação térmica atuará no sentido de expandir as dimensões do corpo. Considerando as condições de vinculação presentes, o diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (14.39) pode ser construído.

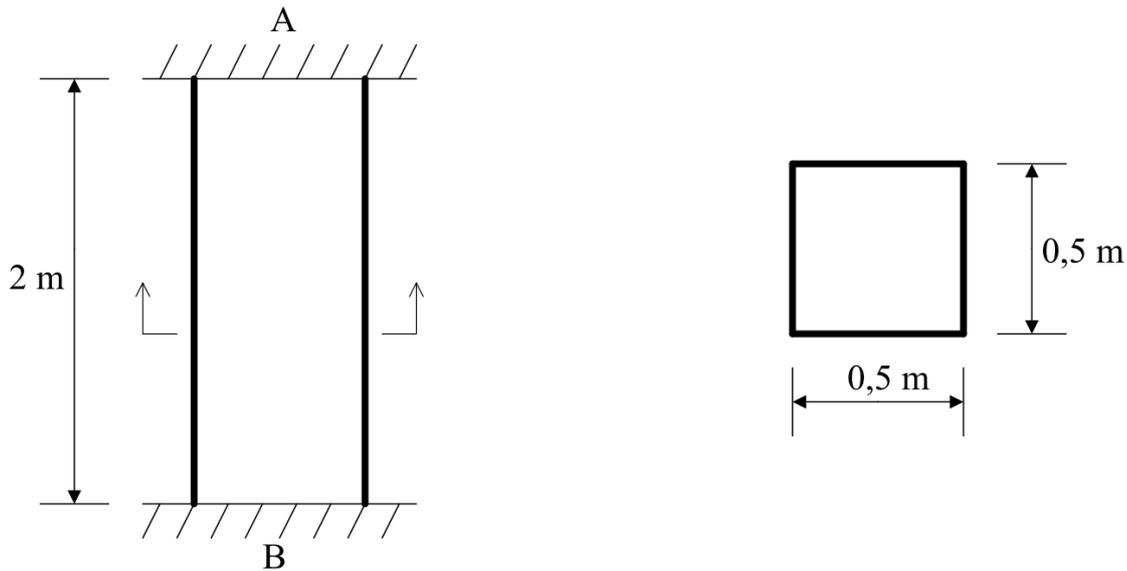


Figura 14.38 Estrutura a ser analisada.

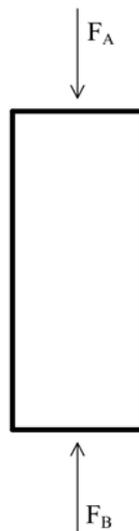


Figura 14.39 Diagrama de corpo livre.

Efetuada o equilíbrio de corpo rígido do elemento apresentado na Fig. (14.39) obtém-se:

$$F_A - F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = F_B = F$$

Como ambas as extremidades estão vinculadas, a seguinte condição de compatibilidade pode ser proposta:

$$\delta_A^{\text{termico}} = \delta_A^{\text{forca}}$$

Portanto, utilizando os resultados apresentados nas Eq.(14.3) e Eq.(14.9) obtém-se:

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot L = \frac{FL}{EA} \Rightarrow F = \alpha \cdot \Delta T \cdot EA$$

$$F = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,5^2 \Rightarrow F = 36000 \text{ kN}$$

Assim, a tensão normal média atuante na barra é dada por:

$$\sigma = \frac{-36000}{0,5^2} \Rightarrow \sigma = -144000 \text{ kN/m}^2$$

A tensão obtida é compressiva, pelo fato da força  $F$  considerada na Fig.(14.39) ser de compressão.

### 14.12 – Exemplo 9

Será analisada, neste item, a estrutura mostrada na Fig. (14.40). Trata-se de uma estrutura formada por três colunas, as quais são compostas por dois materiais diferentes, onde, em seu topo, tem-se uma barra rígida sobre a qual atua um carregamento uniformemente distribuído. Sabendo que as seções transversais das colunas são circulares maciças com diâmetros iguais a  $D_1 = 40 \text{ mm}$  e  $D_2 = 60 \text{ mm}$ , e que as propriedades dos materiais são iguais a  $E_1 = 200 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/\text{C}^\circ$ ,  $E_2 = 70 \text{ GPa}$  e  $\alpha_2 = 23 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/\text{C}^\circ$ , determine as reações de apoio da estrutura quando esta é também submetida a um gradiente uniforme de temperatura de valor igual a  $\Delta T = 60^\circ \text{ C}$ .

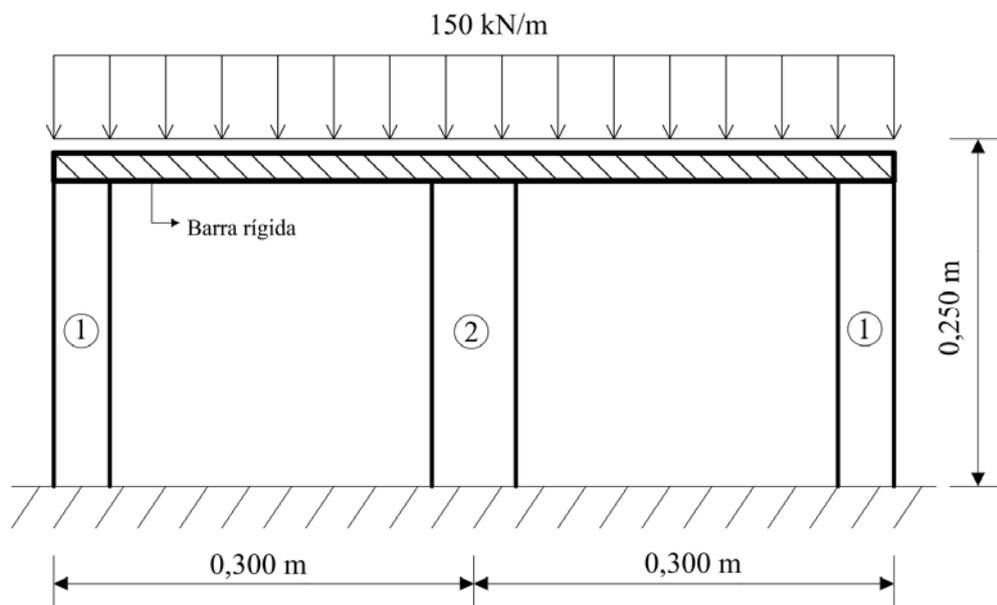


Figura 14.40 Estrutura a ser analisada. Dimensões em m.

Para a solução deste problema, deve-se, inicialmente, relacionar as reações de apoio da estrutura ao carregamento atuante. Isto pode ser facilmente efetuado com o auxílio do diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (14.41).

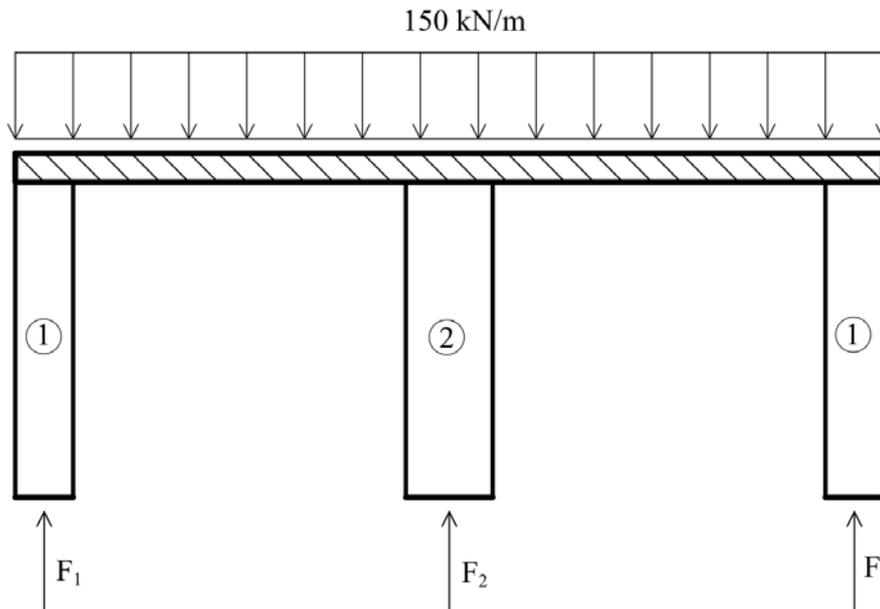


Figura 14.41 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido ao sistema mostrado na Fig. (14.41) têm-se:

$$F_1 + F_1 + F_2 - 150 \cdot 0,600 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F_1 + F_2 = 90 \quad (14.10)$$

Como a barra horizontal presente no topo da estrutura é rígida, a equação de compatibilidade pode ser facilmente escrita considerando que o deslocamento das colunas de material 1 e 2 deve ser o mesmo. Assim, a equação de compatibilidade pode ser assim escrita:

$$\delta_1 = \delta_2$$

Considerando que o deslocamento é provocado por ações mecânicas e térmicas, a condição de compatibilidade pode ser assim reescrita:

$$\delta_1^{\Delta T} + \delta_1^F = \delta_2^{\Delta T} + \delta_2^F$$

Utilizando as Eq.(14.3) e Eq.(14.9), a condição de compatibilidade pode ser assim explicitada:

$$\alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L + \frac{F_1 L}{EA} = \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L + \frac{F_2 L}{EA}$$

Substituindo os valores das propriedades dos materiais têm-se:

$$12 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 0,250 - \frac{F_1 \cdot 0,250}{200 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2} =$$

$$23 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 0,250 - \frac{F_2 \cdot 0,250}{70 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (30 \cdot 10^{-3})^2}$$

A qual resulta a seguinte equação:

$$1,8 \cdot 10^{-4} - F_1 \cdot 9,947 \cdot 10^{-7} = 3,45 \cdot 10^{-4} - F_2 \cdot 1,263 \cdot 10^{-6}$$

$$F_1 = -165,879 + 1,2697 F_2 \quad (14.11)$$

Resolvendo conjuntamente as Eq.(14.10) e Eq.(14.11) obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1,2697 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ -165,879 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -14,58 \\ 119,16 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Assim, com base no resultado mostrado para as reações  $F_1$  e  $F_2$ , verifica-se que as colunas compostas por material 1 estão tracionadas enquanto a coluna central está comprimida.

### 14.13 – Exemplo 10

Determine as reações de apoio horizontais da estrutura biengastada, axialmente solicitada apresentada na Fig. (14.42). Além da força  $F$  de intensidade igual a 10 kN aplicada no ponto B, a estrutura também está sujeita a uma variação de temperatura positiva igual a  $\Delta T = 30^\circ C$ . A estrutura é formada por dois materiais cujas propriedades mecânicas são iguais a  $E_{AB} = 250 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_{AB} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ C$  e  $E_{BC} = 75 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_{BC} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ C$ . A estrutura é formada por barras de seção transversal circular maciça cujos diâmetros são:  $D_{AB} = 50 \text{ mm}$  e  $D_{BC} = 30 \text{ mm}$ .

Este exemplo será resolvido empregando-se o princípio da superposição dos efeitos. Assim, como existe apenas uma reação hiperestática, deverão ser resolvidos os problemas 0 e 1.

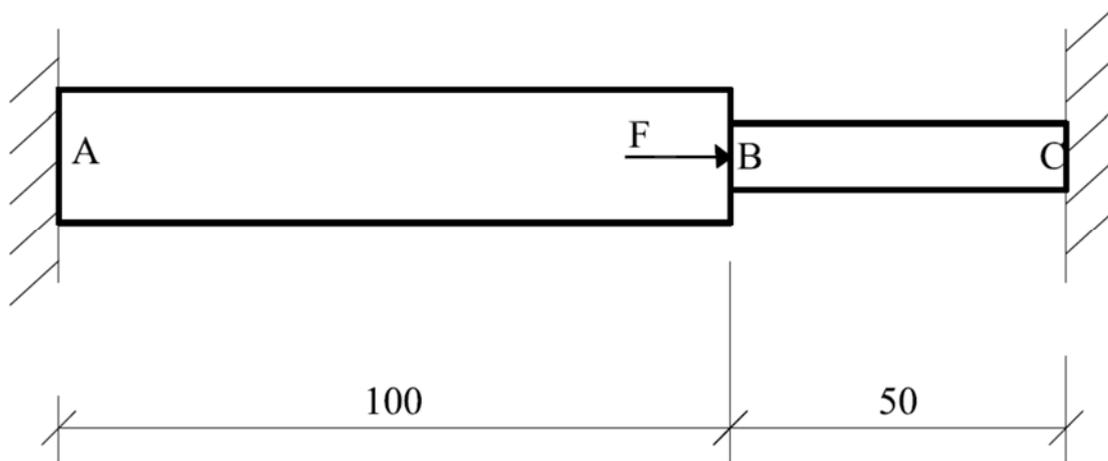


Figura 14.42 Estrutura a ser analisada. Dimensões em cm.

### Problema 0

O problema 0 envolve a estrutura isostática equivalente e as ações externas aplicadas. Para o problema em estudo, as ações externas são compostas pela força  $F$  e pelo gradiente de temperatura. A estrutura a ser considerada no problema 0 é a apresentada na Fig. (14.43). Assim, o objetivo deste problema envolve a determinação do deslocamento axial do ponto C. Esse deslocamento é composto pela parcela correspondente à ação da força  $F$ , calculada pela Eq.(14.3), e pelo efeito da temperatura, determinada pela Eq.(14.9). Para a utilização da Eq.(14.3), deve-se construir o diagrama de esforço normal da estrutura. Efetuando o equilíbrio, facilmente determina-se este diagrama, o qual está apresentado na Fig. (14.44).



Figura 14.43 Estrutura considerada no problema 0.



Figura 14.44 Diagrama de esforço normal para o problema 0.

Aplicando a Eq.(14.3) obtém-se:

$$\delta_C^F = \frac{10 \cdot 1}{250 \cdot 10^6 \pi (25 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \delta_C^F = 2,03718 \cdot 10^{-5} m$$

Empregando a Eq.(14.9) tem-se:

$$\delta_C^T = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 30 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 \cdot 30 \Rightarrow \delta_C^T = 3,75 \cdot 10^{-4} m$$

Dessa forma, o deslocamento objetivo do problema 0 é dado por:

$$\delta_C^0 = \delta_C^F + \delta_C^T \Rightarrow \delta_C^0 = 2,03718 \cdot 10^{-5} + 3,75 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \delta_C^0 = 3,95372 \cdot 10^{-4} m$$

### Problema 1

No problema 1, deve-se utilizar a estrutura isostática equivalente, sendo a reação de apoio hiperestática atuante sobre o ponto C, considerada como uma ação externa aplicada. Esse problema está apresentado na Fig. (14.45).

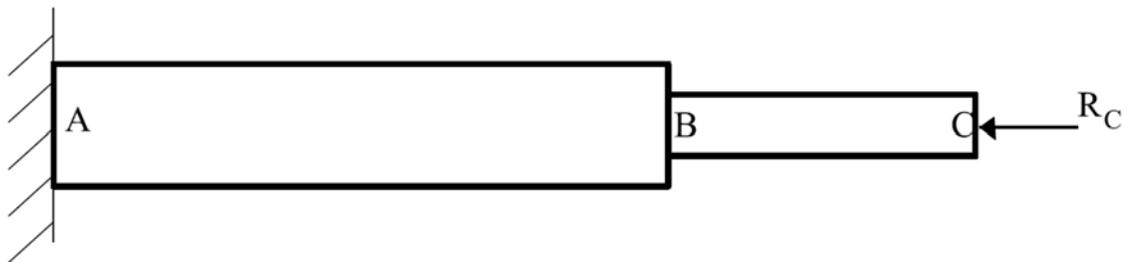


Figura 14.45 Estrutura considerada no problema 1.

Para a aplicação da Eq.(14.3), deve-se inicialmente construir o diagrama de esforço normal para a estrutura mostrada na Fig. (14.45). Este diagrama está apresentado na Fig. (14.46).



Figura 14.46 Diagrama de esforço normal para o problema 1.

Assim:

$$\delta_C^1 = \frac{-R_C \cdot 1}{250 \cdot 10^6 \pi (25 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{-R_C \cdot 0,50}{75 \cdot 10^6 \pi (15 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \delta_C^1 = -1,14686 \cdot 10^{-5} R_C$$

Como o ponto C do problema inicial, apresentado na Fig. (14.42), encontra-se engastado, a seguinte condição de compatibilidade deve ser escrita:

$$\delta_C^0 + \delta_C^1 = 0$$

Utilizando os resultados previamente obtidos tem-se:

$$3,95372 \cdot 10^{-4} - 1,14686 \cdot 10^{-5} R_C = 0 \Rightarrow R_C = 34,474 \text{ kN}$$

Verifica-se que o sentido arbitrado para a reação  $R_C$  no problema 1 está correto, devido ao sinal positivo encontrado para sua intensidade. Portanto, para a determinação da reação atuante no apoio A, deve-se efetuar o equilíbrio de forças atuantes ao longo da direção do eixo da estrutura. Arbitrando a reação do apoio A em sentido oposto ao da reação do ponto C tem-se:

$$R_A + 10 - 34,474 = 0 \Rightarrow R_A = 24,474 \text{ kN}$$

#### 14.14 – Exemplo 11

Determine as reações nos apoios da estrutura apresentada na Fig. (14.47) utilizando o princípio da superposição dos efeitos (método das forças). Esta estrutura é composta por dois elementos de barra simples axialmente solicitados e uma barra rígida. O módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de expansão térmica dos elementos de barra simples são iguais a  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ , respectivamente. Além disso, essas barras possuem área de seção transversal igual a  $0,10 \text{ m}^2$  e estão sujeitas a um gradiente positivo de temperatura igual a  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

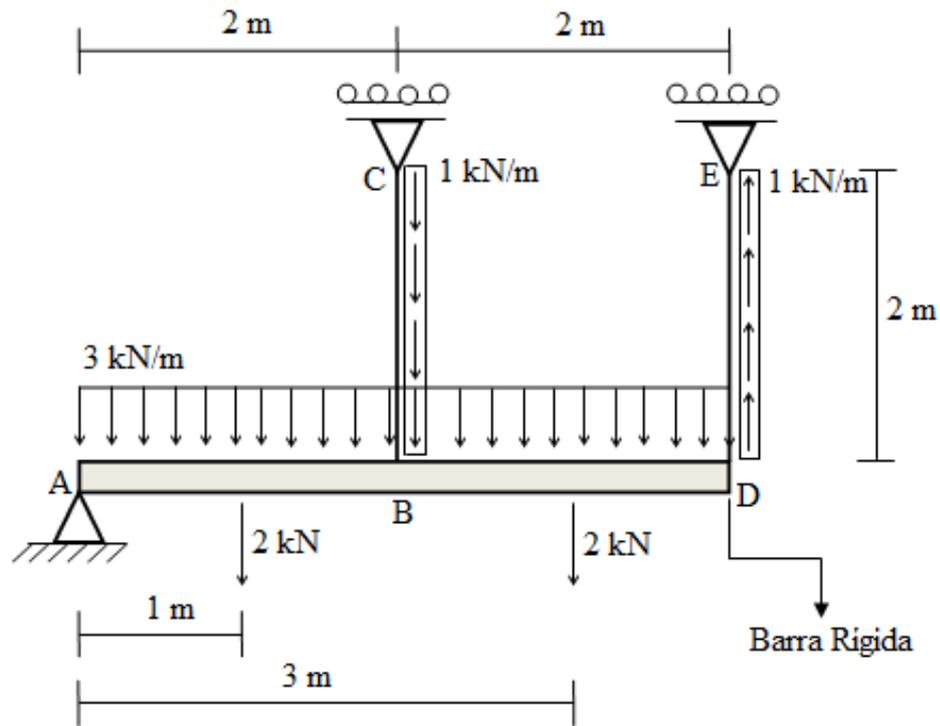


Figura 14.47 Estrutura a ser analisada.

*Problema 0*

O problema 0 contempla a estrutura isostática equivalente e todas as ações externas aplicadas, conforme anteriormente apresentado neste capítulo. No problema em questão, as ações externas são compostas por forças concentradas e distribuídas atuantes nos elementos que compõem a estrutura e também por um aumento de temperatura. Para transformar a estrutura hiperestática em uma estrutura isostática equivalente, foi removida a vinculação do nó E. Assim, a estrutura a ser considerada no problema 0 é a apresentada na Fig. (14.48). O objetivo do problema 0 é a determinação do deslocamento correspondente a vinculação removida. Portanto, no problema 0, objetiva-se a determinação do deslocamento vertical do nó E. Esse deslocamento é composto por duas parcelas, as quais correspondem à ação das forças externas aplicadas, calculadas pelas Eq.(14.2) e Eq.(14.3), e pelo efeito da temperatura, determinado pela Eq.(14.9). Para a utilização das Eq.(14.2) e Eq.(14.3), deve-se construir o diagrama de esforço normal das barras que compõem a estrutura. Impondo as condições de equilíbrio de corpo rígido à barra apresentada na Fig. (14.48) obtém-se:

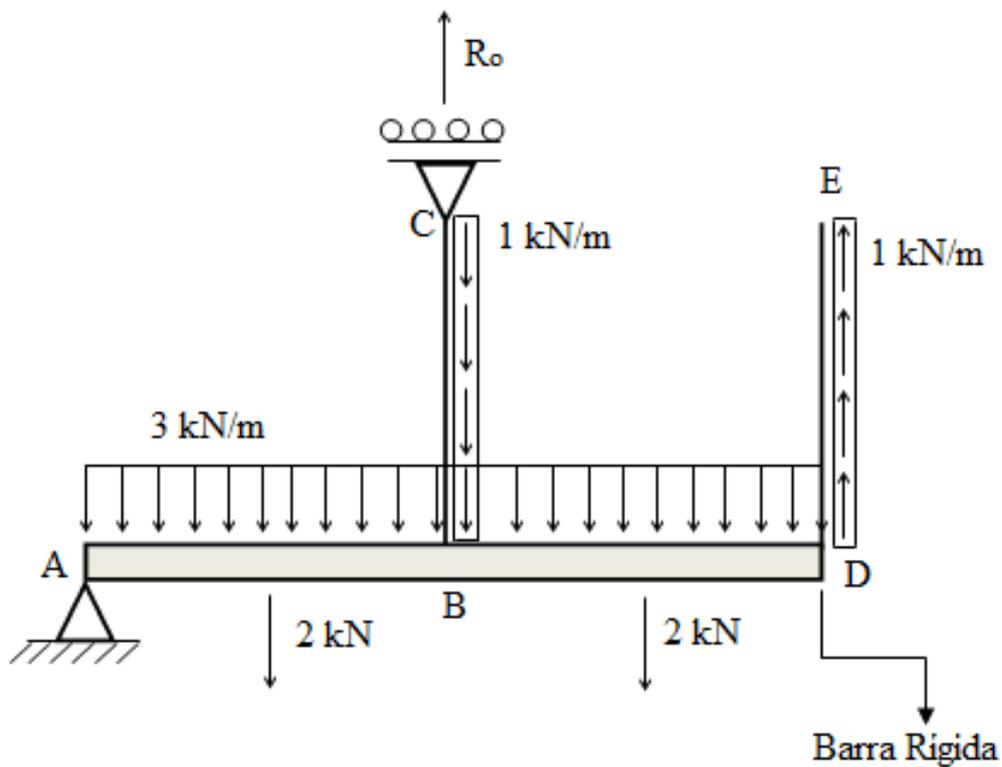


Figura 14.48 Estrutura considerada no problema 0.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot R_0 = 0 \Rightarrow R_0 = 14 \text{ kN}$$

A partir da reação de apoio do nó C determinada anteriormente, pode-se construir o seguinte diagrama de corpo livre para a barra BC, o qual é apresentado na Fig. (14.49).

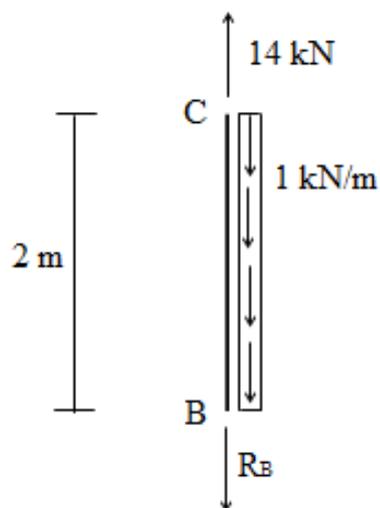


Figura 14.49 Diagrama de corpo livre para a barra BC.

Impondo sobre a barra apresentada na Fig. (14.49) a somatória nula de forças na direção vertical obtém-se:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 14 - 1 \cdot 2 - R_B = 0 \Rightarrow R_B = 12 \text{ kN}$$

Portanto, a barra BC apresenta o diagrama de esforço normal ilustrado na Fig. (14.50).

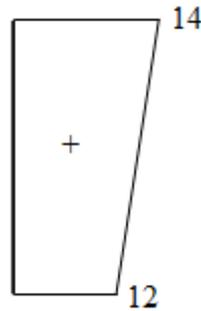


Figura 14.50 Diagrama de esforço normal barra BC.

Assim, o deslocamento do ponto B devido à ação das forças externas é igual a:

$$\delta_B^L = \int_0^2 \frac{14-x}{200 \cdot 10^6 \cdot 0,10} dx \Rightarrow \delta_B^L = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Já devido aos efeitos de temperatura, o deslocamento nesse ponto é dado por:

$$\delta_B^T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 25 \Rightarrow \delta_B^T = 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Dessa forma, o deslocamento do nó B devido aos efeitos das forças externas e da temperatura é obtido somando-se os dois deslocamentos anteriormente determinados.

Assim:

$$\delta_B = \delta_B^L + \delta_B^T \Rightarrow \delta_B = 1,3 \cdot 10^{-6} + 6,0 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \delta_B = 6,013 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Deve-se ressaltar que o deslocamento  $\delta_B$  calculado é vertical para baixo. Constata-se que o deslocamento da barra BC, calculado anteriormente, faz com que a barra DE seja também deslocada. Isso ocorre devido à presença da barra rígida, a qual conecta as barras BC e DE. Como se trata de uma barra rígida, pode-se calcular o deslocamento do ponto D, devido ao deslocamento da barra BC, por meio de uma semelhança de triângulos. Utilizando a ilustração apresentada na Fig. (14.51) tem-se:

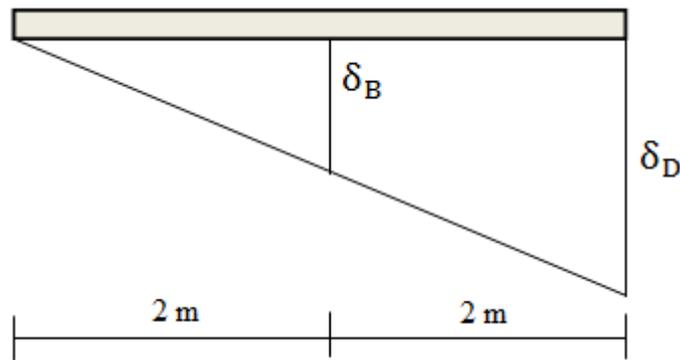


Figura 14.51 Determinação deslocamento ponto D.

$$\delta_B \rightarrow 2$$

$$\delta_D \rightarrow 4$$

$$\delta_D = 2\delta_B \Rightarrow \delta_D = 1,2026 \cdot 10^{-3} m$$

O deslocamento  $\delta_D$  determinado é vertical para baixo. Para que o deslocamento do ponto E seja determinado, o qual é o objetivo do problema 0, deve-se determinar o alongamento da barra DE devido à temperatura e à força distribuída nela atuante. Assim, devido à temperatura, o alongamento da barra é igual a:

$$\delta_E^T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 25 \Rightarrow \delta_E^T = 6,0 \cdot 10^{-4} m$$

O deslocamento  $\delta_E^T$  é vertical para cima, uma vez que decorre de uma expansão térmica. Já o deslocamento da barra DE devido a da ação da força distribuída é determinado utilizando-se seu diagrama de esforço normal. O diagrama de corpo livre da barra DE é apresentado na Fig. (14.52). Impondo sobre as ações apresentadas nessa figura o equilíbrio de forças verticais obtém-se:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1 \cdot 2 - R_D = 0 \Rightarrow R_D = 2 kN$$

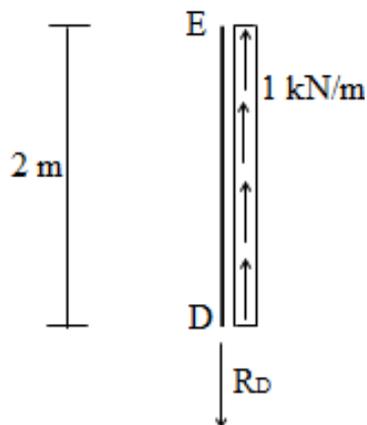


Figura 14.52 Diagrama de corpo livre para a barra DE.

Dessa forma, pode-se construir o diagrama de esforço normal da barra DE, o qual é apresentado na Fig. (14.53).

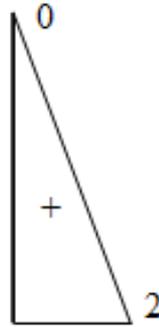


Figura 14.53 Diagrama de esforço normal barra DE.

O deslocamento da barra DE devido à força distribuída pode ser assim determinado:

$$\delta_E^L = \int_0^2 \frac{2-x}{200 \cdot 10^6 \cdot 0,10} dx \Rightarrow \delta_E^L = 1,0 \cdot 10^{-7} m$$

O deslocamento  $\delta_E^L$  é vertical para cima. Assim, o deslocamento do nó E devido à temperatura e às forças externas é determinado efetuando-se um balanço entre os deslocamentos  $\delta_D$ ,  $\delta_E^T$  e  $\delta_E^L$ . Portanto:

$$\delta_E^0 = \delta_D - \delta_E^L - \delta_E^T \Rightarrow \delta_E^0 = 1,2026 \cdot 10^{-3} - 1,0 \cdot 10^{-7} - 6,0 \cdot 10^{-4} \Rightarrow$$

$$\delta_E^0 = 6,025 \cdot 10^{-4} m$$

O deslocamento  $\delta_E^0$  é para baixo. Deve-se enfatizar que os deslocamentos  $\delta_E^T$  e  $\delta_E^L$  receberam sinal negativo por terem seu sentido (para cima) oposto ao deslocamento  $\delta_D$  (para baixo).

### Problema 1

No problema 1, deve-se utilizar a estrutura isostática equivalente, sendo a reação de apoio hiperestática atuante sobre o ponto E, a qual foi removida para a obtenção da estrutura isostática equivalente, considerada como uma ação externa aplicada. Essa estrutura está apresentada na Fig. (14.54).

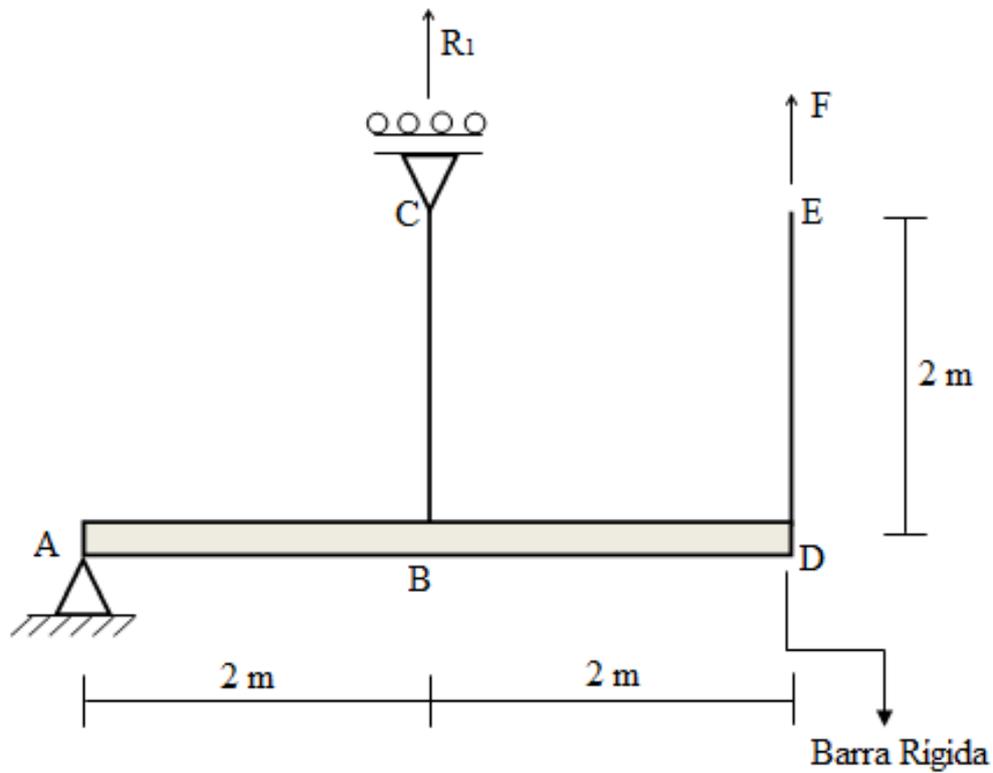


Figura 14.54 Estrutura considerada no problema 1.

Impondo o equilíbrio de momentos em relação ao ponto A, na estrutura apresentada na Fig. (14.54), obtém-se o valor da reação  $R_1$ , no apoio localizado sobre o nó C. Assim:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F \cdot 4 - R_1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_1 = -2F$$

Com base na reação de apoio determinada anteriormente, pode-se construir o diagrama de esforço normal da barra BC, o qual é apresentado na Fig. (14.55).

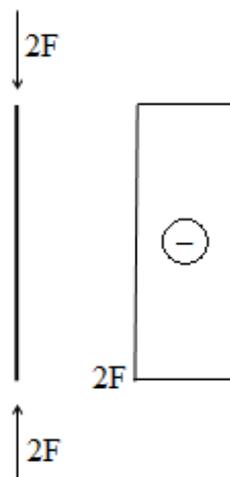


Figura 14.55 Diagrama de esforço normal barra BC.

Assim, o deslocamento do ponto B, devido a F, possui a seguinte intensidade:

$$\delta_B = \frac{-2F \cdot 2}{200 \cdot 10^6 \cdot 0,10} \Rightarrow \delta_B = -2 \cdot 10^{-7} F$$

O deslocamento  $\delta_B$  determinado anteriormente é para cima. Assim como apresentado para o problema 0, o nó D é deslocado em função do deslocamento da barra BC. A intensidade do deslocamento do nó D pode ser obtida por meio de uma simples semelhança de triângulos. Tal procedimento é válido devido a presença da barra rígida que conecta as barras BC e DE. Com base na Fig. (14.56) pode-se escrever que:

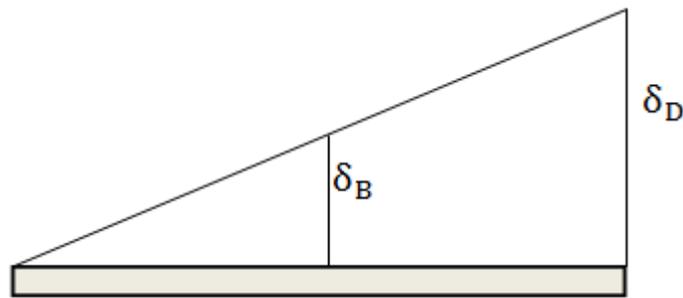


Figura 14.56 Determinação deslocamento ponto D.

$$\delta_B \rightarrow 2$$

$$\delta_D \rightarrow 4$$

$$\delta_D = 2\delta_B \Rightarrow \delta_D = -4 \cdot 10^{-7} F$$

O deslocamento calculado anteriormente é para cima. O ponto E desloca-se também em função do alongamento da barra DE devido à ação da força externa F. Com base na ilustração apresentada na Fig. (14.54), constata-se facilmente que o diagrama de esforço normal da barra DE é o apresentado na Fig. (14.57).

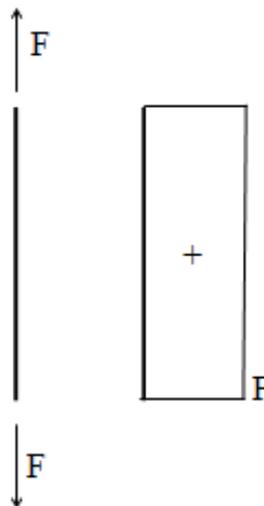


Figura 14.57 Diagrama de esforço normal barra DE.

Assim, o alongamento da barra DE devido a F possui a seguinte intensidade:

$$\delta_E^L = \frac{F \cdot 2}{200 \cdot 10^6 \cdot 0,10} \Rightarrow \delta_E^L = 1,0 \cdot 10^{-7} F$$

O deslocamento do nó E é obtido efetuando-se o balanço de deslocamentos envolvendo  $\delta_D$  e  $\delta_E^L$ . Dessa forma:

$$\delta_E^1 = -\delta_D - \delta_E^L \Rightarrow \delta_E^1 = -4,0 \cdot 10^{-7} F - 1,0 \cdot 10^{-7} F \Rightarrow \delta_E^1 = -5,0 \cdot 10^{-7} F$$

O deslocamento  $\delta_E^1$  determinado anteriormente é vertical para cima. Por esse motivo esses deslocamentos receberam sinal negativo. Portanto, pode-se impor a seguinte condição de compatibilidade com base nos resultados dos problemas 0 e 1.

$$\delta_E^0 + \delta_E^1 = 0 \Rightarrow 6,025 \cdot 10^{-4} - 5,0 \cdot 10^{-7} F = 0 \Rightarrow F = 1205 \text{ kN}$$

Dessa forma, pode-se construir o diagrama de corpo livre para a estrutura analisada neste exemplo, o qual é ilustrado na Fig. (14.58).

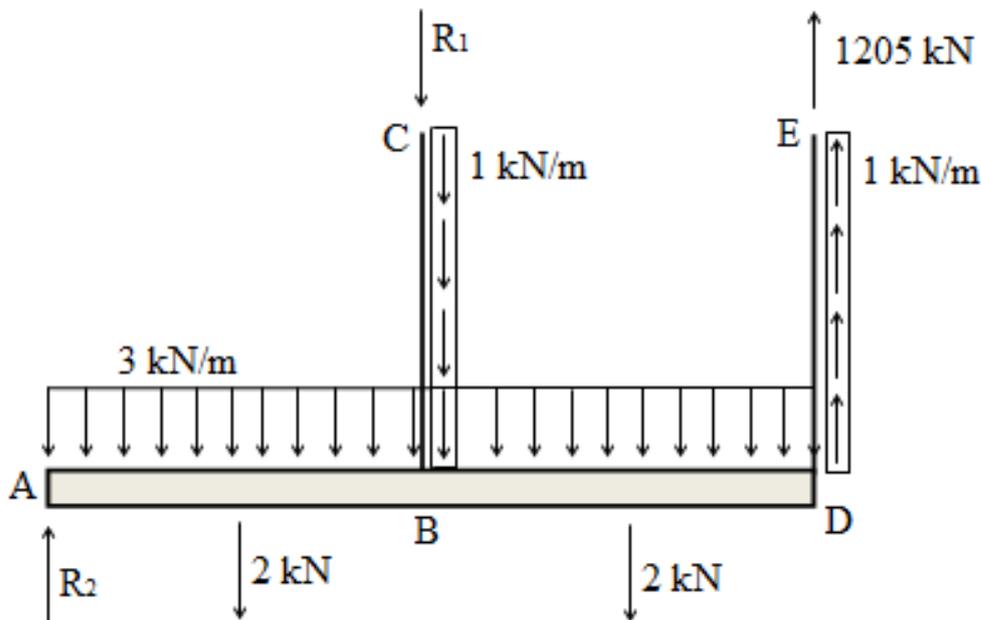


Figura 14.58 Diagrama de corpo livre da estrutura.

Impondo sobre o corpo apresentado na Fig. (14.58) as condições de equilíbrio de corpo rígido obtém-se:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1205 + R_1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$R_1 = 2396 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -2 - 2 - 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1205 - 2396 + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 1207 \text{ kN}$$

## 15. – Torção em Elementos de Barra

### 15.1 – Introdução

Conforme apresentado nos capítulos anteriores, a ação dos esforços solicitantes normal e cortante produz tensões normais e de cisalhamento, respectivamente. Neste capítulo serão mostrados os efeitos (tensões e deformações) provocados em uma estrutura quando esta é submetida a um esforço de torção.

Estruturas submetidas a esforços de torção são de grande importância no cotidiano da engenharia, sendo muito utilizadas em equipamentos e manufaturas para a transmissão de potência, entre outros. Sendo assim, as tensões e as deformações atuantes nesse problema devem ser cuidadosamente estudadas e mensuradas para possibilitar o funcionamento estrutural seguro e econômico. Serão tratados, inicialmente, barras de seção transversal circular submetidas à torção. Em seguida, barras de seções transversais retangulares e quadradas maciças e vazadas serão também estudadas.

Para a compreensão dos fenômenos envolvidos nesse importante problema estrutural, deve-se considerar a barra mostrada na Fig. (15.1), a qual está submetida a um estado de torção puro.

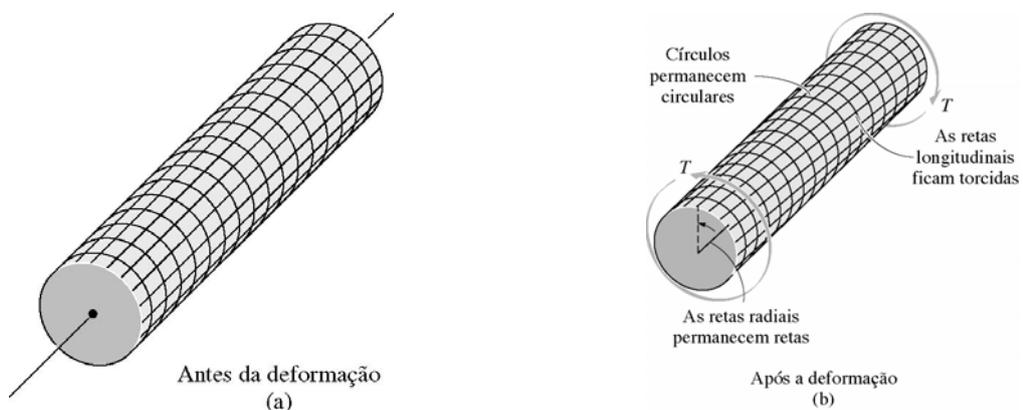


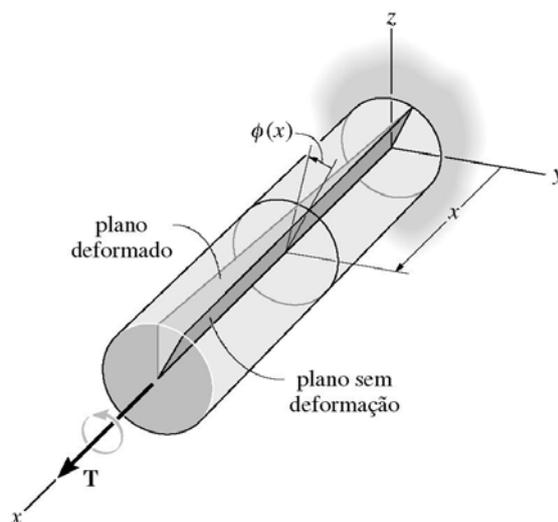
Figura 15.1 Deslocamentos da barra submetida a esforço de torção.

Sob a ação dos momentos de torção, os elementos que compõem a barra serão deslocados seguindo o padrão mostrado na ilustração b da Fig. (15.1). Assim, as linhas que definem os círculos perpendiculares ao eixo da barra permanecerão com sua forma inicial após a atuação da torção, e as retas, originalmente paralelas ao eixo da barra, apresentarão uma configuração deformada semelhante ao de uma hélice. Dessa forma, assume-se que os efeitos do empenamento da seção transversal podem ser desprezados.

Com base no ilustrado na Fig. (15.1), verifica-se que o momento de torção aplicado provoca na barra deslocamentos (giros) relativos entre cada elemento de sua seção transversal. Portanto, deformações surgirão em decorrência deste deslocamento relativo.

### 15.2 – Deformação de um Eixo Circular

Para a determinação da variação das deformações ao longo do comprimento de uma barra submetida a esforços de torção, deve-se considerar uma barra engastada em uma de suas extremidades sendo submetida a um momento de torção aplicado à sua extremidade oposta, como mostra a Fig. (15.2). Com base no ilustrado nessa figura, verifica-se que à medida que a seção analisada afasta-se do engaste, o ângulo de giro,  $\phi(x)$ , também denominado de ângulo de torção, aumenta. Esse fato pode ser facilmente observado considerando os planos sombreados mostrados na Fig. (15.2), os quais afastam-se a medida que  $x$  cresce.



O ângulo de torção  $\phi(x)$  aumenta à medida que  $x$  aumenta.

Figura 15.2 Barra submetida à torção.

Para que a variação do ângulo de torção ao longo do comprimento da barra seja determinada, deve-se isolar um elemento de comprimento  $\Delta x$  desta barra, o qual está localizado em uma dada posição radial,  $\rho$ . Esse procedimento é mostrado na Fig. (15.3). Devido à variação do ângulo de torção ao longo do comprimento da barra, as faces anterior e posterior deste elemento observarão uma rotação diferencial. Em razão desta rotação diferencial, constata-se que o elemento em análise estará submetido a uma deformação distorcional. Conseqüentemente, pela lei de Hooke, barras submetidas à esforços de torção estarão sujeitas a tensões de cisalhamento.

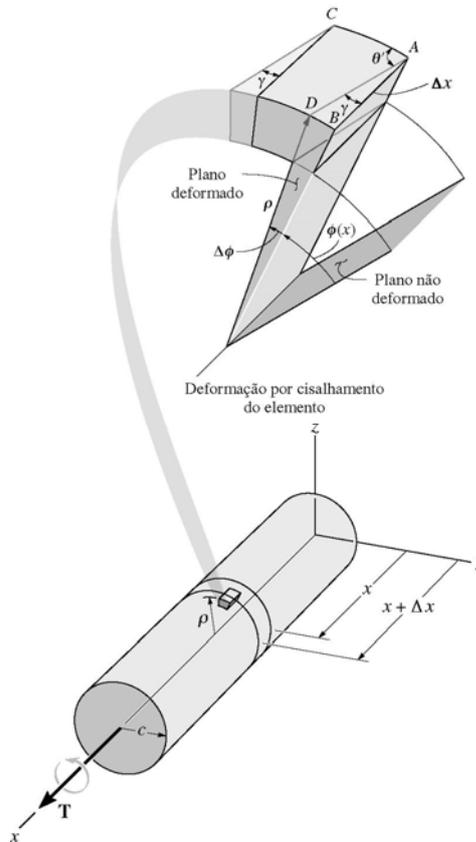


Figura 15.3 Análise de um elemento de comprimento  $\Delta x$ .

Para mensurar esta deformação, deve-se determinar a variação do ângulo  $\gamma$  ao longo do comprimento da barra. Utilizando a definição de deformação distorcional e a ilustração apresentada na Fig. (15.3), constata-se que:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

Assumindo que o elemento analisado possua dimensões infinitesimais, pode-se considerar que  $\Delta x \rightarrow dx$ , conseqüentemente  $\Delta\phi \rightarrow d\phi$ . Portanto,  $\gamma$  pode ser facilmente

relacionado à  $\phi$  por meio da seguinte equação, a qual nada mais expressa que uma compatibilidade geométrica:

$$\rho d\phi = dx\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \quad (15.1)$$

Portanto, como mostra a Eq.(15.1), verifica-se que a deformação distorcional  $\gamma$  irá variar linearmente de acordo com a distância radial do ponto analisado em relação ao centro da seção transversal circular. Como o valor de  $\frac{d\phi}{dx}$ , conhecido como módulo de deformação por cisalhamento, é o mesmo para todos os pontos da seção transversal, constata-se que a intensidade da deformação distorcional irá depender diretamente da localização radial do ponto analisado. Então, a deformação distorcional será mínima quando o ponto analisado estiver sobre o centro da seção circular e máxima quando o ponto analisado encontrar-se no limite da seção transversal, ou seja, quando  $\rho = c$ . Portanto, para os pontos contidos na seção transversal circular, a deformação distorcional obedecerá à seguinte variação:

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (15.2)$$

Como a deformação distorcional varia linearmente segundo a posição radial do ponto analisado, a tensão de cisalhamento associada, apresentará a mesma variação, assumindo a validade da lei de Hooke para o material que compõe a estrutura. Portanto, para as tensões de cisalhamento, observa-se a seguinte variação:

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \quad (15.3)$$

Como mostrado na Eq.(15.3), as tensões de cisalhamento serão máximas quando o ponto analisado pertencer a superfície da estrutura. Assim, em problemas envolvendo esforços de torção, espera-se que a falha da estrutura ocorra no exterior do elemento e se propague para o seu interior.

### 15.3 – Fórmula da Torção

Assumindo que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas, o momento de torção aplicado será equilibrado pelas tensões de cisalhamento atuantes nos diversos elementos infinitesimais que compõem a seção transversal do elemento estrutural.

Conforme mostra a Fig. (15.4), verifica-se que em um elemento infinitesimal de área  $dA$ , surgirá uma força  $dF$ , a qual decorre da integração das tensões de cisalhamento,  $\tau$ , sobre seu domínio. Ao multiplicar esta força por sua distância em relação ao centro de gravidade da seção transversal, obtém-se o momento de torção resistente do elemento infinitesimal. Somando-se os momentos de torção resistente de todos os elementos infinitesimais que compõem a seção transversal da estrutura, este deverá ser igual ao momento de torção aplicado, para que a condição de equilíbrio seja observada.

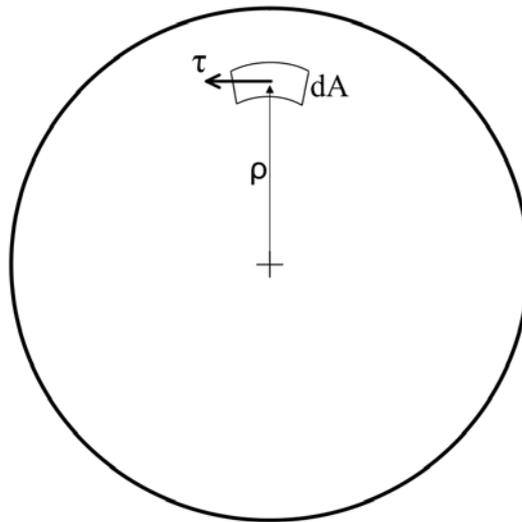


Figura 15.4 Equilíbrio de um elemento torcido.

Assim, o momento de torção resistente do elemento infinitesimal é dado por:

$$dM_T = \tau \rho dA \quad (15.4)$$

Integrando a Eq.(15.4) ao longo da área da seção transversal do elemento estrutural e lembrando que o momento resistente deve ser igual ao momento externo aplicado tem-se:

$$\int_A dM_T = \int_A \tau \rho dA \quad (15.5)$$

Sabendo que  $\tau$  é dado pela Eq.(15.3), pode-se reescrever a equação anterior como:

$$M_T = \int_A \frac{\rho}{c} \rho \tau_{\max} dA \quad \Rightarrow \quad M_T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA \quad (15.6)$$

O termo integral remanescente no segundo membro da Eq.(15.6) é uma propriedade geométrica da seção transversal denominada momento polar de inércia.

Para seções transversais circulares maciças, esta integral é igual a:

$$I_T = \int_A \rho^2 dA \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^c \rho^2 \rho d\rho d\theta \Rightarrow I_T = \frac{\pi c^4}{2}.$$

Para seções transversais vazadas o momento polar de inércia é igual a  $I_T = \frac{\pi(c_e^4 - c_i^4)}{2}$ , onde  $c_e$  e  $c_i$  são os raios externo e interno da seção transversal, respectivamente.

Portanto, com base na inserção do momento polar de inércia, a Eq.(15.6) pode ser reescrita como:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T c}{I_T} \quad (15.7)$$

Sabendo que as tensões de cisalhamento variam linearmente segundo sua distância em relação ao centro de gravidade da seção transversal, como mostrado na Eq.(15.3), pode-se reescrever a Eq.(15.7) para qualquer ponto pertencente à seção transversal do elemento estrutura considerado. Nesse caso, obtém-se a fórmula da torção, a qual é apresentada abaixo:

$$\tau = \frac{M_T \rho}{I_T} \quad (15.8)$$

Com base na utilização da Eq.(15.8) pode-se efetuar o pré-dimensionamento de estruturas submetidas à torção, bem como determinar as tensões de cisalhamento desenvolvidas por momentos de torção aplicados.

### 15.4 – Exemplo 1

A estrutura de barra geral mostrada na Fig. (15.5) suporta uma placa de trânsito retangular cujas dimensões são 2,5 x 1,5 m. Sabendo que sobre esta placa atua um vento que gera uma força distribuída igual a 5,0 kN/m<sup>2</sup>, determine o diâmetro mínimo da seção transversal desta barra para que não ocorra a falha em torção. O material que compõe a barra possui tensão de proporcionalidade igual a  $\tau_p = 250MPa$ .

Deve-se, em primeiro lugar, determinar o momento de torção que solicita a barra. Este é facilmente calculado como:

$$M_T = (2,5 \cdot 1,5 \cdot 5) \cdot 3 \Rightarrow M_T = 56,25 kNm$$

Aplicando a fórmula da torção, Eq.(15.8), sabendo que a tensão máxima deve ser igual à tensão de proporcionalidade tem-se:

$$\tau = \frac{M_T \rho}{I_T} \Rightarrow \tau = \frac{M_T \rho}{\frac{\pi \rho^4}{2}} \Rightarrow \rho^3 = \frac{2 \cdot 56,25}{\pi \cdot 250 \cdot 10^3} \Rightarrow \rho = 5,23 \cdot 10^{-2} m$$

Portanto, o diâmetro mínimo é igual a  $2\rho = 10,46$  cm.

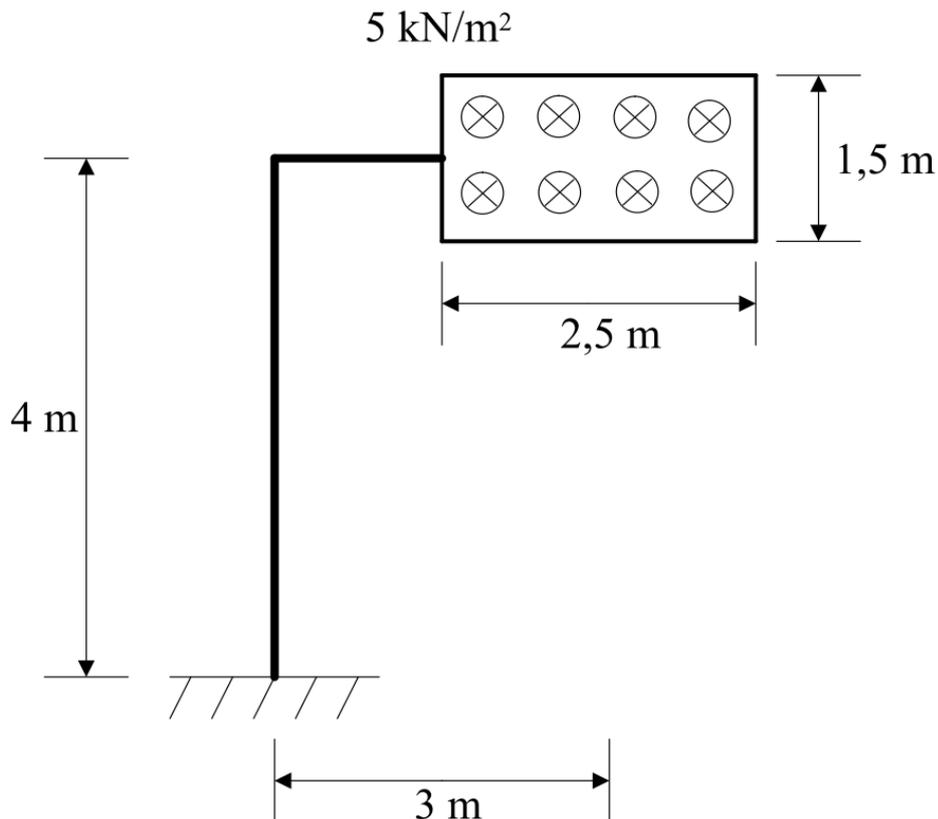


Figura 15.5 Estrutura a ser analisada.

Considerando agora que o material seja substituído por outro com  $\tau_p = 300 MPa$ , calcule a economia de material se uma seção vazada for utilizada. Assuma que o diâmetro externo seja o calculado anteriormente.

$$\tau = \frac{M_T \rho}{I_T} \Rightarrow \tau = \frac{M_T \rho}{\frac{\pi}{2}(\rho_e^4 - \rho_i^4)} \Rightarrow \frac{\pi}{2}[(5,23 \cdot 10^{-2})^4 - \rho_i^4] = \frac{56,25 \cdot 5,23 \cdot 10^{-2}}{300 \cdot 10^3}$$

$$\rho_i = 3,336 \cdot 10^{-2} m$$

Assim, observa-se uma economia significativa quando uma seção circular vazada é adotada, embora o material analisado seja um pouco mais resistente. Isso ocorre pelo fato de que próximo ao centro de gravidade da seção transversal as tensões

de cisalhamento possuem baixa intensidade. Portanto, o material não é utilizado em sua máxima capacidade nessa região. Consequentemente, o material nessa região contribui com pouca efetividade para a resistência mecânica do elemento estrutural.

### 15.5 – Exemplo 2

Uma barra, cuja seção transversal é circular de raio igual a  $r$ , está submetida a um momento de torção,  $M_T$ , como mostra a Fig. (15.6). Esse esforço deve ser transmitido através de uma ligação parafusada, como mostrado nessa mesma figura. Determine a quantidade de parafusos necessária para que a tensão de cisalhamento máxima no eixo seja igual à tensão de cisalhamento nos parafusos. Admita tensão cisalhante uniforme nos parafusos e diâmetro dos parafusos igual a  $D$ .

A tensão de cisalhamento provocada no eixo pode ser determinada utilizando-se a fórmula da torção, Eq.(15.8). Assim:

$$\tau = \frac{M_T \rho}{I_T} \Rightarrow \tau = \frac{M_T r}{\frac{\pi r^4}{2}} \Rightarrow \tau = \frac{2M_T}{\pi r^3} \quad (15.9)$$

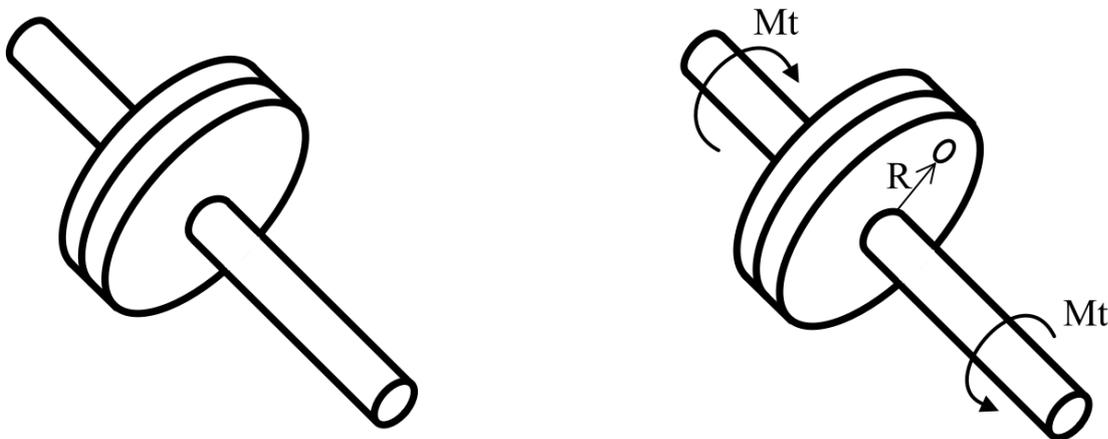


Figura 15.6 Estrutura a ser analisada.

Para que o equilíbrio ocorra, o momento  $M_T$  deve ser equilibrado pelo momento de torção gerado nos parafusos. Portanto:

$$M_T = nF_{parafuso} R \quad (15.10)$$

sendo:  $n$  o número de parafusos e  $F_{\text{parafuso}}$  a força resistente de cada parafuso. Porém, a força que cada parafuso suporta pode ser determinada por meio da tensão de cisalhamento atuante em sua seção transversal. Assim:

$$F_{\text{parafuso}} = \tau_{\text{parafuso}} \cdot A \quad (15.11)$$

Do enunciado do problema, verifica-se que a tensão dada na Eq.(15.9) deve ser igual a  $\tau_{\text{parafuso}}$ . Utilizando esta informação e substituindo a Eq.(15.11) na Eq.(15.10) tem-se:

$$M_T = n \cdot \frac{2M_T}{\pi r^3} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot R \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2r^3}{RD^2}$$

Assim, o número de parafusos não depende do momento de torção aplicado e sim da configuração da ligação.

### 15.6 – Distribuição das Tensões de Cisalhamento

Conforme apresentado previamente neste capítulo, as tensões de cisalhamento apresentam variação linear segundo a posição radial do ponto analisado. Quanto mais distante o ponto considerado está do centro de gravidade da seção transversal maior será a tensão de cisalhamento atuante. A ilustração *a* da Fig. (15.7) mostra esta variação. Porém, é interessante salientar que as tensões de cisalhamento atuantes no plano da seção atuam também, por equilíbrio, ao longo do comprimento da barra, como mostra a ilustração *b* da Fig. (15.7). Essa constatação deve ser levada em consideração quando o material utilizado na composição do elemento estrutural apresenta resistências mecânicas diferentes em direções diferentes, como a madeira, por exemplo. Isso explica o fato de alguns eixos submetidos à torção apresentarem danos mecânicos ao longo de seu comprimento e não no plano de sua seção transversal.

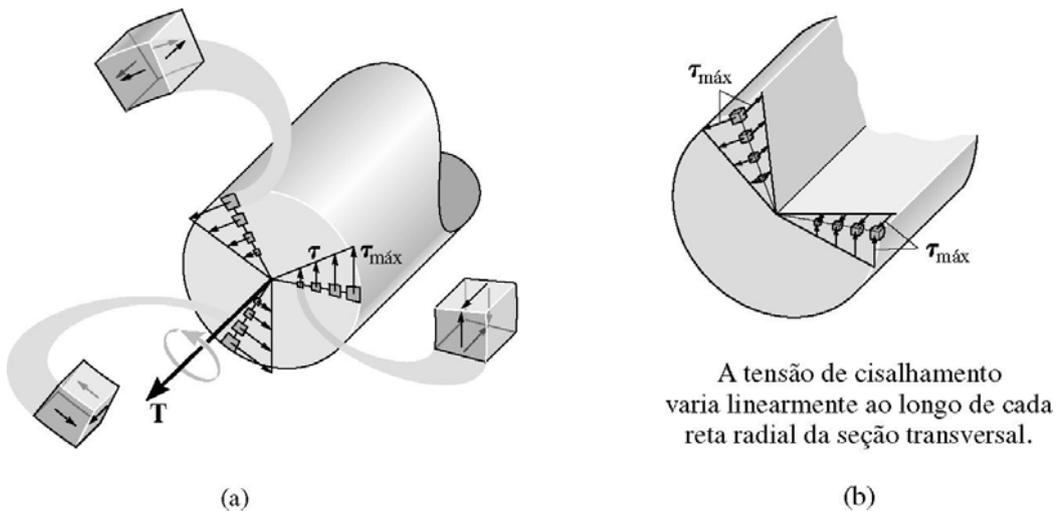


Figura 15.7 Fluxo de tensões cisalhantes.

### 15.7 – Ângulo da Torção

Quando um eixo está submetido a um momento de torção surgirão tensões de cisalhamento no plano da seção transversal, as quais equilibrarão o momento externo aplicado. Estas tensões podem ser utilizadas para, por meio da lei de Hooke, determinar as deformações distorcionais decorrentes da aplicação do momento de torção. Além disso, as deformações distorcionais estão associadas à rotação relativa entre as seções transversais que compõem a barra, como mostrado na Eq.(15.1).

Da forma semelhante ao apresentado no capítulo 14, onde foram determinados os deslocamentos de barras sujeitas a esforços normais, pode-se também determinar a rotação relativa,  $\phi$ , entre as seções transversais de barras submetidas à torção. O ângulo  $\phi$  é chamado de ângulo da torção. Para o cálculo de  $\phi$  deve-se retomar a Eq.(15.1), a qual é reescrita abaixo:

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \quad \Rightarrow \quad d\phi = \frac{\gamma}{\rho} dx \quad (15.12)$$

Utilizando a lei de Hooke para as tensões de cisalhamento,  $\tau = G\gamma$ , e a fórmula da torção,  $\tau = \frac{M_T \rho}{I_T}$ , pode-se reescrever a Eq.(15.12) da seguinte maneira.

$$d\phi = \frac{M_T \rho}{I_T} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{\rho} dx \quad \Rightarrow \quad d\phi = \frac{M_T}{I_T G} dx \quad (15.13)$$

Para a determinação da rotação do eixo submetido à ação do momento de torção, deve-se somar as rotações de todas as seções transversais da barra. Essa operação é efetuada integrando a Eq.(15.13) ao longo do comprimento da barra. Então:

$$\int_L d\phi = \int_L \frac{M_T}{I_T G} dx \quad \Rightarrow \quad \phi = \int_L \frac{M_T}{I_T G} dx \quad (15.14)$$

Para o caso particular em que os termos integrandos são constantes em relação ao comprimento da barra, a integral apresentada na Eq.(15.14) transforma-se em uma somatória, sendo igual a:

$$\phi = \frac{M_T L}{I_T G} \quad (15.15)$$

Com base nos resultados apresentados nas Eq.(15.14) e Eq.(15.15) pode-se determinar a rotação das barras e também uma condição de compatibilidade extra para a análise de problemas estaticamente indeterminados.

### 15.8 – Exemplo 3

Uma barra engastada está submetida a um conjunto de momentos de torção, como mostra a Fig. (15.8). Sabendo que no ponto P existe uma engrenagem, determine o deslocamento relativo do dente da engrenagem em decorrência dos carregamentos aplicados. Sabe-se que  $G = 80 \text{ GPa}$  e  $\rho_{eixo} = 7,0 \text{ mm}$ .

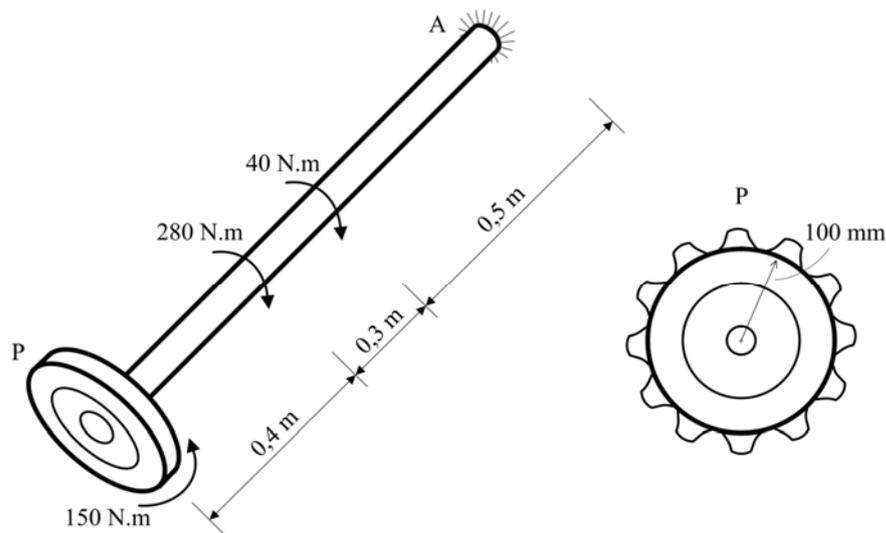


Figura 15.8 Estrutura a ser analisada.

O deslocamento do dente da engrenagem pode ser determinado a partir da Eq.(15.15). Primeiramente, deve-se construir o diagrama de momento torçor utilizando as equações de equilíbrio de corpo rígido. Como a barra analisada é isostática, este diagrama pode ser facilmente construído, como indicado na Fig. (15.9).

Outra grandeza de interesse é o momento polar de inércia da seção transversal do eixo. Sabendo que o eixo possui raio igual a 7,0 mm tem-se:

$$I_T = \frac{\pi(7 \cdot 10^{-3})^4}{2} = 3,771 \cdot 10^{-9} m^4$$

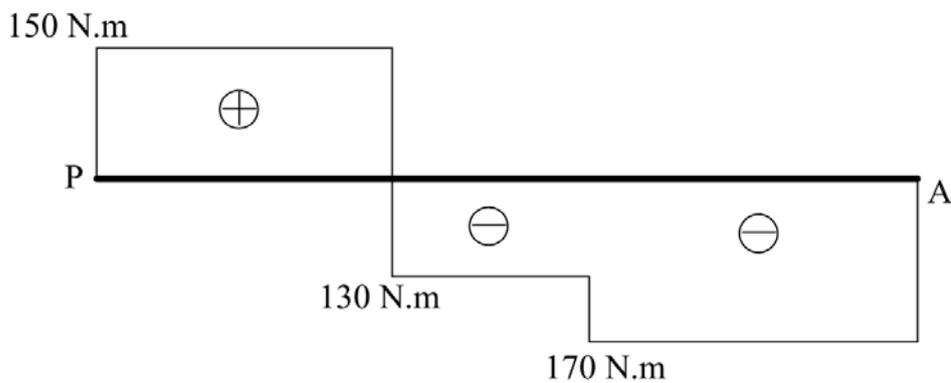


Figura 15.9 Diagrama de momento torçor.

Portanto, a rotação do ponto P é dada por:

$$\phi_p = \frac{150 \cdot 0,40}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,771 \cdot 10^{-9}} + \frac{(-130 \cdot 0,3)}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,771 \cdot 10^{-9}} + \frac{(-170 \cdot 0,5)}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,771 \cdot 10^{-9}} = -0,212 rad$$

O sinal negativo indica que o giro da seção transversal ocorre no sentido horário.

Assim, o deslocamento do dente da engrenagem pode ser determinado com base na rotação do ponto P como mostra a ilustração apresentada na Fig. (15.10). Então,  $S_p$  é igual a:

$$S_p = \phi_p r \quad \Rightarrow \quad S_p = 0,212 \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad S_p = 21,2 mm$$

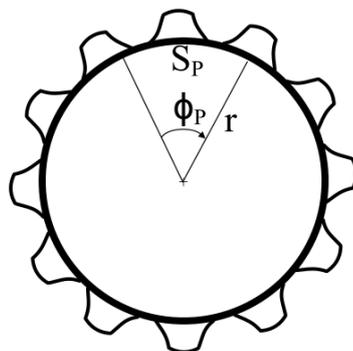


Figura 15.10 Rotação do ponto P.

### 15.9 – Problemas Estaticamente Indeterminados

A equação que permite a determinação do ângulo de giro na torção possibilita também a inserção de uma condição de compatibilidade de rotação para a análise de problemas estaticamente indeterminados. Nesses problemas, pode-se escrever a condição de compatibilidade diretamente, quando facilmente visualizada, ou alternativamente utilizar o método das forças, superpondo os diversos problemas que o compõem. O leitor pode consultar o conteúdo apresentado no capítulo 14 para relembrar os procedimentos e etapas associados ao método das forças.

#### 15.10 – Exemplo 4

Determine as reações de apoio da estrutura mostrada na Fig. (15.11).

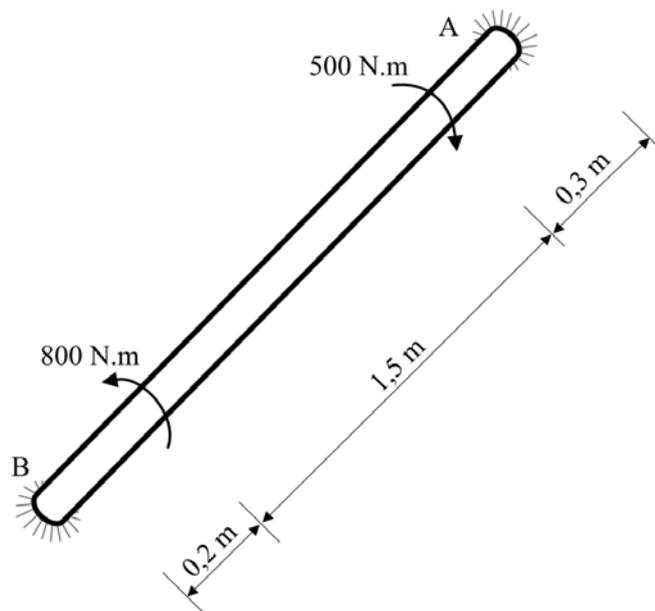


Figura 15.11 Estrutura a ser analisada.

Para a determinação das reações de apoio nesta estrutura, deve-se, inicialmente, construir o diagrama de corpo livre da estrutura. Este diagrama é mostrado na Fig. (15.12). Para o sentido dos momentos de torção relativos arbitrados, pode-se construir o diagrama de momento torçor, o qual é apresentado na Fig. (15.13).

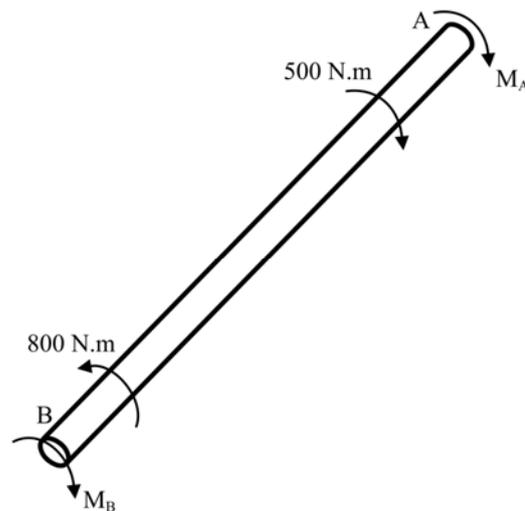


Figura 15.12 Diagrama de corpo livre.

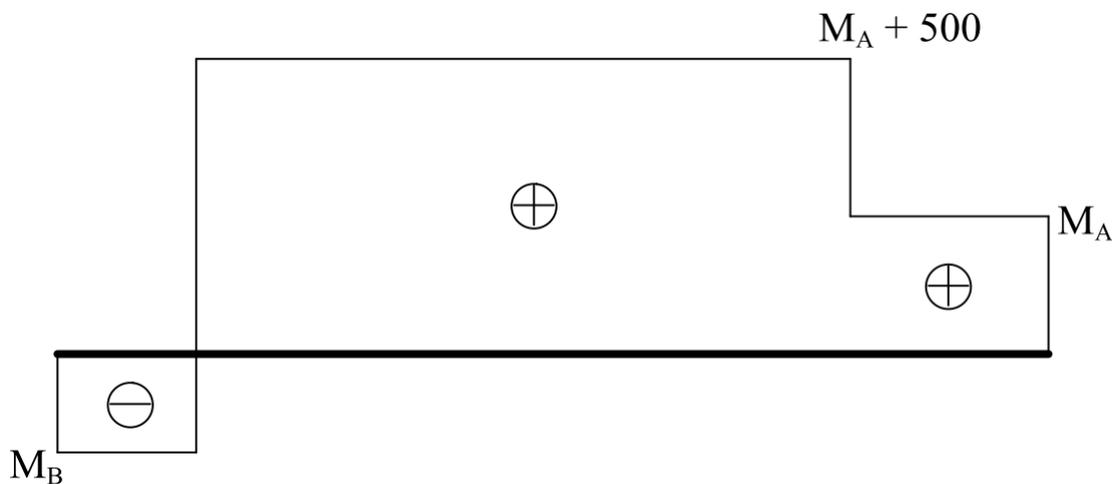


Figura 15.13 Diagrama de momento torçor.

Assim, com base na ilustração apresentada na Fig. (15.12), pode-se escrever a equação de equilíbrio do problema, a qual resulta em:

$$M_B - 800 + 500 + M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B + M_A = 300$$

Como ambos os apoios são do tipo engaste, a condição de compatibilidade pode ser facilmente expressa por  $\phi_{AB} = 0$ . Então:

$$\phi_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-M_B \cdot 0,2}{I_T \cdot G} + \frac{(M_A + 500)1,5}{I_T \cdot G} + \frac{M_A \cdot 0,3}{I_T \cdot G} = 0$$

$$-0,2 \cdot M_B + 1,5 \cdot M_A + 750 + 0,3 \cdot M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 1,8 \cdot M_A - 0,2 \cdot M_B + 750 = 0$$

Resolvendo conjuntamente as equações que resultaram das condições de compatibilidade e equilíbrio obtêm-se:

$$\begin{cases} M_A + M_B = 300 \\ 1,8 \cdot M_A - 0,2 \cdot M_B = -750 \end{cases}$$

Que matricialmente podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,8 & -0,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 300 \\ -750 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -345 \\ 645 \end{Bmatrix} Nm$$

O autor sugere ao leitor que resolva este mesmo problema utilizando o método das forças.

### 15.11 – Exemplo 5

A barra mostrada na Fig. (15.14) é composta por dois materiais diferentes cujos módulos de elasticidade transversal são iguais a  $G_1 = 3,8 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$  e  $G_2 = 1,2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ . Sabendo que a estrutura está submetida a um momento de torção igual a 250 kNm, mostre a distribuição de tensões de cisalhamento atuantes na seção transversal da barra.

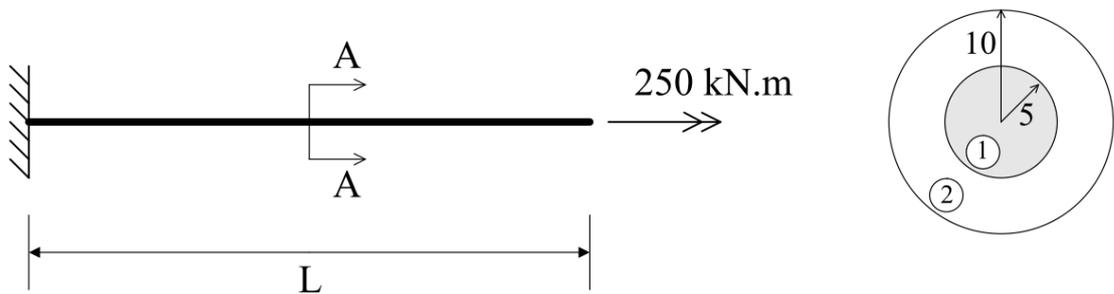


Figura 15.14 Estrutura a ser analisada.

Este problema é hiperestático, uma vez que apenas com a equação de equilíbrio não é possível determinar as parcelas do momento de torção que são resistidas pelos materiais 1 e 2. Para isso, deve-se utilizar uma equação de compatibilidade, a qual é escrita em termos de giros. Sabendo que o momento de torção é resistido por ambos os materiais, a seguinte equação de equilíbrio pode ser escrita:

$$T_1 + T_2 - 250 = 0$$

Para que não ocorra falha no plano da seção transversal, a deformação distorcional de ambos os materiais deve ser igual. Portanto, o giro deve ser contínuo no

plano da seção transversal. Assim, como indicado na Fig. (15.15), a equação de compatibilidade para o problema em questão é a seguinte:

$$\phi = \phi_1 = \phi_2$$

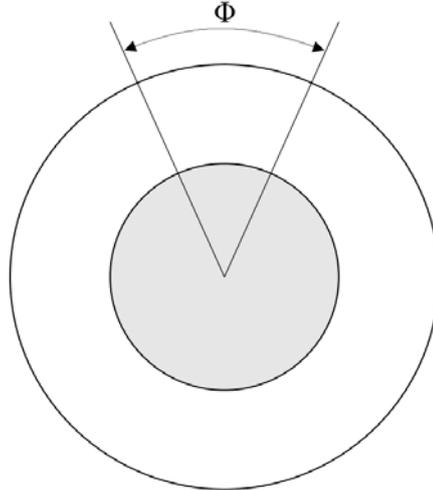


Figura 15.15 Condição de compatibilidade.

Portanto, a condição de compatibilidade pode ser explicitada como:

$$\frac{T_2 \cdot L}{\frac{\pi}{2} \left[ (10 \cdot 10^{-2})^4 - (5 \cdot 10^{-2})^4 \right] \cdot 1,2 \cdot 10^8} = \frac{T_1 \cdot L}{\frac{\pi}{2} (5 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 3,8 \cdot 10^8}$$

$$\frac{T_2}{17671,459} = \frac{T_1}{3730,641} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 4,73684T_1$$

Resolvendo as equações de compatibilidade e equilíbrio conjuntamente obtêm-se:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = 250 \\ 4,73684T_1 - T_2 = 0 \end{cases}$$

Matricialmente este sistema fica assim definido:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4,73684 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 250 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43,578 \\ 206,422 \end{Bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sabendo que a variação das tensões de cisalhamento é linear no plano da seção transversal, tem-se que a tensão de cisalhamento máxima no material 1 é dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{43,578 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi}{2} (5 \cdot 10^{-2})^4} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = 221940,93 \text{ kN/m}^2 = 221,940 \text{ MPa}$$

A tensão de cisalhamento mínima no material 1 é igual a zero e atua no centro de gravidade da seção transversal. Para o material 2, deve-se determinar as tensões de cisalhamento máximas e mínimas atuantes. Assim, a tensão de cisalhamento mínima é dada por:

$$\tau_{\min} = \frac{206,422 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi}{2} \left[ (10 \cdot 10^{-2})^4 - (5 \cdot 10^{-2})^4 \right]} \Rightarrow \tau_{\min} = 70086,574 \text{ kN/m}^2 = 70,086 \text{ MPa}$$

Já a tensão de cisalhamento máxima é dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{206,422 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi}{2} \left[ (10 \cdot 10^{-2})^4 - (5 \cdot 10^{-2})^4 \right]} \Rightarrow \tau_{\max} = 140173,148 \text{ kN/m}^2 = 140,173 \text{ MPa}$$

Assim, a distribuição das tensões de cisalhamento para o problema em análise é a mostrada na Fig. (15.16).

A descontinuidade da tensão de cisalhamento observada na interface entre os materiais é esperada devido à diferença entre os valores dos módulos de elasticidade transversal dos materiais envolvidos na constituição da estrutura. Apesar da descontinuidade em  $\tau$  na interface, a deformação neste conjunto de pontos é a mesma, indicando, portanto, a continuidade do corpo. A continuidade nas deformações indica que os materiais deformam-se conjuntamente sob a ação do carregamento externo. A deformação na interface é dada por:

$$\begin{aligned} \tau &= G\gamma \\ \gamma^1 &= \frac{221940,0}{3,8 \cdot 10^8} \Rightarrow \gamma^1 = 5,84052 \cdot 10^{-4} \\ \gamma^2 &= \frac{70086,0}{1,2 \cdot 10^8} \Rightarrow \gamma^2 = 5,84052 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

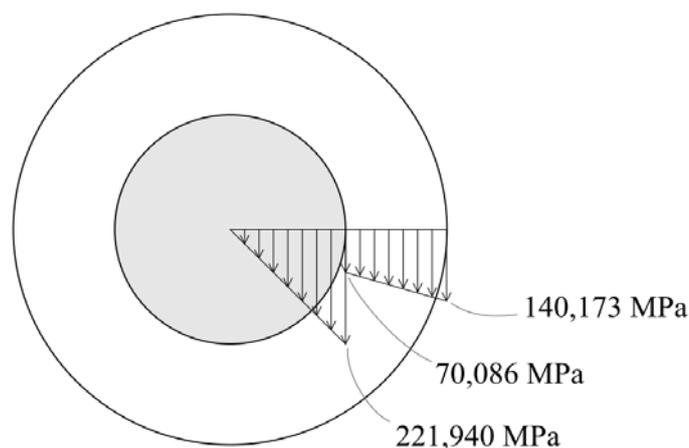


Figura 15.16 Distribuição das tensões cisalhantes.

### 15.12 – Torção em Barras de Seção Transversal Retangular e Quadrada

Até o presente momento, foram obtidas as equações que relacionam as tensões de cisalhamento e a rotação da seção transversal ao momento de torção atuante em barras de seção transversal circular. Estas equações foram obtidas assumindo-se que as seções transversais localizadas ao longo do eixo da barra mantêm-se planas e com a mesma forma após a atuação do momento de torção. Portanto, assume-se que os efeitos do empenamento da seção transversal são desprezíveis. Essa hipótese é válida graças à axissimetria da seção transversal (simetria em relação ao eixo da barra). Porém deve-se perguntar: o que ocorre em seções transversais não axissimétricas submetidas a esforços de torção?

Para ilustrar os efeitos da ausência de axissimetria, deve-se considerar uma barra de seção transversal quadrada submetida a um momento de torção, conforme mostrado na Fig. (15.17). Verifica-se que as linhas que definem as diagonais da seção transversal da barra e as linhas que ligam os pontos médios dos lados dessas diagonais mantêm-se retas após a deformação. No entanto, qualquer outra linha do corpo se deformará. Dessa forma, os efeitos do empenamento da seção transversal não podem ser desprezados, como apresenta a Fig. (15.18).

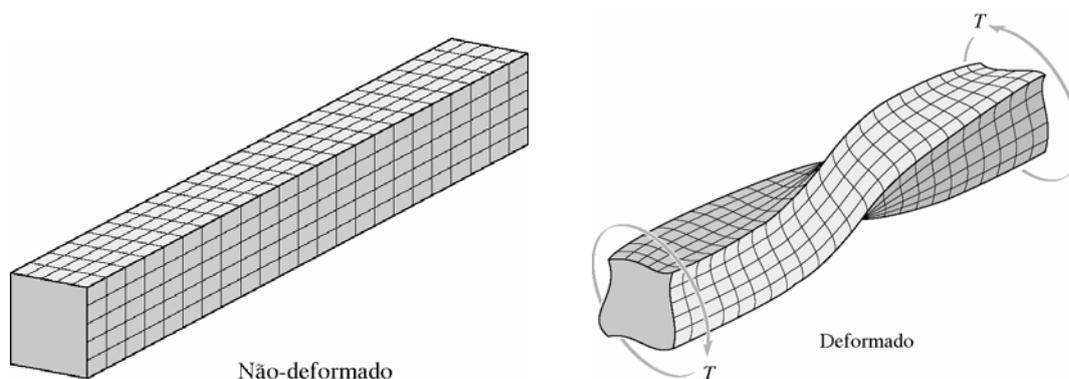


Figura 15.17 Configurações indeformada e deformada.

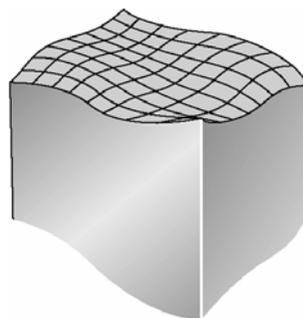


Figura 15.18 Empenamento da seção transversal.

Assim, novas equações devem ser deduzidas para a determinação da tensão de cisalhamento e do ângulo de giro para barras de seção transversal retangular e quadrada. Ao contrário das barras de seção transversal circular, nas barras de seção transversal retangular e quadrada as tensões de cisalhamento são nulas nos pontos mais distantes do centro de gravidade da seção. Para compreender esse fato, deve-se considerar, inicialmente, um elemento de dimensões infinitesimais localizado no vértice da seção transversal de uma barra retangular submetida a um momento de torção. Esse elemento está ilustrado na Fig. (15.19), sendo que adota-se um sistema de coordenadas cartesianas, onde cada eixo cartesiano é perpendicular a uma das arestas do cubo.

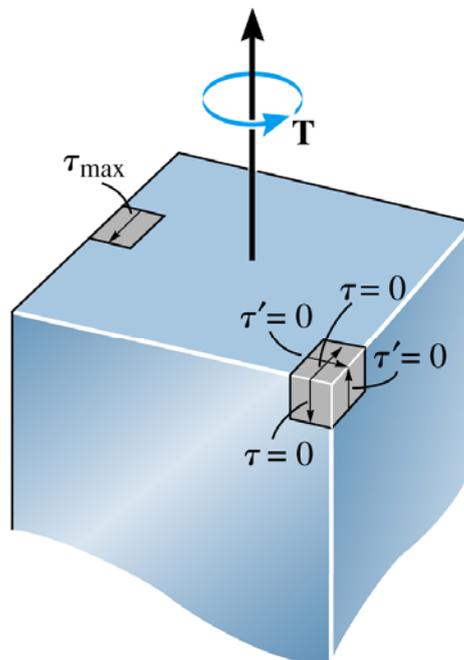


Figura 15.19 Elemento infinitesimal e estado de tensão atuante.

Como essas arestas estão na superfície da barra e nenhuma força de superfície é aplicada sobre a barra, as tensões de cisalhamento nessas regiões devem ser nulas. Portanto, o estado de tensão nessa região é dado por:

$$\begin{aligned}
 \tau_{yx} &= 0 & \tau_{yz} &= 0 \\
 \tau_{zx} &= 0 & \tau_{zy} &= 0 \\
 \tau_{xy} &= 0 & \tau_{xz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{15.16}$$

Com base na observação da configuração deformada da barra, Fig. (15.17) e Fig. (15.18), intuitivamente percebe-se que as maiores tensões de cisalhamento estarão

atuando no centro de cada uma das faces da barra, uma vez que é nessa região onde observam-se as maiores distorções.

A demonstração da equação que relaciona as tensões de cisalhamento ao momento de torção em barras de seção transversal retangular e quadrada requer conhecimentos apresentados em teorias mais avançadas como a *Teoria da Elasticidade*, sendo, portanto, além do escopo desse curso. Como a dedução do equacionamento desse problema requer um conhecimento mais avançado, apresentam-se neste texto as expressões para o cálculo da tensão máxima de cisalhamento e do ângulo de torção de uma barra de eixo reto com seção transversal retangular constante atuando em regime elástico, como mostra a Fig. (15.20). Essas expressões estão escritas nas Eq.(15.17) e Eq.(15.18).

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{c_1 ab^2} \quad (15.17)$$

$$\phi = \frac{M_T L}{c_2 ab^3 G} \quad (15.18)$$

sendo que os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  dependem da relação  $a/b$ , podendo ser encontrados na Tabela 15.1. Os parâmetros  $a$  e  $b$  referem-se à maior e à menor dimensões da seção transversal, respectivamente.

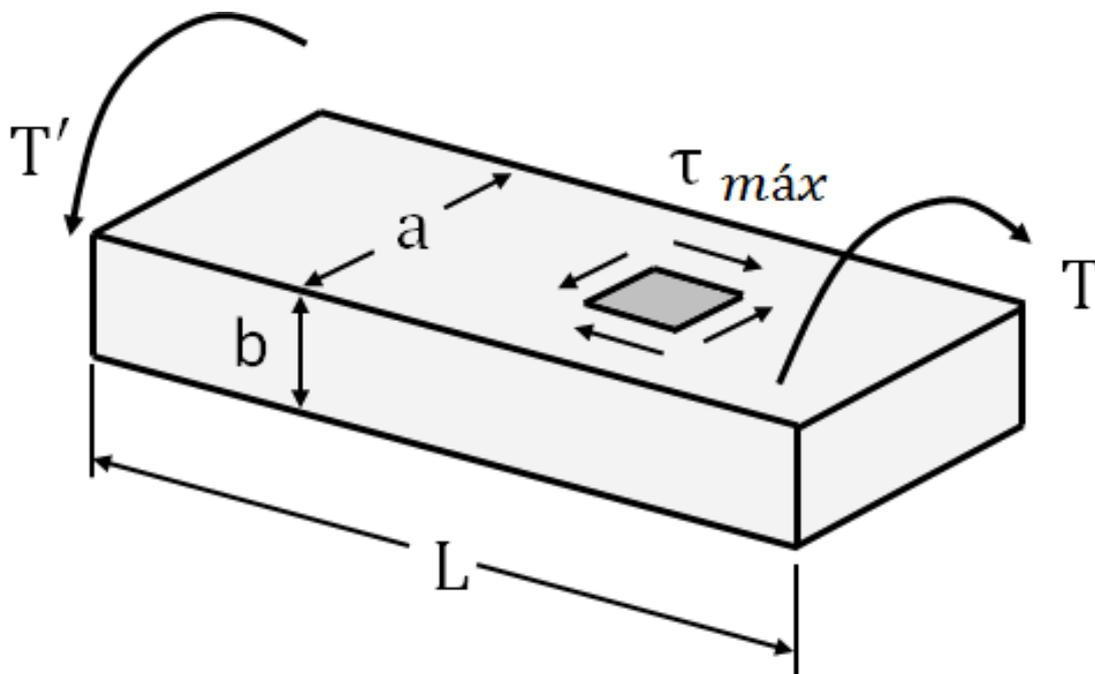


Figura 15.20 Barra de seção transversal retangular constante.

Tabela 15.1 Determinação dos coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ .

$a/b$	$c_1$	$c_2$
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
$\infty$	0,333	0,333

### 15.13 – Exemplo 6

As duas barras ilustradas na Fig. (15.21) estão submetidas à ação de um momento de torção de intensidade igual a  $M_T = 1800 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Sendo  $G = 26 \text{ GPa}$ , determine as tensões de cisalhamento máximas em cada uma das barras e o ângulo de rotação dessas no ponto B.

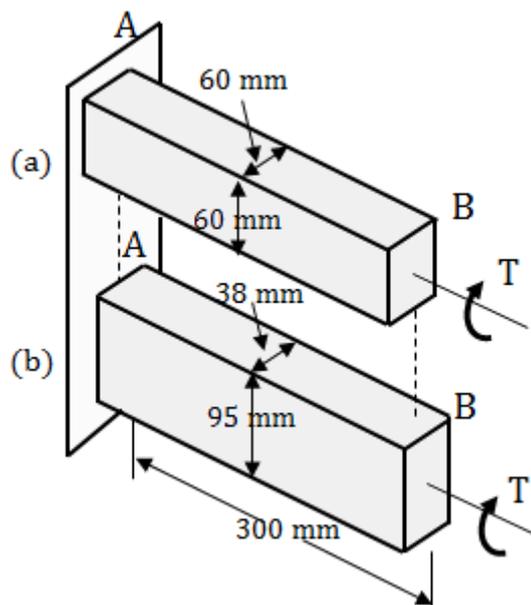


Figura 15.21 Barras a serem analisadas.

A barra  $a$  é uma barra de seção transversal quadrada. Assim, nessa barra  $a = b = 60$ , que segundo a Tabela 15.1 conduz a:

$$\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0,208 \\ c_2 = 0,1406 \end{cases}$$

Aplicando as Eq.(15.17) e Eq.(15.18) obtém-se:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{c_1 ab^2} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{1800}{0,208 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot (60 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 40,06 \text{ MPa}$$

$$\phi = \frac{M_T L}{c_2 ab^3 G} \Rightarrow \phi = \frac{1800 \cdot 300 \cdot 10^{-3}}{0,1406 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot (60 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 26 \cdot 10^9} \Rightarrow$$

$$\phi = 0,0114 \text{ rad} = 0,653^\circ$$

Já na barra  $b$ , observa-se que  $a = 95$  e  $a = 38$ . De acordo com o apresentado na Tabela 15.1 tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{95}{38} = 2,5 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0,258 \\ c_2 = 0,249 \end{cases}$$

Utilizando-se as Eq.(15.17) e Eq.(15.18) tem-se:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{c_1 ab^2} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{1800}{0,258 \cdot 95 \cdot 10^{-3} \cdot (38 \cdot 10^{-3})^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 50,86 \text{ MPa}$$

$$\phi = \frac{M_T L}{c_2 ab^3 G} \Rightarrow \phi = \frac{1800 \cdot 300 \cdot 10^{-3}}{0,249 \cdot 95 \cdot 10^{-3} \cdot (38 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 26 \cdot 10^9} \Rightarrow$$

$$\phi = 0,016 \text{ rad} = 0,917^\circ$$

### 15.14 – Eixos Vazados de Seções Transversais de Paredes Finas

Após serem determinadas as equações que resultam a tensão de cisalhamento máxima e o ângulo de rotação de barras com seções transversais retangulares e quadradas solicitadas à torção, pode-se estudar o caso onde estas estruturas são formadas por seções transversais compostas por elementos de paredes finas, conduzindo ao estudo de seções transversais vazadas.

Com o objetivo de deduzir as equações que permitem a determinação da variação das tensões de cisalhamento nesse problema, deve-se considerar uma barra de

seção transversal não circular vazada de paredes finas, mostrada na Fig. (15.22), cuja espessura da parede seja  $t$ . A espessura da parede pode variar nas diversas paredes que compõem a seção transversal. Porém, esta deve ser pequena o bastante se comparada a altura da parede (aproximadamente 10 vezes menor é suficiente).

Assumindo que a barra esteja em equilíbrio, cada componente material que forma a barra deverá também estar em equilíbrio. Assim, isolando um elemento infinitesimal dessa barra, como mostrado na Fig. (15.22), cujo comprimento circunferencial é igual a  $s$ , comprimento longitudinal igual a  $dx$  e espessura  $t$ , este elemento estará submetido a duas forças equivalentes de intensidades iguais a  $F_A$  e  $F_B$ , atuantes em suas faces A e B, as quais decorrem das tensões de cisalhamento atuantes nessas faces. Estas que devem estar em equilíbrio estático. Portanto:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A - F_B = 0 \quad (15.19)$$

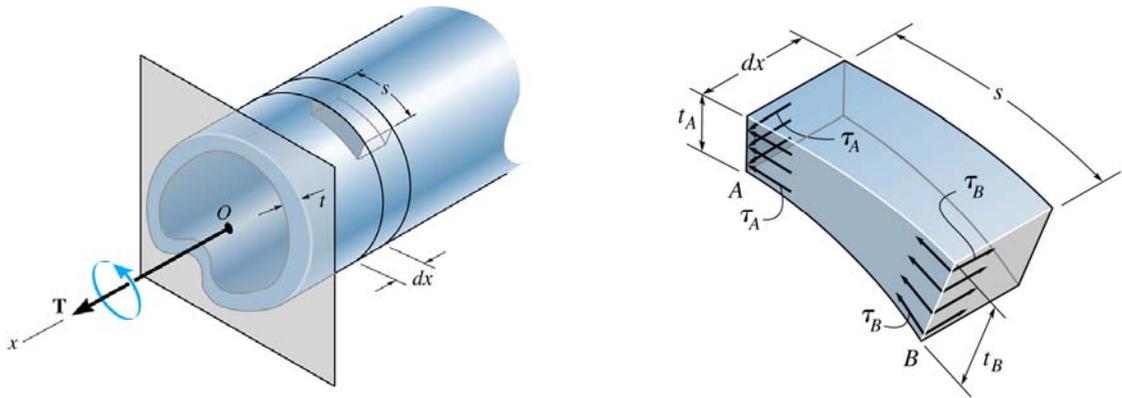


Figura 15.22 Barra de seção não circular vazada de paredes finas. Equilíbrio elemento AB.

De acordo com o apresentado na Fig. (15.22), verifica-se facilmente que as áreas das faces A e B do elemento infinitesimal são dadas por  $t_A dx$  e  $t_B dx$ , respectivamente. Sendo  $\tau_A$  e  $\tau_B$  as tensões de cisalhamento atuantes nas faces A e B, respectivamente, pode-se exprimir as forças  $F_A$  e  $F_B$  da seguinte forma:

$$F_A = \tau_A (t_A dx) \quad F_B = \tau_B (t_B dx) \quad (15.20)$$

Substituindo o resultado obtido na Eq.(15.20) na Eq.(15.19) obtém-se:

$$\tau_A (t_A dx) - \tau_B (t_B dx) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_A t_A = \tau_B t_B \quad (15.21)$$

Portanto, o produto entre a tensão de cisalhamento e a espessura da parede é constante ao longo da barra. Por conveniência, define-se que esse produto seja igual a  $q$ , grandeza denominada fluxo de cisalhamento. Assim:

$$q = \tau t \quad (15.22)$$

Tomando agora uma porção do elemento AB apresentado na Fig. (15.22), pode-se chegar a uma interessante conclusão. Separando uma porção de AB, conforme indicado na Fig. (15.23), observa-se que as tensões de cisalhamento nas faces superior e inferior do elemento são nulas, uma vez que estas faces fazem parte da superfície da barra, sendo, portanto, livres de forças de superfície aplicadas. Portanto, a tensão de cisalhamento em qualquer ponto de uma barra de seção transversal vazada de paredes finas submetida à torção é paralela à superfície da parede, como mostra a Fig. (15.23), e seu valor médio,  $\tau_{AVG}$ , é calculado pela Eq.(15.22).

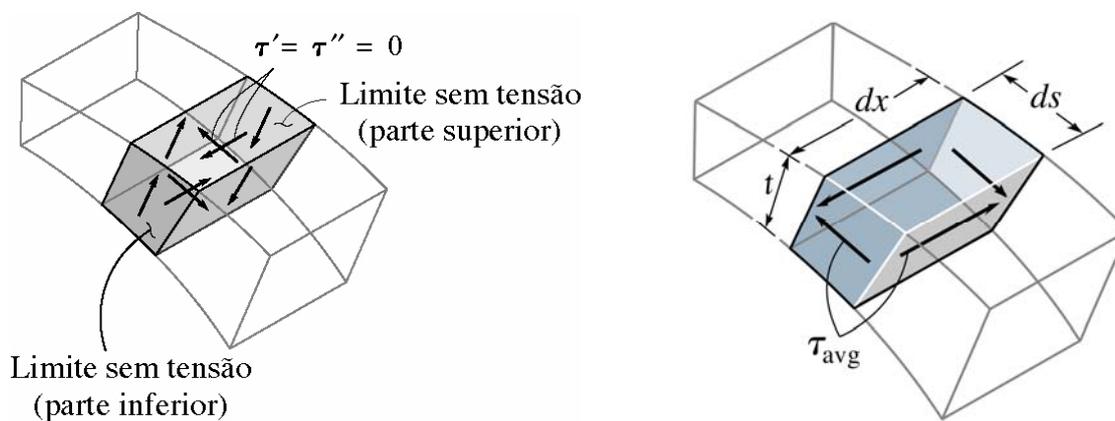


Figura 15.23 Porção de AB. Tensão de cisalhamento em um ponto qualquer da seção transversal.

Para a obtenção da relação entre o momento de torção,  $M_T$ , e o fluxo de cisalhamento,  $q$ , deve-se considerar um elemento infinitesimal pertencente à parede da seção transversal, como indicado na Fig. (15.24). Sendo  $ds$  o comprimento do elemento,  $t$  sua espessura,  $dF$  a força exercida nessa porção material e  $h$  a distância perpendicular entre dois eixos passando pelo centro de gravidade do elemento e um ponto  $O$ , que indica o centro de gravidade da seção transversal, determinam-se a área dessa porção material e a força nela atuante da seguinte maneira:

$$dA = tds \quad (15.23)$$

$$dF = \tau dA \quad \Rightarrow \quad dF = \tau(tds) \quad \Rightarrow \quad dF = qds \quad (15.24)$$

Já o momento gerado pela força  $dF$  em relação ao ponto  $O$  é dado por:

$$dM = h dF \quad \Rightarrow \quad dM = h(qds) \quad \Rightarrow \quad dM = q(hds) \quad (15.25)$$

Com base no conhecimento de identidades trigonométricas básicas, constata-se que o produto  $hds$  é igual a duas vezes o valor da área delimitada pelo triângulo

definido pelos extremos do elemento  $ds$  e pelo ponto  $O$ . Portanto, pode-se reescrever a Eq.(15.25) como:

$$dM = q(2dA_m) \quad (15.26)$$

sendo  $dA_m$  igual a área média contida no contorno da linha central da espessura da seção transversal de paredes finas vazada. Esse parâmetro pode ser visualizado na Fig. (15.25).

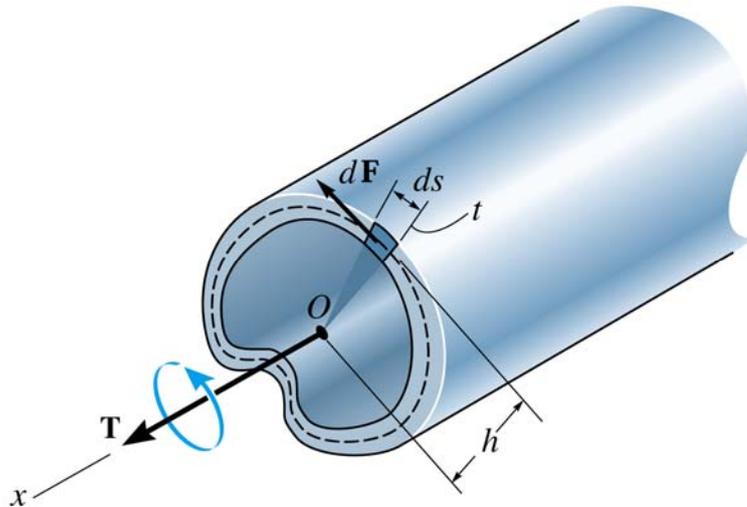


Figura 15.24 Elemento infinitesimal da parede da seção.

Para que a condição de equilíbrio seja satisfeita, o momento de torção aplicado deve ser igual ao somatório dos  $dM$  atuantes em todos os elementos que compõem a seção vazada de parede fina. Assim:

$$M_T = \int dM \quad \Rightarrow \quad M_T = \int q(2dA_m) \quad (15.27)$$

Como  $q$  é constante ao longo da espessura da parede fina, pode-se simplificar a equação anterior da seguinte forma:

$$M_T = 2qA_m \quad (15.28)$$

Substituindo a Eq.(15.22) na Eq.(15.28) determina-se a tensão de cisalhamento em qualquer ponto localizado ao longo da parede fina da seção transversal por meio da seguinte equação:

$$M_T = 2\tau t A_m \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_T}{2tA_m} \quad (15.29)$$

O giro da seção transversal é calculado com base na hipótese de que a tensão de cisalhamento seja constante ao longo da espessura da parede fina. Assim, pela lei de Hooke, a deformação distorcional paralela à parede final é definida como:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \Rightarrow \gamma = \frac{M_T}{2tA_m G} \quad (15.30)$$

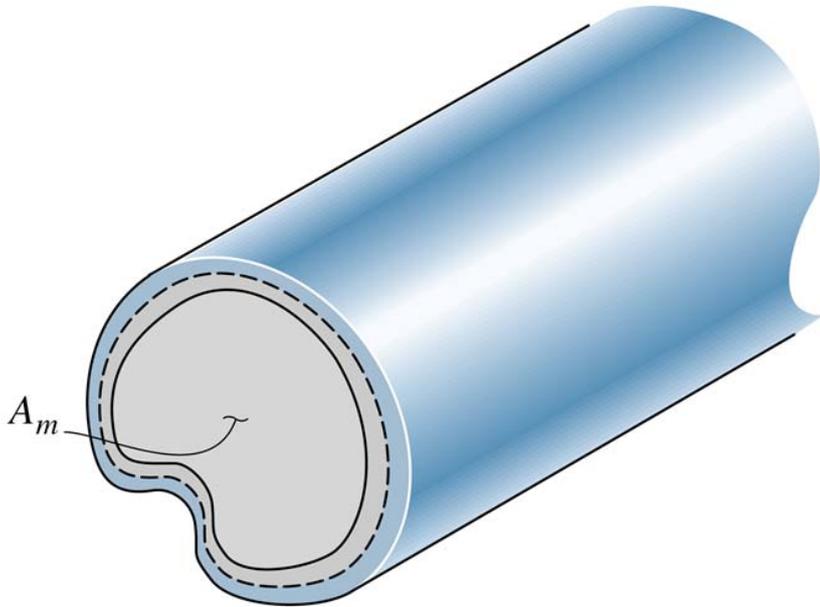


Figura 15.25 Área definida pelo contorno médio de uma seção transversal de paredes finas vazada.

Assumindo a validade do regime de pequenos deslocamentos, o arco de comprimento  $ds$ , apresentado na Fig. (15.24), é dado por:  $ds = \gamma dx$  ou  $d\phi h$ , sendo  $d\phi$  o diferencial de giro da seção transversal. Esta constatação decorre da compatibilidade geométrica apresentada pela Eq.(15.3), a qual tem como base a condição apresentada na Fig. (15.3). Portanto, com base nessas duas constatações, pode-se relacionar o giro da seção transversal ao momento de torção da seguinte forma:

$$ds = \gamma dx = \frac{M_T dx}{2tA_m G} \quad ; \quad ds = d\phi h \quad \therefore \quad d\phi h = \frac{M_T dx}{2tA_m G} \quad (15.31)$$

Integrando a Eq.(15.31) ao longo do perímetro da seção transversal obtém-se uma expressão que permite a determinação do giro médio da seção transversal em função do momento de torção aplicado. Assim:

$$\oint_s d\phi h ds = \frac{M_T dx}{2A_m G} \oint_s \frac{1}{t} ds \quad \Rightarrow \quad d\phi \oint_s h ds = \frac{M_T dx}{2A_m G} \oint_s \frac{1}{t} ds \quad (15.32)$$

Como mostrado anteriormente, tem-se que  $\oint_s h ds = 2A_m$ . Portanto:

$$d\phi = \frac{M_T dx}{4A_m^2 G} \left[ \int \frac{ds}{t} \right] \quad (15.33)$$

sendo  $G$  o módulo de elasticidade transversal.

Finalmente, o giro de uma barra solicitada por um momento de torção é obtido somando-se os giros de todas as seções transversais que a compõem. Portanto, integrando a Eq.(15.33) ao longo do comprimento da barra obtém-se:

$$\phi = \int_L \frac{M_T}{4A_m^2 G} \left( \int \frac{ds}{t} \right) dx \quad (15.34)$$

A integral apresentada na Eq.(15.34) deve ser calculada levando-se em consideração a variação das dimensões da seção transversal e a variação do momento de torção atuante na barra. Caso todas as grandezas envolvidas no problema sejam constantes, a última integral torna-se igual a:

$$\phi = \frac{M_T L}{4A_m^2 G} \left[ \int \frac{ds}{t} \right] \quad (15.35)$$

Assim, as Eq.(15.34) e Eq.(15.35) permitem a determinação de giros em barras vazadas compostas por elementos de paredes finas.

### 15.15 – Exemplo 7

Um momento de torção de intensidade igual a  $6,8 kNm$  está aplicado em uma barra de seção transversal vazada composta por elementos de paredes finas. A geometria da seção transversal assim como suas dimensões estão apresentadas na Fig. (15.26). Com base nessas informações, determine as intensidades das tensões de cisalhamento atuantes nos pontos  $a$  e  $b$  mostrados na Fig. (15.26).

Para a solução deste exemplo, deve-se, inicialmente, determinar o valor de  $A_m$ . Sabe-se que esta variável refere-se à área da seção transversal calculada considerando-se as dimensões médias dos elementos de paredes finas. Dessa forma:

$$A_m = \left( 150 - 2 \frac{12,7}{2} \right) \left( 100 - 2 \frac{6,3}{2} \right) \Rightarrow A_m = 12865,01 mm^2 \Rightarrow$$

$$A_m = 1,286501 \cdot 10^{-2} m^2$$

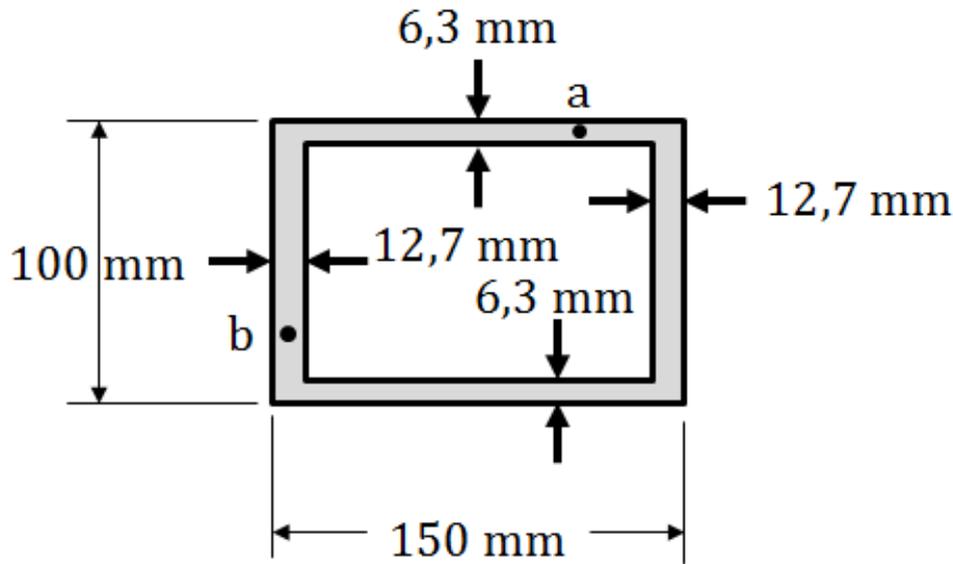


Figura 15.26 Seção transversal analisada.

Para o ponto  $a$ , a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_a = \frac{6,8}{2 \cdot 6,3 \cdot 10^{-3} \cdot 1,286501 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \tau_a = 41,949 \text{ MPa}$$

Já para o ponto  $b$ , a tensão de cisalhamento é igual a:

$$\tau_b = \frac{6,8}{2 \cdot 12,7 \cdot 10^{-3} \cdot 1,286501 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \tau_b = 20,809 \text{ MPa}$$

### 15.16 – Exemplo 8

Determine o momento de torção máximo que pode ser aplicado à barra apresentada na Fig. (15.27), a qual é uma barra de seção transversal triangular vazada com espessura de parede igual a 5 mm e módulo de elasticidade transversal igual a 75 GPa, sabendo que a tensão de cisalhamento admissível do material que a compõe é igual a 90 MPa. Para esse valor de momento máximo, determine o ângulo de rotação da seção transversal localizada na extremidade da barra.

Para a resolução desse exemplo, deve-se, inicialmente, determinar o valor da área definida pelo contorno médio das paredes finas que compõem a seção transversal da barra em análise.

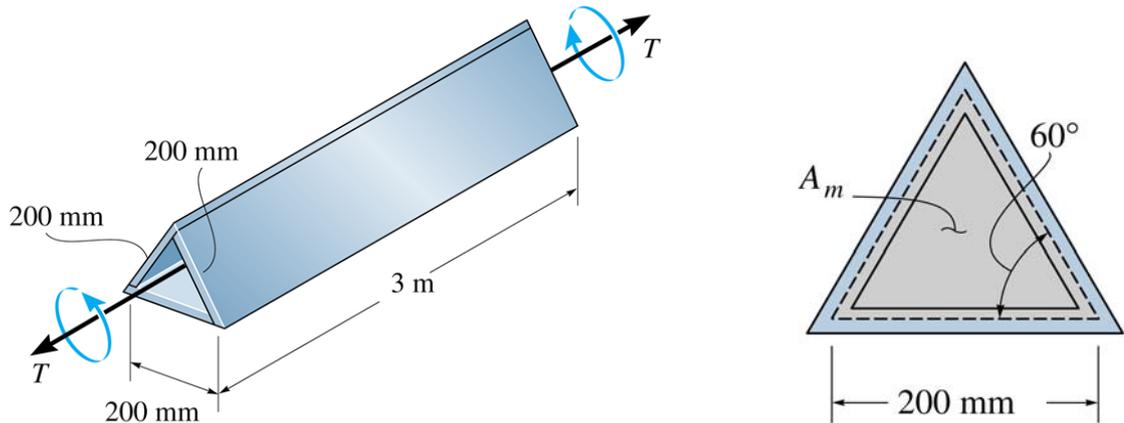


Figura 15.27 Estrutura a ser analisada e seção transversal.

Segundo as dimensões apresentadas na Fig. (15.27) tem-se:

$$A_m = 200 \left[ 200 \cdot \sin(60^\circ) \right] \frac{1}{2} \Rightarrow A_m = 17320,51 \text{ mm}^2 \Rightarrow A_m = 1,732051 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

Aplicando a Eq.(15.29) obtêm-se:

$$90 \cdot 10^3 = \frac{M_T}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,732051 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow M_T = 15,558 \text{ kNm}$$

Já o ângulo de rotação da seção é dado pela Eq. (15.33). Como a espessura das paredes que compõem a seção transversal da barra é constante, a integral de contorno que surge nessa equação resulta simplesmente no perímetro médio da seção. Assim:

$$\phi = \frac{M_T L}{4 A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} \Rightarrow \phi = \frac{M_T L}{4 A_m^2 G t} \oint ds \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{15,558 \cdot 3}{4 \cdot (1,732051 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 75 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} (3 \cdot 200 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \phi = 6,2355 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

### 15.17 – Exemplo 9

Determine a tensão de cisalhamento média atuante nos pontos A e B da seção transversal vazada simétrica mostrada na Fig. (15.28) sabendo que a espessura da parede é igual a 5,0 mm. Em seguida, considerando que a barra esteja submetida a um momento de torção constante ao longo de seu comprimento, determine o ângulo de rotação da seção transversal da extremidade dessa barra sabendo que seu comprimento é igual a 3,0 m e que o módulo de elasticidade transversal do material é igual a 75 GPa.

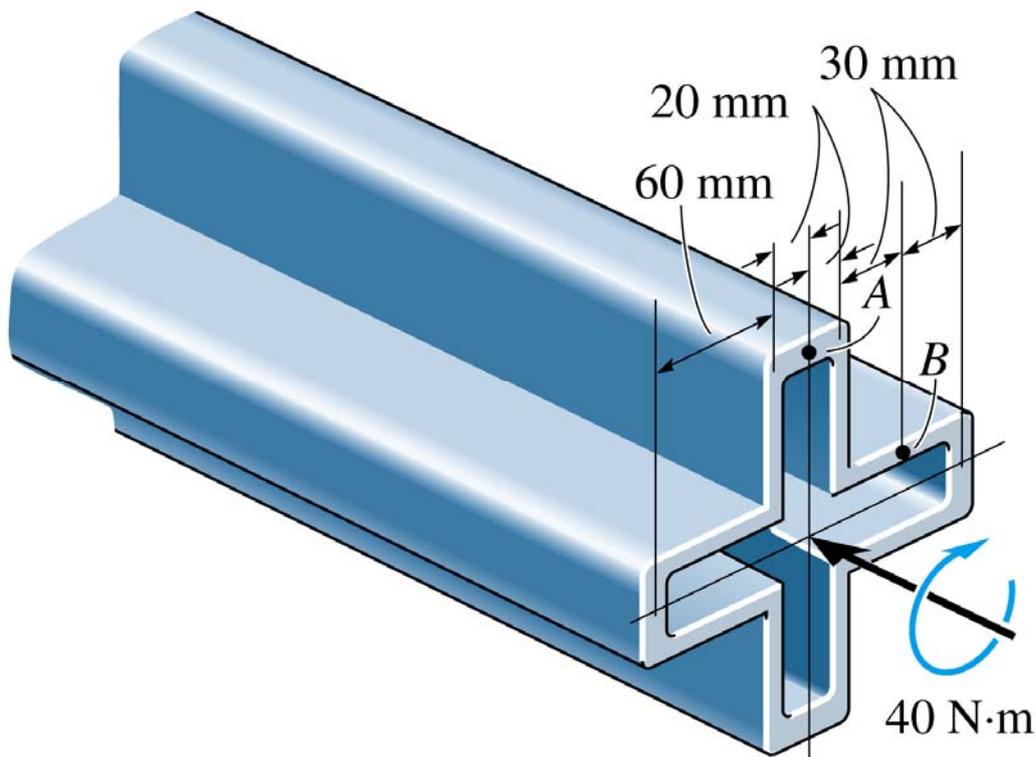


Figura 15.28 Estrutura a ser analisada.

Para a determinação da tensão de cisalhamento atuante nos pontos desejados deve-se calcular o valor de  $A_m$ . Com base nas dimensões apresentadas na Fig. (15.28) obtêm-se:

$$A_m = 160 \cdot 160 - 4 \cdot 60 \cdot 60 \Rightarrow A_m = 11200 \text{ mm}^2 \Rightarrow A_m = 1,12 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

Aplicando a Eq.(15.29), as tensões de cisalhamento nos pontos A e B são iguais devido à espessura uniforme da parede que compõe a seção transversal. Assim:

$$\tau_A = \tau_B = \frac{40}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,12 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \tau_A = \tau_B = 357,142 \text{ kPa}$$

O ângulo de rotação da seção é calculado considerando-se a Eq. (15.33). Assim como no exemplo anterior, a espessura das paredes que compõem a seção transversal da barra é constante. Portanto, a integral de contorno que surge nessa equação resulta simplesmente no perímetro médio da seção. Dessa forma:

$$\phi = \frac{M_T L}{4 A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} \Rightarrow \phi = \frac{M_T L}{4 A_m^2 G t} \oint ds \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{40 \cdot 3}{4 \cdot (1,12 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 75 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} (8 \cdot 60 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 40 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow$$

$$\phi = 6,3776 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

### 15.18 – Exemplo 10

Para a montagem de uma estrutura que vai receber o momento de torção igual a 1000 kN.cm, estão disponíveis barras de aço de diâmetros iguais a 19 mm, 25 mm e 38 mm. Qual o menor diâmetro de barra de aço que pode ser utilizado. Dados: Eixo:  $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\tau_{\text{máx}} = 10 \text{ kN/cm}^2$ , espessura dos elementos de parede fina 0,5 cm. Barras:  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_{\text{máx}} = 15 \text{ kN/cm}^2$ .

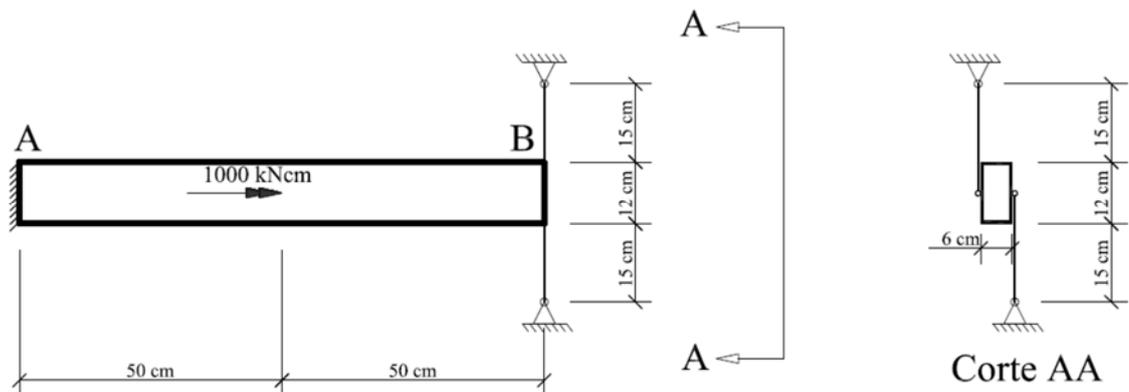


Figura 15.29 Estrutura a ser analisada.

Para a resolução deste exemplo deve-se expressar a intensidade do esforço solicitante no eixo (momento de torção) em função dos esforços normais presentes nos elementos de barra simples. Assumindo que a seção transversal onde estão conectados os elementos de barra simples apresente rotação no sentido anti-horário (mesmo sentido do momento de torção externo aplicado), serão observados esforços normais de tração nos elementos de barra simples, conforme apresentado na Fig. (15.30), uma vez que estes elementos serão alongados. Conseqüentemente, pela terceira lei de Newton, estes elementos estruturais introduzirão um momento de torção negativo de intensidade igual a  $M_B$  na seção transversal do extremo direito do eixo, como indicado na Fig. (15.30).

Pode-se a determinação do momento de torção atuante nesta seção transversal, assim como o valor de seu giro, pode-se utilizar a ilustração apresentada na Fig. (15.30). Assim:

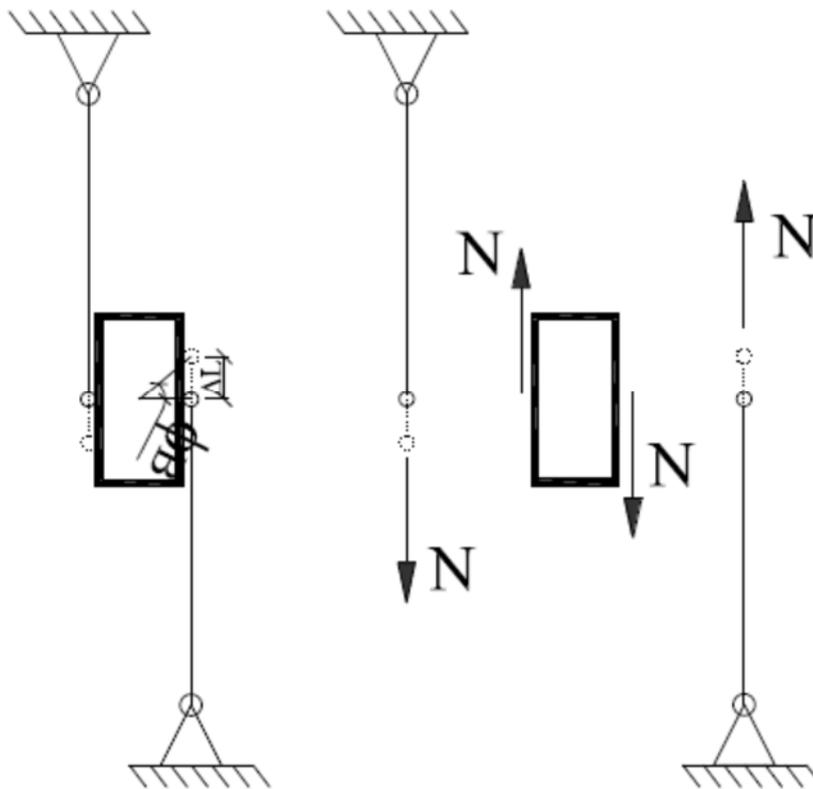


Figura 15.30 Giro na seção transversal do extremo direito. Esforços normais nas barras de treliça.

$$M_B = 2 \cdot N \cdot 3 \Rightarrow M_B = 6N$$

$$\Delta L = \phi_B \cdot 3 \Rightarrow \phi_B = \frac{\Delta L}{3} \Rightarrow \phi_B = \frac{NL}{3EA}$$

Portanto, o seguinte diagrama de corpo livre é obtido:

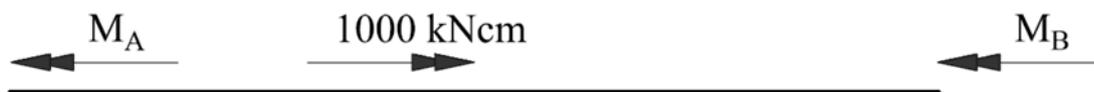


Figura 15.31 Diagrama de corpo livre.

Deve-se enfatizar que o momento de torção reativo do apoio A foi escolhido com o sentido apresentado na Fig. (15.31) (sentido positivo) para que seja possível observar uma rotação no sentido anti-horário das seções transversais do eixo analisado, conforme a hipótese assumida anteriormente, na construção das ilustrações da Fig. (15.30). Com base no diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (15.31) pode-se construir o seguinte diagrama de momento de torção do eixo, o qual é ilustrado na Fig. (15.32).

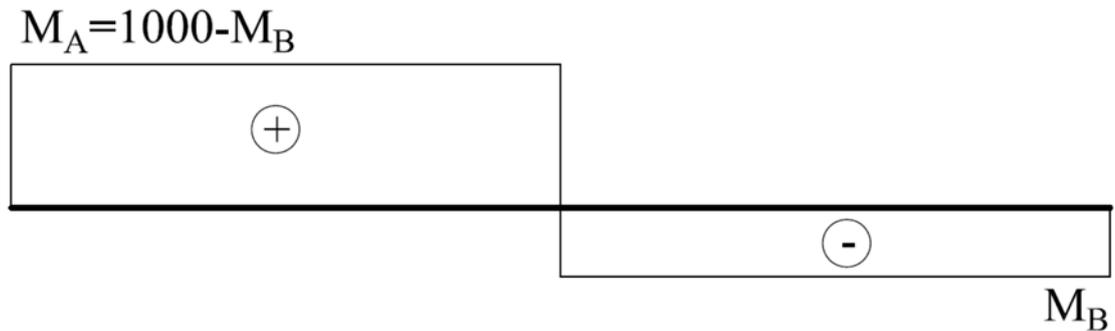


Figura 15.32 Diagrama de momento de torção.

A equação de compatibilidade do problema pode ser facilmente escrita considerando que a somatória das rotações das seções transversais do eixo deve ser igual a  $\phi_B$ . Portanto, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}\phi_{eixo} &= \phi_B \\ \frac{M_T L}{4A_m^2 G} \int \frac{ds}{t} &= \frac{NL}{3EA} \\ \phi_{eixo} &= \frac{(1000 - M_B) 50}{4(5,5 \cdot 11,5)^2 8000} \left( \frac{6}{0,5} + \frac{12}{0,5} + \frac{6}{0,5} + \frac{12}{0,5} \right) + \\ &\frac{-M_B \cdot 50}{4(5,5 \cdot 11,5)^2 8000} \left( \frac{6}{0,5} + \frac{12}{0,5} + \frac{6}{0,5} + \frac{12}{0,5} \right) \Rightarrow 2,8121 \cdot 10^{-2} - 5,6242 \cdot 10^{-5} M_B \\ \phi_B &= \frac{N \cdot 21}{3 \cdot 21000 \cdot A} \Rightarrow \phi_B = 3,333 \cdot 10^{-4} \frac{N}{A}\end{aligned}$$

Lembrando que  $M_B = 6N$  tem-se:

$$\begin{aligned}2,8121 \cdot 10^{-2} - 5,6242 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot N &= 3,333 \cdot 10^{-4} \frac{N}{A} \Rightarrow \\ 2,8121 \cdot 10^{-2} - 3,3745 \cdot 10^{-4} N &= 3,333 \cdot 10^{-4} \frac{N}{A}\end{aligned}$$

Assumindo que o diâmetro dos elementos de barra simples seja igual a 19 mm, obtém-se:

$$2,8121 \cdot 10^{-2} - 3,3745 \cdot 10^{-4} N = 3,333 \cdot 10^{-4} \frac{N}{\pi(0,95)^2} \Rightarrow N = 61,803 \text{ kN}$$

Para esta intensidade de esforço normal obtém-se o seguinte valor para a tensão normal nos elementos de barra simples:

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{61,803}{\pi(0,95)^2} \Rightarrow \sigma = 21,798 \text{ kN/cm}^2$$

Como a tensão normal máxima nos elementos de barra simples é igual a 15 kN/cm<sup>2</sup>, constata-se que a barra simples de diâmetro igual a 19 mm não atende ao requisito de resistência mecânica. Portanto, esta opção é descartada.

Considerando que o diâmetro dos elementos de barra simples seja igual a 25 mm, obtém-se:

$$2,8121 \cdot 10^{-2} - 3,3745 \cdot 10^{-4} N = 3,333 \cdot 10^{-4} \frac{N}{\pi(1,25)^2} \Rightarrow N = 69,375 \text{ kN}$$

Para esta intensidade de esforço normal obtém-se o seguinte valor para a tensão normal nos elementos de barra simples:

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{69,375}{\pi(1,25)^2} \Rightarrow \sigma = 14,133 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto, a resistência mecânica dos elementos de barra simples é atendida para esse diâmetro. Resta verificar se o eixo resiste. Lembrando que  $M_B = 6N$ , pode-se determinar os valores dos momentos de torção atuantes na barra da seguinte forma:

$$M_B = 6 \cdot 69,375 \Rightarrow M_B = 416,25 \text{ kNcm}$$

$$M_A = 1000 - M_B \Rightarrow M_A = 1000 - 416,25 \Rightarrow M_A = 583,75 \text{ kNcm}$$

Tomando o máximo valor de momento de torção, pode-se calcular a tensão de cisalhamento máxima como:

$$\tau = \frac{M_T}{2tA_m} \Rightarrow \tau = \frac{583,75}{2 \cdot 0,5 \cdot (5,5 \cdot 11,5)} \Rightarrow \tau = 9,23 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto, a condição de resistência mecânica é também atendida no eixo. Dessa forma, conclui-se que o menor diâmetro de barra simples a ser adotado, dentre as opções fornecidas, é o igual a 25 mm.

## **16. – Formulação Geral da Torção. Analogia de Membrana**

### *16.1 – Formulação do Problema Geral de Torção*

O problema mecânico que será descrito na sequência deste capítulo envolve a torção simples de elementos de barra geral compostos por seções transversais de geometria não circular. Para tal finalidade, considera-se um elemento de barra geral, com seção transversal prismática, submetido apenas à ação de momentos de torção, como mostra a Fig. (16.1).

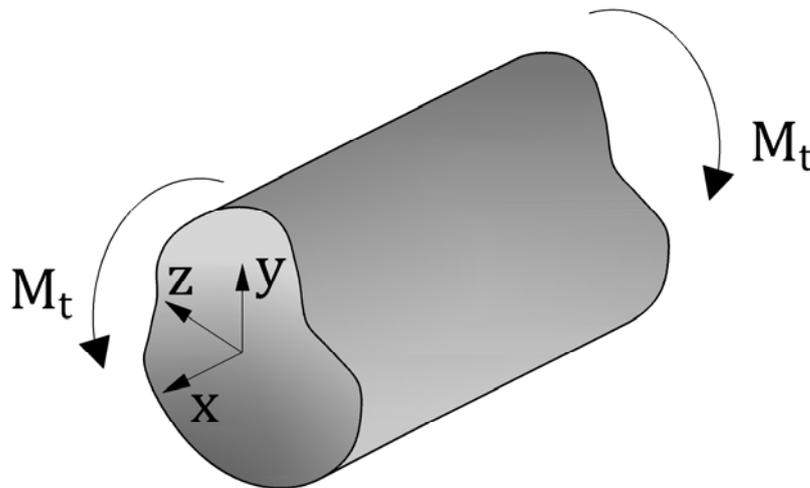


Figura 16.1 Elemento de barra geral submetido a torção simples.

Conforme estudado no capítulo 15, a cinemática desse problema mecânico envolve a rotação relativa,  $\theta(x)$ , entre as seções transversais da barra considerada, provocando deformações distorcionais e, conseqüentemente, tensões de cisalhamento. Para a formulação que será apresentada a seguir, assume-se que o elemento de barra geral obedeça ao regime de pequenas rotações  $\theta(x)$ , de tal maneira que a condição de

equilíbrio da estrutura possa ser efetuada, sem perda significativa de representatividade, na configuração indeformada.

Assumindo que o elemento de barra geral considerado esteja submetido à ação de um momento de torção de intensidade constante ao longo de seu comprimento, verifica-se que o ângulo de rotação das seções transversais depende linearmente da posição da seção transversal em análise em relação à origem do sistema de referência, ou seja,  $\theta(x) = \frac{d\phi}{dx}x$ , sendo  $\frac{d\phi}{dx}$  a taxa de rotação da seção ao longo do comprimento.

Tal conclusão foi obtida no capítulo anterior.

Ainda nesse complexo problema mecânico, observa-se a presença do empenamento da seção transversal devido à ação do momento de torção. Esse efeito faz com que seções transversais, inicialmente planas, deixem de ser planas após a atuação dos carregamentos externos. Assim, deslocamentos orientados na direção paralela ao eixo da barra estarão presentes. Porém, assume-se que o problema seja de torção livre, ou de Saint-Venant, onde tais deslocamentos axiais são permitidos, não gerando, conseqüentemente, esforço interno. Para essa condição, as seguintes hipóteses são consideradas:

a) O giro relativo de uma seção transversal em relação a uma seção de referência é diretamente proporcional a distância entre elas. Assim, é válida a seguinte relação:

$$\theta(x) = \frac{d\phi}{dx}x.$$

b) O empenamento, caso ocorra, poderá apresentar intensidades diferentes para cada ponto que compõe a seção transversal da barra em análise. Portanto, o deslocamento axial,  $u$ , de cada ponto pertencente a seção transversal devido ao efeito do empenamento dependerá unicamente de sua posição no plano da seção transversal, podendo ser escrito como  $u(y, z)$ .

Com base no sistema apresentado na Fig. (16.2), pode-se determinar os deslocamentos  $v$  e  $w$ , ao longo das direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, da seguinte maneira:

$$v = -\phi xz \qquad w = \phi xy \qquad (16.1)$$

Assim, as componentes de deslocamento dos pontos materiais da seção transversal são conhecidas se os valores de  $u(y, z)$  e  $\phi$  forem determinados. O

problema pode ser ainda simplificado se estas duas funções forem relacionadas. Assim,  $u(y, z)$  pode ser definida como uma função de  $\phi$ . Sem perda de generalidade, pode-se considerar que  $u(y, z)$  seja igual ao produto  $k\psi(y, z)$ , sendo  $k$  é uma constante e  $\psi(y, z)$  uma função, não singular, relacionada à geometria da seção transversal. Por facilidade, assume-se que  $k = \phi$ .

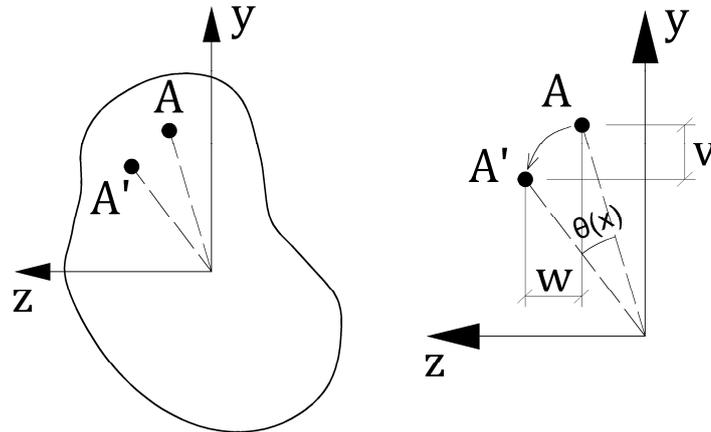


Figura 16.2 Deslocamentos no plano da seção transversal provocados pelo empenamento.

### 16.2 – Componentes de Tensão e Deformação do Problema de Tensão de Saint-Venant

No problema em estudo, como apenas deformações distorcionais e tensões de cisalhamento possuem componentes não nulas, suas intensidades podem ser definidas como:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \gamma_{xy} = \phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \\ \gamma_{xz} &= \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Rightarrow \gamma_{xz} = \phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \\ \gamma_{yz} &= \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Rightarrow \gamma_{yz} = -\phi x + \phi x = 0\end{aligned}\quad (16.2)$$

Deve-se destacar que as únicas componentes de deformação não nulas estão contidas nos planos  $xy$  e  $xz$ .

Assumindo que o material que compõe o elemento de barra geral analisado possua comportamento mecânico elástico linear, pode-se expressar as tensões de

cisalhamento em função do módulo de elasticidade transversal do material,  $G$ , e das deformações distorcionais usando a lei de Hooke. Dessa forma:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = G\gamma_{xy} &\Rightarrow \tau_{xy} = G\phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right) \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} &\Rightarrow \tau_{xz} = G\phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right) \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} &\Rightarrow \tau_{yz} = 0\end{aligned}\quad (16.3)$$

### 16.3 – Equação de Equilíbrio no Problema de Torção de Saint-Venant

Quando um elemento de barra geral é submetido a uma torção de Saint-Venant surgirão tensões de cisalhamento atuantes nos planos  $xy$  e  $xz$ , como anteriormente apresentado. Se um elemento de dimensões infinitesimais pertencente à uma dada seção transversal dessa barra geral em equilíbrio for isolado, as condições de equilíbrio sobre ele deverão ser observadas. Uma seção transversal geral e um elemento infinitesimal característico estão apresentados na Fig. (16.3).

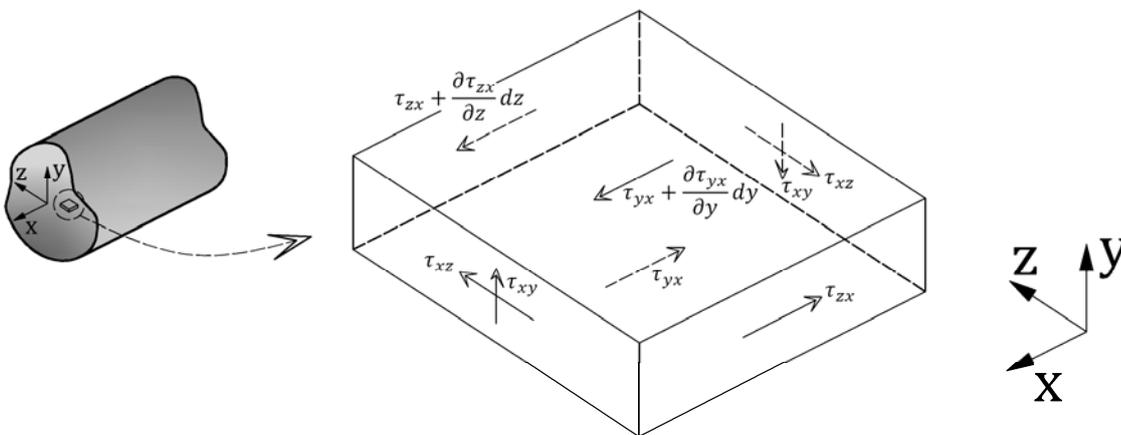


Figura 16.3 Elemento infinitesimal e tensões de cisalhamento. Imposição das condições de equilíbrio.

Considerando que os efeitos do empenamento não gerem esforço solicitante normal, o qual possui orientação paralela ao eixo da barra,  $x$ , pode-se então impor a seguinte equação de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz = 0 \quad (16.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Com base no resultado apresentado na Eq.(16.3), pode-se reescrever esta equação de equilíbrio da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[ G\phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G\phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \right] = 0 \quad (16.5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Deve-se destacar que esta última equação depende unicamente da função  $\psi$ , ou seja, um único parâmetro.

#### 16.4 – Relação entre Esforços Solicitantes e Tensões de Cisalhamento no Problema de Torção de Saint-Venant

No problema mecânico da torção de Saint-Venant, o único esforço solicitante não nulo é o momento de torção. Portanto, as seguintes equações de equilíbrio, referentes ao esforço cortante, deverão ser atendidas:

$$\int_A \tau_{xy} dA = 0$$

$$\int_A \tau_{xz} dA = 0 \quad (16.6)$$

sendo  $A$  a área da seção transversal do elemento de barra geral submetido à torção.

Utilizando as expressões apresentadas na Eq. (16.3), pode-se reescrever a Eq.(16.6) na seguinte forma:

$$\int_A G\phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) dA = 0 \Rightarrow \int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) dA = 0$$

$$\int_A G\phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) dA = 0 \Rightarrow \int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) dA = 0 \quad (16.7)$$

Deve-se enfatizar que as expressões mostradas na Eq.(16.7) envolvem apenas parâmetros relacionados à geometria da seção transversal, sendo de grande utilidade na

determinação das coordenadas de seu centro de cisalhamento. Quando o centro de cisalhamento coincide com o centro de gravidade da seção transversal, os valores  $y$  e  $z$  são nulos.

Considerando agora a condição de equilíbrio para o momento de torção, pode-se escrever, com o auxílio da ilustração apresentada na Fig. (16.4), que:

$$M_t = \int_A (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA \quad (16.8)$$

Considerando as expressões apresentadas na Eq. (16.3) tem-se:

$$M_t = \int_A \left[ G\phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) y - G\phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) z \right] dA \Rightarrow \quad (16.9)$$

$$M_t = G\phi \int_A \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right] dA$$

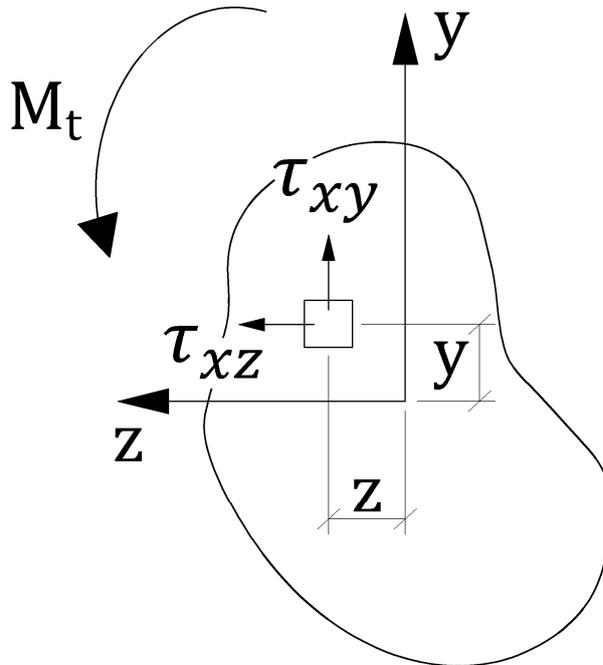


Figura 16.4 Condição de equilíbrio em termos de momento.

Os parâmetros contidos na integral apresentada na Eq. (16.9) dependem apenas da geometria da seção transversal do elemento de barra geral submetido à torção. Destaca-se a presença dos dois últimos termos dessa integral, os quais referem-se aos momentos de inércia da seção transversal em torno dos eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente. A soma desses dois momentos de inércia define uma grandeza denominada de momento

polar de inércia,  $I_t$ , a qual foi já utilizada ao longo do capítulo 15. Assim, pode-se definir que:

$$I_t = \int_A \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right] dA \quad (16.10)$$

Assim, uma vez determinado o valor de  $I_t$ , pode-se calcular a rotação da seção transversal, por unidade de comprimento, utilizando a Eq. (16.9) da seguinte maneira:

$$\phi = \frac{M_t}{I_t G} \quad (16.11)$$

Deve-se mencionar que a rotação apresentada na Eq.(16.11) envolve uma seção transversal específica. Caso seja de interesse na análise a determinação do giro de uma barra geral torcida, a Eq.(16.11) deve ser integrada ao longo do comprimento da barra. Com base no equacionamento apresentado até o presente momento constata-se que para a resolução do problema de torção de Saint-Venant devem ser determinadas a função  $\psi$  e a constante  $\phi$ .  $\psi$  pode ser obtida por meio da Eq. (16.5). No entanto, a integração analítica dessa equação diferencial nem sempre é possível, especialmente se seções transversais de complexa geometria forem consideradas.

Essa função poderá ser obtida indiretamente se a distribuição das tensões de cisalhamento no plano da seção transversal for imposta, como no caso das seções transversais de geometria circular. Porém, uma maneira alternativa para a resolução desse problema mecânico envolve a utilização da analogia de membrana, a qual decorre de uma correspondência formal entre a equação diferencial do problema da torção, Eq.(16.5), e a equação diferencial que descreve o equilíbrio de uma membrana, submetida a uma pressão positiva distribuída em seu interior, em sua configuração deformada. No item seguinte será descrita esta analogia. Membrana é um elemento estrutural submetido a ações externas aplicadas perpendicularmente a seu plano, resistindo apenas a esforços paralelos a seu plano médio. Para maiores detalhes, sugere-se que o leitor consulte o capítulo 1 deste texto.

### 16.5 – Analogia de Membrana

Para que a analogia existente entre o equacionamento dos problemas de equilíbrio de membrana e as tensões de cisalhamento no problema de torção de Saint-

Venant seja determinada, deve-se considerar uma lâmina delgada que ocupa uma dada região no plano  $yz$  tendo seu contorno fixo, como mostra a Fig. (16.5).

Assume-se que a lâmina considerada possua rigidez nula na direção transversal ao seu plano e resista somente a esforços de tração. Nessa situação, a lâmina é denominada membrana. Assume-se ainda que essa membrana esteja submetida a uma pressão interna positiva de intensidade  $P$ , a qual faz com que, em sua condição deformada, a membrana exiba a forma geométrica de uma bolha. Para que o equilíbrio dessa bolha seja observado, deve atuar, ao longo de toda a sua superfície, um esforço de tração de intensidade  $k$ , de tal forma a equilibrar a pressão interna atuante.

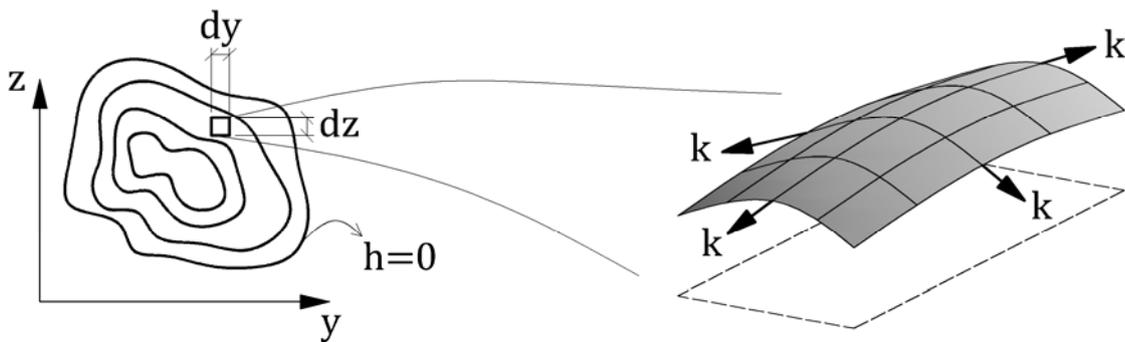


Figura 16.5 Configuração geométrica da membrana.

Considera-se que este esforço de tração seja uniformemente distribuído ao longo do comprimento da superfície da membrana. Impondo que a somatória de forças na direção de atuação da pressão interna seja nula, sobre um elemento de dimensões infinitesimais  $dA = dydz$  pertencente a esta membrana, como mostra a Fig. (16.6), obtém-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$Pdydz - 2kdy \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) - 2kdz \left(\frac{d\beta}{2}\right) = 0 \tag{16.12}$$

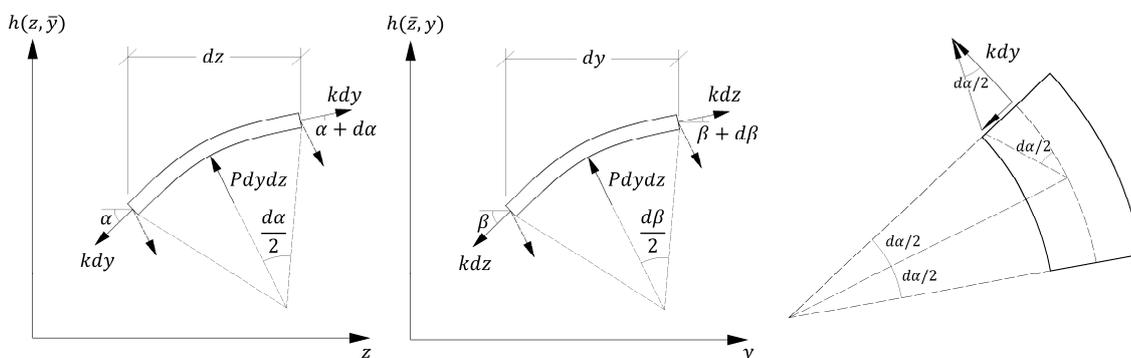


Figura 16.6 Equilíbrio na membrana.

Sendo  $h(y, z)$  a função que descreve a geometria assumida pela membrana em sua configuração deformada, as inclinações de sua superfície segundo as direções  $y$  e  $z$  são definidas como:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\partial h(y, z)}{\partial z} = -h_z \\ \beta &= \frac{\partial h(y, z)}{\partial y} = -h_y\end{aligned}\quad (16.13)$$

Assumindo que os deslocamentos presentes na membrana sejam pequenos, por consequência também o serão suas inclinações, pode-se aproximar o valor do seno dos ângulos de inclinação pela própria magnitude do ângulo. Assim:

$$\begin{aligned}\text{sen}\left(\frac{d\alpha}{2}\right) &= \frac{d\alpha}{2} = -\frac{\partial^2 h(y, z)}{2\partial z^2} dz = \frac{-h_{zz} dz}{2} \\ \text{sen}\left(\frac{d\beta}{2}\right) &= \frac{d\beta}{2} = -\frac{\partial^2 h(y, z)}{2\partial y^2} dy = \frac{-h_{yy} dy}{2}\end{aligned}\quad (16.14)$$

Portanto, com base nessas considerações, a Eq.(16.12) pode ser assim reescrita:

$$\begin{aligned}P dy dz + 2k dy \frac{\partial^2 h(y, z)}{2\partial z^2} dz + 2k dz \frac{\partial^2 h(y, z)}{2\partial y^2} dy &= 0 \\ \frac{\partial^2 h(y, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h(y, z)}{\partial y^2} &= -\frac{P}{k}\end{aligned}\quad (16.15)$$

A Eq.(16.15) é a equação diferencial fundamental do problema do equilíbrio de uma membrana submetida a uma pressão interna, sendo que a função  $h(y, z)$  deve ser nula para todos os pontos pertencentes ao contorno da membrana.

A analogia do problema de torção pode ser mostrada admitindo-se que exista uma função  $\Phi(y, z)$  tal que:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (16.16)$$

Deve-se salientar que as expressões apresentadas na Eq. (16.16) atendem à equação de equilíbrio apresentada na Eq.(16.5). Lembrando-se das definições apresentadas na Eq. (16.3), pode-se escrever que:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G\phi \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - 1 \right] \Rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (16.17)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G\phi \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + 1 \right] \Rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (16.18)$$

Com base nos resultados apresentados nas Eq.(16.17) e Eq.(16.18), pode-se subtrair estas equações de forma a obter uma nova equação diferencial para o problema, a qual não tem a dependência da função  $\psi$ . Assim:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2G\phi \quad (16.19)$$

Deve-se salientar que as equações diferenciais apresentadas nas Eq. (16.15) e Eq.(16.19) possuem forma semelhante. Ambas envolvem derivadas de segunda ordem uma dada função. Além disso, seus resultados são iguais se a condição seguinte for atendida:

$$\Phi(y, z) = -2G\phi \frac{k}{P} h(y, z) \quad (16.20)$$

A analogia existente entre as formulações dos problemas de torção e membranas se completa impondo-se condições de contorno para a equação diferencial Eq.(16.19). Com base no apresentado na Eq. (16.20), lembrando que  $h(y, z)$  deve ser nula sobre o contorno da membrana, constata-se que  $\Phi(y, z)$  deve também ser nula nessas posições. Portanto, pode-se reescrever a Eq. (16.16) na seguinte forma:

$$\tau_{xy} = \frac{k}{P} 2G\phi \frac{\partial h(y, z)}{\partial z} \quad \tau_{xz} = -\frac{k}{P} 2G\phi \frac{\partial h(y, z)}{\partial y} \quad (16.21)$$

Constata-se que, por meio da analogia de membrana, a distribuição das tensões de cisalhamento no plano da seção transversal possui relação direta com a inclinação da superfície deslocada de uma membrana submetida a uma pressão interna positiva.

Com base na distribuição das tensões de cisalhamento apresentada anteriormente, pode-se relacionar o momento de torção aplicado à seção transversal em análise às tensões de cisalhamento por meio da Eq. (16.8). Assim:

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \Rightarrow M_t = \int_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z \right) dA \quad (16.22)$$

De forma a tornar esta dedução mais conveniente, pode-se reescrever a equação anterior na seguinte forma:

$$M_t = \int_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z + 2\Phi - 2\Phi \right) dA \Rightarrow \quad (16.23)$$

$$M_t = \int_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z + 2\Phi \right) dA - \int_A 2\Phi dA$$

Em seguida, pode-se aplicar o teorema da divergência sobre a primeira integral apresentada na Eq. (16.23), objetivando transformá-la de uma integral de área em uma integral de contorno. Assim:

$$M_t = \int_{\Gamma} [\Phi(\Gamma) y \cos(\eta, y) + \Phi(\Gamma) z \cos(\eta, z)] d\Gamma - \int_A 2\Phi dA \quad (16.24)$$

sendo  $\Gamma$  o contorno da área considerada e  $\eta$  a direção de seu vetor normal.

Como a função  $\Phi$  possui valor nulo ao longo do contorno da área da membrana, verifica-se que esta integral de contorno resulta valor nulo. Portanto, utilizando o resultado apresentado na Eq. (16.20), pode-se reescrever a Eq.(16.24) na seguinte forma:

$$M_t = - \int_A 2\Phi dA \Rightarrow M_t = -2 \int_A -2G\phi \frac{k}{P} h(y, z) dA \Rightarrow \quad (16.25)$$

$$M_t = \frac{4G\phi k}{P} \int_A h(y, z) dA$$

O termo integral apresentado na Eq.(16.25) representa o volume contido na parte interior da membrana em sua configuração deslocada, a qual inicialmente ocupa uma área igual à da seção transversal da barra geral submetida à torção. Denotando por  $V$  este volume, pode-se reescrever a Eq.(16.25) da seguinte maneira:

$$M_t = \frac{4G\phi k}{P} V \Rightarrow \phi = \frac{PM_t}{4GkV} \Rightarrow \phi = \frac{M_t}{GI_t} \quad (16.26)$$

onde  $I_t = 4 \left( \frac{k}{P} \right) V$ .

Deve-se enfatizar que a rotação obtida na Eq.(16.26) envolve uma seção transversal específica. Caso seja de interesse na análise a determinação do giro de uma barra geral, os giros das seções transversais que compõem esta barra devem ser somados. Portanto, a Eq.(16.11) deve ser integrada ao longo do comprimento da barra para tal finalidade.

Assim, os resultados decorrentes do estudo da configuração deslocada da membrana podem também ser úteis para a determinação do momento polar de inércia

da seção transversal. Sendo esta propriedade de área proporcional ao volume deslocado pela membrana, constata-se que seções transversais de mesma área poderão resistir a diferentes valores de momento de torção, dependendo de sua geometria, o que conduzirá a diferentes valores de  $I_t$ .

Finalmente, utilizando o resultado apresentado na Eq.(16.26), pode-se reescrever a Eq.(16.21) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{k}{P} 2G\phi \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} \Rightarrow \tau_{xz} = -\frac{\partial h(y,z)}{\partial y} \frac{M_t}{2V} \\ \tau_{xy} &= \frac{k}{P} 2G\phi \frac{\partial h(y,z)}{\partial z} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{\partial h(y,z)}{\partial z} \frac{M_t}{2V}\end{aligned}\quad (16.27)$$

É importante perceber que, de acordo com o apresentado na Eq.(16.27), as tensões de cisalhamento possuirão maior intensidade nas regiões onde a inclinação da tangente à superfície da membrana for maior. Portanto, cuidados especiais devem ser tomados em cantos e entalhes geométricos para que concentrações de tensão não causem o colapso de elementos estruturais submetidos a torção.

Deve-se também destacar que, com base nas Eq.(16.26) e Eq.(16.27), se for possível a determinação, para uma dada geometria, da inclinação da membrana em qualquer ponto e do volume por ela contido, não há a necessidade de se resolver a equação diferencial de equilíbrio do problema da torção de Saint-Venant. A dificuldade na resolução dessa equação é a grande motivação para a realização da analogia de membrana.

Será mostrado, a seguir, que em diversos casos de interesse prático é possível determinar o volume,  $V$ , e as inclinações da membrana,  $h_y$  e  $h_z$ , aplicando-se um simples equilíbrio à membrana solicitada pela pressão interna positiva, sem, contudo, resolver a equação diferencial do problema.

### 16.6 – Barras de Seção Transversal Vazada de Paredes Finas

A primeira aplicação da analogia de membrana refere-se à análise de elementos de barra geral de seção transversal fechada, vazada, composta por paredes finas de espessura variável, submetidos à torção. Objetivando a melhor compreensão física do problema, deve-se considerar uma caixa de geometria paralelepipedal, onde observa-se,

em sua face superior, uma abertura cuja forma seja igual à das paredes que compõem a seção transversal da barra submetida à torção. Introduce-se, no lugar dessa abertura, uma membrana de igual geometria. Havendo pressão positiva no interior dessa caixa, a membrana desloca-se em relação à caixa, assumindo uma configuração geométrica na qual esta apresenta-se tracionada e em equilíbrio com a pressão interna aplicada, como indicado na Fig. (16.7). A análise do equilíbrio da membrana realiza-se por meio do digrama de corpo livre da região deslocada, como mostra a Fig. (16.7). Assim, a resultante da pressão interna deve ser igual à resultante da força de tração na membrana.

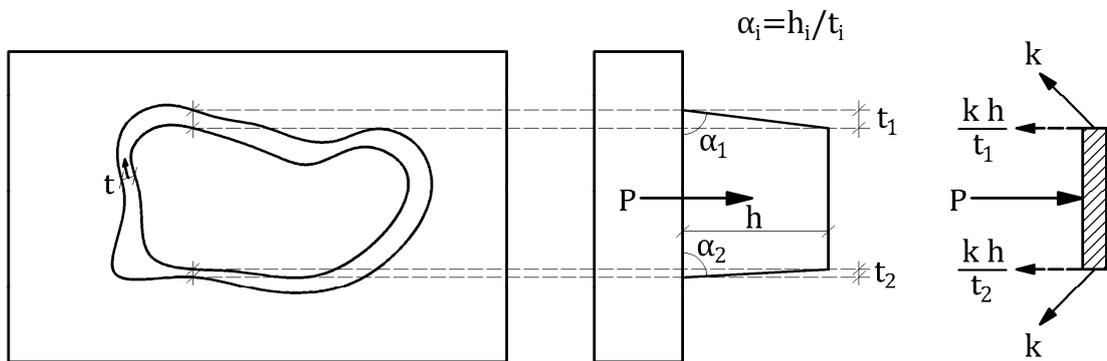


Figura 16.7 Membrana em sua configuração deslocada. Configuração de equilíbrio.

Assumindo que a barra solicitada obedeça ao regime de pequenos deslocamentos, e conseqüentemente pequenas rotações, pequenos valores para o deslocamento da membrana,  $h$ , e para suas inclinações serão observados. Assim, a equação de equilíbrio do problema poderá ser escrita como:

$$PA_m = \oint k \frac{h}{t} ds \Rightarrow h = \frac{P}{k} \frac{A_m}{\oint \frac{1}{t} ds} \quad (16.28)$$

sendo que  $\oint$  indica uma integral ao longo de um contorno fechado  $s$ , que define o contorno da seção transversal da barra.

Com base no apresentado na Eq.(16.28), o volume da parte deslocada fica definido como:

$$V = A_m h \Rightarrow V = \frac{P}{k} \frac{A_m^2}{\oint \frac{1}{t} ds} \quad (16.29)$$

Portanto, o momento polar de inércia da seção transversal, segundo o apresentado na Eq.(16.26), pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$I_t = 4 \frac{k P}{P k} \frac{A_m^2}{\oint \frac{1}{t} ds} \Rightarrow I_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{1}{t} ds} \quad (16.30)$$

Deve-se salientar que a área tratada na Eq.(16.30),  $A_m$ , refere-se à área da seção transversal considerando suas dimensões médias, ou seja, as dimensões definidas pelos pontos geométricos contidos na espessura média dos elementos de paredes finas.

De forma a tornar mais conveniente a análise do problema da torção usando a analogia de membrana, as tensões de cisalhamento, até então descritas no sistema cartesiano,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$ , devem ser descritas assumindo um sistema de coordenadas paralelo ao contorno dos elementos de paredes finas. Assim, as tensões de cisalhamento serão expressas em função da coordenada  $s$  em lugar de  $y$  e  $z$ . Lembrando que  $\tau_s^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2$  e usando o resultado apresentado na Eq.(16.27) tem-se:

$$\tau_s = \frac{\partial h_s}{\partial t} \frac{M_t}{2V} \quad (16.31)$$

sendo  $t$  a direção tangente ao contorno da parede fina considerada.

Assumindo que a barra analisada obedeça ao regime de pequenos deslocamentos, tanto os deslocamentos quanto as rotações possuirão pequena magnitude. Portanto, a tangente à superfície deslocada da membrana poderá ser aproximada por:

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} = \alpha = \frac{h}{t} \quad (16.32)$$

Assim, a expressão que relaciona as tensões de cisalhamento ao momento de torção nesse problema é a seguinte:

$$\tau = \alpha \frac{M_t}{2V} \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{2A_m h} \frac{h}{t} \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{2A_m t} \quad (16.33)$$

Deve-se ressaltar que para seções transversais com uma única célula, ou septo, esse resultado coincide com a equação de Bredt, apresentada no capítulo 15.

### 16.7 – Apresentação da Analogia de Membrana de Forma Expedita

Até esse momento, a análise do problema geral da torção foi efetuada por meio de um processo formal, onde foi mostrada a analogia existente entre as equações

diferenciais que governam o problema da torção e o equilíbrio de uma membrana. Porém, pode-se apresentar também a analogia de membrana por meio de um procedimento menos formal, mas igualmente consistente.

Para apresentar tal procedimento deve-se considerar o equilíbrio da membrana apresentado na Fig. (16.7). Impondo que seja nula a somatório das forças horizontais tem-se:

$$PA_m = \int_s \int_t k \frac{h}{t} ds \quad \Rightarrow \quad PA_m = kh \int_s \int_t \frac{1}{t} ds \quad \Rightarrow \quad \int_s \int_t \frac{1}{t} ds = \frac{PA_m}{kh} \quad (16.34)$$

Substituindo a Eq.(16.34) na Eq.(15.34), apresentada no capítulo anterior, obtém-se:

$$\phi = \int_L \frac{M_t}{4A_m^2 G} \left( \int_s \int_t \frac{1}{t} ds \right) dx \quad \Rightarrow \quad \phi = \int_L \frac{M_t dx}{I_t G} \quad (16.35)$$

$$\text{sendo } I_t = \frac{4A_m^2}{\int_s \int_t \frac{1}{t} ds}.$$

Assim:

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\int_s \int_t \frac{1}{t} ds} \quad \Rightarrow \quad I_t = \frac{4A_m^2}{\frac{PA_m}{kh}} \quad \Rightarrow \quad I_t = 4V \frac{k}{P} \quad (16.36)$$

Como da Eq.(15.29)  $\tau = \frac{M_t}{2tA_m}$ , pode-se escrever que:

$$\alpha = \frac{h}{t} \quad \Rightarrow \quad h = \alpha t \quad \therefore \quad V = \alpha t A_m \quad \Rightarrow \quad t A_m = \frac{V}{\alpha} \quad (16.37)$$

Portanto, com base na Eq.(16.37) pode-se reescrever a Eq.(15.29) como:

$$\tau = \frac{M_t}{2V} \alpha \quad (16.38)$$

Que foi o mesmo resultado obtido com a abordagem formal. A determinação dos giros relativos entre as seções transversais de barras torcidas pode ser efetuada utilizando o valor do momento polar de inércia apresentado na Eq.(16.36) e a Eq.(16.11), a qual foi apresentada anteriormente neste capítulo.

16.8 – Exemplo 1

Determine as expressões que resultam a tensão de cisalhamento e o ângulo de giro para a seção transversal mostrada na Fig. (16.8), considerando analogia de membrana, sabendo que a espessura da parede é igual a  $t$ . Esta seção transversal compõe uma barra de comprimento  $L$ , a qual é uniformemente solicitada por um momento de torção  $M_t$ .

Com base no equacionamento apresentado anteriormente neste capítulo, pode-se determinar o valor do momento polar de inércia da seção transversal apresentada na Fig. (16.8) calculando-se o volume contido abaixo da membrana delimitada pela geometria desta seção. Assim:

$$PA_m = \sum_{i=1}^{nl} k \frac{h_i}{t_i} l_i \Rightarrow P \cdot \pi \cdot (r_m)^2 = \frac{kh}{t} (2 \cdot \pi \cdot r_m) \Rightarrow h = \frac{P}{k} \cdot \frac{r_m t}{2}$$

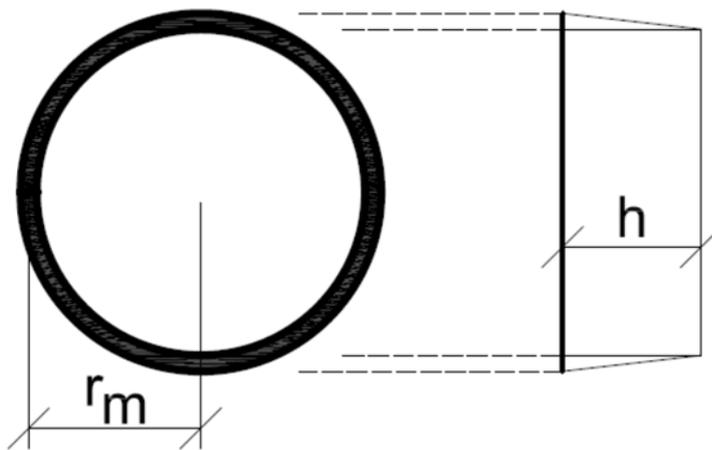


Figura 16.8 Seção transversal considerada.

Portanto, o volume contido abaixo da membrana é igual a:

$$V = A_m h \Rightarrow V = \pi \cdot (r_m)^2 \frac{P}{k} \cdot \frac{r_m t}{2} \Rightarrow V = \frac{P \pi}{k} \frac{(r_m)^3 t}{2}$$

Utilizando a Eq.(16.26) ou a Eq.(16.36) obtém-se:

$$I_t = 4 \left( \frac{k}{P} \right) V \Rightarrow I_t = 4 \left( \frac{k}{P} \right) \frac{P \pi}{k} \frac{(r_m)^3 t}{2} \Rightarrow I_t = 2 \pi (r_m)^3 t$$

O giro da seção é dado pela expressão apresentada na Eq.(16.26) ou pela Eq.(16.35). Assim:

$$\phi = \frac{M_t L}{GI_t} \Rightarrow \phi = \frac{M_t L}{G 2\pi (r_m)^3 t}$$

Já as tensões de cisalhamento podem ser obtidas utilizando a Eq.(16.31) ou pela Eq.(16.38). Dessa forma:

$$\tau = \frac{h M_t}{t 2V} \Rightarrow \tau = \frac{\frac{P}{k} \cdot \frac{r_m t}{2}}{t} \frac{M_t}{2 \frac{P}{k} \frac{\pi}{2} (r_m)^3 t} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2} \frac{M_t}{\pi (r_m)^2 t}$$

Deve-se ressaltar que as respostas obtidas são compatíveis com aquelas fornecidas pela abordagem clássica anteriormente apresentada, via fórmula de Bredt.

### 16.9 – Exemplo 2

Calcule o módulo de resistência à torção,  $W$ , e o momento polar de inércia da seção transversal mostrada na Fig. (16.9). Todas as paredes finas que compõem esta seção possuem espessura igual 0,5 cm. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível do material seja igual a 26 MPa, determine o máximo momento de torção que pode ser aplicado sem a observação da falha estrutural.

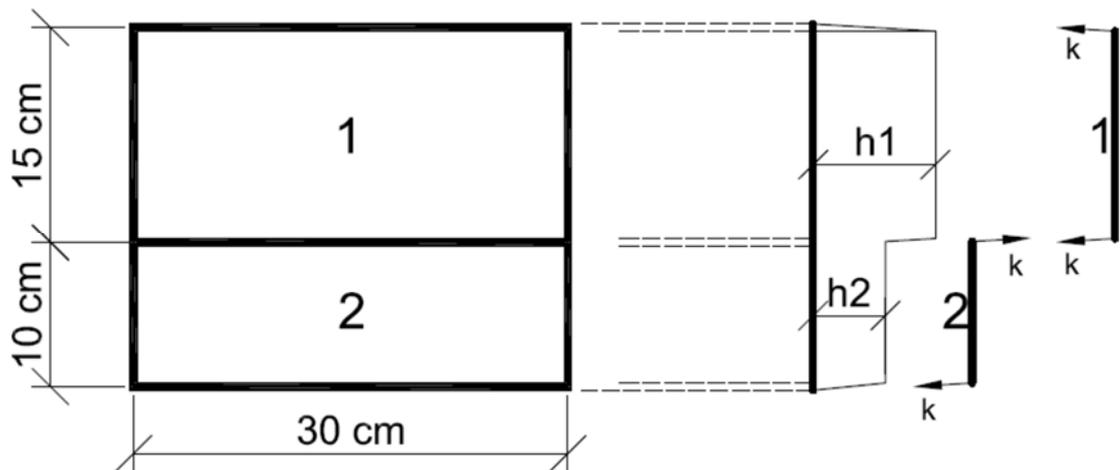


Figura 16.9 Seção transversal considerada.

O primeiro dado a ser calculado para a resolução desse problema refere-se à área de cada um dos septos (placas) dessa seção. Assim, a área do septo 1 é igual a:

$$A_1 = 30 \cdot 15 \Rightarrow A_1 = 450 \text{ cm}^2$$

Já para o septo 2 tem-se:

$$A_2 = 30 \cdot 10 \Rightarrow A_2 = 300 \text{ cm}^2$$

O equilíbrio de cada um dos septos deve ser efetuado para a determinação da altura,  $h$ , de cada uma das membranas. O valor de  $h$  conduzirá a determinação do volume contido no interior de cada uma das membranas em sua configuração deslocada.

Para o septo 1 tem-se:

$$PA_1 = \sum_{i=1}^{nl} k \frac{h_i}{t_i} l_i \Rightarrow P \cdot 450 = \frac{kh_1}{0,5} (15 + 15 + 30) + \frac{k(h_1 - h_2)}{0,5} 30 \Rightarrow \quad (16.39)$$

$$P \cdot 450 = 120kh_1 + 60kh_1 - 60kh_2 \Rightarrow 180h_1 - 60h_2 = 450 \frac{P}{k}$$

Para o septo 2, o equilíbrio conduz a:

$$PA_2 = \sum_{i=1}^{nl} k \frac{h_i}{t_i} l_i \Rightarrow P \cdot 300 = \frac{kh_2}{0,5} (10 + 10 + 30) - \frac{k(h_1 - h_2)}{0,5} 30 \Rightarrow$$

$$P \cdot 300 = 100kh_2 - 60kh_1 + 60kh_2 \Rightarrow -60h_1 + 160h_2 = 300 \frac{P}{k} \quad (16.40)$$

Resolvendo o sistema de equações composto pelas Eq.(16.39) e Eq.(16.40) obtêm-se as alturas das membranas. Portanto:

$$\begin{bmatrix} 180 & -60 \\ -60 & 160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 300 \end{bmatrix} \frac{P}{k} \Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,571 \\ 3,214 \end{bmatrix} \frac{P}{k}$$

Com base no resultado obtido para as alturas das membranas, o volume contido abaixo de sua superfície fica definido como:

$$V = A_1 h_1 + A_2 h_2 \Rightarrow V = 450 \cdot 3,571 \frac{P}{k} + 300 \cdot 3,214 \frac{P}{k} \Rightarrow V = 2571,15 \frac{P}{k} \text{ cm}^4$$

Com base no apresentado na Eq.(16.26), e com o valor do volume da membrana em sua configuração deslocada calculado, o momento polar de inércia da seção pode ser determinado. Dessa forma:

$$I_t = 4 \frac{k}{P} V \Rightarrow I_t = 4 \frac{k}{P} 2571,15 \frac{P}{k} \Rightarrow I_t = 10284,6 \text{ cm}^4$$

Portanto, o módulo de resistência à torção,  $W$ , é dado por:

$$\tau = \alpha_{MAX} \frac{M_t}{2V} \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{W}$$

sendo  $\alpha_{MAX} = h/t$  que conduz ao máximo valor de  $\alpha$  para a seção transversal. Assim:

$$W = \frac{2V}{\alpha_{MAX}} \Rightarrow W = \frac{2 \cdot 2571,15 \frac{P}{k}}{\frac{3,571 \frac{P}{k}}{0,5}} \Rightarrow W = 720 \text{ cm}^3$$

Portanto, o máximo momento de torção que pode ser aplicado a esta seção transversal para que a falha não seja observada é igual a:

$$\tau = \frac{M_t}{W} \Rightarrow M_t = 26 \cdot 10^3 \cdot 720 \cdot 10^{-6} \Rightarrow M_t = 18,72 \text{ kNm}$$

### 16.10 – Exemplo 3

Determine o módulo de resistência à torção,  $W$ , e o momento polar de inércia da seção transversal apresentada na Fig. (16.10) utilizando a analogia de membrana. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível do material seja igual a 40 MPa, determine o máximo momento de torção que pode ser aplicado a esta seção sem a ocorrência da falha. Além disso, sendo o comprimento da barra geral que contém esta seção transversal igual a 3,0 m, determine o giro máximo da seção transversal quando a barra é submetida ao momento de torção máximo calculado anteriormente. Todas as paredes finas que compõem esta seção possuem espessura igual  $\frac{a}{10}$ .

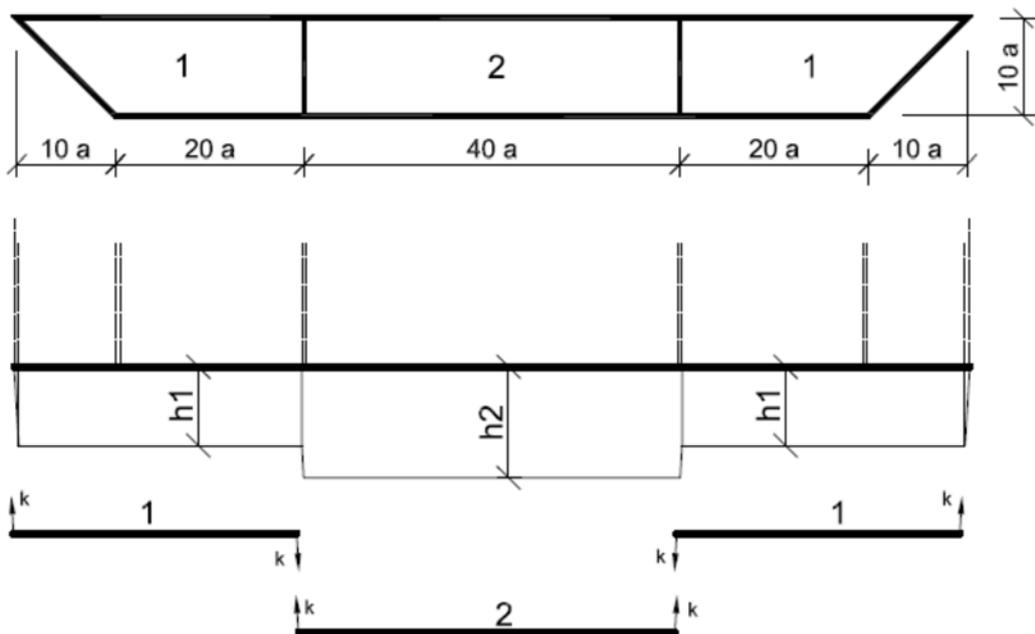


Figura 16.10 Seção transversal analisada.

Para a resolução deste problema, deve-se inicialmente determinar o valor da área média de cada um dos septos que compõem a seção transversal em análise.

Considerando o septo 1 tem-se:

$$A_1 = 20a \cdot 10a + \frac{10a \cdot 10a}{2} \Rightarrow A_1 = 250a^2$$

Já para o septo 2 obtém-se:

$$A_2 = 40a \cdot 10a \Rightarrow A_2 = 400a^2$$

Em seguida, o equilíbrio de cada um dos septos deve ser efetuado para que o valor da altura,  $h$ , de cada uma das membranas seja determinado. O valor de  $h$  conduz à determinação do volume contido no interior de cada uma das membranas em sua configuração deslocada. Para o septo 1 tem-se:

$$PA_1 = \sum_{i=1}^{nl} k \frac{h_i}{t_i} l_i \Rightarrow$$

$$P \cdot 250a^2 = \frac{kh_1}{\frac{a}{10}} (20a + 10a + 20a + \sqrt{200}a) - \frac{k(h_2 - h_1)}{\frac{a}{10}} (10a) \quad (16.41)$$

$$P \cdot 250a^2 = (500 + 10\sqrt{200})kh_1 - 100kh_2 + 100kh_1 \Rightarrow$$

$$(600 + 10\sqrt{200})h_1 - 100h_2 = 250a^2 \frac{P}{k}$$

Para o septo 2, o equilíbrio conduz a:

$$PA_2 = \sum_{i=1}^{nl} k \frac{h_i}{t_i} l_i \Rightarrow P \cdot 400a^2 = \frac{kh_2}{\frac{a}{10}} (40a + 40a) + \frac{k(h_2 - h_1)}{\frac{a}{10}} (10a + 10a) \quad (16.42)$$

$$P \cdot 400a^2 = 800kh_2 + 200kh_2 - 200kh_1 \Rightarrow -200h_1 + 1000h_2 = 400a^2 \frac{P}{k}$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas Eq.(16.41) e Eq.(16.42) obtêm-se as alturas das membranas. Portanto:

$$\begin{bmatrix} 600 + 10\sqrt{200} & -100 \\ -200 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 400 \end{bmatrix} \frac{P}{k} a^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40198 \\ 0,48040 \end{bmatrix} \frac{P}{k} a^2$$

A partir do resultado obtido para as alturas das membranas, o volume contido abaixo de sua superfície possui o seguinte valor:

$$V = 2A_1h_1 + A_2h_2 \Rightarrow V = 2 \cdot 250a^2 \cdot 0,40198 \frac{P}{k} a^2 + 400a^2 \cdot 0,48040 \frac{P}{k} a^2$$

$$V = 393,15 \frac{P}{k} a^4$$

Assim, considerando o resultado apresentado na Eq.(16.26), o momento polar de inércia da seção pode ser determinado da seguinte maneira:

$$I_t = 4 \frac{k}{P} V \Rightarrow I_t = 4 \frac{k}{P} 393,15 \frac{P}{k} a^4 \Rightarrow I_t = 1572,6a^4$$

Dessa forma, o módulo de resistência à torção,  $W$ , é dado por:

$$\tau = \alpha_{MAX} \frac{M_t}{2V} \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{W}$$

sendo  $\alpha_{MAX} = h/t$  que possui maior valor na seção transversal. Assim:

$$W = \frac{2V}{\alpha_{MAX}} \Rightarrow W = \frac{2 \cdot 393,15 \frac{P}{k} a^4}{\frac{0,48040 \frac{P}{k} a^2}{\frac{a}{10}}} \Rightarrow W = 163,676a^3$$

Portanto, o máximo momento de torção que pode ser aplicado a esta seção transversal é igual a:

$$\tau = \frac{M_t}{W} \Rightarrow M_t = 40 \cdot 10^3 \cdot 163,676a^3 \Rightarrow M_t = 6,547 \cdot 10^6 a^3$$

O giro máximo da seção transversal é dado pela expressão apresentada na Eq.(16.26). Assim:

$$\phi = \frac{M_t L}{GI_t} \Rightarrow \phi = \frac{6,547 \cdot 10^6 a^3 \cdot 3}{G \cdot 1572,6a^4} \Rightarrow \phi = \frac{12489,508}{Ga}$$

### 16.11 – Seções Transversais Abertas de Paredes Finas

Para seções transversais compostas por elementos de paredes finas de geometria aberta, assume-se que a configuração deslocada da membrana, cuja projeção possua a geometria da seção transversal, seja aproximada por uma parábola do segundo grau, como indicado na Fig. (16.11).

Considerando esta aproximação, o volume contido abaixo da superfície da membrana em sua configuração deslocada, a qual é aproximada por uma parábola, é dada pela integral da área da parábola ao longo do comprimento definido pela espessura média da parede fina da seguinte forma:

$$V = \int_r \frac{2}{3} f t ds \quad (16.43)$$

sendo  $f$  a flecha da parábola como indicado na Fig. (16.11).

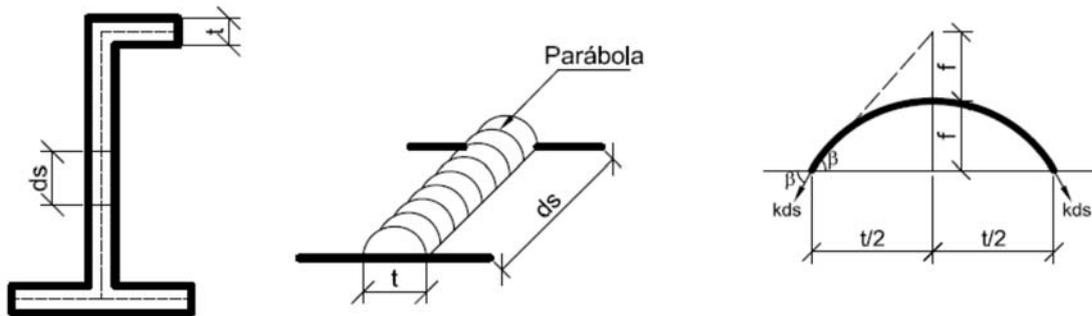


Figura 16.11 Seções transversais de paredes finas de geometria aberta.

Impondo o equilíbrio de forças sobre a membrana em sua configuração deslocada obtém-se:

$$\begin{aligned} P t ds &= (2kds) \text{sen}(\beta) \Rightarrow P t ds = 2kds \beta \Rightarrow \\ P t ds &= 2kds \frac{2f}{t} \Rightarrow f = \frac{P t^2}{8k} \end{aligned} \quad (16.44)$$

Substituindo a Eq.(16.44) na Eq.(16.43) obtém-se:

$$V = \int_r \frac{2}{3} f t ds \Rightarrow V = \int_r \frac{2}{3} \frac{P t^2}{8k} t ds \Rightarrow V = \frac{P}{12k} \int_s t^3 ds \quad (16.45)$$

Consequentemente, o momento polar de inércia passa a ser escrito como:

$$I_t = 4V \frac{k}{P} \Rightarrow I_t = 4 \frac{k}{P} \frac{P}{12k} \int_s t^3 ds \Rightarrow I_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad (16.46)$$

Lembrando que a tensão de cisalhamento é proporcional à inclinação da tangente à superfície da membrana, constata-se que sua variação é linear ao longo da espessura da parede fina. Assim, a tensão de cisalhamento possuirá valor máximo ao longo de sua linha média. Com base na ilustração apresentada na Fig. (16.11), a inclinação máxima é dada por:

$$\beta_{\max} = \frac{2f}{t} \Rightarrow \beta_{\max} = \frac{4Pt^2}{t8k} \Rightarrow \beta_{\max} = \frac{Pt}{2k} \quad (16.47)$$

Finalmente, a partir do apresentado na Eq.(16.31), a tensão de cisalhamento máxima atuante é dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2V} \beta_{\max} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_t t_{\max}}{\frac{1}{3} \int_s t^3 ds} \quad (16.48)$$

### 16.12 – Exemplo 4

Determine a intensidade do momento de torção distribuído aplicado à barra abaixo sabendo que a tensão de cisalhamento admissível no problema seja igual a 125 MPa e que os módulos de elasticidade transversal de cada uma das barra seja igual a  $G_1 = 80GPa$  e  $G_2 = 100GPa$ .

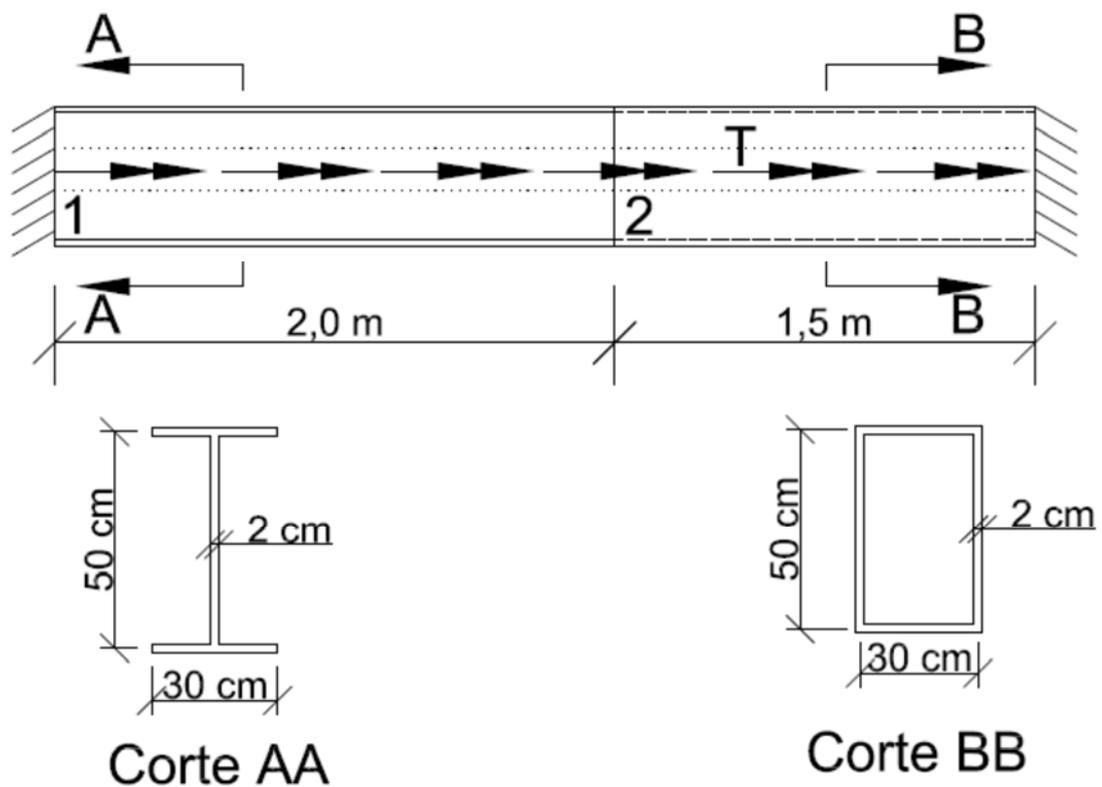


Figura 16.12 Estrutura a ser analisada.

Para que este problema seja resolvido, deve-se determinar os momentos polares de inércia de cada uma das seções transversais que compõem a barra geral em análise.

Assim:

$$I_t^1 = \frac{1}{3} \int_0^L t^3 ds \Rightarrow I_t^1 = \frac{1}{3} 2^3 (30 + 50 + 30) \Rightarrow I_t^1 = 120000 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_t^1 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_t^2 = \frac{4A_m^2}{\int_t \frac{1}{t} ds} \Rightarrow I_t^2 = \frac{4(30 \cdot 50)^2}{30 + 30 + 50 + 50} \Rightarrow I_t^2 = 112500 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_t^2 = 1,125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

### Problema 0

O problema 0 é composto pela estrutura isostática equivalente e o carregamento externo aplicado. Neste problema, o objetivo é a determinação da rotação na seção transversal onde o apoio foi removido para a transformação da estrutura hiperestática em uma isostática equivalente. A barra a ser analisada no problema 0 é a apresentada na Fig. (16.13).

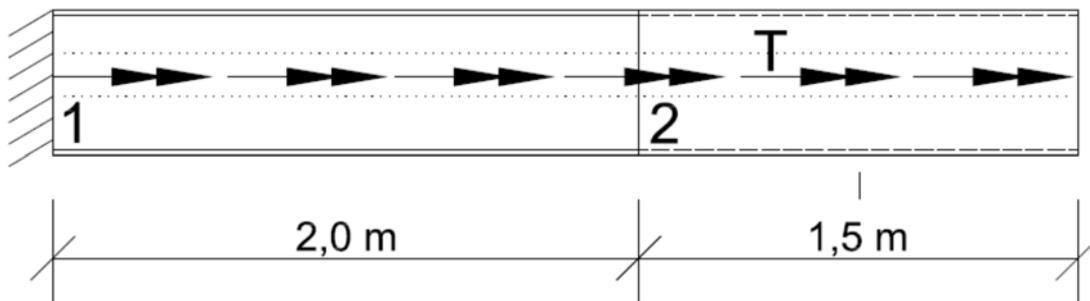


Figura 16.13 Estrutura a ser analisada no problema 0.

Impondo sobre a estrutura apresentada na Fig. (16.13) a condição de equilíbrio de corpo rígido, o seguinte diagrama de momento de torção é obtido.



Figura 16.14 Diagrama de esforço solicitante. Momento de torção.

Assim, a rotação da seção transversal da extremidade direita da barra é igual a:

$$\phi_0 = \int_0^L \frac{M_t}{I_t G} dx \Rightarrow \phi_0 = \int_0^2 \frac{(3,5T - Tx) dx}{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^6} + \int_2^{3,5} \frac{(3,5T - Tx) dx}{1,125 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^6} \Rightarrow$$

$$\phi_0 = \frac{3,5Tx + \frac{Tx^2}{2}}{96000} \Big|_0^2 + \frac{3,5Tx + \frac{Tx^2}{2}}{112500} \Big|_2^{3,5} \Rightarrow \phi_0 = 6,2083 \cdot 10^{-5} T \text{ rad}$$

### Problema 1

O problema 1 é formado pela estrutura isostática equivalente e a reação de apoio inicialmente removida para a transformação da estrutura hiperestática em isostática equivalente. Neste problema, assim como no anterior, o objetivo é a determinação da rotação na seção transversal onde o apoio foi removido. A barra a ser analisada no problema 1 é a apresentada na Fig. (16.15).

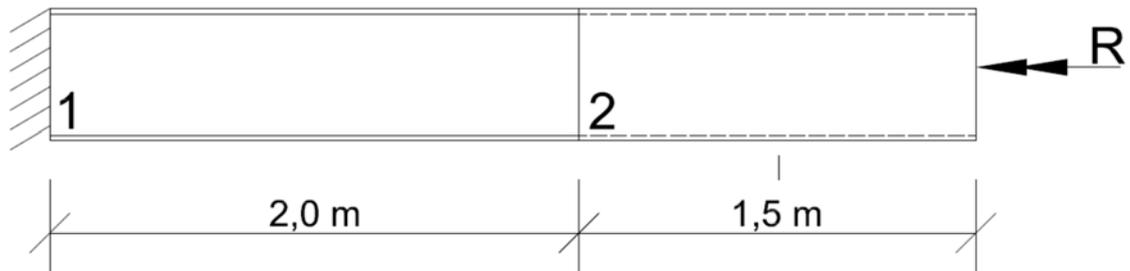


Figura 16.15 Estrutura a ser analisada no problema 1.

Impondo sobre a estrutura apresentada na Fig. (16.15) a condição de equilíbrio de corpo rígido, o seguinte diagrama de momento de torção é obtido.

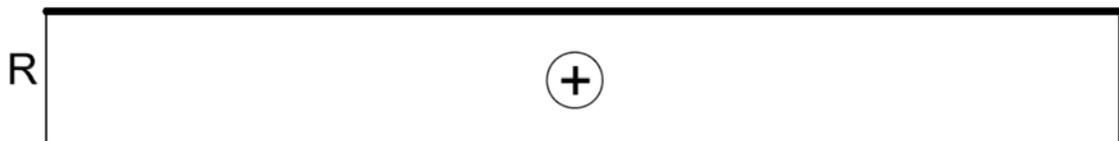


Figura 16.16 Diagrama de esforço solicitante. Momento de torção.

Assim, a rotação da seção transversal da extremidade direita da barra é igual a:

$$\phi_1 = \int_0^L \frac{M_t}{I_t G} dx \Rightarrow \phi_1 = \frac{-R \cdot 2}{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^6} + \frac{-R \cdot 1,5}{1,125 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^6} \Rightarrow$$

$$\phi_1 = -3,4167 \cdot 10^{-5} R \text{ rad}$$

Impondo a condição de compatibilidade ao problema obtém-se:

$$\phi_0 + \phi_1 = 0 \Rightarrow 6,2083 \cdot 10^{-5} T - 3,4167 \cdot 10^{-5} R = 0 \Rightarrow R = 1,8170 T$$

Portanto, com base na reação de apoio da extremidade direita da barra determinada anteriormente, obtém-se o seguinte diagrama de corpo livre:

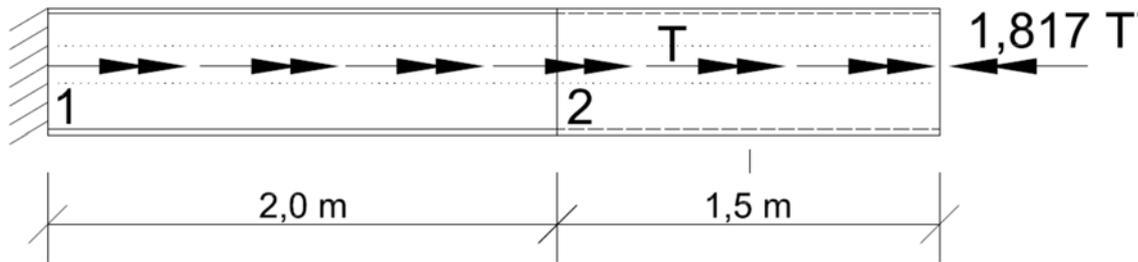


Figura 16.17 Diagrama de corpo livre para a barra analisada.

Impondo a condição de equilíbrio de corpo rígido a barra apresentada na Fig. (16.17) obtém-se:

$$\sum M_t = 0 \Rightarrow -R_A - 1,8170T + 3,5T = 0 \Rightarrow R_A = 1,683T$$

Considerando as reações de apoio anteriormente determinadas, o seguinte diagrama de momento de torção pode ser construído:

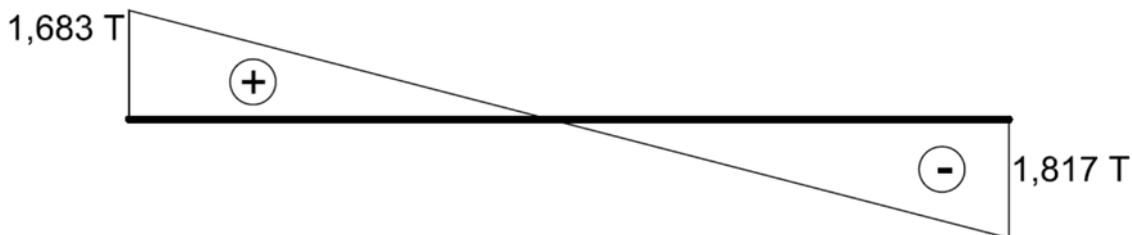


Figura 16.18 Diagrama de esforço solicitante. Momento de torção.

Portanto, considerando a barra 1, o valor máximo de  $T$  é igual a:

$$\tau = \frac{M_t}{I_t} t_{\max} \Rightarrow \tau = \frac{1,683T}{1,2 \cdot 10^{-3}} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 125 \cdot 10^3 \Rightarrow T = 4456,3 \text{ kNm/m}$$

Já para a barra 2, o valor máximo de  $T$  é igual a:

$$\tau = \frac{M_t}{2At_{\min}} \Rightarrow \tau = \frac{1,8170T}{2 \cdot (0,3 \cdot 0,5) \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 125 \cdot 10^3 \Rightarrow T = 412,76 \text{ kNm/m}$$

### 16.13 – Exemplo 5

Um elemento de barra geral em balanço, com seção transversal aberta de paredes finas, está submetido a uma força concentrada atuante em sua extremidade livre como

indica a Fig. (16.19). Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível do material que compõe esta barra é igual a 20 MPa e seu módulo de elasticidade transversal igual a 72 GPa, determine o máximo valor de  $P$  para que a falha por cisalhamento devido à torção não seja observada. Além disso, para o valor máximo de  $P$ , calcule o deslocamento vertical do ponto A devido apenas à torção. A espessura da parede da seção transversal é igual a 1 cm.

Para que esse problema seja resolvido deve-se, inicialmente, determinar as coordenadas do centro de gravidade da seção transversal. Assim:

$$z_{cg} = \frac{(6 \cdot 1 \cdot 12) \cdot 2 + (12 \cdot 1 \cdot 6) \cdot 2}{(6 \cdot 1) \cdot 2 + (12 \cdot 1) \cdot 2} \Rightarrow z_{cg} = 8 \text{ cm}$$

A localização do centro de gravidade da seção ao longo do eixo  $y$ ,  $y_{cg}$ , encontra-se na metade de sua altura devido à simetria da seção em relação a este eixo.

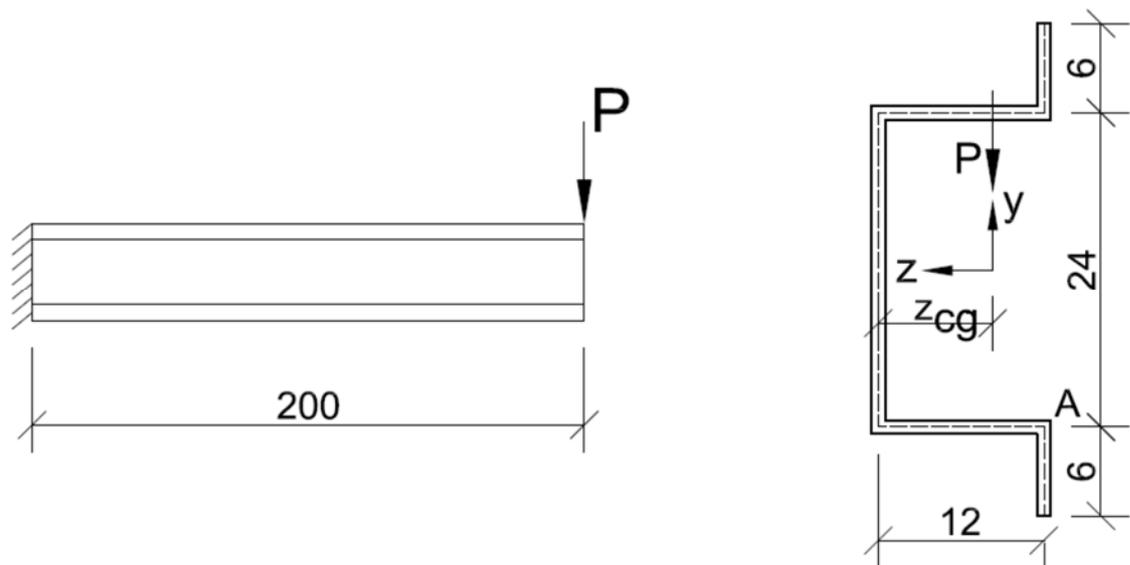


Figura 16.19 Estrutura a ser analisada. Dimensões em cm.

O momento de inércia da seção em torno do eixo  $z$  é igual a:

$$I_z = \left[ \frac{1 \cdot 6^3}{12} + 1 \cdot 6 \cdot 15^2 \right] \cdot 2 + \left[ \frac{12 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 12 \cdot 12^2 \right] \cdot 2 + \frac{1 \cdot 24^3}{12} \Rightarrow I_z = 7346 \text{ cm}^4$$

A força equivalente atuante em cada um dos elementos de paredes finas que compõem a seção transversal pode ser obtida integrando-se o fluxo de cisalhamento ao longo do comprimento da parede. Observando os sentidos das forças ilustrados na Fig. (16.20), estas podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$F_1 = \frac{V}{I} \int_0^6 1 \cdot x \cdot \left[ 12 + (6-x) + \frac{x}{2} \right] dx \Rightarrow F_1 = \frac{V}{I} \int_0^6 x \cdot \left[ 18 - \frac{x}{2} \right] dx \Rightarrow F_1 = 288 \frac{V}{I}$$

$$F_2 = \frac{V}{I} \int_0^{12} (6 \cdot 1 \cdot 15 + 1 \cdot x \cdot 12) dx \Rightarrow F_2 = \frac{V}{I} \int_0^{12} (90 + 12x) dx \Rightarrow F_2 = 1944 \frac{V}{I}$$

$$F_3 = 2 \frac{V}{I} \int_0^{12} \left[ 6 \cdot 1 \cdot 15 + 12 \cdot 1 \cdot 12 + 1 \cdot x \cdot \left( (12-x) + \frac{x}{2} \right) \right] dx \Rightarrow$$

$$F_3 = 2 \frac{V}{I} \int_0^{12} 234 + 12 \cdot x - \frac{x^2}{2} dx \Rightarrow F_3 = 6768 \frac{V}{I}$$

Com base nas forças equivalentes determinadas anteriormente constata-se que o equilíbrio em termos de forças pode ser assim expresso:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 2F_1 + F_3$$

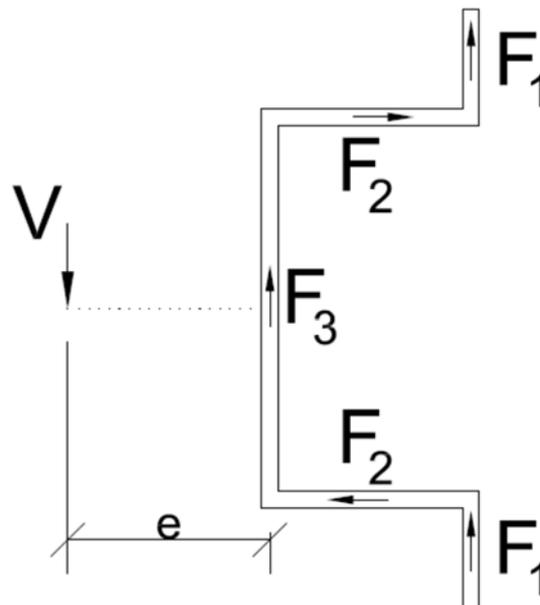


Figura 16.20 Sentido de atuação das forças equivalente e posicionamento do centro de torção.

A posição do centro de cisalhamento resulta da condição de que na seção exista somente um esforço cortante estaticamente equivalente, passando por um ponto sobre o eixo de simetria distante  $e$  do eixo de redução. A condição de equivalência pode ser expressa como:

$$\sum M = 0 \Rightarrow V \cdot e + 2(F_1 \cdot 12) - 2(F_2 \cdot 12) = 0 \Rightarrow V \cdot e = 24(F_2 - F_1)$$

Do equilíbrio de forças na direção  $y$  foi mostrado que:  $V = 2F_1 + F_3$ . Assim, a equação anterior pode ser assim reescrita:

$$V \cdot e = 24(F_2 - F_1) \Rightarrow (2F_1 + F_3)e = 24(F_2 - F_1) \Rightarrow e = \frac{24(F_2 - F_1)}{2F_1 + F_3}$$

Substituindo os valores das forças equivalentes obtém-se:

$$e = \frac{24(F_2 - F_1)}{2F_1 + F_3} \Rightarrow e = \frac{24\left(1944\frac{V}{I} - 288\frac{V}{I}\right)}{2\left(288\frac{V}{I}\right) + 6768\frac{V}{I}} \Rightarrow e = 5,41 \text{ cm}$$

Dessa forma, o momento de torção atuante na seção será igual a:

$$M_t = P(e + z_{cg}) \Rightarrow M_t = P(5,41 + 8) \Rightarrow M_t = 13,41P$$

Como a seção transversal utilizada é aberta de paredes finas, seu momento polar de inércia é assim determinado:

$$I_t = \frac{1}{3} \int t^3 ds \Rightarrow I_t = \frac{1}{3} [1^3 \cdot 6 + 1^3 \cdot 12 + 1^3 \cdot 24 + 1^3 \cdot 12 + 1^3 \cdot 6] \Rightarrow I_t = 20 \text{ cm}^3$$

Por meio da Eq.(16.48), a tensão e cisalhamento máxima atuante é igual a:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t t_{\max}}{\frac{1}{3} \int t^3 ds} \Rightarrow 2,0 = \frac{13,41P \cdot 1}{20} \Rightarrow P = 2,98 \text{ kN}$$

O giro da seção transversal pode ser assim calculado:

$$\phi = \frac{M_t L}{I_t G} \Rightarrow \phi = \frac{13,41 \cdot 2,98 \cdot 200}{20 \cdot 72 \cdot 10^2} \Rightarrow \phi = 0,0555 \text{ rad}$$

O deslocamento vertical do ponto A pode ser determinado da seguinte forma:

$$v_A = \phi(e + 12) \Rightarrow v_A = 0,0555(5,41 + 12) \Rightarrow v_A = 0,966 \text{ cm}$$

### 16.14 – Exemplo 6

Determine o giro do ponto A, o qual pertence a uma seção transversal formada por elementos de paredes finas que está localizada no extremo direito de um elemento de barra geral submetido a flexo-torção. A estrutura e suas dimensões estão apresentadas na Fig. (16.21), sendo que o módulo de elasticidade transversal do material que a compõe é igual a 72 GPa. A espessura das paredes da seção transversal é igual a 0,5 cm.

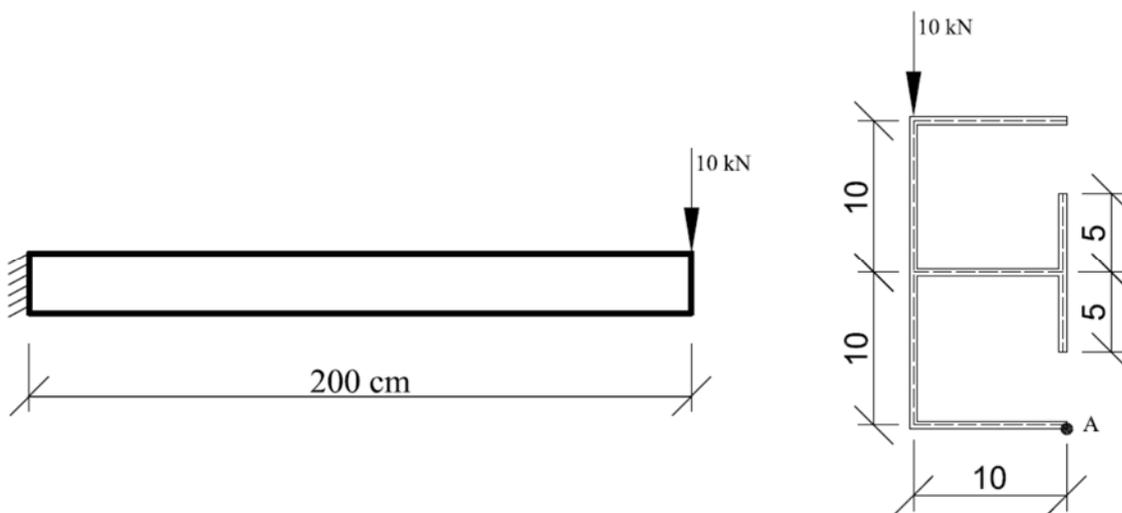


Figura 16.21 Estrutura a ser analisada. Dimensões em cm.

Como o centro de gravidade da seção transversal encontra-se localizado ao longo de seu eixo horizontal de simetria, o momento de inércia da seção, em torno do eixo  $z$ , assume o seguinte valor:

$$I_z = \left[ \frac{10 \cdot 0,5^3}{12} + 10 \cdot 0,5 \cdot 10^2 \right] 2 + \frac{0,5 \cdot 10^3}{12} + \frac{0,5 \cdot 20^3}{12} + \frac{10 \cdot 0,5^3}{12} \Rightarrow$$

$$I_z = 1375,31 \text{ cm}^4$$

Para que o momento de torção atuante na estrutura seja definido, deve-se determinar a localização do centro de cisalhamento da seção transversal. Assim, o momento de torção atuante será igual a intensidade da força aplicada multiplicada pela distância entre seu ponto de aplicação e o centro de cisalhamento da seção transversal. A integração do fluxo de cisalhamento ao longo dos elementos de paredes finas conduz às seguintes forças, as quais estão apresentadas na Fig. (16.22):

$$F_1 = \frac{V}{I} \int_0^{10} 0,5 \cdot x \cdot [10] dx \Rightarrow F_1 = \frac{V}{I} \int_0^{10} 5x dx \Rightarrow F_1 = 250 \frac{V}{I}$$

$$F_2 = \frac{2V}{I} \int_0^{10} 0,5 \cdot 10 \cdot 10 + \left[ 0,5 \cdot x \left( (10-x) + \frac{x}{2} \right) \right] dx \Rightarrow F_2 = \frac{2V}{I} \int_0^{10} 50 + 5x - \frac{x^2}{4} dx \Rightarrow$$

$$F_2 = 1333,33 \frac{V}{I}$$

$$F_3 = 2 \frac{V}{I} \int_0^5 \left[ 0,5 \cdot x \cdot \left( (5-x) + \frac{x}{2} \right) \right] dx \Rightarrow F_3 = 2 \frac{V}{I} \int_0^5 \left[ 2,5x - \frac{x^2}{4} \right] dx \Rightarrow$$

$$F_3 = 41,667 \frac{V}{I}$$

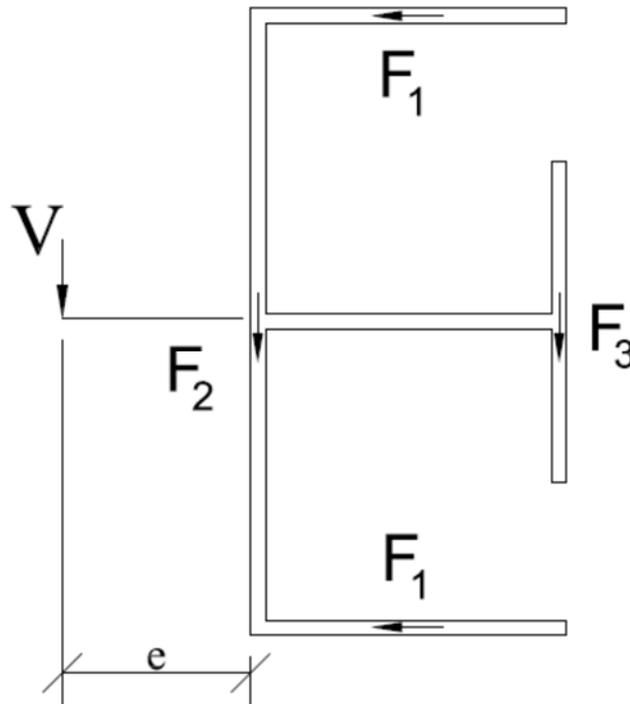


Figura 16.22 Sentido de atuação das forças equivalentes e posicionamento do centro de cisalhamento.

A posição do centro de cisalhamento resulta da condição de que na seção transversal exista somente um esforço cortante estaticamente equivalente, passando por um ponto sobre o eixo de simetria, distante  $e$  do eixo de redução. A condição de equivalência pode ser expressa como:

$$\sum M = 0 \Rightarrow V \cdot e = (F_1 \cdot 10)2 - (F_3 \cdot 10) = 0 \Rightarrow e = \frac{20F_1 - 10F_3}{V}$$

Substituindo os valores das forças equivalentes e do momento de inércia determinados anteriormente obtém-se:

$$e = \frac{20F_1 - 10F_3}{V} \Rightarrow e = \frac{20 \left( 250 \frac{V}{1375,31} \right) - 10 \left( 41,667 \frac{V}{1375,31} \right)}{V} \Rightarrow e = 3,333 \text{ cm}$$

Dessa forma, o momento de torção atuante na seção será igual a:

$$M_t = P \cdot e \Rightarrow M_t = P \cdot 3,333 \Rightarrow M_t = 33,33 \text{ kNcm}$$

Como a seção transversal empregada é aberta e de paredes finas, seu momento polar de inércia é assim determinado:

$$I_t = \frac{1}{3} \int t^3 ds \Rightarrow I_t = \frac{1}{3} [0,5^3 \cdot 10 + 0,5^3 \cdot 20 + 0,5^3 \cdot 10 + 0,5^3 \cdot 10 + 0,5^3 \cdot 10] \Rightarrow$$

$$I_t = 2,5 \text{ cm}^3$$

Por meio da Eq.(16.48), a tensão e cisalhamento máxima atuante é igual a:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t t_{\max}}{\frac{1}{3} \int t^3 ds} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{33,33 \cdot 0,5}{2,5} \Rightarrow \tau_{\max} = 6,666 \text{ kN/cm}^2$$

O giro da seção transversal pode ser calculado utilizando a Eq.(16.26). Portanto:

$$\phi = \frac{M_t L}{I_t G} \Rightarrow \phi = \frac{33,33 \cdot 200}{2,5 \cdot 72 \cdot 10^2} \Rightarrow \phi = 0,3703 \text{ rad}$$

O giro ocorre no sentido horário em relação ao plano da seção transversal. Além disso, o giro ocorre com o polo localizado no centro de cisalhamento da seção transversal, como apresentado na Fig. (16.23).

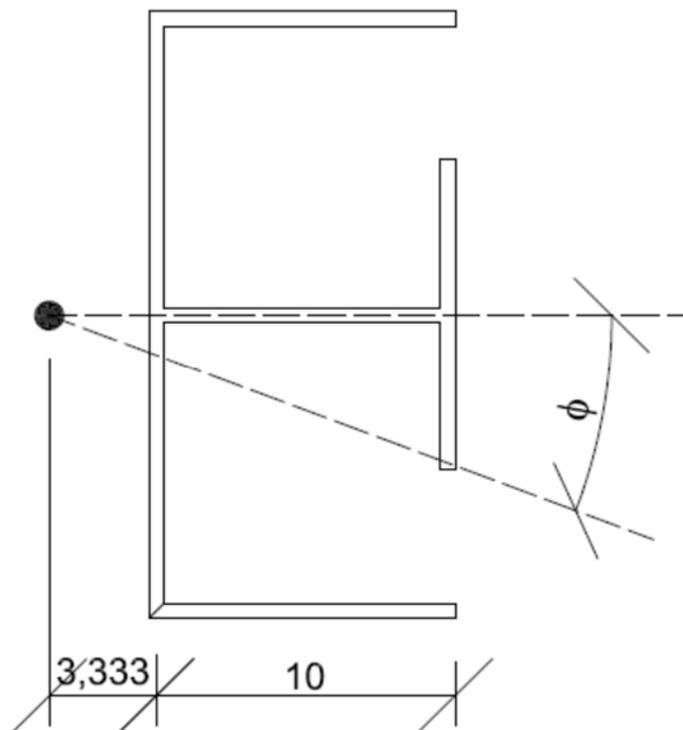


Figura 16.23 Sentido do giro da na seção transversal. Dimensões em cm.

O deslocamento vertical do ponto A pode ser determinado da seguinte forma:

$$v_A = \phi(e+10) \Rightarrow v_A = 0,3703(3,333+10) \Rightarrow v_A = 4,9373 \text{ cm}$$

## 17. – Tensões Normais na Flexão

---

### 17.1 – Introdução

Neste capítulo será apresentado um tópico de grande importância no domínio da mecânica dos sólidos / resistência dos materiais. Trata-se do estudo do comportamento mecânico de elementos estruturais submetidos a esforços de flexão. Em especial, no desenvolvimento das tensões normais geradas por esse tipo de esforço solicitante em elementos estruturais de seção transversal prismática.

Elementos de barra geral submetidos a esforços de flexão são largamente empregados no cotidiano da engenharia. Destaca-se a utilização desse elemento estrutural em edificações, máquinas e manufaturas diversas, como mostrado nas Fig. (17.1), Fig. (17.2), Fig. (17.3) e Fig. (17.4). Assim, a determinação das tensões geradas na flexão é de grande importância na avaliação da segurança bem como da concepção econômica dessas estruturas.



Figura 17.1 Ponte em múltiplos vãos.



Figura 17.2 Barras de suporte de edifício.

Porém, antes da formulação para a determinação das tensões normais na flexão ser apresentada, devem ser estudadas algumas propriedades geométricas de figuras planas. Essas propriedades serão necessárias na formulação do problema da flexão e

serão utilizadas com frequência ao longo deste capítulo. Dentre essas propriedades, atenção especial será dada ao centroide, ao momento estático e ao momento de inércia.



Figura 17.3 Ponte JK, Brasília.



Figura 17.4 Ponte de Millau, França.

## 17.2 – Propriedades Geométricas das Seções Transversais

Para a análise das tensões normais na flexão, é necessária a determinação dos momentos de inércia da seção transversal da barra em relação a seus eixos principais. Essa propriedade é determinada conhecendo-se o centroide da seção transversal, o qual é determinado a partir do cálculo do momento estático. Embora seções compostas por elementos geométricos simples tais como retângulos, quadrados e círculos, apresentem expressões simples para o momento de inércia, seções transversais formadas por elementos geométricos compostos são frequentemente utilizadas nas aplicações de engenharia. Assim, a determinação destas propriedades, para esses casos, deve ser efetuada seguindo a metodologia apresentada a seguir.

### 17.2.1 – Centroide de uma Área

O centroide é o ponto que define o centro geométrico de uma figura plana. Assumindo que a figura plana seja definida no plano cartesiano  $xy$ , as coordenadas do centroide podem ser determinadas por meio das seguintes relações:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \quad (17.1)$$

Para ilustrar a aplicação das relações apresentadas na Eq.(17.1), pode-se considerar a área retangular mostrada na Fig. (17.5). A área do elemento diferencial hachurado, de altura  $dy$  e largura igual a  $b$ , constante nesta figura, pode ser escrita como:  $dA = bdy$ .

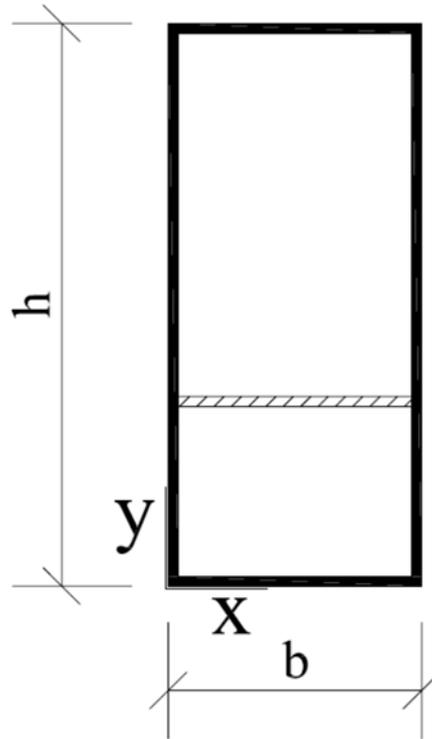


Figura 17.5 Área retangular.

Assim, a coordenada  $y$  do centroide pode ser calculada como:

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int_0^h y b dy}{\int_0^h b dy} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{y^2 b}{2} \Big|_0^h}{b y \Big|_0^h} \Rightarrow \bar{y} = \frac{h}{2}$$

Analogamente, para a coordenada do centroide em relação ao eixo  $x$ , toma-se um elemento diferencial vertical de área igual a  $dA = h dx$ . Assim, pode-se escrever que:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_0^b x h dx}{\int_0^b h dx} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{x^2 h}{2} \Big|_0^b}{h x \Big|_0^b} \Rightarrow \bar{x} = \frac{b}{2}$$

Deve-se destacar que o centroide de uma figura plana encontra-se posicionado sempre ao longo de eixos de simetria da área considerada, caso estes existam. No caso

de a figura considerada apresentar dois eixos de simetria, o encontro entre estes eixos define o centroide da figura.

### 17.2.2 – Determinação do Centroide de Áreas Compostas

Em aplicações correntes na engenharia de estruturas, as seções transversais das barras são compostas por figuras planas básicas. Assim, a determinação do centroide deve ser efetuada considerando não apenas uma área, mas um conjunto de áreas. Nessa situação, as integrais apresentadas na Eq.(17.1) permanecem válidas. No entanto, elas devem ser aplicadas a cada uma das áreas regulares/básicas que compõem a figura plana total.

Portanto, no caso de áreas compostas, a Eq.(17.1) deve ser reescrita considerando as diversas subáreas. Assim, esta equação deve incorporar uma somatória ao longo das  $n$  subáreas consideradas. Então, para este caso, as coordenadas do centroide ficam assim definidas:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_A x_i dA_i}{\sum_{i=1}^n \int_A dA_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_A y_i dA_i}{\sum_{i=1}^n \int_A dA_i} \quad (17.2)$$

Como exemplo de aplicação da Eq.(17.2), deve-se determinar as coordenadas do centroide da área composta apresentada na Fig. (17.6), sabendo que as dimensões estão apresentadas em cm.

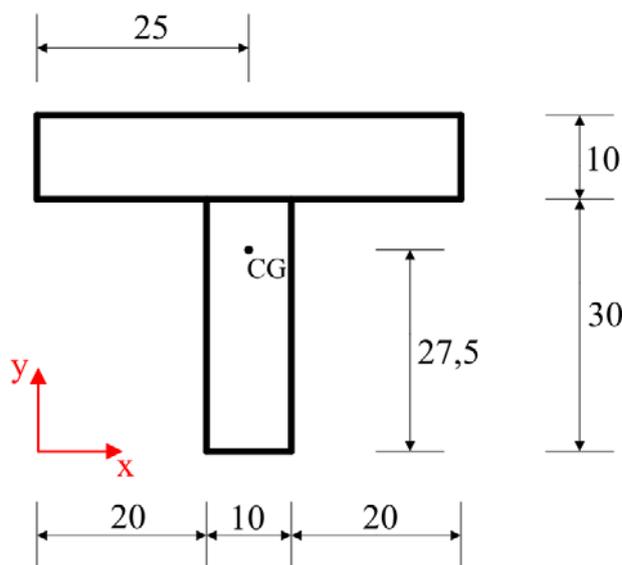


Figura 17.6 Área composta. Dimensões em cm.

Como as áreas consideradas são regulares, as integrais de área transformam-se em somatórias simples. Assim, a coordenada  $y$  do centroide é dada por:

$$\bar{y} = \frac{A_1 \cdot \bar{y}_1 + A_2 \cdot \bar{y}_2}{A_1 + A_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{50 \cdot 10 \cdot 35 + 10 \cdot 30 \cdot 15}{50 \cdot 10 + 10 \cdot 30} = 27,5 \text{ cm}$$

Já a coordenada  $x$  é obtida por:

$$\bar{x} = \frac{A_1 \cdot \bar{x}_1 + A_2 \cdot \bar{x}_2}{A_1 + A_2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{50 \cdot 10 \cdot 25 + 10 \cdot 30 \cdot 25}{50 \cdot 10 + 10 \cdot 30} = 25 \text{ cm}$$

Conforme discutido no item anterior, o eixo que define o centroide da figura plana estará posicionado ao longo de um eixo de simetria desta área, caso ele exista. O resultado obtido anteriormente comprova esta afirmação, ou seja, o termo  $\bar{x}$  está localizado ao longo da simetria vertical da área.

### 17.2.3 – Momento de Inércia de Figuras Planas

O momento de inércia indica o segundo momento da área em relação a um eixo de referência escolhido. Normalmente, essa grandeza é referenciada aos eixos que passam pelo centroide da área analisada. Essa grandeza é definida matematicamente por meio das relações apresentadas abaixo, assumindo que a área analisada seja definida pelo sistema cartesiano  $xy$ :

$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad I_y = \int_A x^2 dA \qquad (17.3)$$

Para geometrias simples tais como: retângulos, quadrados, círculos, entre outras, a determinação de expressões para o momento de inércia pode ser facilmente efetuada. Com o objetivo de exemplificar a aplicação das Eq.(17.3), deve-se considerar a área retangular apresentada na Fig. (17.7).

Nessa figura, observa-se a presença de um elemento infinitesimal, de altura  $dy$  e largura igual a  $b$ , cuja área pode ser escrita como  $dA = bdy$ . Como o momento de inércia é referenciado ao centroide da área, pode-se escrever que:

$$I_x = \int_A y^2 dA \Rightarrow I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy \Rightarrow I_x = \frac{b}{3} y^3 \Big|_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Analogamente, pode-se também determinar uma expressão para o momento de inércia em relação ao eixo  $y$ . Para tal fim, deve-se tomar um elemento infinitesimal não

mais horizontal como ilustrado na Fig. (17.7), mas sim vertical, cuja área seja definida por  $dA = hdx$ . Nesse caso tem-se:

$$I_y = \int_A x^2 dA \Rightarrow I_y = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx \Rightarrow I_y = \frac{h}{3} x^3 \Big|_{-b/2}^{b/2} \Rightarrow I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

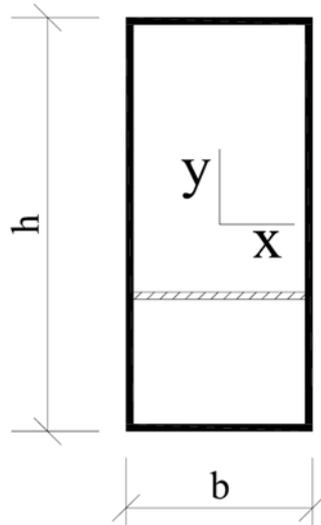


Figura 17.7 Área retangular.

Posição do centroide	Posição do centroide	Momento de inércia (área)
		$I_x = \frac{1}{4} r^4 \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$ $I_y = \frac{1}{4} r^4 \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$
Segmento de arco de circunferência	Área do setor circular	
		$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$ $I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$
Arcos de quarto de circunferência e semicircunferência	Área de quarto de círculo	
		$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$ $I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$
Área do trapézio	Área de semicírculo	
		$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$ $I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$
Área semiparabólica	Área do círculo	
		$I_x = \frac{1}{12} h b^3$ $I_y = \frac{1}{12} h b^3$
Área sob curva parabólica	Área do retângulo	
		$I_x = \frac{1}{36} h b^3$
Área parabólica	Área do triângulo	

Figura 17.8 Relações do momento de inércia para áreas regulares.

De maneira semelhante, pode-se determinar expressões para os momentos de inércia de figuras geométricas básicas. Para geometrias correntemente utilizadas na engenharia de estruturas, essas expressões encontram-se tabeladas não sendo necessária sua dedução. Nessas notas destacam-se as geometrias apresentadas na Fig. (17.8).

Porém, pode-se perguntar: como determinar o momento de inércia de figuras planas compostas por diversas áreas regulares? Nesses casos deve-se utilizar o teorema dos eixos paralelos, também conhecido como Teorema de Steiner, o qual será apresentado a seguir.

#### 17.2.4 – Teorema dos Eixos Paralelos

Por meio deste teorema é possível a avaliação das inércias da área analisada em relação a quaisquer eixos de interesse. Em particular, a utilização desse teorema permite a avaliação das inércias de figuras planas compostas por um conjunto de subáreas regulares em relação ao centroide da área composta.

Para apresentar o equacionamento deste teorema, deve-se considerar a área retangular mostrada na Fig. (17.9). Deseja-se calcular o momento de inércia em torno do eixo  $x$  desta área. Porém, essa grandeza não deverá ser avaliada em relação ao centroide da área, mas sim ao longo de um eixo distante de  $y_0$  do centroide.

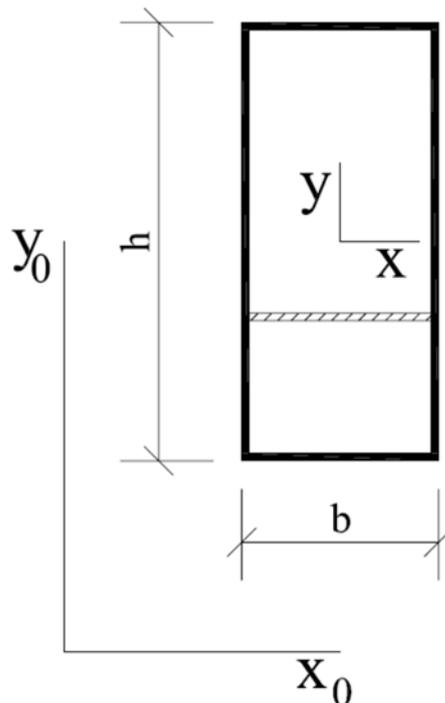


Figura 17.9 Aplicação do teorema dos eixos paralelos.

Nesse caso, a inércia ainda poderá ser avaliada por meio da Eq.(17.3). No entanto, o valor de  $y$ , referenciado ao centroide da área, deve considerar a distância em relação ao novo eixo de referência. Assim:

$$I_x = \int_A y^2 dA \Rightarrow I_x = \int_A (y_0 + y)^2 dA \Rightarrow I_x = \int_A (y_0^2 + 2y_0 y + y^2) dA \quad (17.4)$$

Os termos da última integral podem ser separados e analisados isoladamente. Separando-os tem-se:

$$I_x = \int_A y_0^2 dA + 2y_0 \int_A y dA + \int_A y^2 dA \quad (17.5)$$

O primeiro termo da Eq.(17.5) leva em consideração a influência da área e a distância do centroide da área isolada ao novo eixo de referência. Portanto, este termo deve ser calculado. O segundo termo integral apresentado na Eq.(17.5) é nulo, uma vez que avalia a somatória das áreas multiplicadas por sua distância em relação ao centroide da área analisada. Para demonstrar que este termo é realmente nulo, este pode ser avaliado considerando a estrutura apresentada na Fig. (17.7). Como a área do elemento diferencial analisado pode ser escrita como  $dA = bdy$ , a integral é dada por:

$$\int_A y dA \Rightarrow \int_{-h/2}^{h/2} y b dy \Rightarrow \frac{y^2}{2} b \Big|_{-h/2}^{h/2} \quad \therefore \int_A y dA = 0$$

Finalmente, o último termo integral nada mais é do que o momento de inércia da área analisada calculado em relação ao seu próprio centroide. Esta integral pode ser obtida por meio das expressões apresentadas na Fig. (17.8).

Assim, a expressão do teorema dos eixos paralelos pode ser reescrita como:

$$I_x = y_0^2 \int_A dA + I_{CG}^{xx} \Rightarrow I_x = y_0^2 A + I_{CG}^{xx} \quad (17.6)$$

Este teorema será utilizado com frequência nessas notas sendo também de grande importância no estudo dos tópicos da mecânica dos sólidos/resistência dos materiais.

### 17.2.5 – Exemplo 1

Determine o momento de inércia em torno dos eixos  $x$  e  $y$  que passam pelo centroide da área composta mostrada na Fig. (17.10). As dimensões estão apresentadas em cm.

As coordenadas do centroide desta figura foram calculadas anteriormente neste capítulo, sendo iguais a  $(x, y)_{CG} = (25; 27,5)$ . Assim, aplicando o teorema dos eixos paralelos, a inércia em torno do eixo  $x$  é assim determinada:

$$I_x = \frac{10 \cdot 30^3}{12} + 10 \cdot 30 \cdot (27,5 - 15)^2 + \frac{50 \cdot 10^3}{12} + 50 \cdot 10 \cdot (35 - 27,5)^2 \Rightarrow$$

$$I_x = 101666,67 \text{ cm}^4$$

Já para a inércia em torno do eixo  $y$  tem-se:

$$I_y = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + 0 + \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 0 \Rightarrow I_y = 106666,667 \text{ cm}^4$$

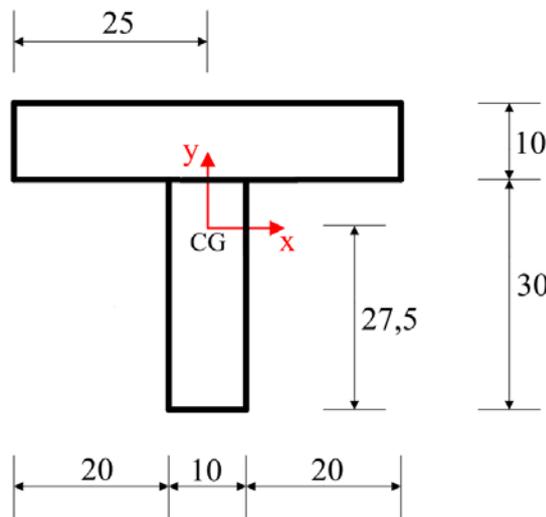


Figura 17.10 Área composta analisada. Dimensões em cm.

### 17.2.6 – Exemplo 2

Determine o momento de inércia em relação aos eixos  $x$  e  $y$  que passam pelo centroide da área composta mostrada na Fig. (17.11). As dimensões mostradas nesta figura estão em cm.

Para a resolução deste exemplo deve-se inicialmente determinar as coordenadas do centroide da área. Assim:

$$\bar{x} = \frac{100 \cdot 400 \cdot 50 + 400 \cdot 100 \cdot 300 + 100 \cdot 400 \cdot 550}{100 \cdot 400 + 400 \cdot 100 + 100 \cdot 400} \Rightarrow \bar{x} = 300 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{100 \cdot 400 \cdot 500 + 400 \cdot 100 \cdot 350 + 100 \cdot 400 \cdot 200}{100 \cdot 400 + 400 \cdot 100 + 100 \cdot 400} \Rightarrow \bar{y} = 350 \text{ cm}$$

As inércias referenciadas ao centroide da área composta são obtidas aplicando-se o teorema dos eixos paralelos. Assim:

$$I_x = \frac{100 \cdot 400^3}{12} + 100 \cdot 400 \cdot (500 - 350)^2 + \frac{400 \cdot 100^3}{12} + \frac{100 \cdot 400^3}{12} + 100 \cdot 400 \cdot (200 - 350)^2 \Rightarrow I_x = 2,90 \cdot 10^9 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{400 \cdot 100^3}{12} + 100 \cdot 400 \cdot (300 - 50)^2 + \frac{100 \cdot 400^3}{12} + \frac{400 \cdot 100^3}{12} + 100 \cdot 400 \cdot (300 - 550)^2 \Rightarrow I_y = 5,60 \cdot 10^9 \text{ cm}^4$$

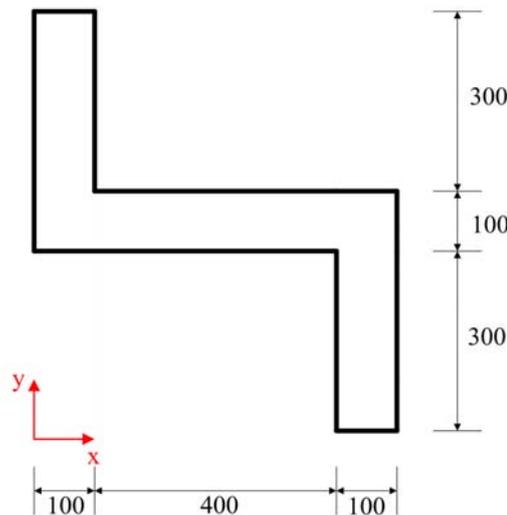


Figura 17.11 Área composta analisada. Dimensões em cm.

### 17.2.7 – Exemplo 3

Determine a inércia, em relação ao eixo horizontal, da área mostrada na Fig. (17.12). Trata-se de uma área retangular de dimensões iguais a 15x60 cm, onde observa-se a presença de um furo, de diâmetro igual a 2 cm, posicionado como mostrado na figura a seguir.

O primeiro passo para a resolução deste exercício é a determinação da posição vertical do centroide da área resultante. Assim:

$$\bar{y} = \frac{15 \cdot 60 \cdot 30 - \pi \cdot 1^2 \cdot 10}{15 \cdot 60 - \pi \cdot 1^2} \Rightarrow \bar{y} = 30,07 \text{ cm}$$

A inércia em torno do eixo horizontal é determinada utilizando-se o teorema dos eixos paralelos. Sabendo, da Fig. (17.8), que a inércia de uma área circular em relação ao seu próprio centroide é igual a  $I_{\text{circular}} = \frac{\pi}{4} r^4$ , tem-se:

$$I_x = \frac{15 \cdot 60^3}{12} + 15 \cdot 60 \cdot (30,07 - 30)^2 - \frac{\pi}{4} \cdot 1^4 - \pi \cdot 1^2 \cdot (30,07 - 10)^2 \Rightarrow$$

$$I_x = 268738,175 \text{ cm}^4$$

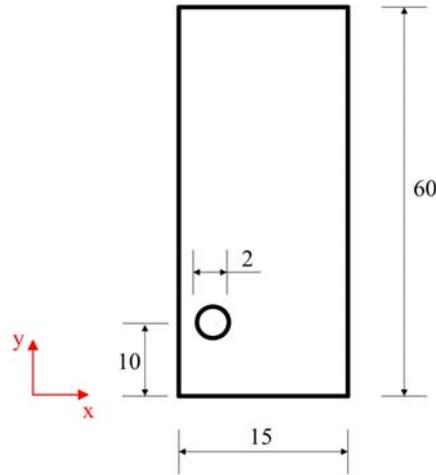
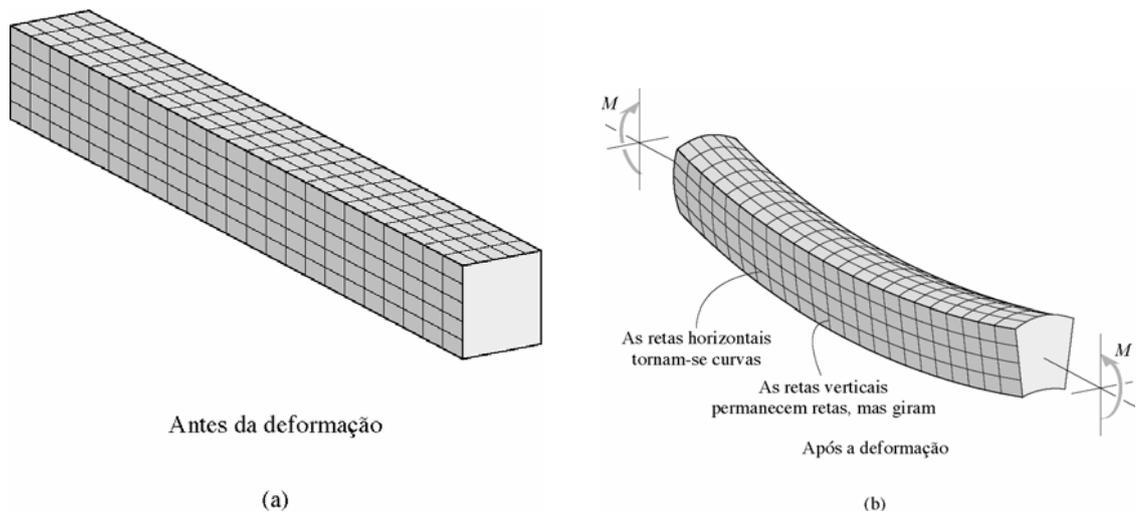


Figura 17.12 Área retangular com furo. Dimensões em cm.

### 17.3 – Problema da Flexão. Hipóteses Assumidas

Para compreender os efeitos mecânicos da ação de um momento fletor sob um elemento de barra geral, pode-se considerar a barra abaixo, a qual é prismática e está solicitada apenas por um momento fletor  $M$ .



(a)

(b)

Figura 17.13 Elemento prismático fletido.

Com base na ilustração apresentada na Fig. (17.13), observa-se que, em decorrência da ação do momento fletor, as fibras que compõem a barra apresentarão um

padrão deformado que tende a alongar as fibras inferiores da barra e encurtar as fibras localizadas na parte superior da barra. Conseqüentemente, constata-se que uma parte da seção transversal estará tracionada e a parte complementar comprimida. Esta constatação pode ser também facilmente observada aplicando um momento fletor a um dos dedos de nossa mão. Verifica-se que as rugas dos dedos em um de seus lados irão se aproximar (compressão), enquanto no lado oposto estas irão se afastar (tração).

Assumindo que a barra seja contínua, haverá, portanto, na interface entre as regiões tracionada e comprimida uma superfície cujo comprimento não variará em decorrência da aplicação do momento fletor. Essa superfície recebe o nome de superfície neutra, uma vez que os pontos nela posicionado não sofrem deformação.

Para o equacionamento do problema da flexão quatro hipóteses são assumidas:

1) Existe uma superfície neutra na seção transversal da barra, a qual não observa variação em seu comprimento devido a ação do momento fletor.

2) As seções transversais da barra, que são originalmente planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da barra, permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da barra após a deformação. Efeitos de empenamento não são considerados.

3) Toda e qualquer deformação da seção transversal ocorre em seu próprio plano. Assim, os efeitos de empenamento são desprezados.

4) O material que compõe a barra é elástico linear, isótopo, contínuo e homogêneo.

Para formular a variação das deformações ao longo da seção transversal, deve-se considerar a barra mostrada na Fig. (17.14), a qual está submetida a um momento fletor.

Assumindo que a barra seja analisada no regime de pequenos deslocamentos (é uma hipótese plausível uma vez que as estruturas são analisadas na condição de comportamento mecânico elástico linear), pode-se aproximar a configuração deformada da barra por um arco de círculo. Dessa forma, o elemento de comprimento  $\Delta x$  apresentado na Fig. (17.14) apresentará a configuração deformada mostrada na Fig. (17.15).

Para analisar a variação da deformação ao longo da altura da seção transversal, deve-se estudar a variação do comprimento de uma fibra localizada a uma distância  $y$  da superfície neutra, como indica a Fig. (17.15). Inicialmente, esta fibra apresenta comprimento igual a  $\Delta x$ , isto é, antes da deformação. Após a deformação, o seu

comprimento inicial é alterado, passando a ser igual a  $\Delta S'$ . Aproximando a configuração deslocada da barra por um arco de círculo, este comprimento deformado,  $\Delta S'$ , pode ser expresso em função do raio do círculo que aproxima sua deslocada.

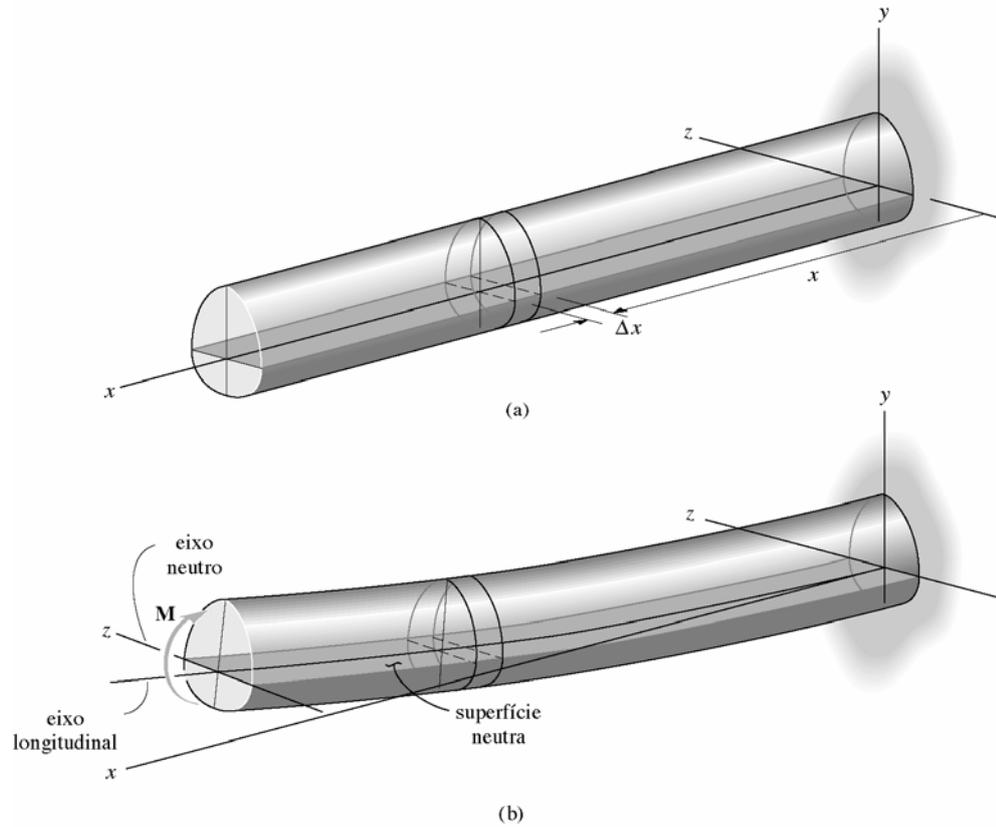


Figura 17.14 Elemento prismático fletido. Variação das deformações ao longo da seção transversal.

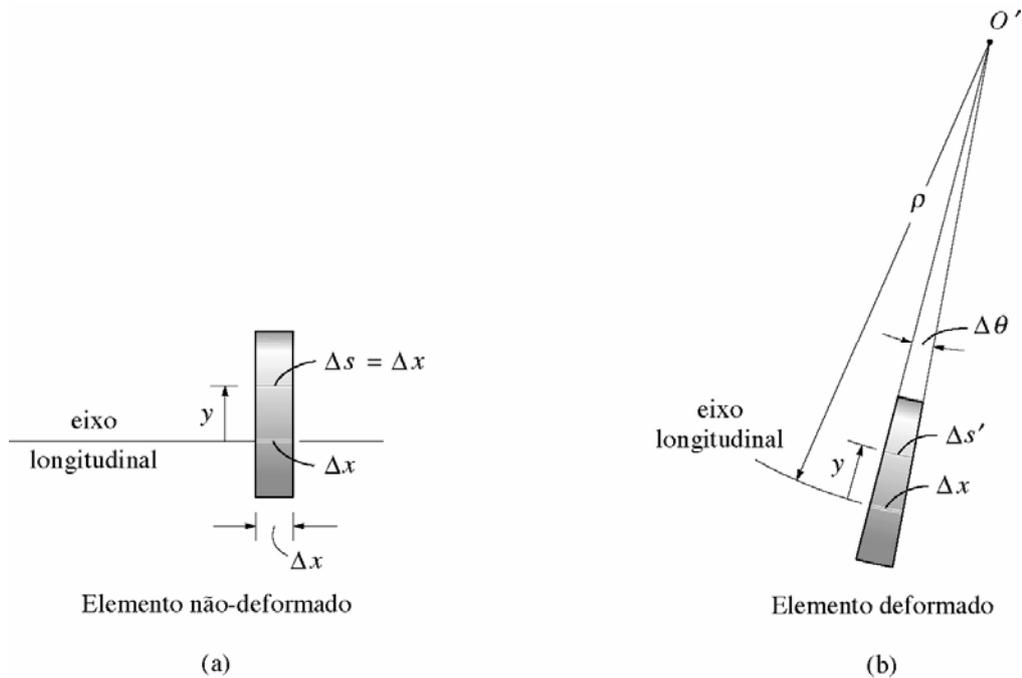


Figura 17.15 Configuração deformada de um elemento de comprimento  $\Delta x$  que compõe a barra.

Usando a definição de deformação específica, pode-se avaliar a deformação deste segmento da seguinte forma:

$$\epsilon_{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S} \Rightarrow \epsilon_{\Delta S} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} \Rightarrow \epsilon_{\Delta S} = -\frac{y}{\rho} \quad (17.7)$$

Assim, conclui-se que a deformação normal é dependente da distância entre a fibra analisada e a superfície neutra. Além disso, esta dependência é linear. A deformação normal será maior quanto mais distante o ponto analisado estiver da superfície neutra. A deformação normal será nula quando o ponto analisado estiver sobre a superfície neutra, conforme uma das hipóteses consideradas. Dessa forma, sendo  $c$  a distância entre a superfície neutra e a fibra mais distante da superfície neutra, pode-se escrever a deformação normal, para qualquer ponto ao longo da altura da seção transversal, em função da deformação máxima e desta distância, como mostra a Fig. (17.16). Assim:

$$\epsilon = -\frac{y}{c} \epsilon_{\text{máx}} \quad (17.8)$$

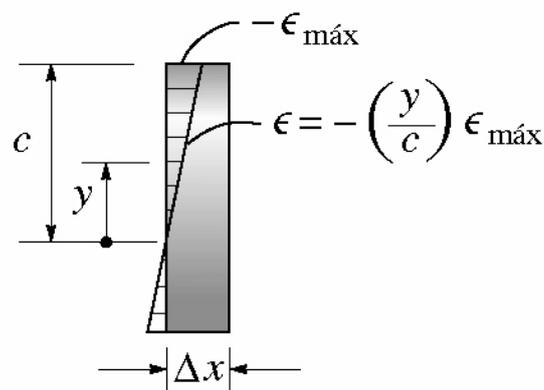


Figura 17.16 Deformação máxima na seção.

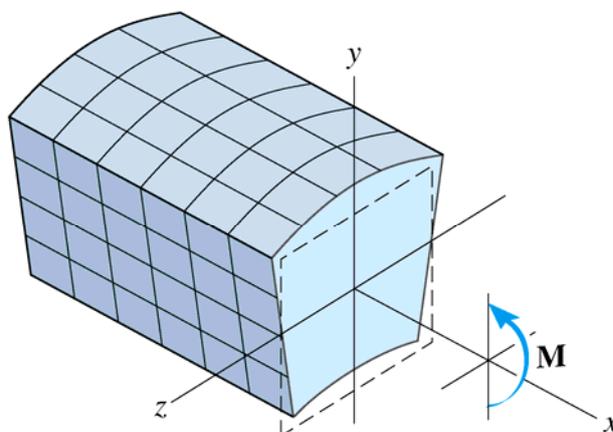


Figura 17.17 Deformações normais nas direções da seção transversal.

A deformação apresentada na Eq.(17.8) refere-se à deformação normal atuante perpendicular ao plano da seção transversal, normalmente referenciado como  $\varepsilon_x$ . Para avaliar as deformações normais presentes ao longo das duas direções que formam a seção transversal, como mostrado na Fig. (17.17), pode-se utilizar a definição do coeficiente de Poisson. Assim:

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \qquad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \qquad (17.9)$$

#### 17.4 – Fórmula da Flexão

Uma das hipóteses assumidas para o desenvolvimento da formulação do problema da flexão é que o material que compõe a barra apresente comportamento mecânico elástico linear. Nesse caso, o comportamento mecânico do material é governado pela lei de Hooke. Segundo essa lei, as tensões normais são diretamente proporcionais às deformações normais atuantes no ponto em análise. Consequentemente, por meio dessa lei, constata-se que as tensões normais atuantes ao longo da altura da seção transversal apresentarão variação semelhante à das deformações normais, como mostra a Fig. (17.18).

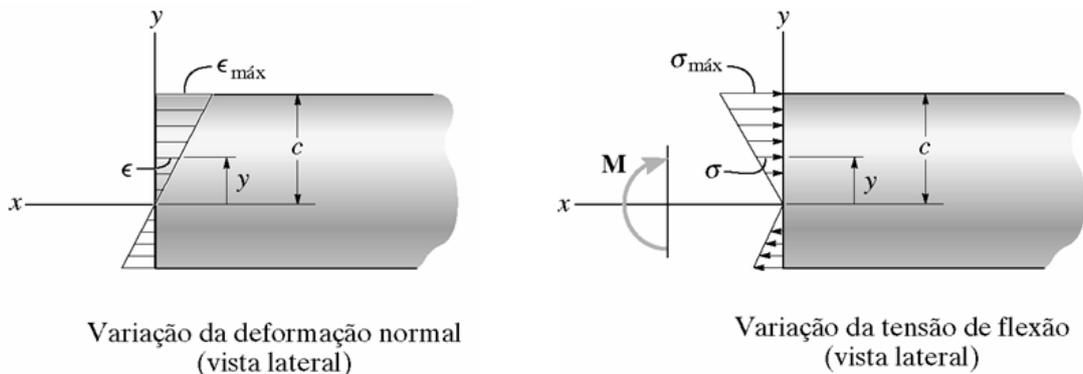


Figura 17.18 Variação das deformações e tensões ao longo da altura da seção.

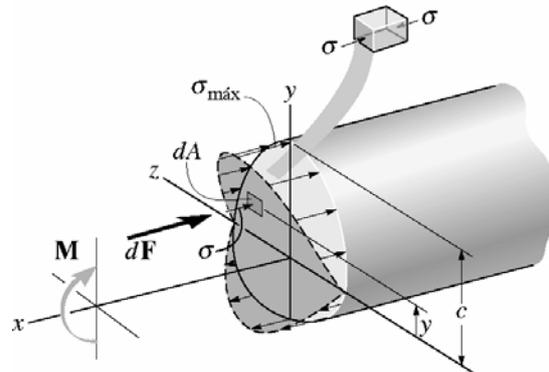
Portanto, por meio dessa consideração, a variação das tensões normais ao longo da altura da seção transversal da barra pode ser escrita como:

$$\sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{\max} \qquad (17.10)$$

Com base no apresentado na Eq.(17.10), pode-se efetuar o equilíbrio de um elemento de área infinitesimal  $dA$  pertencente à seção transversal da barra, como

indicado na Fig. (17.19). Sabendo que a multiplicação da tensão normal atuante nesse elemento infinitesimal por sua área resulta uma componente de força, o equilíbrio de forças pode ser verificado da seguinte maneira:

$$\sum F = 0 \Rightarrow \int_A \sigma dA = 0$$



Varição da tensão de flexão

Figura 17.19 Equilíbrio do elemento infinitesimal de área.

Sabendo que a variação da tensão normal ao longo da altura da seção é dada pela Eq.(17.10) tem-se:

$$\int_A -\frac{y}{c} \sigma_{\max} dA = 0 \Rightarrow -\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y dA = 0$$

Como  $\sigma_{\max}$  e  $c$  são diferentes do zero, o equilíbrio é verificado apenas se  $\int_A y dA = 0$ . Como mostrado anteriormente nesse capítulo, essa integral é nula desde que seja avaliada em relação ao centroide da seção transversal. Portanto, através desse equilíbrio, verifica-se que é sob o centroide da seção que estará posicionada a superfície neutra, no caso da atuação de um único momento fletor.

Deve-se também verificar se o equilíbrio em termos de momentos é atendido. O momento externo aplicado deve ser equilibrado pelas tensões linearmente dispostas na seção transversal para que o equilíbrio ocorra. Assim:

$$M = \int_A y \sigma dA$$

Sabendo que a tensão ao longo da altura da seção é dada pela Eq.(17.10) tem-se:

$$M = \int_A y \left( -\frac{y}{c} \sigma_{\max} \right) dA \Rightarrow M = -\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y^2 dA$$

A integral  $\int_A y^2 dA$  é denominada momento de inércia de uma figura plana, como mostrado anteriormente, sendo uma propriedade geométrica de área. Essa grandeza é normalmente designada pela letra  $I$ . Assim:

$$M = -\frac{\sigma_{\max}}{c} I \Rightarrow \sigma_{\max} = -\frac{M}{I} c$$

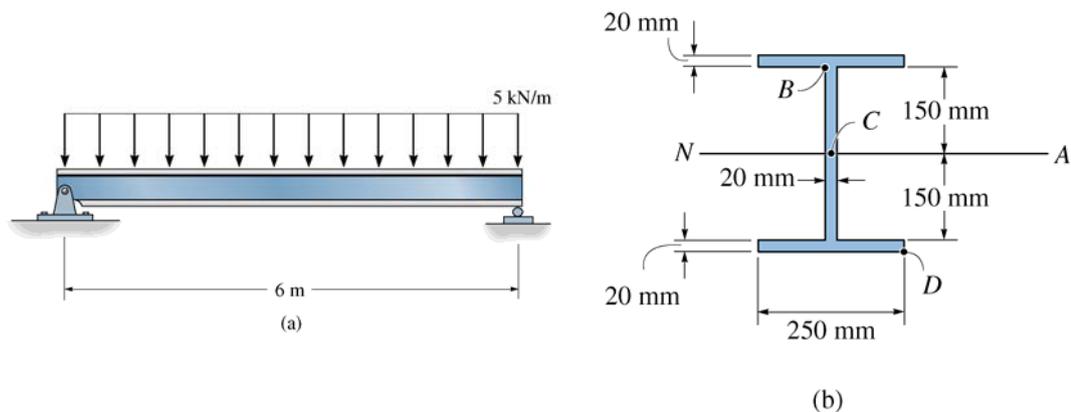
A expressão anterior relaciona as tensões normais máximas presentes na seção transversal ao momento fletor atuante. Para uma fibra qualquer da seção, não necessariamente a mais distante da superfície neutra, a tensão normal pode ser obtida por meio da Eq.(17.11), uma vez que se sabe que as tensões normais variam linearmente com a distância do ponto analisado à superfície neutra. Assim:

$$\sigma = -\frac{M}{I} y \quad (17.11)$$

A relação anterior é denominada fórmula da flexão, já que relaciona o momento fletor atuante à tensão normal presente em qualquer ponto da seção transversal.

### 17.5 – Exemplo 4

Calcule as tensões normais máxima e mínima que ocorrem na viga mostrada na Fig. (17.20) e ilustre a distribuição das tensões normais ao longo da altura da seção transversal.



Para o cálculo das tensões normais máximas atuantes na viga, deve-se determinar a seção transversal mais solicitada pelo carregamento atuante. Para tal fim, o

diagrama de momento fletor deve ser construído. Para a estrutura analisada, este diagrama é mostrado na Fig. (17.21).

Como a seção transversal é simétrica ao longo das duas direções que a definem, sabe-se que o centroide da seção estará localizado na intersecção entre seus eixos de simetria. Porém, o leitor pode determinar a posição do centroide utilizando os conceitos apresentados no item 17.2.

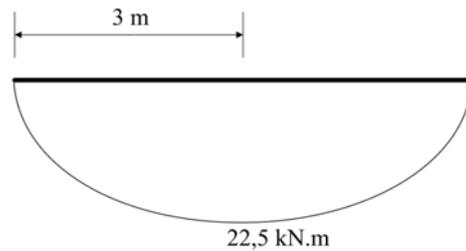


Figura 17.21 Diagrama de momento fletor.

Com base nessa informação, o momento de inércia da seção pode ser obtido, sendo igual a:

$$I = \left[ \frac{250 \cdot 20^3}{12} + 250 \cdot 20 \cdot (150 + 10)^2 \right] \cdot 2 + \frac{20 \cdot 300^3}{12} \Rightarrow I = 3,01333 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Para que o problema seja resolvido utilizando unidades compatíveis, o momento de inércia será determinado na unidade metro. Fazendo esta conversão de unidades obtém-se:

$$I = 3,01333 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Assim, as tensões normais, máxima e mínima, ficam determinadas como:

$$\sigma_{MIN} = -\frac{M}{I} y \Rightarrow \sigma_{MIN} = -\frac{22,5}{3,01333 \cdot 10^{-4}} \cdot 170 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \sigma_{MIN} = -12,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{MAX} = -\frac{M}{I} y \Rightarrow \sigma_{MAX} = -\frac{22,5}{3,01333 \cdot 10^{-4}} \cdot (-170 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \sigma_{MAX} = 12,7 \text{ MPa}$$

A distribuição das tensões normais ao longo da altura da seção transversal é a mostrada na Fig. (17.22).

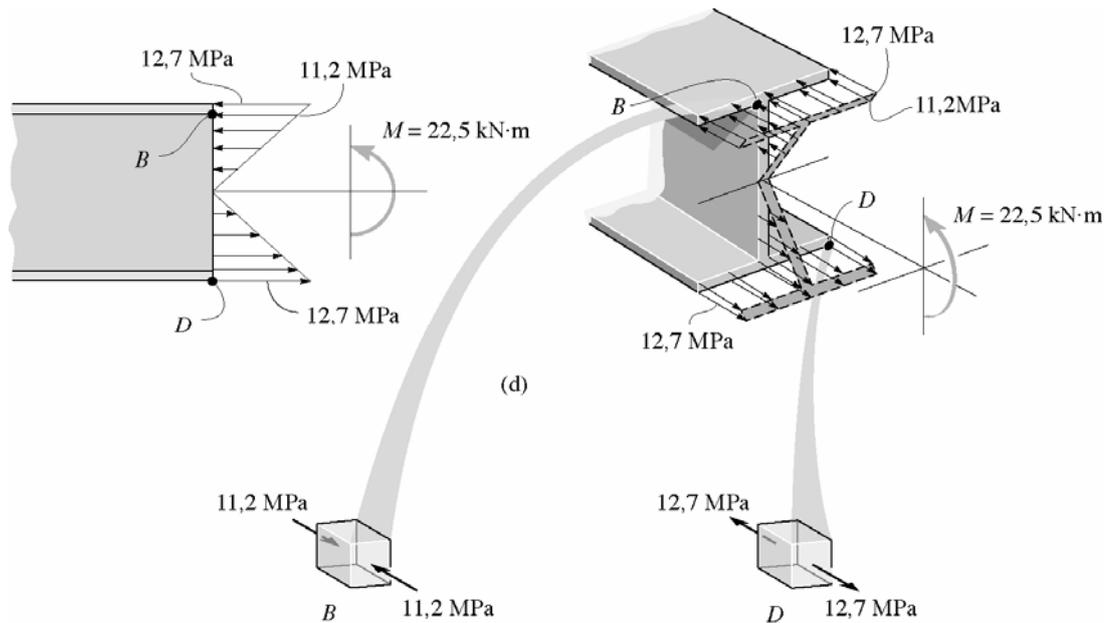


Figura 17.22 Distribuição das tensões normais ao longo da altura da seção.

### 17.6 – Exemplo 5

Sabendo que o material que compõe a viga mostrada na Fig. (17.23) é capaz de suportar a uma tensão de tração igual a 25 MPa e a uma tensão de compressão de 130 MPa, determine se nessa estrutura a falha será observada ou não. As dimensões da seção transversal estão apresentadas em mm.

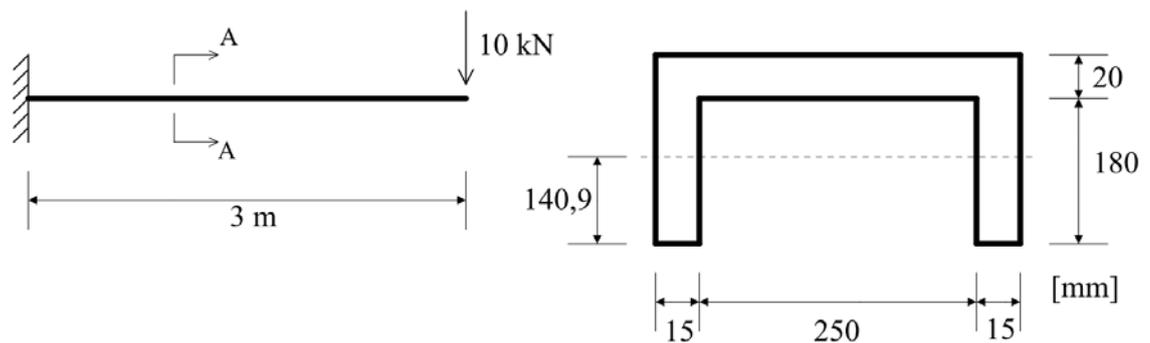


Figura 17.23 Estrutura analisada.

Para que esse problema seja resolvido, deve-se determinar a seção transversal mais solicitada da viga. Esta seção é facilmente identificada por meio do digrama de momento fletor. Traçando este diagrama, o qual é apresentado na Fig. (17.24), constata-

se que a seção mais solicitada é a do engaste, cujo momento fletor atuante é igual a 30 kNm.

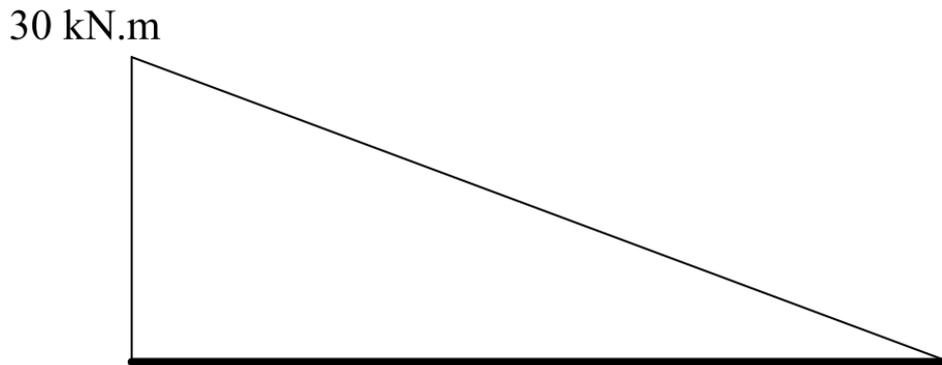


Figura 17.24 Diagrama de momento fletor.

Na sequência, as propriedades geométricas da seção transversal devem ser determinadas. Portanto, as coordenadas do centroide da seção transversal e seu momento de inércia devem ser calculados. Assim:

$$\bar{y} = \frac{15 \cdot 180 \cdot 90 + 15 \cdot 180 \cdot 90 + 280 \cdot 20 \cdot 190}{15 \cdot 180 + 15 \cdot 180 + 280 \cdot 20} \Rightarrow \bar{y} = 140,90 \text{ mm}$$

Com base na posição do centroide, o momento de inércia pode ser calculado como:

$$I = \left[ \frac{15 \cdot 180^3}{12} + 15 \cdot 180 \cdot (140,90 - 90)^2 \right] 2 + \frac{280 \cdot 20^3}{12} + (190 - 140,90)^2 \cdot 280 \cdot 20 \Rightarrow$$

$$I = 42,257 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I = 42,257 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

A maior tensão de tração ocorrerá nas fibras localizadas na parte superior da seção transversal. Assim, utilizando a fórmula da flexão, Eq.(17.11), tem-se:

$$\sigma_{MAX} = - \left[ \frac{-30}{42,257 \cdot 10^{-6}} (200 - 140,90) \cdot 10^{-3} \right] \Rightarrow \sigma_{MAX} = 41,957 \text{ MPa}$$

A maior tensão compressiva ocorrerá nas fibras posicionadas na parte inferior da seção transversal. Por meio da fórmula da flexão obtém-se:

$$\sigma_{MIN} = - \left[ \frac{-30}{42,257 \cdot 10^{-6}} (-140,90) \cdot 10^{-3} \right] \Rightarrow \sigma_{MIN} = -100,03 \text{ MPa}$$

Portanto, com base nas resistências do material informadas, verifica-se que será observada a falha do material. Além disso, a falha estará localizada na parte tracionada da seção.

### 17.7 – Momento Fletor Aplicado com Orientação Arbitrária

Nos itens anteriores foi estudada a distribuição das tensões normais ao longo da altura da seção transversal de um elemento de barra geral submetido à ação de um momento fletor orientado ao longo de um de seus eixos principais de inércia. Porém, no domínio da engenharia de estruturas, é comum, na concepção de estruturas, a utilização de elementos de barra geral submetidos à ação não mais de um, mas de dois momentos fletores, os quais são orientados ao longo dos eixos principais de inércia da seção.

Neste item, serão estudadas as tensões normais, em um elemento de barra geral, produzidas pela ação de um momento fletor com orientação arbitrária no plano da seção transversal, como mostrado na Fig. (17.25).

Assumindo que o material que compõe a estrutura obedeça ao regime de comportamento mecânico elástico linear, pode-se aplicar o princípio da superposição dos efeitos para adicionar as tensões normais produzidas pelos momentos  $M_z$  e  $M_y$ , os quais são resultado da decomposição do momento aplicado em uma direção arbitrária em relação a estes eixos de referência. A superposição dos efeitos, nesse caso, pode ser visualizada na Fig. (17.26). Com base nessa figura, constata-se que a superfície neutra encontra-se inclinada em relação aos eixos que definem o plano da seção transversal.

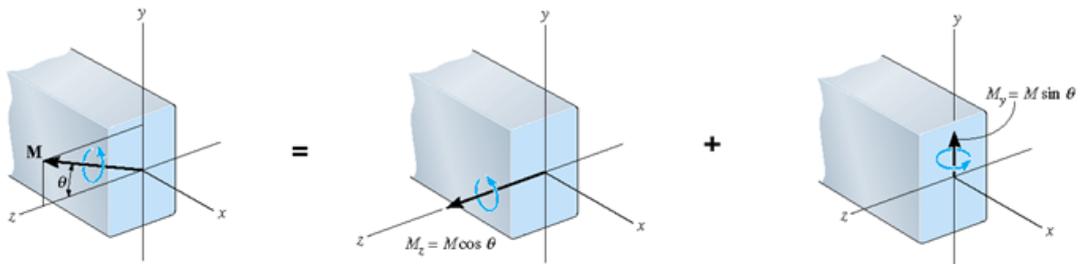


Figura 17.25 Atuação de dois momentos fletores.

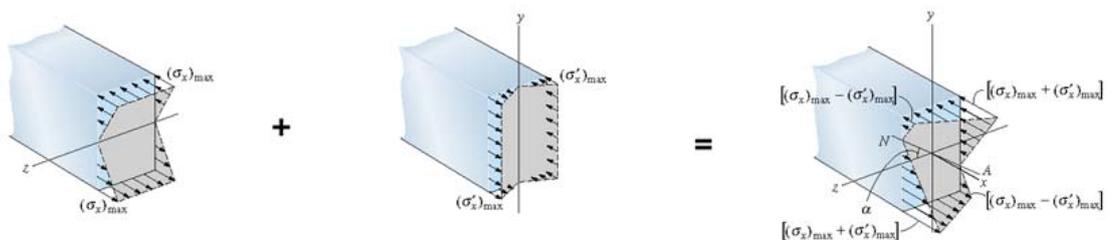


Figura 17.26 Sobreposição dos efeitos.

Sabendo que as tensões normais na flexão são determinadas pela fórmula da flexão, Eq. (17.11), a qual é válida para a aplicação de um momento  $M_z$ , pode-se reescrever esta equação para considerar a presença do momento fletor  $M_y$ . Com base no princípio da superposição dos efeitos, as tensões normais na flexão, na presença desses momentos fletores, podem ser obtidas com base na seguinte relação:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (17.12)$$

A partir da Eq.(17.12), verifica-se que quando dois momentos fletores estão atuando, a superfície neutra passa pelo centroide da seção, ou seja, pelas coordenadas  $\sigma = 0 \text{ em } (y, z) = (0, 0)$ . No entanto, esta encontra-se inclinada com relação aos eixos coordenados. Sabendo que na superfície neutra as tensões normais são nulas, a equação que define sua posição pode ser obtida a partir da Eq.(17.12). Assim:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0 \Rightarrow z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y \quad (17.13)$$

Portanto, a Eq.(17.13) define uma reta no sistema de coordenadas  $yz$ .

### 17.8 – Exemplo 7

Uma barra geral de seção transversal retangular está submetida à ação de dois momentos fletores, cujas intensidades são iguais a  $M_y = 9,6 \text{ kNm}$  e  $M_z = 7,2 \text{ kNm}$ , como mostra a Fig. (17.27). Determine as tensões normais máxima e mínima atuantes e posicione a superfície neutra.

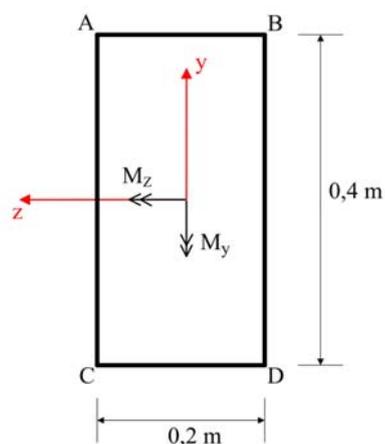


Figura 17.27 Seção transversal considerada e momentos fletores aplicados.

Utilizando a Eq.(17.12) tem-se:

$$\sigma_A = -\frac{7,2 \cdot 0,2}{0,2 \cdot (0,4)^3} + \frac{-9,6 \cdot 0,1}{0,4 \cdot (0,2)^3} \Rightarrow \sigma_A = -4950 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B = -\frac{7,2 \cdot 0,2}{0,2 \cdot (0,4)^3} + \frac{-9,6 \cdot (-0,1)}{0,4 \cdot (0,2)^3} \Rightarrow \sigma_B = 2250 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C = -\frac{7,2 \cdot (-0,2)}{0,2 \cdot (0,4)^3} + \frac{-9,6 \cdot 0,1}{0,4 \cdot (0,2)^3} \Rightarrow \sigma_C = -2250 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D = -\frac{7,2 \cdot (-0,2)}{0,2 \cdot (0,4)^3} + \frac{-9,6 \cdot (-0,1)}{0,4 \cdot (0,2)^3} \Rightarrow \sigma_D = 4950 \text{ kN/m}^2$$

Com base nas tensões normais calculadas anteriormente nos pontos extremos da seção transversal, obtém-se a distribuição das tensões normais no plano da seção transversal mostrada na Fig. (17.28).

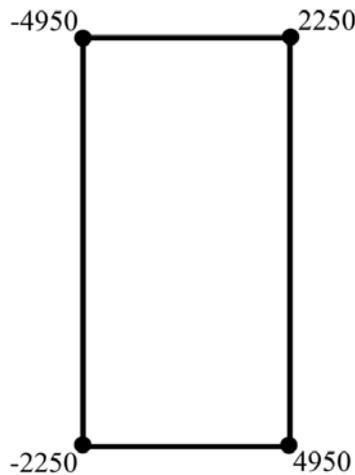


Figura 17.28 Distribuição das tensões no plano da seção.

A orientação da superfície neutra pode ser obtida com base na Eq.(17.13).

Assim:

$$z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y \Rightarrow z = \frac{7,2}{-9,6} \frac{0,4 \cdot (0,2)^3}{0,2 \cdot (0,4)^3} y \Rightarrow z = -0,1875 y$$

A última equação resulta uma reta que depende apenas das coordenadas  $y$  e  $z$ . Quando o ponto analisado encontra-se no centroide, ou seja, em  $y=0$ , tem-se  $z=0$ . Portanto, a superfície neutra passa pelo centroide. Quando  $y=0,2$ , ou seja, quando ponto analisado encontra-se sobre a reta AB, tem-se  $z=-0,0375$ . Assim, o ponto em que a superfície neutra corta a reta AB está distante de 0,0625 do ponto B. Portanto, a superfície neutra está posicionada como mostrado na Fig. (17.29).

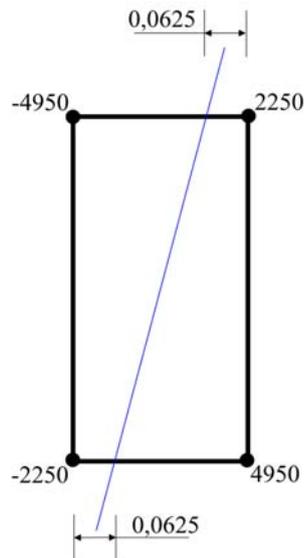


Figura 17.29 Posicionamento da superfície neutra.

### 17.9 – Exemplo 8

Determine as tensões normais nos pontos extremos da seção transversal mostrada na Fig. (17.30) e indique a posição da superfície neutra. A estrutura é solicitada por dois momentos fletores cujas intensidades são iguais a  $M_y = 7,5 \text{ kNm}$  e  $M_z = -13 \text{ kNm}$ .

Para a resolução deste exemplo, deve-se, inicialmente, determinar as coordenadas do centroide da seção transversal para que, em seguida, os momentos de inércia em torno dos eixos  $y$  e  $z$  sejam calculados. Posicionando o centroide tem-se:

$$\bar{y} = \frac{30 \cdot 200 \cdot 115 + 40 \cdot 100 \cdot 50}{30 \cdot 200 + 40 \cdot 100} \Rightarrow \bar{y} = 89 \text{ mm}$$

$$\bar{z} = \frac{30 \cdot 200 \cdot 100 + 40 \cdot 100 \cdot 100}{30 \cdot 200 + 40 \cdot 100} \Rightarrow \bar{z} = 100 \text{ mm}$$

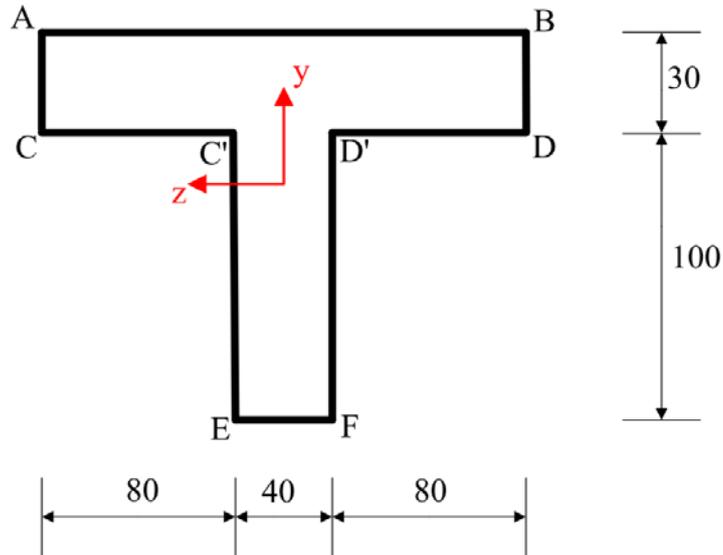


Figura 17.30 Seção transversal considerada. Dimensões em mm.

Com base nas coordenadas do centroide, as inércias podem ser assim mensuradas:

$$I_z = \frac{40 \cdot 100^3}{12} + 40 \cdot 100 \cdot (89 - 50)^2 + \frac{200 \cdot 30^3}{12} + 200 \cdot 30 \cdot (115 - 89)^2$$

$$I_z = 1,3923 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \quad \Rightarrow \quad I_z = 13,923 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{30 \cdot 200^3}{12} + \frac{100 \cdot 40^3}{12} \quad \Rightarrow \quad I_y = 20,533 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Rightarrow \quad I_y = 20,533 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Assim, utilizando a Eq.(17.12), as tensões normais nos pontos extremos podem ser assim determinadas:

$$\sigma_A = -\frac{-13 \cdot (130 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (100 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_A = 74808,55 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B = -\frac{-13 \cdot (130 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (-100 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_B = 1755,41 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C = -\frac{-13 \cdot (100 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (100 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_C = 46797,34 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{C'} = -\frac{-13 \cdot (100 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (20 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{C'} = 17576,09 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{D'} = -\frac{-13 \cdot (100 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (-20 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{D'} = 2965,46 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D = -\frac{-13 \cdot (100 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (-100 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_D = -26255,79 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_E = -\frac{-13 \cdot (-89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (20 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_E = -75794,60 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_F = -\frac{-13 \cdot (-89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (-20 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_F = -90405,22 \text{ kN/m}^2$$

De acordo com a distribuição das tensões normais determinada anteriormente, verifica-se que existe uma mudança no sentido da tensão (de compressão à tração) ao longo dos pontos BD e C'E. Portanto, a superfície neutra intercepta as retas definidas por estes pontos.

Utilizando a Eq.(17.13), a equação da superfície neutra é definida como:

$$z = \frac{-13}{7,5} \frac{20,533 \cdot 10^{-6}}{13,923 \cdot 10^{-6}} y \Rightarrow z = -2,5562 y$$

Avaliando a equação da superfície neutra para a coordenada  $z = -100 \text{ mm}$ , tem-se:

$$-100 = -2,5562 y \Rightarrow y = 39,12 \text{ mm}$$

Avaliando a equação da superfície neutra para a coordenada  $z = 20 \text{ mm}$ , tem-se:

$$20 = -2,5562 y \Rightarrow y = -7,823 \text{ mm}$$

Com base nas duas coordenadas determinadas anteriormente, verifica-se que a superfície neutra encontra-se posicionada como mostrado na Fig. (17.31).

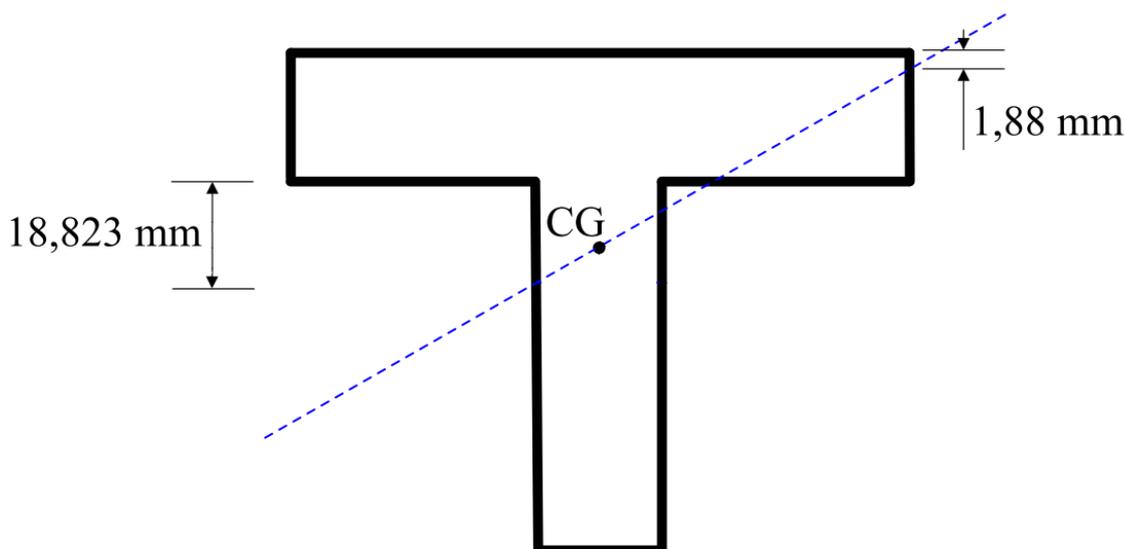


Figura 17.31 Posição da superfície neutra.

### 17.10 – Flexão com Momento Fletor Arbitrário e Esforço Normal Não Nulo

Conforme apresentado anteriormente nesse capítulo, verificou-se que a presença de momentos fletores gera no plano da seção transversal tensões normais. Porém, como estudado no capítulo 12, esforços normais geram também tensões normais no plano da seção transversal. Portanto, o problema da flexão pode ser formulado, de maneira geral, considerando a presença de um momento fletor arbitrariamente orientado e de um esforço normal não nulo. Nessa situação, a fórmula da flexão, Eq.(17.11) e Eq.(17.12), passa a ser escrita em sua forma completa como:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (17.14)$$

Com base na Eq.(17.14), verifica-se que quando o esforço normal atuante é não nulo, a superfície neutra não passa pelo centroide. Nesse caso, a equação que contém os pontos cuja tensão normal é nula é dada por:

$$\frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \left( -\frac{N}{A} + \frac{M_z y}{I_z} \right) \frac{I_y}{M_y} \quad (17.15)$$

### 17.11 – Exemplo 9

Para a seção transversal e carregamentos apresentados no *Exemplo 8*, determine as tensões normais nos pontos extremos da seção e a reta que contém a superfície neutra, se uma força axial trativa de 10 kN for aplicada.

A área da seção transversal é dada por:

$$A = 200 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 10^{-3} + 40 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad A = 0,01 m^2$$

Assim, utilizando a Eq.(17.14), as tensões nos pontos extremos podem ser assim determinadas:

$$\sigma_A = \frac{10}{0,01} - \frac{-13 \cdot (130 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (100 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_A = 75808,55 kN/m^2$$

$$\sigma_B = \frac{10}{0,01} - \frac{-13 \cdot (130 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (-100 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_B = 2755,41 kN/m^2$$

$$\sigma_c = \frac{10}{0,01} - \frac{-13 \cdot (100 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (100 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_c = 47797,34 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{c'} = \frac{10}{0,01} - \frac{-13 \cdot (100 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (20 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_{c'} = 18576,09 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{D'} = \frac{10}{0,01} - \frac{-13 \cdot (100 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (-20 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_{D'} = 3965,46 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D = \frac{10}{0,01} - \frac{-13 \cdot (100 - 89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (-100 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_D = -25255,79 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_E = \frac{10}{0,01} - \frac{-13 \cdot (-89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (20 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_E = -74794,60 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_F = \frac{10}{0,01} - \frac{-13 \cdot (-89) \cdot 10^{-3}}{13,923 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot (-20 \cdot 10^{-3})}{20,533 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_F = -89405,22 \text{ kN/m}^2$$

A equação que descreve a superfície neutra é obtida avaliando-se a Eq.(17.15).

Assim:

$$z = \left( -\frac{10}{0,01} + \frac{-13y}{13,923 \cdot 10^{-6}} \right) \frac{20,533 \cdot 10^{-6}}{7,5} \Rightarrow$$

$$z = -2,7377 \cdot 10^{-3} - 2,5562y \quad (em \text{ mm})$$

De acordo com a distribuição das tensões normais apresentada anteriormente, constata-se uma mudança no sentido da tensão (compressão para tração) ao longo dos pontos BD e C'E. Portanto, a superfície neutra intercepta as retas definidas por estes pontos. Avaliando a equação da superfície neutra para a coordenada  $z = -100 \text{ mm}$ , tem-se:

$$-100 \cdot 10^{-3} = -2,7377 \cdot 10^{-3} - 2,5562y \quad \Rightarrow \quad y = 38,50 \text{ mm}$$

Avaliando a equação da superfície neutra para a coordenada  $z = 20 \text{ mm}$ , tem-se:

$$20 \cdot 10^{-3} = -2,7377 \cdot 10^{-3} - 2,5562y \quad \Rightarrow \quad y = -8,895 \text{ mm}$$

Assim, a superfície neutra é posicionada como mostrado na Fig. (17.32).

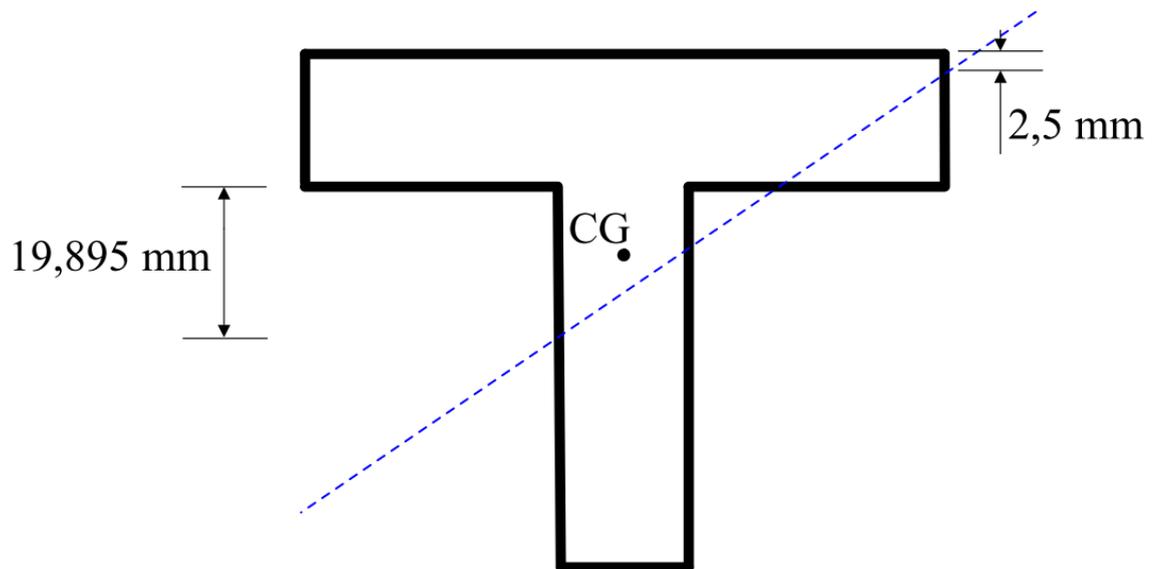


Figura 17.32 Posição da superfície neutra.

### 17.12 – Barras Compostas por Materiais Não Homogêneos

A utilização de estruturas compostas por diferentes materiais vem sendo cada vez mais frequente em aplicações de engenharia. Por meio das estruturas não homogêneas, pode-se conceber uma dada estrutura posicionando os materiais mais adequados segundo o nível de tensão despertado pelo carregamento atuante.

Considerando o problema da flexão apresentado anteriormente nesse capítulo, verifica-se que a formulação mostrada é válida para uma estrutura formada por um único material. No entanto, esta formulação permanece válida no estudo de materiais não homogêneos, desde que um processo de homogeneização seja considerado, com o objetivo de transformar a seção transversal não homogênea em uma homogênea equivalente.

Dessa forma, será apresentado neste item um procedimento para a homogeneização da seção transversal, de forma a considerá-la como formada por um único material de referência. Embora a estrutura seja constituída por diferentes materiais, a deformação ao longo do plano da seção transversal deverá ser contínua. A continuidade das deformações deverá ser observada já que assume-se que a seção transversal não apresenta falhas ou vazios, ou seja, que ela seja contínua. Além disso, assume-se que a seção transversal permaneça plana e ortogonal a seu eixo durante a flexão. Em decorrência dos diferentes módulos de elasticidade dos materiais que

compõem a seção transversal, as tensões normais no plano da seção transversal não serão contínuas, pela lei de Hooke. Assim, a contribuição para o equilíbrio de forças e momentos fornecido por cada material é diferente, como mostra a Fig. (17.33).

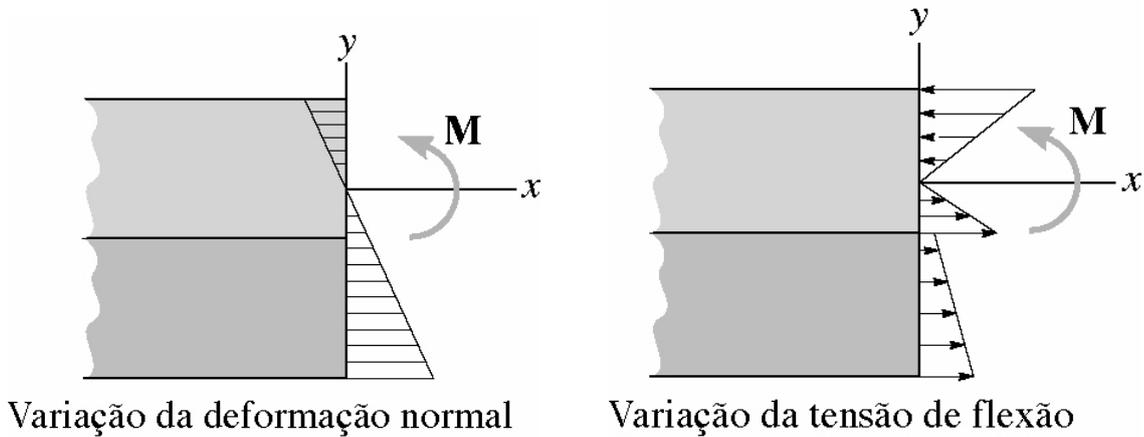


Figura 17.33 Variação das deformações e tensões normais ao longo da altura da seção.

Para efetuar o processo de homogeneização, deve-se calcular a contribuição que cada material fornece para o equilíbrio de forças. Admitindo que a seção seja formada por um único material, qual seria a área necessária para que a mesma contribuição em termos de força seja dada? Para responder a essa pergunta, deve-se considerar a seção transversal mostrada na Fig. (17.34), a qual é formada por dois diferentes materiais.

Para transformar todo o material estrutural que compõe a seção transversal em material 2 equivalente, a força resistida pelo material 1 deverá ser convertida, em termos de área, para o material 2. Então, assumindo que  $E_1 > E_2$ , a nova área de material 1 deverá ser maior.

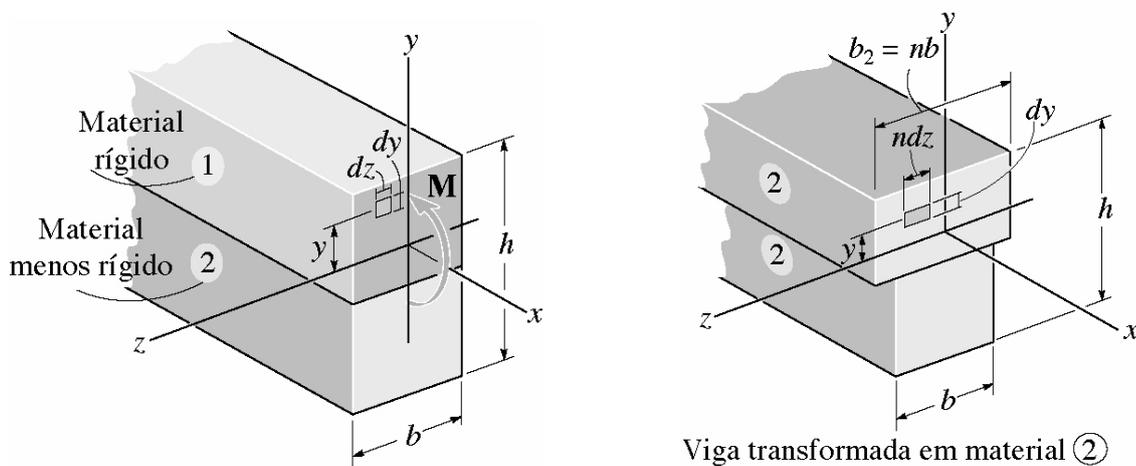


Figura 17.34 Seção transversal composta.

Assim, utilizando a definição de tensão normal média e a lei de Hooke tem-se:

$$F_1 = \sigma_1 dA \quad \Rightarrow \quad F_1 = E_1 \varepsilon dA \quad (17.16)$$

Como as forças resistidas pelo material 1 e pelo material homogeneizado deverão ser as mesmas tem-se:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad E_1 \varepsilon dA = E_2 \varepsilon n dA \quad (17.17)$$

O termo  $n$  é denominado fator de homogeneização. Este fator é utilizado para a determinação da proporção de área homogeneizada que será utilizada para que as forças nos materiais de referência (1) e homogeneizado sejam as mesmas. Como a deformação é a mesma no ponto analisado, a Eq.(17.17) pode ser simplificada como:

$$E_1 \varepsilon dA = E_2 \varepsilon n dA \quad \Rightarrow \quad n = \frac{E_1}{E_2} \quad (17.18)$$

Com base no fator de homogeneização definido anteriormente, obtém-se a nova base (ou área) da seção transversal e conseqüentemente suas novas propriedades geométricas. Deve-se salientar que este fator deve alterar sempre a base da seção transversal, jamais sua altura (a homogeneização deve ser efetuada de forma a manter a linearidade do problema). Isto ocorre, pois a continuidade das deformações ao longo da altura da seção transversal deve ser preservada.

Alternativamente, ao invés de se determinar uma base homogeneizada, pode-se determinar as propriedades geométricas da seção transversal considerando simplesmente a ponderação pelo fator de homogeneização sobre suas subáreas e suas inércias. Após a determinação das tensões normais na seção homogeneizada, as tensões reais são obtidas multiplicando as tensões homogeneizadas pelo fator de homogeneização.

Para seções transversais compostas por mais de dois diferentes materiais, o fator de homogeneização é obtido dividindo-se o módulo de elasticidade longitudinal do material a ser homogeneizado pelo módulo de elasticidade longitudinal do material de referência, o qual comporá a seção homogeneizada.

### 17.13 – Exemplo 10

A seção transversal mostrada na Fig. (17.35) é composta por dois diferentes materiais, cujos módulos de elasticidade longitudinal são  $E_1 = 12 \text{ GPa}$  e  $E_2 = 200 \text{ GPa}$ .

Esses módulos correspondem a madeira (parte superior) e aço (parte inferior). Com base nessas informações, determine as tensões normais nas fibras mais distantes do centroide da seção.

Para que este problema seja resolvido, deve-se, inicialmente, determinar o fator de homogeneização. Considerando que a seção transversal seja homogeneizada pelo material 2 tem-se:

$$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{12}{200} = 0,06$$

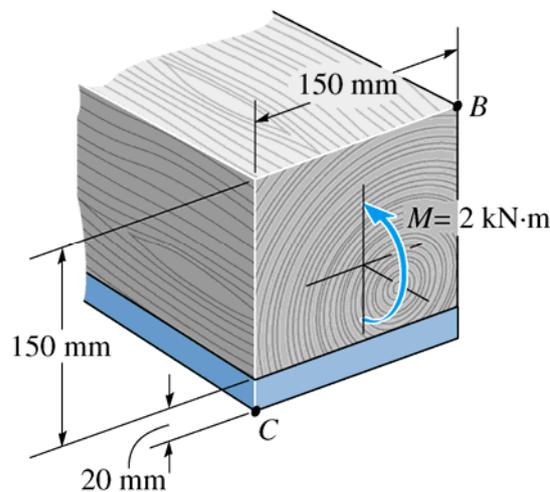


Figura 17.35 Estrutura a ser analisada. Dimensões em mm.

Assim, a nova base para o material 1 será igual a:

$$b_{homog} = 150 \cdot 0,06 \Rightarrow b_{homog} = 9,0 \text{ mm}$$

Portanto, a seção transversal homogeneizada apresenta a configuração mostrada na Fig. (17.36). A partir de agora, a seção transversal mostrada na Fig. (17.36) pode ser analisada considerando a formulação clássica do problema da flexão discutida anteriormente.

Assim, determinam-se as propriedades geométricas da seção e em seguida aplica-se a fórmula da flexão. Portanto:

$$\bar{y}_{homog} = \frac{9 \cdot 150 \cdot 95 + 150 \cdot 20 \cdot 10}{150 \cdot 20 + 9 \cdot 150} = 36,38 \text{ mm}$$

$$I_{z_{homog}} = \frac{150 \cdot 20^3}{12} + 150 \cdot 20 \cdot (36,38 - 10)^2 + \frac{9 \cdot 150^3}{12} + 9 \cdot 150 \cdot (95 - 36,38)^2$$

$$I_{z_{homog}} = 9,358 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_{z_{homog}} = 9,358 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

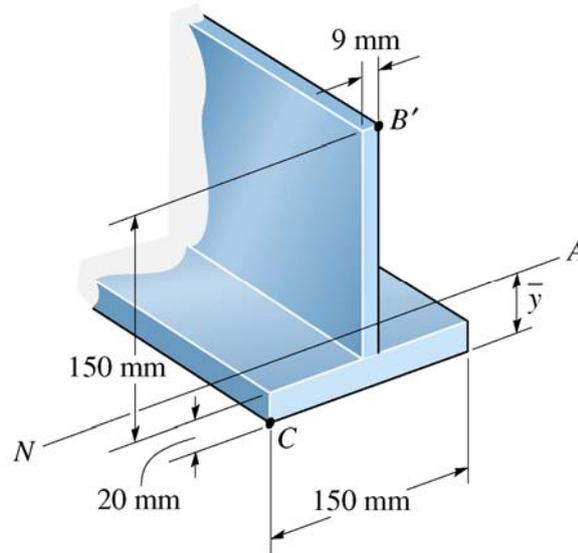


Figura 17.36 Seção transversal homogeneizada. Dimensões em mm.

Assim, a tensão máxima de tração ocorre no material de referência, a qual pode ser calculada como:

$$\sigma = -\frac{2 \cdot (-36,38 \cdot 10^{-3})}{9,358 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma = 7775,17 \text{ kN/m}^2$$

E a tensão máxima de compressão, no material homogeneizado, é igual a:

$$\sigma_{homog} = -\frac{2 \cdot (170 - 36,38) \cdot 10^{-3}}{9,358 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_{homog} = 28557,38 \text{ kN/m}^2$$

Assim, a distribuição das tensões normais na seção homogeneizada é a apresentada na Fig. (17.37). Para transformar o problema homogeneizado no problema real, deve-se multiplicar as tensões normais atuantes no material 1 pelo fator de homogeneização.

Portanto, a tensão normal na fibra superior mais distante do centroide é calculada como:

$$\sigma = 0,06 \cdot 28557,38 \Rightarrow \sigma = 1713,44 \text{ kN/m}^2$$

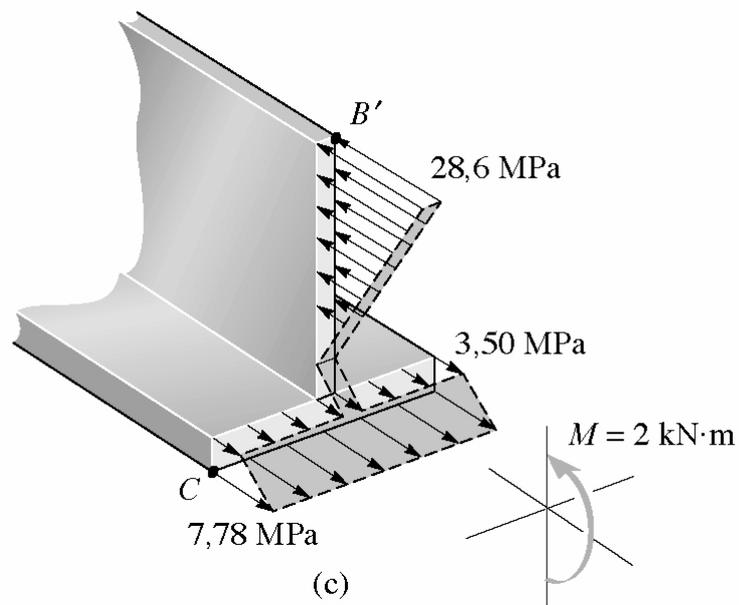


Figura 17.37 Tensões normais na seção homogeneizada.

Dessa forma, a distribuição das tensões normais, para o problema real, é a mostrada na Fig. (17.38). Embora as tensões normais sejam descontínuas ao longo da interface entre os dois materiais, verifica-se que nessa interface as deformações são contínuas, indicando que os materiais resistem ao momento fletor aplicado monoliticamente.

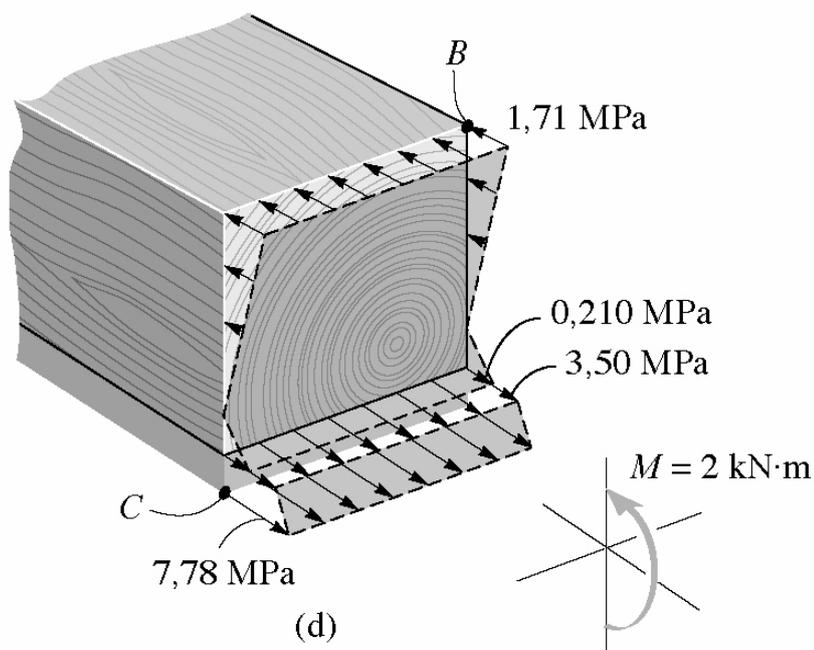


Figura 17.38 Tensões normais na seção real.

17.14 – Exemplo 11

Resolva o problema apresentado no item 17.13, exemplo 10, aplicando o fator de homogeneização diretamente sobre as propriedades geométricas da seção.

Para que a análise das tensões normais na flexão em materiais não homogêneos seja efetuada pode-se aplicar o fator de homogeneização diretamente sobre as propriedades geométricas da seção. Assim, considera-se a equivalência de forças utilizada para a determinação do fator de homogeneização.

Dessa forma, inicialmente, deve-se determinar o fator de homogeneização. Tomando o material 2, aço, como referência tem-se:

$$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{12}{200} = 0,06$$

A coordenada  $\bar{y}$  do centro de gravidade da seção fica assim determinada:

$$\bar{y} = \frac{0,06 \cdot (150 \cdot 150) \cdot 95 + 150 \cdot 20 \cdot 10}{0,06 \cdot (150 \cdot 150) + 150 \cdot 20} = 36,38 \text{ mm}$$

Portanto, o momento de inércia da seção em torno do eixo  $z$  fica igual a:

$$I_z = \frac{150 \cdot 20^3}{12} + 150 \cdot 20 \cdot (36,38 - 10)^2 + 0,06 \cdot \frac{150 \cdot 150^3}{12} + 0,06 \cdot (150 \cdot 150) \cdot (95 - 36,38)^2 \Rightarrow$$

$$I_z = 9,358 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Rightarrow \quad I_z = 9,358 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Assim, a tensão normal máxima de tração, que ocorre no material 2 que é a referência, pode ser calculada como:

$$\sigma = -\frac{2 \cdot (-36,38 \cdot 10^{-3})}{9,358 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma = 7775,17 \text{ kN/m}^2$$

Já a máxima tensão normal de compressão ocorre no material 1. Portanto, para que a tensão real nesse material seja determinada, deve-se multiplicá-la pelo fator de homogeneização. Assim:

$$\sigma = 0,06 \cdot \left( -\frac{2 \cdot (170 - 36,38) \cdot 10^{-3}}{9,358 \cdot 10^{-6}} \right) \Rightarrow \sigma = 1713,44 \text{ kN/m}^2$$

Deve-se enfatizar que os resultados obtidos por meio dessa metodologia, que é mais expedita, foram os mesmos encontrados homogeneizando a base da seção transversal, exemplo anterior.

17.15 – Exemplo 12

A seção transversal mostrada na Fig. (17.39) é composta por dois diferentes materiais: aço e madeira. Sabendo que a geometria da seção transversal e os materiais que a compõem apresentam as seguintes propriedades  $\sigma_{Adm}^{Aço} = 24 \text{ ksi}$ ,  $E_{Aço} = 29 \cdot 10^3 \text{ ksi}$ ,  $I_{Aço} = 20,3 \text{ in}^4$ ,  $A_{Aço} = 8,79 \text{ in}^2$ ,  $\sigma_{Adm}^{Madeira} = 3 \text{ ksi}$  e  $E_{Madeira} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ ksi}$ , determine o máximo momento,  $M_z$ , que pode ser aplicado à viga abaixo considerando e desprezando a presença do reforço de madeira.

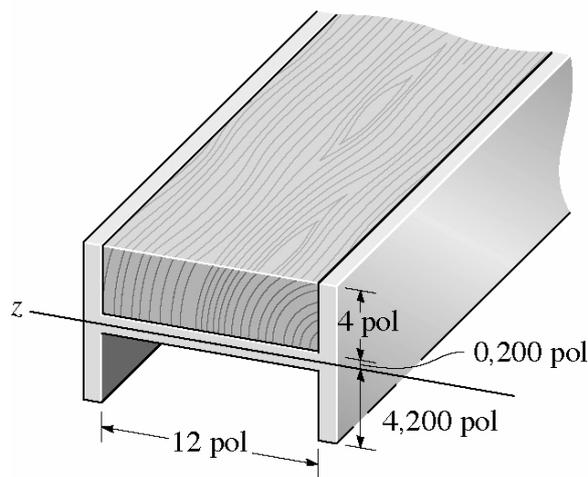


Figura 17.39 Estrutura a ser analisada.

1º abordagem. Sem a presença da madeira.

Quando a presença da madeira é desprezada, a seção transversal é composta por um único material. Nessa condição, pode-se aplicar a fórmula da flexão diretamente.

Assim:

$$\sigma_{Adm}^{Aço} = -\frac{M_z}{I_{Aço}} y \Rightarrow 24 = \frac{M \cdot 4,20}{20,3} \Rightarrow M = 116 \text{ Kip} \cdot \text{in}$$

2º abordagem. Considerando a presença da madeira.

Nesse caso, a seção transversal é formada por dois diferentes materiais. Assim, deve-se inicialmente homogeneizar a seção transversal, calcular as tensões normais máximas para a seção homogeneizada e, finalmente, transformar as tensões do material homogeneizado para o material real. Assim, o fator de homogeneização pode ser calculado homogeneizando a seção para o aço:

$$n = \frac{1,6 \cdot 10^3}{29 \cdot 10^3} = 5,517 \cdot 10^{-2}$$

Portanto, a dimensão da base homogeneizada da seção transversal que contém a madeira fica determinada como:

$$b_{homog} = nb_{mad} \Rightarrow b_{homog} = n \cdot 12 \Rightarrow b_{homog} = 0,662 \text{ in}$$

A geometria da seção transversal homogeneizada é a apresentada na Fig. (17.40).

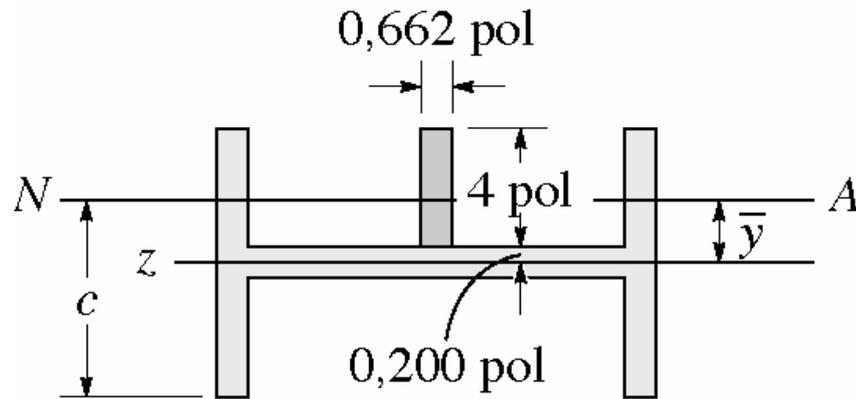


Figura 17.40 Seção transversal homogeneizada.

Para a seção mostrada na Fig. (17.40), têm-se as seguintes propriedades geométricas:

$$\bar{y}_{homog} = \frac{8,79 \cdot 4,20 + 0,662 \cdot 4 \cdot 6,4}{8,79 + 0,662 \cdot 4} = 4,7093 \text{ in}$$

$$I_{homog} = 20,3 + 8,79 \cdot (4,7093 - 4,20)^2 + \frac{0,662 \cdot 4^3}{12} + 0,662 \cdot 4 \cdot (4,7093 - 6,4)^2$$

$$I_{homog} = 33,679 \text{ in}^4$$

Assim, para a fibra de aço mais solicitada tem-se:

$$\sigma_{Adm}^{Aço} = \frac{M}{I_{Aço}} y \Rightarrow 24 = \frac{M}{33,679} 4,7093 \Rightarrow M = 171,638 \text{ Kip} \cdot \text{in}$$

Para a fibra de madeira mais solicitada, a tensão normal, considerando o fator de homogeneização pode ser calculada por:

$$\sigma_{Madeira}^{Adm} = \frac{nM}{I} y \Rightarrow 3 = \frac{5,517 \cdot 10^{-2} \cdot M}{33,679} \cdot (8,4 - 4,7093) \Rightarrow$$

$$M = 496,21 \text{ Kip} \cdot \text{in}$$

Assim, o momento fletor é limitado pela tensão normal no aço, o qual rompe primeiro que a madeira. A presença da madeira eleva o momento resistente em:  $171,08/116 = 47,96\%$ . O autor sugere que o leitor resolva este exercício aplicando a metodologia geral, ponderando diretamente as áreas e inércias correspondentes aos materiais homogeneizados pelo fator de homogeneização.

### 17.16 – Exemplo 13

Determine as intensidades das tensões normais, decorrentes da flexão, atuantes nos pontos extremos das interfaces entre os diferentes materiais que compõem a seção transversal não homogênea mostrada na Fig. (17.41). Sabe-se que:  $E_1 = 200\text{ GPa}$ ,  $E_2 = 100\text{ GPa}$  e  $E_3 = 20\text{ GPa}$ . Além disso, atuam nesta seção transversal dois momentos fletores não nulos:  $M_z = 10\text{ kNm}$  e  $M_y = -4\text{ kNm}$ .

Para que esse problema seja resolvido, deve-se aplicar o princípio da superposição dos efeitos. Assim, as tensões normais atuantes nos pontos extremos das interfaces devido à atuação isolada de  $M_z$  e  $M_y$  serão determinadas. Em seguida, as tensões normais obtidas com a atuação isolada de  $M_z$  e  $M_y$  serão adicionadas. O procedimento de análise será iniciado pelo momento  $M_z$ . Assim, os fatores de homogeneização dos materiais são iguais a:

$$n_{12} = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow n_{12} = \frac{100}{200} \Rightarrow n_{12} = 0,5$$

$$n_{13} = \frac{E_3}{E_1} \Rightarrow n_{13} = \frac{20}{200} \Rightarrow n_{13} = 0,1$$

Consequentemente, as dimensões homogeneizadas das bases assumem os seguintes valores:

$$b_{homog2} = b_2 n_{12} \Rightarrow b_{homog2} = 15 \cdot 0,5 \Rightarrow b_{homog2} = 7,5\text{ cm}$$

$$b_{homog3} = b_3 n_{13} \Rightarrow b_{homog3} = 15 \cdot 0,1 \Rightarrow b_{homog3} = 1,5\text{ cm}$$

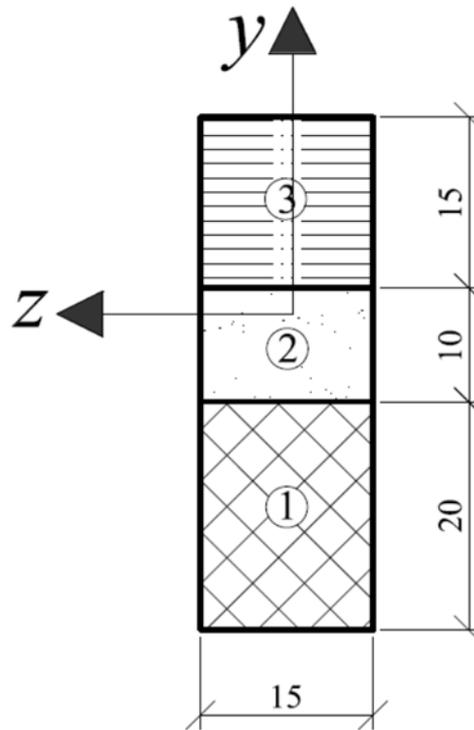


Figura 17.41 Seção transversal não homogênea a ser analisada. Dimensões em cm.

Com base nos valores das bases homogeneizadas obtidos anteriormente, a seguinte seção homogênea pode ser construída, a qual é apresentada na Fig. (17.42):

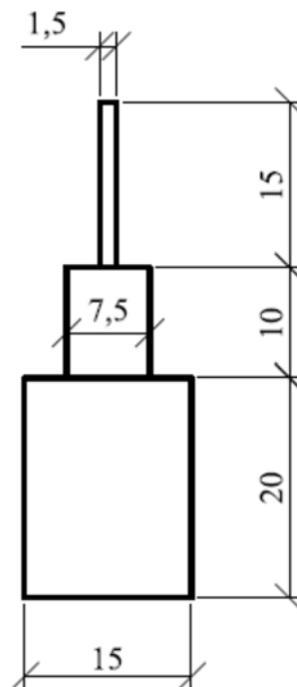


Figura 17.42 Seção transversal homogeneizada. Dimensões em cm.

A localização do centro de gravidade da seção ao longo do eixo  $y$  pode ser assim determinada:

$$y_{cg} = \frac{1,5 \cdot 15 \cdot 37,5 + 7,5 \cdot 10 \cdot 25 + 15 \cdot 20 \cdot 10}{1,5 \cdot 15 + 7,5 \cdot 10 + 15 \cdot 20} \Rightarrow y_{cg} = 14,3868 \text{ cm}$$

Assim, o valor do momento de inércia da seção homogeneizada em torno do eixo  $z$  assume o seguinte valor:

$$I_z = \frac{1,5 \cdot (15)^3}{12} + 1,5 \cdot 15 \cdot (37,5 - 14,3868)^2 + \frac{7,5 \cdot 10^3}{12} + 7,5 \cdot 10 \cdot (25 - 14,3868)^2 + \frac{15 \cdot 20^3}{12} + 15 \cdot 20 \cdot (10 - 14,3868)^2 \Rightarrow I_z = 37288,0307 \text{ cm}^4$$

Assim, as tensões normais ao longo das interfaces, devido à  $M_z$ , podem ser assim determinadas:

$$\sigma_3^{M_z s} = -\frac{10 \cdot (0,45 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \sigma_3^{M_z s} = -8209,927 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_3^{M_z i} = -\frac{10 \cdot (0,3 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \sigma_3^{M_z i} = -4187,188 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2^{M_z s} = -\frac{10 \cdot (0,3 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \sigma_2^{M_z s} = -4187,188 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2^{M_z i} = -\frac{10 \cdot (0,2 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \sigma_2^{M_z i} = -1505,362 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_1^{M_z s} = -\frac{10 \cdot (0,2 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \sigma_1^{M_z s} = -1505,362 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_1^{M_z i} = -\frac{10 \cdot (-0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \sigma_1^{M_z i} = 3858,289 \text{ kN/m}^2$$

As tensões normais determinadas anteriormente referem-se ao material homogeneizado. Dessa forma, para que as tensões normais reais sejam avaliadas, deve-se multiplicar o valor da tensão normal determinado no material homogeneizado pelo fator de homogeneização. Portanto:

$$\sigma_3^{M_z s} = \sigma_3^{M_z s} n_{13} \Rightarrow \sigma_3^{M_z s} = -8209,927 \cdot 0,1 \Rightarrow \sigma_3^{M_z s} = -820,9927 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_3^{M_z i} = \sigma_3^{M_z i} n_{13} \Rightarrow \sigma_3^{M_z i} = -4187,188 \cdot 0,1 \Rightarrow \sigma_3^{M_z i} = -418,7188 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2^{M_z s} = \sigma_2^{M_z s} n_{12} \Rightarrow \sigma_2^{M_z s} = -4187,188 \cdot 0,5 \Rightarrow \sigma_2^{M_z s} = -2093,594 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2^{M_z i} = \sigma_2^{M_z i} n_{12} \Rightarrow \sigma_2^{M_z i} = -1505,362 \cdot 0,5 \Rightarrow \sigma_2^{M_z i} = -752,681 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_1^{M_z s} = -1505,362 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_1^{M_z i} = 3858,289 \text{ kN/m}^2$$

Para que as tensões normais totais (devido à  $M_z$  e  $M_y$ ) sejam determinadas, devem ser calculadas as intensidades das tensões normais decorrentes da atuação isolada do momento  $M_y$ . Assim, para que tais tensões sejam determinadas, as dimensões homogeneizadas nessa direção devem ser avaliadas. Assim, utilizando os fatores de homogeneização calculados anteriormente obtém-se:

$$b_{\text{homog}2} = b_2 n_{12} \Rightarrow b_{\text{homog}2} = 10 \cdot 0,5 \Rightarrow b_{\text{homog}2} = 5 \text{ cm}$$

$$b_{\text{homog}3} = b_3 n_{13} \Rightarrow b_{\text{homog}3} = 15 \cdot 0,1 \Rightarrow b_{\text{homog}3} = 1,5 \text{ cm}$$

Portanto, a seção homogeneizada para a análise das tensões devido a  $M_y$  é a apresentada na Fig. (17.43).

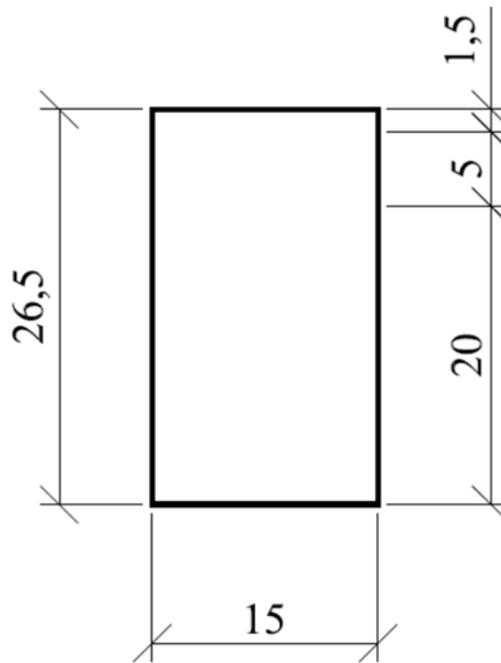


Figura 17.43 Seção transversal homogeneizada. Dimensões em cm.

O momento de inércia para a seção transversal apresentada na Fig. (17.43) pode ser facilmente determinado como:

$$I_y = \frac{26,6 \cdot (15)^3}{12} \Rightarrow I_y = 7453,125 \text{ cm}^4$$

Assim, as tensões normais nos lados esquerdo e direito da seção são as seguintes:

$$\sigma_e = \frac{-4 \cdot (0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \sigma_e = -4025,157 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_d = \frac{-4 \cdot (-0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \sigma_e = 4025,157 \text{ kN/m}^2$$

Conseqüentemente, as tensões reais são determinadas multiplicando-se as tensões homogeneizadas determinadas nos extremos direito e esquerdo pelo fator de homogeneização. Assim:

$$\sigma_3^{M_y^e} = \sigma_e n_{13} \Rightarrow \sigma_3^{M_y^e} = -4025,157 \cdot 0,1 \Rightarrow \sigma_3^{M_y^e} = -402,5157 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_3^{M_y^d} = \sigma_d n_{13} \Rightarrow \sigma_3^{M_y^d} = 4025,157 \cdot 0,1 \Rightarrow \sigma_3^{M_y^d} = 402,5157 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2^{M_y^e} = \sigma_e n_{12} \Rightarrow \sigma_2^{M_y^e} = -4025,157 \cdot 0,5 \Rightarrow \sigma_2^{M_y^e} = -2012,5785 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2^{M_y^d} = \sigma_d n_{12} \Rightarrow \sigma_2^{M_y^d} = 4025,157 \cdot 0,5 \Rightarrow \sigma_2^{M_y^d} = 2012,5785 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_1^{M_y^e} = -4025,157 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_1^{M_y^d} = 4025,157 \text{ kN/m}^2$$

Os pontos extremos das interfaces entre os diferentes materiais que compõem a seção transversal não homogênea considerada estão apresentados na Fig. (17.44). Para esses pontos, as tensões reais são as seguintes:

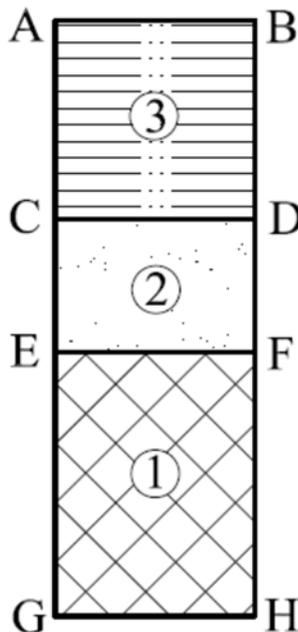


Figura 17.44 Localização dos pontos extremos das interfaces.

$$\sigma_A^3 = \sigma_3^{M_z^s} + \sigma_3^{M_y^e} \Rightarrow \sigma_A^3 = -1223,5084 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B^3 = \sigma_3^{M_z^s} + \sigma_3^{M_y^d} \Rightarrow \sigma_B^3 = -418,477 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C^3 = \sigma_3^{M_z^i} + \sigma_3^{M_y^e} \Rightarrow \sigma_C^3 = -821,2345 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D^3 = \sigma_3^{M_z^i} + \sigma_3^{M_y^d} \Rightarrow \sigma_D^3 = -16,2031 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C^2 = \sigma_2^{M_z^s} + \sigma_2^{M_y^e} \Rightarrow \sigma_C^2 = -4106,1725 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D^2 = \sigma_2^{M_z^s} + \sigma_2^{M_y^d} \Rightarrow \sigma_D^2 = -81,0155 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_E^2 = \sigma_2^{M_z^i} + \sigma_2^{M_y^e} \Rightarrow \sigma_E^2 = -2765,2595 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_F^2 = \sigma_2^{M_z^i} + \sigma_2^{M_y^d} \Rightarrow \sigma_F^2 = 1259,8975 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_E^1 = \sigma_1^{M_z^s} + \sigma_1^{M_y^e} \Rightarrow \sigma_E^1 = -5530,519 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_F^1 = \sigma_1^{M_z^s} + \sigma_1^{M_y^d} \Rightarrow \sigma_F^1 = 2519,795 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_G^1 = \sigma_1^{M_z^i} + \sigma_1^{M_y^e} \Rightarrow \sigma_G^1 = -166,868 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_H^1 = \sigma_1^{M_z^i} + \sigma_1^{M_y^d} \Rightarrow \sigma_H^1 = 7883,446 \text{ kN/m}^2$$

Deve-se mencionar que as tensões normais atuantes nos pontos extremos das interfaces assumem valores proporcionais às razões dos módulos de elasticidade longitudinal dos materiais em cada interface. Isso garante a continuidade de deformações da seção, indicando, portanto, a sua continuidade material.

Para que essa análise seja finalizada, pode-se assumir também que um esforço normal trativo de intensidade igual a  $N = 50 \text{ kN}$  também atue na seção transversal. Nesse caso, deve-se determinar o acréscimo nas tensões normais em decorrência da presença desse esforço solicitante. Para que tal acréscimo de tensões seja determinado, deve-se determinar o valor da área homogeneizada da seção transversal. Assim:

$$A_h = A_1 + A_2 n_{12} + A_3 n_{13} \Rightarrow A_h = 15 \cdot 20 + 15 \cdot 10 \cdot 0,5 + 15 \cdot 15 \cdot 0,1 \Rightarrow$$

$$A_h = 397,5 \text{ cm}^2$$

A tensão normal decorrente de  $N$  no material homogeneizado é igual a:

$$\sigma = \frac{N}{A_h} \Rightarrow \sigma = \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \sigma = 1257,861 \text{ kN/m}^2$$

Assim, as tensões normais reais atuantes nos materiais 1, 2 e 3 são obtidas multiplicando-se a tensão normal atuante no material homogeneizado pelo fator de homogeneização. Dessa forma:

$$\sigma_3 = \sigma n_{13} \Rightarrow \sigma_3 = 1257,861 \cdot 0,1 \Rightarrow \sigma_3 = 125,7861 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma n_{12} \Rightarrow \sigma_2 = 1257,861 \cdot 0,5 \Rightarrow \sigma_2 = 628,9308 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_1 = 1257,861 \text{ kN/m}^2$$

De forma semelhante ao observado na atuação dos momentos fletores, o acréscimo das tensões normais devido à consideração do esforço normal nas interfaces é proporcional a razão dos módulos de elasticidade longitudinal dos materiais nas interfaces. Isso indica a continuidade material, o que é uma das hipóteses impostas durante o processo de homogeneização. Como a tensão normal devido à  $N$  é constante em cada um dos materiais que compõem a seção transversal, sua intensidade, respectiva, deve ser somada a todos os pontos da seção, segundo a localização do ponto considerado nos diferentes materiais. Portanto:

$$\sigma_A^3 = 125,7861 - 1223,5084 \Rightarrow \sigma_A^3 = -1097,722 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B^3 = 125,7861 - 418,477 \Rightarrow \sigma_B^3 = -292,691 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C^3 = 125,7861 - 821,2345 \Rightarrow \sigma_C^3 = -695,448 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D^3 = 125,7861 - 16,2031 \Rightarrow \sigma_D^3 = 109,583 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C^2 = 628,9308 - 4106,1725 \Rightarrow \sigma_C^2 = -3477,241 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D^2 = 628,9308 - 81,0155 \Rightarrow \sigma_D^2 = 547,915 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_E^2 = 628,9308 - 2765,2595 \Rightarrow \sigma_E^2 = -2136,329 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_F^2 = 628,9308 + 1259,8975 \Rightarrow \sigma_F^2 = 1888,828 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_E^1 = 1257,861 - 5530,519 \Rightarrow \sigma_E^1 = -4272,658 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_F^1 = 1257,861 + 2519,795 \Rightarrow \sigma_F^1 = 3777,656 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_G^1 = 1257,861 - 166,868 \Rightarrow \sigma_G^1 = 1090,993 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_H^1 = 1257,861 + 7883,446 \Rightarrow \sigma_H^1 = 9141,308 \text{ kN/m}^2$$

### 17.17 – Exemplo 14

Resolva o problema apresentado no item 17.16, *exemplo 13*, aplicando o fator de homogeneização diretamente sobre as propriedades geométricas da seção.

Para que a análise das tensões normais na flexão em materiais não homogêneos seja efetuada pode-se aplicar o fator de homogeneização diretamente sobre as propriedades geométricas da seção. Assim, considera-se a equivalência de forças utilizada para a determinação do fator de homogeneização.

Portanto, inicialmente, os fatores de homogeneização devem ser determinados. Tomando o material 1 como referência tem-se:

$$n_{12} = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow n_{12} = \frac{100}{200} \Rightarrow n_{12} = 0,5$$

$$n_{13} = \frac{E_3}{E_1} \Rightarrow n_{13} = \frac{20}{200} \Rightarrow n_{13} = 0,1$$

A coordenada  $y_{cg}$  do centro de gravidade da seção fica assim determinada:

$$y_{cg} = \frac{0,1 \cdot (15 \cdot 15) \cdot 37,5 + 0,5 \cdot (15 \cdot 10) \cdot 25 + 15 \cdot 20 \cdot 10}{0,1 \cdot (15 \cdot 15) + 0,5 \cdot (15 \cdot 10) + 15 \cdot 20} \Rightarrow y_{cg} = 14,3868 \text{ cm}$$

O valor do momento de inércia da seção em torno do eixo  $z$  assume o seguinte valor:

$$I_z = 0,1 \cdot \left( \frac{15 \cdot (15)^3}{12} \right) + 0,1 \cdot (15 \cdot 15) \cdot (37,5 - 14,3868)^2 + 0,5 \cdot \left( \frac{15 \cdot 10^3}{12} \right) + 0,5 \cdot (15 \cdot 10) \cdot (25 - 14,3868)^2 + \frac{15 \cdot 20^3}{12} + 15 \cdot 20 \cdot (10 - 14,3868)^2 \Rightarrow I_z = 37288,0307 \text{ cm}^4$$

Já o valor do momento de inércia da seção em torno do eixo  $y$  assume o seguinte valor:

$$I_y = 0,1 \cdot \left( \frac{15 \cdot 15^3}{12} \right) + 0,5 \cdot \left( \frac{10 \cdot 15^3}{12} \right) + \frac{20 \cdot (15)^3}{12} \Rightarrow I_y = 7453,125 \text{ cm}^4$$

Enquanto a área da seção transversal pode ser assim ponderada:

$$A = 15 \cdot 20 + 0,5 \cdot (15 \cdot 10) + 0,1 \cdot (15 \cdot 15) \Rightarrow A = 397,5 \text{ cm}^2$$

Dessa forma, as tensões nos pontos indicados na Fig. (17.44) podem ser assim determinadas:

$$\sigma_A^3 = 0,1 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,45 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow \sigma_A^3 = -1097,722 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B^3 = 0,1 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,45 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (-0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_B^3 = -292,691 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C^3 = 0,1 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,30 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_C^3 = -695,448 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D^3 = 0,1 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,30 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (-0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_D^3 = 109,583 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C^2 = 0,5 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,30 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_C^2 = -3477,241 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_D^2 = 0,5 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,30 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (-0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_D^2 = 547,915 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_E^2 = 0,5 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,20 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_E^2 = -2136,329 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_F^2 = 0,5 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,20 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (-0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_F^2 = 1888,828 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_E^1 = \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,20 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_E^1 = -4272,658 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_F^1 = 0,5 \cdot \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (0,20 - 0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (-0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_F^1 = 3777,656 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_G^1 = \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (-0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_G^1 = 1090,993 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_H^1 = \left\{ \left[ \frac{50}{397,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{10 \cdot (-0,143868)}{37288,0307 \cdot 10^{-8}} + \frac{-4 \cdot (-0,075)}{7453,125 \cdot 10^{-8}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_H^1 = 9141,308 \text{ kN/m}^2$$

Deve-se ressaltar que o resultado obtido concorda com aqueles obtidos no item 17.16, atestando a correção da resolução. O autor sugere que o leitor aplique a metodologia utilizada neste exemplo para a resolução de exercícios semelhantes. Esta metodologia é mais direta, permite resoluções mais rápidas e minimiza o erro decorrente da realização de operações algébricas.

### 17.18 – Flexão em Regime Elastoplástico

Diversos materiais de uso corrente em engenharia de estruturas podem ser classificados como dúcteis. Tais materiais apresentam comportamento mecânico elástico até que seja atingida sua tensão de escoamento. Após ultrapassado este nível de tensão, deformações permanentes, também denominadas plásticas, serão desenvolvidas no material. Este tipo de comportamento mecânico foi discutido no capítulo 12, sendo os aços e suas ligas exemplos típicos de materiais dúcteis.

Sabe-se, conforme apresentado anteriormente neste capítulo, que as tensões normais devido a atuação de um momento fletor variam linearmente ao longo da seção transversal. Assim, é possível que durante a flexão tensões normais superiores e inferiores à tensão de escoamento do material sejam desenvolvidas, ao mesmo tempo, em uma dada seção transversal. Nesta condição, diz-se que a estrutura está sujeita a um regime elastoplástico, uma vez que deformações normais elásticas e plásticas estarão presentes simultaneamente na estrutura. Deve-se enfatizar que toda a formulação para o problema da flexão apresentada até então neste capítulo, considera apenas comportamento elástico linear para os materiais, sendo, portanto, flexão em regime elástico.

Neste item será apresentada uma metodologia que permite a determinação dos valores dos momentos fletores resistentes de barras em regime elastoplástico. Assume-se, nesta metodologia, que durante a flexão em regime elastoplástico as deformações normais variam linearmente ao longo da seção transversal. Dessa forma, as

componentes de tensão normal correspondentes podem ser determinadas por meio do diagrama tensão x deformação característico do material.

Conhecendo-se os valores das tensões normais em cada ponto da seção transversal, as forças equivalentes, de tração e de compressão, devido a estas tensões são determinadas por meio da integral destas tensões ao longo da área da seção transversal. Portanto, as forças equivalentes correspondem ao “volume” destas tensões. Finalmente, multiplica-se estas forças equivalentes pelo respectivo braço de alavanca, para a determinação do momento resistente da seção transversal.

Deve-se ainda enfatizar que durante a flexão em regime elastoplástico, o equilíbrio de forças é atendido, ou seja,  $\sum F_x = 0 = \int_A \sigma dA$ . Além disso, o equilíbrio de momentos também é atendido, ou seja,  $\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = \int_A y \sigma dA$ . Com base nestas hipóteses de equilíbrio, existirá uma superfície neutra, a qual dividirá as regiões comprimida e tracionada da seção transversal.

Nestas notas serão apresentados três exemplos onde seções transversais simétricas são consideradas. Deve-se mencionar que a metodologia utilizada é aplicável também a seções transversais assimétricas. Porém, neste último caso, a determinação da distribuição das deformações normais ao longo da seção transversal não é uma tarefa fácil. Deve-se aplicar, para tal finalidade, técnicas de análise não linear, as quais estão além do escopo deste curso. Porém, caso estas sejam conhecidas, a metodologia é aplicável de maneira semelhante às seções simétricas.

### 17.19 – Exemplo 15

Determine a intensidade do momento fletor resistente elástico e plástico para uma seção transversal retangular de base  $b$  e altura  $h$ . O material que compõe esta barra possui comportamento elastoplástico perfeito, com tensão de escoamento igual a  $\sigma_E$  e deformação normal de escoamento igual a  $\varepsilon_E$ .

Para a determinação do momento fletor resistente elástico, deve-se, primeiramente, integrar as tensões normais, que possuem distribuição linear, ao longo da altura da seção transversal. Nesta condição, a máxima tensão normal atuante na

seção transversal deverá ser igual a  $\sigma_E$  e atuar na fibra mais distante de seu centro de gravidade. O resultado dessa integração são as forças equivalentes nas regiões tracionada,  $R_T$ , e comprimida,  $R_C$ , da seção transversal. Sabendo que esta integral nada mais é que o “volume” das tensões, pode-se calcular as forças resultantes com o auxílio das ilustrações apresentadas na Fig. (17.45). Assim:

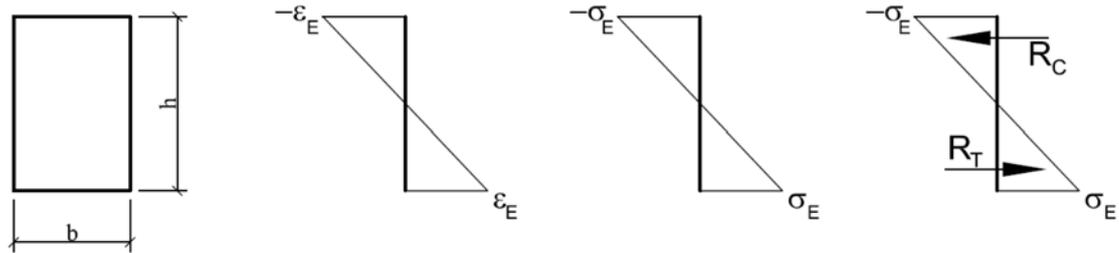


Figura 17.45 Distribuição das tensões normais caso elástico.

$$R_C = R_T = \left( \sigma_E \cdot b \cdot \frac{h}{2} \right) \frac{1}{2} \Rightarrow R_C = R_T = \frac{b \cdot h}{4} \sigma_E$$

Dessa forma, o momento fletor resistente elástico é obtido multiplicando-se as forças equivalentes pelos respectivos braços de alavanca. Portanto:

$$M_{RE} = R_C \frac{2h}{3} + R_T \frac{2h}{3} \Rightarrow M_{RE} = 2 \left( \frac{b \cdot h}{4} \sigma_E \cdot \frac{2h}{3} \right) \Rightarrow M_{RE} = \frac{b \cdot h}{6} \sigma_E$$

Como o material que compõe a barra é elastoplástico perfeito, não existe aumento no valor da tensão normal do material quando esta atinge a tensão de escoamento. O diagrama tensão x deformação do material, assim como a distribuição de tensão normal ao longo da altura da seção transversal e as forças equivalentes estão apresentados na Fig. (17.46). Portanto, com base nas ilustrações apresentadas na Fig. (17.46), as forças resultantes assumem os seguintes valores:

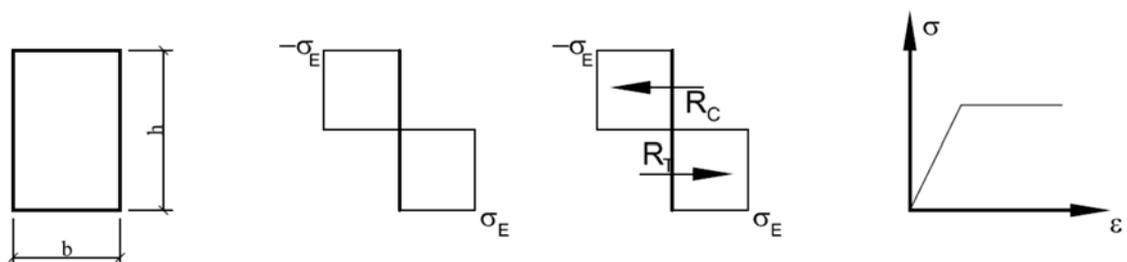


Figura 17.46 Distribuição das tensões normais caso elastoplástico.

$$R_C = R_T = \sigma_E \cdot b \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow R_C = R_T = \frac{b \cdot h}{2} \sigma_E$$

Já o momento fletor resistente é determinado multiplicando as forças equivalentes por seu respectivo braço de alavanca. Assim:

$$M_{RP} = R_C \frac{1}{2} \frac{h}{2} + R_T \frac{1}{2} \frac{h}{2} \Rightarrow M_{RP} = 2 \left( \frac{b \cdot h}{2} \sigma_E \right) \frac{1}{2} \frac{h}{2} \Rightarrow M_{RP} = \frac{b \cdot h}{4} \sigma_E$$

Dividindo-se os momentos fletores resistentes nos casos elástico e plástico obtém-se:

$$\kappa = \frac{M_{RP}}{M_{RE}} \Rightarrow \kappa = \frac{\frac{b \cdot h}{4} \sigma_E}{\frac{b \cdot h}{6} \sigma_E} \Rightarrow \kappa = 1,5$$

Constata-se que o momento resistente plástico é 1,5 vezes maior que o momento resistente elástico. Assim, embora deformações plásticas surjam no regime plástico, o aumento na capacidade resistente é considerável.

### 17.20 – Exemplo 16

Determine a intensidade dos momentos fletores resistentes elástico e plástico para uma seção transversal retangular de base igual a 50 cm e altura de 75 cm, composta por um material cujo diagrama tensão x deformação é o apresentado na Fig. (17.47).

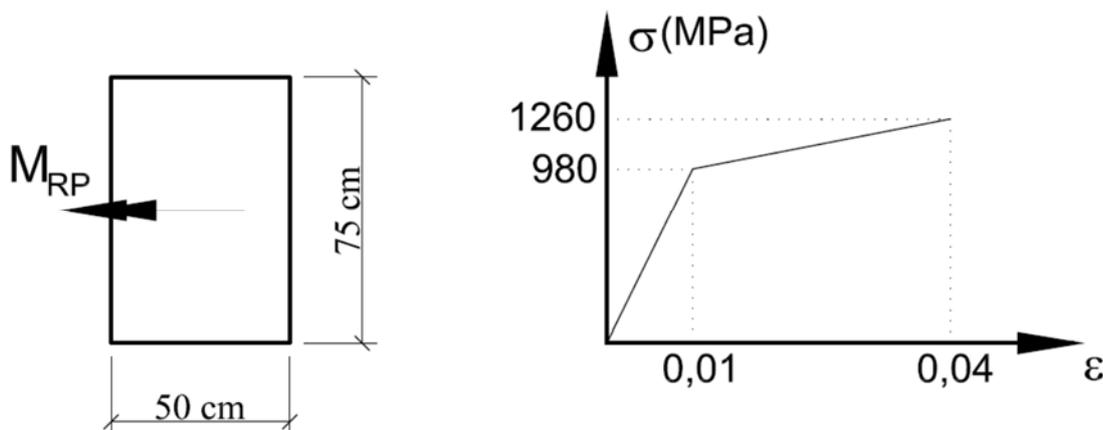


Figura 17.47 Seção transversal e diagrama tensão x deformação a ser considerado.

O momento fletor resistente elástico pode ser calculado utilizando a expressão determinada no exemplo anterior. Assim:

$$M_{RE} = \frac{b \cdot h}{6} \sigma_E \Rightarrow M_{RE} = \frac{0,50 \cdot 0,75}{6} 980 \cdot 10^3 \Rightarrow M_{RE} = 61250 \text{ kNm}$$

Para a determinação do valor do momento fletor resistente plástico deve-se, inicialmente, atribuir a distribuição das deformações normais no plano da seção transversal. Em seguida, com base na distribuição das deformações normais, obtém-se a respectiva distribuição das tensões normais (via diagrama tensão x deformação), as quais devem ser integradas para a obtenção das forças equivalentes. Estas forças devem ser multiplicadas por seus respectivos braços de alavanca, para que o momento fletor resistente seja calculado. Assumindo que a deformação normal máxima na seção transversal seja igual a  $|\varepsilon| = 0,04$ , obtém-se a distribuição de deformação e tensão normais no plano da seção transversal apresentada na Fig. (17.48). Nessa figura, as componentes de deformação e tensão na região tracionada não foram representadas por simplicidade, devido à simetria destas distribuições.



Figura 17.48 Distribuição de deformações, tensões e forças equivalentes no plano da seção transversal.

Dimensões em cm.

Portanto, as forças equivalentes assumem os seguintes valores:

$$R_C^1 = R_T^1 = \left[ (1260 \cdot 10^3 - 980 \cdot 10^3) 0,28125 \cdot 0,50 \right] \frac{1}{2} \Rightarrow R_C^1 = R_T^1 = 19687,5 \text{ kN}$$

$$R_C^2 = R_T^2 = \left[ 980 \cdot 10^3 \cdot 0,28125 \cdot 0,50 \right] \Rightarrow R_C^2 = R_T^2 = 137812,5 \text{ kN}$$

$$R_C^3 = R_T^3 = \left[ 980 \cdot 10^3 \cdot 0,09375 \cdot 0,50 \right] \frac{1}{2} \Rightarrow R_C^3 = R_T^3 = 22968,75 \text{ kN}$$

Dessa forma, o momento fletor resistente plástico é igual a:

$$M_{RP} = 2 \left[ 19687,5 \left( 0,09375 + \frac{2}{3} 0,28125 \right) \right] +$$

$$2 \left[ 137812,5 \left( 0,09375 + \frac{1}{2} 0,28125 \right) \right] + 2 \left[ 22968,75 \left( \frac{2}{3} \cdot 0,09375 \right) \right] \Rightarrow$$

$$M_{RP} = 78544,92 \text{ kNm}$$

A razão entre os momentos resistentes conduz a:

$$\kappa = \frac{M_{RP}}{M_{RE}} \Rightarrow \kappa = \frac{78544,92}{61250} \Rightarrow \kappa = 1,28$$

Dessa forma, o momento fletor que causa uma deformação limite na seção transversal é 1,28 vezes maior que o momento fletor elástico. Assim, o aumento na capacidade resistente da seção transversal cresce consideravelmente quando o regime plástico é considerado, apesar do surgimento de deformações permanentes.

### 17.21 – Exemplo 17

Determine os valores dos momentos resistentes elástico e plástico da seção transversal apresentada na Fig. (17.49). Para a determinação do momento resistente plástico considere o diagrama tensão x deformação apresentado na Fig. (17.49) e também a hipótese elastoplástica perfeita para o comportamento mecânico material.

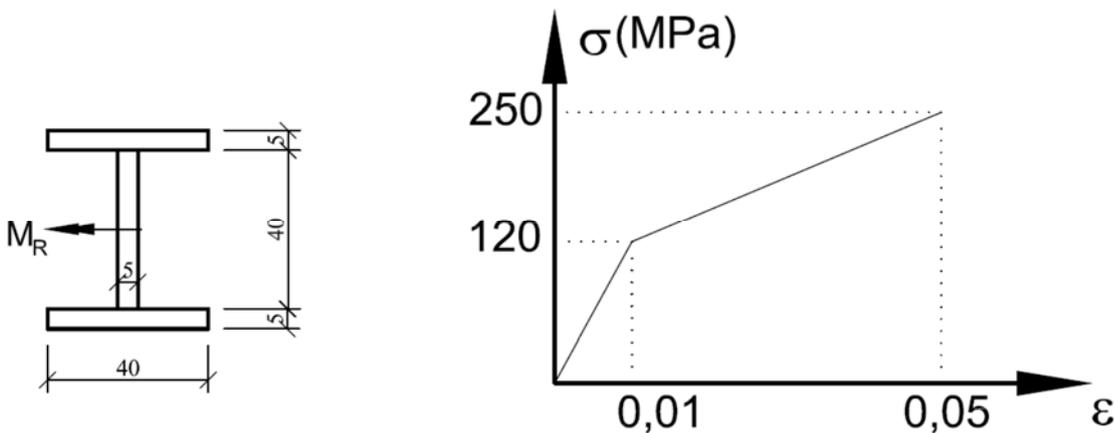


Figura 17.49 Seção transversal a ser analisada. Dimensões em cm.

Para a hipótese elástica, o momento resistente deve ser determinado considerando a tensão de escoamento igual a 120 MPa e a deformação elástica de 0,01. Com estes valores, a distribuição das tensões normais no plano da seção transversal e as

forças equivalentes podem ser atribuídas, como pode ser observado na Fig. (17.50). Para estes valores de tensão e deformação normais, as intensidades das forças equivalentes assumem os seguintes valores:

$$R_C^1 = R_T^1 = \left[ (120 \cdot 10^3 - 96 \cdot 10^3) \cdot 0,40 \cdot 0,05 \right] \frac{1}{2} \Rightarrow R_C^1 = R_T^1 = 240 \text{ kN}$$

$$R_C^2 = R_T^2 = \left[ 96 \cdot 10^3 \cdot 0,40 \cdot 0,05 \right] \Rightarrow R_C^2 = R_T^2 = 1920 \text{ kN}$$

$$R_C^3 = R_T^3 = \left[ 96 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 0,20 \right] \frac{1}{2} \Rightarrow R_C^3 = R_T^3 = 480 \text{ kN}$$

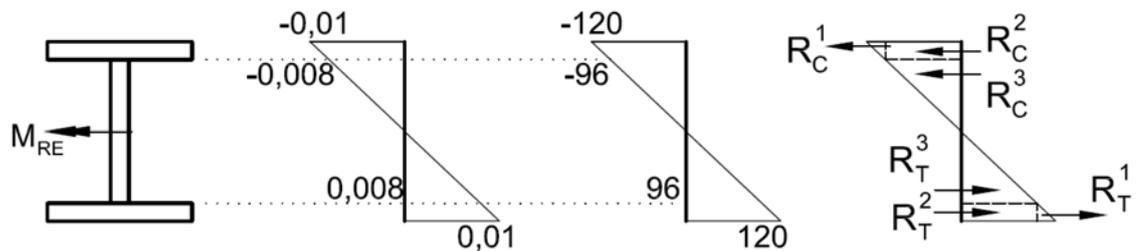


Figura 17.50 Distribuição da deformação e da tensão normal no plano da seção transversal. Forças equivalentes para a determinação do momento resistente elástico.

As forças equivalentes determinadas anteriormente conduzem ao seguinte valor de momento resistente elástico.

$$M_{RE} = 2 \left[ 240 \left( 0,20 + \frac{2}{3} \cdot 0,05 \right) \right] + 2 \left[ 1920 \left( 0,20 + \frac{1}{2} \cdot 0,05 \right) \right] + 2 \left[ 480 \left( \frac{2}{3} \cdot 0,20 \right) \right] \Rightarrow M_{RE} = 1104 \text{ kNm}$$

Quando a hipótese elastoplástica perfeita é assumida para o comportamento mecânico material, não existirá acréscimo no valor da tensão normal resistente quando a deformação normal presente no plano da seção transversal ultrapassar o valor de 0,01. Nesta condição, as tensões normais no plano da seção transversal e as forças equivalentes assumem a distribuição apresentada na Fig. (17.51).

Com base nas ilustrações apresentadas na Fig. (17.51), as forças equivalentes assumem os seguintes valores:

$$R_C^1 = R_T^1 = \left[ 120 \cdot 10^3 \cdot 0,40 \cdot 0,05 \right] \Rightarrow R_C^1 = R_T^1 = 2400 \text{ kN}$$

$$R_C^2 = R_T^2 = \left[ 120 \cdot 10^3 \cdot 0,20 \cdot 0,05 \right] \Rightarrow R_C^2 = R_T^2 = 1200 \text{ kN}$$

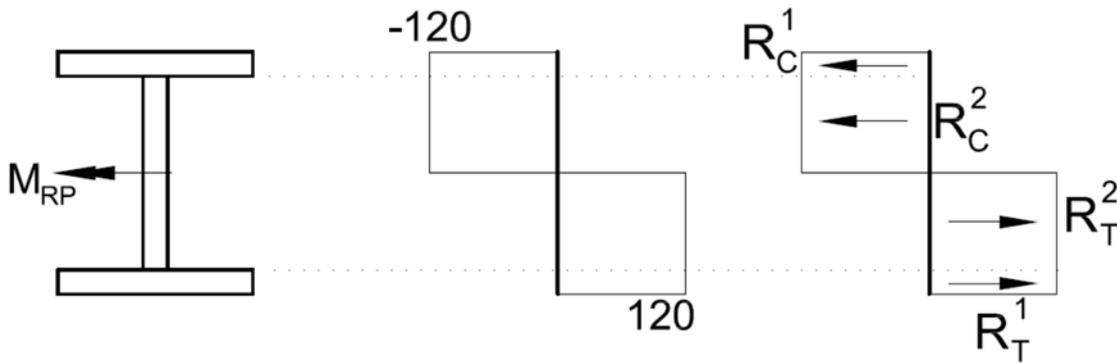


Figura 17.51 Distribuição da tensão normal no plano da seção transversal. Forças equivalentes para a determinação do momento resistente plástico perfeito.

Considerando os valores das forças equivalentes determinadas anteriormente, o momento resistente plástico perfeito assume o seguinte valor:

$$M_{RP} = 2 \left[ 2400 \left( 0,20 + \frac{1}{2} 0,05 \right) \right] + 2 \left[ 1200 \left( \frac{1}{2} 0,20 \right) \right] \Rightarrow M_{RP} = 1320 \text{ kNm}$$

Para os valores dos momentos resistentes elástico e plástico perfeito determinados anteriormente, pode-se calcular sua razão. Esta razão permite avaliar a intensidade percentual do esforço solicitante que deve ser aplicado entre os instantes de perda da condição elástica ( $M_{RE}$ ) e colapso da seção transversal ( $M_{RP}$ ). Para a seção transversal considerada e o comportamento mecânico material assumido, esta razão é igual a:

$$\kappa = \frac{M_{RP}}{M_{RE}} \Rightarrow \kappa = \frac{1320}{1104} \Rightarrow \kappa = 1,20$$

Quando o comportamento material mecânico indicado na Fig. (17.49) é considerado, a distribuição das deformações e das tensões normais no plano da seção transversal assume o padrão apresentado na Fig. (17.52). Nesta figura, os valores das deformações e das tensões normais assim como das forças equivalentes na região tracionada não foram ilustrados por simplicidade, devido a sua simetria em relação à região comprimida da seção transversal.

Para os valores das tensões normais apresentados na Fig. (17.52) os seguintes valores de forças equivalentes são obtidos:

$$R_C^1 = R_T^1 = \left[ (250 \cdot 10^3 - 217,5 \cdot 10^3) 0,40 \cdot 0,05 \right] \frac{1}{2} \Rightarrow R_C^1 = R_T^1 = 325 \text{ kN}$$

$$R_C^2 = R_T^2 = \left[ 217,5 \cdot 10^3 \cdot 0,40 \cdot 0,05 \right] \Rightarrow R_C^2 = R_T^2 = 4350 \text{ kN}$$

$$R_C^3 = R_T^3 = \left[ (217,5 \cdot 10^3 - 120 \cdot 10^3) \cdot 0,05 \cdot 0,15 \right] \frac{1}{2} \Rightarrow R_C^3 = R_T^3 = 365,625 \text{ kN}$$

$$R_C^4 = R_T^4 = \left[ 120 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 0,15 \right] \Rightarrow R_C^4 = R_T^4 = 900 \text{ kN}$$

$$R_C^5 = R_T^5 = \left[ 120 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 0,05 \right] \frac{1}{2} \Rightarrow R_C^5 = R_T^5 = 150 \text{ kN}$$

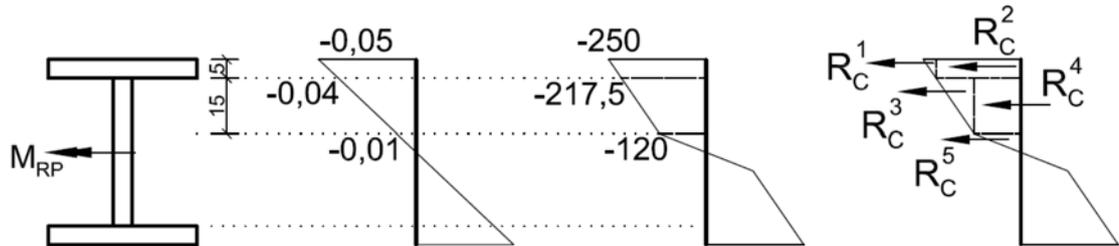


Figura 17.52 Distribuição da deformação e da tensão normal no plano da seção transversal. Forças equivalentes para a determinação do momento resistente plástico com encruamento.

Dessa forma, o momento resistente plástico considerando o comportamento mecânico material apresentado na Fig. (17.49) assume o seguinte valor:

$$M_{RP} = 2 \left[ 325 \left( 0,20 + \frac{2}{3} 0,05 \right) \right] + 2 \left[ 4350 \left( 0,20 + \frac{1}{2} 0,05 \right) \right] +$$

$$2 \left[ 365,625 \left( 0,05 + \frac{2}{3} 0,15 \right) \right] + 2 \left[ 900 \left( 0,05 + \frac{1}{2} 0,15 \right) \right] + 2 \left[ 150 \left( \frac{2}{3} 0,05 \right) \right] \Rightarrow$$

$$M_{RP} = 2453,85 \text{ kNm}$$

Portanto, a razão entre os valores dos momentos resistentes elástico e plástico assume o seguinte valor:

$$\kappa = \frac{M_{RP}}{M_{RE}} \Rightarrow \kappa = \frac{2453,85}{1104} \Rightarrow \kappa = 2,22$$

Deve-se destacar que o valor obtido para  $\kappa$  é consideravelmente maior neste caso se comparado às outras aplicações apresentadas neste texto. Isto indica que existe uma capacidade resistente considerável da seção transversal após a violação do limite elástico do material.

## **18. – Carregamentos Axiais Excêntricos e Flexão Assimétrica**

### *18.1 – Introdução*

Durante o capítulo 17 foram estudados problemas mecânicos envolvendo a avaliação das tensões normais em barras gerais submetidas a esforços de flexão. Casos onde barras homogêneas ou não-homogêneas solicitadas por dois momentos fletores e por um esforço axial (compressivo ou trativo) foram estudados, sendo apresentada uma relação envolvendo a distribuição das tensões normais e estes esforços solicitantes.

Até o presente momento, estes problemas foram tratados assumindo-se duas hipóteses. A primeira delas diz respeito à posição de aplicação da carga axial, a qual deveria ser posicionada no centro de gravidade da seção transversal. A segunda hipótese refere-se à geometria da seção transversal, a qual deveria obrigatoriamente possuir pelo menos um eixo de simetria.

Para possibilitar a análise de problemas gerais envolvendo tensões normais geradas por esforços de flexão, serão apresentadas, na sequência dessas notas, as hipóteses e as formulações necessárias para a determinação das tensões normais em problemas mecânicos onde as hipóteses citadas no parágrafo anterior não são atendidas. Dessa forma, serão estudados problemas onde a força axial não será aplicada no centro de gravidade da seção e também problemas onde as seções transversais consideradas sejam assimétricas.

### *18.2 – Carregamento Axial Excêntrico*

A linearidade das distribuições das deformações longitudinais e tensões normais nos pontos que compõem uma seção transversal de um elemento de barra geral de eixo

reto submetidos a carregamento axiais e de flexão em regime de pequenos deslocamentos, possibilita a aplicação do princípio da superposição dos efeitos. Por meio deste princípio, conforme apresentado no capítulo 1, pode-se determinar a tensão normal total atuante superpondo as tensões normais geradas, isoladamente, pelos esforços normal e de flexão. Considerando o caso em que atuam em uma dada seção transversal um esforço normal de tração, atuante no centro de gravidade da seção, e um momento fletor  $M_z$ , conforme apresentado na Fig. (18.1), o princípio da superposição dos efeitos pode ser aplicado, sendo, a tensão normal final, obtida adicionando-se as tensões normais geradas pelo esforço normal e pelo momento  $M_z$ .

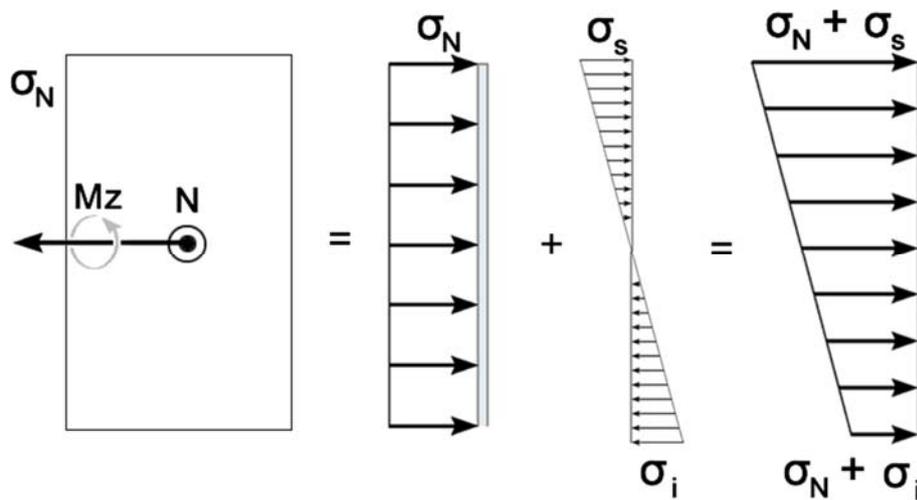


Figura 18.1 Princípio da superposição dos efeitos aplicado ao problema da flexão.

O valor da tensão normal, para o problema mostrado na Fig. (18.1), pode ser determinado por meio da seguinte relação.

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y \quad (18.1)$$

No entanto, em diversas aplicações de engenharia, elementos de barra geral estarão submetidos a carregamentos axiais posicionados de forma excêntrica em relação ao centro de gravidade de sua seção transversal. Em muitas manufaturas e elementos mecânicos, por exemplo, os carregamentos são transmitidos desta maneira.

Assumindo-se que a seção transversal considerada possua pelo menos um eixo de simetria, os efeitos gerados pela carga axial excêntrica poderão ser analisados transportando-se a carga axial para o centro de gravidade da seção transversal. Como consequência desta translação, surgirão momentos fletores que poderão ser calculados com base nas excentricidades da carga aplicada. Dessa forma, determina-se um

carregamento equivalente com base nas ações excêntricas aplicadas. As excentricidades nada mais são do que as distâncias, nas direções dos eixos coordenados, entre o ponto de aplicação da carga e o centro de gravidade da seção transversal. Para ilustrar a determinação desses momentos, pode-se considerar as ilustrações apresentadas na Fig. (18.2).

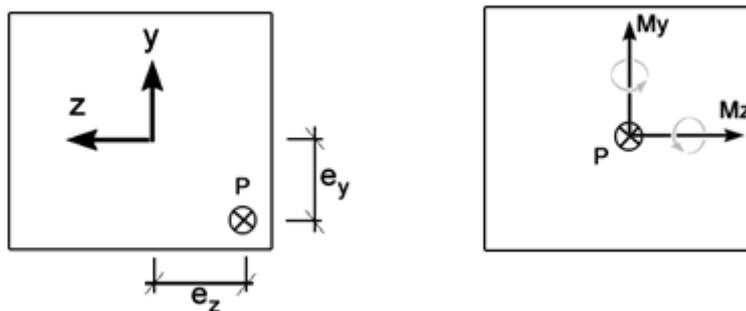


Figura 18.2 Transformação da carga excêntrica em um carregamento equivalente.

Na seção transversal mostrada na Fig. (18.2), uma carga axial  $P$  é aplicada de forma excêntrica em relação ao seu centro de gravidade. A translação da carga  $P$  para o centro de gravidade da seção transversal introduz a ação de dois momentos fletores  $M_y$  e  $M_z$ . Os momentos fletores decorrentes desta translação podem ser calculados por:

$$M_z = -Pe_y \qquad M_y = Pe_z \qquad (18.2)$$

A carga  $P$  é considerada negativa se atuar em compressão e as excentricidades  $e_y$  e  $e_z$  são calculadas levando-se em consideração o sinal dos eixos coordenados do sistema de referência mostrado na Fig. (18.2). Assim, para o caso apresentado na Fig. (18.2), ambas as excentricidades possuem valor negativo.

Para o caso geral de atuação de cargas axiais excêntricas,  $P$ , as tensões normais podem ser calculadas por meio da seguinte relação:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_y}{I_z} y + \frac{Pe_z}{I_y} z \qquad (18.3)$$

### 18.2.1 – Exemplo 1

Determine as tensões normais atuantes nos pontos A, B C e D da seção transversal mostrada na Fig. (18.3). Em seguida escreva a equação da linha neutra

sabendo que  $P = 10 \text{ kN}$ . As dimensões mostradas na Fig. (18.3) são apresentadas em mm.

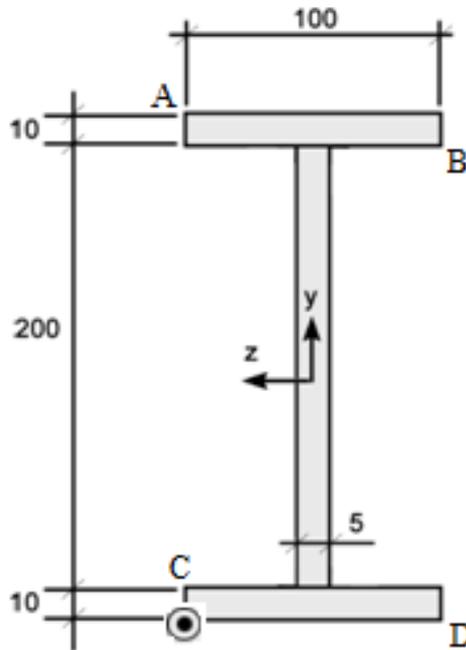


Figura 18.3 Seção transversal em análise. Dimensões em mm.

Como a seção transversal considerada é duplamente simétrica, constata-se facilmente que seu centro de gravidade encontra-se localizado na intersecção dos eixos de simetria. Assim tem-se:

$$e_y = -110 \text{ mm} \qquad e_z = 50 \text{ mm}$$

Os momentos fletores introduzidos pela presença da carga excêntrica podem ser calculados como:

$$M_z = -Pe_y \Rightarrow M_z = -10 \cdot (-110 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow M_z = 1,10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y = Pe_z \Rightarrow M_y = 10 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \Rightarrow M_y = 0,50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Portanto, o carregamento equivalente a ser analisado é o apresentado na Fig. (18.4). Para a determinação das tensões normais atuantes na seção transversal, geradas pelos esforços solicitantes mostrados na Fig. (18.4), devem ser calculadas as propriedades geométricas da seção transversal. A área e os momentos de inércia em relação aos eixos  $y$  e  $z$  possuem os seguintes valores:

$$A = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 5 + 100 \cdot 10 \Rightarrow A = 3000 \text{ mm}^2 \Rightarrow A = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_z = \left[ \frac{100 \cdot (10)^3}{12} + 100 \cdot 10 \cdot (105)^2 \right] \cdot 2 + \frac{5 \cdot (200)^3}{12} \Rightarrow I_z = 25400000 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 2,54 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_y = \left[ \frac{10 \cdot (100)^3}{12} \right] \cdot 2 + \frac{200 \cdot (5)^3}{12} \Rightarrow I_y = 1668750 \text{ mm}^4 \Rightarrow$$

$$I_y = 1,66875 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

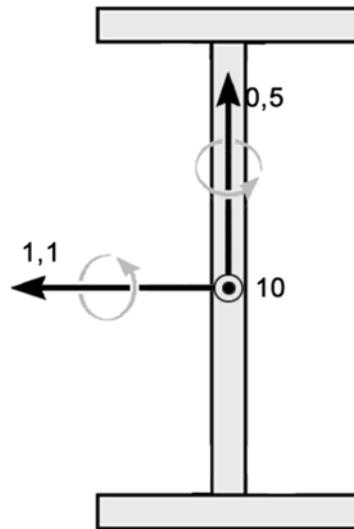


Figura 18.4 Carregamento equivalente ao da carga excêntrica.

Utilizando a fórmula geral da flexão para o caso de carregamentos excêntricos, Eq.(18.3), verifica-se que as tensões normais em todos os pontos da seção poderão ser calculadas por meio da seguinte equação:

$$\sigma = \frac{10}{3,0 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,10}{2,54 \cdot 10^{-5}} y + \frac{0,50}{1,66875 \cdot 10^{-6}} z$$

Assim, para o ponto A tem-se:

$$\sigma_A = \frac{10}{3,0 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,10}{2,54 \cdot 10^{-5}} \cdot 110 \cdot 10^{-3} + \frac{0,50}{1,66875 \cdot 10^{-6}} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\sigma_A = 13550,8 \text{ kPa}$$

Já para o ponto B, a tensão normal é dada por:

$$\sigma_B = \frac{10}{3,0 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,10}{2,54 \cdot 10^{-5}} \cdot 100 \cdot 10^{-3} + \frac{0,50}{1,66875 \cdot 10^{-6}} \cdot -50 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\sigma_B = -15978,6 \text{ kPa}$$

No ponto C a tensão normal é igual a:

$$\sigma_c = \frac{10}{3,0 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,10}{2,54 \cdot 10^{-5}} \cdot -100 \cdot 10^{-3} + \frac{0,50}{1,66875 \cdot 10^{-6}} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\sigma_c = 22645,3 \text{ kPa}$$

Finalmente, a tensão normal no ponto D é dada por:

$$\sigma_D = \frac{10}{3,0 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,10}{2,54 \cdot 10^{-5}} \cdot -110 \cdot 10^{-3} + \frac{0,50}{1,66875 \cdot 10^{-6}} \cdot -50 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\sigma_D = -6884,2 \text{ kPa}$$

Constata-se que a tensão normal atuante nos pontos A e B possuem sinais opostos. Dessa forma, espera-se que a linha neutra passe pela fibra superior da seção. A equação da linha neutra é dada por:

$$\sigma = \frac{10}{3,0 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,10}{2,54 \cdot 10^{-5}} y + \frac{0,50}{1,66875 \cdot 10^{-6}} z = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{10}{3,0 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{2,54 \cdot 10^{-5}}{1,10} + \frac{0,50}{1,66875 \cdot 10^{-6}} z \cdot \frac{2,54 \cdot 10^{-5}}{1,10} \Rightarrow$$

$$y = 0,0769 + 6,9186z$$

Quando a equação anterior é avaliada nas coordenadas  $y$  iguais a 110 mm e -110 mm, ou seja, nos extremos da seção obtém-se:

$$y = 110 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 110 \cdot 10^{-3} = 0,0769 + 6,9186z \Rightarrow z = 4,784 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$y = -110 \cdot 10^{-3} \Rightarrow -110 \cdot 10^{-3} = 0,0769 + 6,9186z \Rightarrow z = -27,014 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Portanto, devido à presença da carga axial, verifica-se que a linha neutra não passa pelo centro de gravidade da seção. A posição da linha neutra na seção transversal é a indicada na Fig. (18.5).

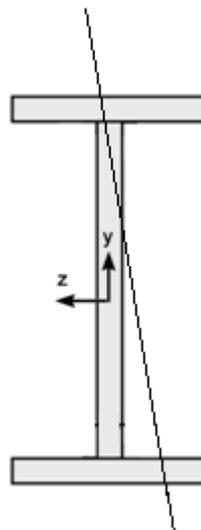


Figura 18.5 Posição da linha neutra.

## 18.2.2 – Exemplo 2

Determine os momentos equivalentes devido à carga axial excêntrica aplicada na seção transversal mostrada na Fig. (18.6). Além disso, sabendo que  $P = 80\text{ kN}$ , determine a equação da linha neutra. As dimensões mostradas na Fig. (18.6) estão em mm.

Como a seção transversal considerada apresenta apenas um eixo de simetria, eixo  $y$ , deve-se determinar a posição do centro de gravidade em relação a este eixo. Assim:

$$y_{cg} = \frac{10 \cdot 110 \cdot 105 + 10 \cdot 100 \cdot 50}{10 \cdot 110 + 10 \cdot 100} \Rightarrow y_{cg} = 78,81\text{ mm}$$

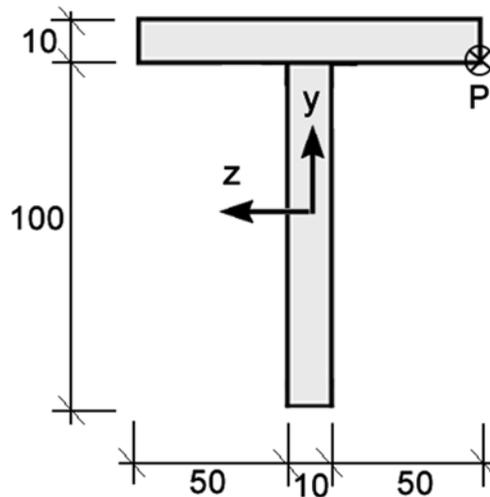


Figura 18.6 Seção transversal em análise. Dimensões em mm.

As propriedades geométricas da seção transversal podem ser calculadas como:

$$A = 110 \cdot 10 + 100 \cdot 10 \Rightarrow A = 2100\text{ mm}^2 \Rightarrow A = 2,1 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2$$

$$I_z = \frac{10 \cdot (100)^3}{12} + 10 \cdot 100 \cdot (50 - 78,81)^2 + \frac{110 \cdot (10)^3}{12} + 110 \cdot 10 \cdot (105 - 78,81)^2$$

$$I_z = 2427023\text{ mm}^4 \Rightarrow I_z = 2,427023 \cdot 10^{-6}\text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{100 \cdot (10)^3}{12} + \frac{10 \cdot (110)^3}{12} \Rightarrow I_y = 1117500\text{ mm}^4 \Rightarrow I_y = 1,1175 \cdot 10^{-6}\text{ m}^4$$

Devido à posição do centro de gravidade da seção, as excentricidades do ponto de aplicação da carga são iguais a:

$$e_y = 100 - 78,81 \Rightarrow e_y = 21,19\text{ mm} \qquad e_z = -55\text{ mm}$$

Assim, os momentos introduzidos pela presença da carga excêntrica podem ser calculados como:

$$M_z = -Pe_y \Rightarrow M_z = -(-80) \cdot 21,19 \cdot 10^{-3} \Rightarrow M_z = 1,6952 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y = Pe_z \Rightarrow M_y = (-80) \cdot (-55 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow M_y = 4,40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

A expressão da linha neutra pode ser facilmente escrita com base na equação geral da flexão para o caso onde cargas axiais excêntricas atuam, Eq.(18.3). Assim:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-80}{2,1 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,6952}{2,427023 \cdot 10^{-6}} y + \frac{4,40}{1,1175 \cdot 10^{-6}} z = 0 \\ y &= \frac{-80}{2,1 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{2,427023 \cdot 10^{-6}}{1,6952} + \frac{4,40}{1,1175 \cdot 10^{-6}} z \cdot \frac{2,427023 \cdot 10^{-6}}{1,6952} \\ y &= -0,05454 + 5,6371z \end{aligned}$$

### 18.3 – Núcleo de Ataque em Barras Curtas Comprimidas

Quando um elemento de barra geral está solicitado por um momento fletor, sabe-se que no plano de sua seção transversal serão desenvolvidas tensões normais que variam linearmente ao longo de seu domínio. Assim, parte da seção transversal estará tracionada e a parte complementar comprimida. Quando uma força axial excêntrica é aplicada na seção transversal, a translação desta força até o centro de gravidade da seção gera a presença de momento(s) fletor(es). Nessa situação, a distribuição das tensões normais no domínio da seção transversal permanece linear, porém não simétrica em relação ao centro de gravidade da seção.

Em muitas aplicações de engenharia, é de interesse do projetista que as tensões normais atuantes na seção transversal de barras solicitadas por cargas excêntricas apresentem um só sentido, ou seja, as tensões devem ser apenas trativas ou compressivas. Tal verificação tem especial importância no projeto de estruturas de concreto protendido e elementos de fundações, onde deseja-se que apenas tensões de compressão sejam desenvolvidas. O conjunto de pontos possíveis onde a carga axial excêntrica pode ser aplicada de forma a gerar tensões que não mudam de sentido é conhecido como *núcleo de ataque*.

Para seções transversais comumente utilizadas em estruturas, o núcleo de ataque pode ser facilmente determinado. Pode-se considerar, por exemplo, uma seção

transversal retangular, de base  $b$  e altura  $h$ , mostrada na Fig. (18.7), submetida à ação de uma força axial excêntrica de intensidade  $P$ . Nessa situação, as tensões normais produzidas por  $P$  podem ser calculadas por meio da Eq.(18.3). Sabendo que as inércias em relação aos eixos  $y$  e  $z$  são iguais a:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Pode-se reescrever a Eq.(18.3) como:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_y}{\frac{b \cdot h^3}{12}} y + \frac{Pe_z}{\frac{h \cdot b^3}{12}} z \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A} + \frac{12Pe_y}{b \cdot h^3} y + \frac{12Pe_z}{h \cdot b^3} z \quad (18.4)$$

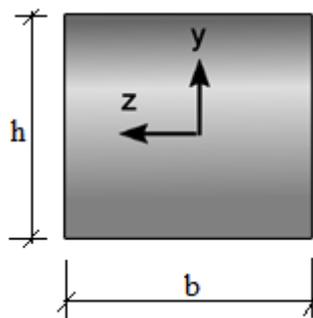


Figura 18.7 Seção transversal retangular.

Para que a tensão normal não mude seu sinal no domínio da seção transversal, a tensão normal deve ser pelo menos nula em um de seus extremos. Assumindo que a carga excêntrica esteja contida no eixo  $y$ , como mostrado na Fig. (18.8), pode-se determinar a excentricidade limite  $e_y$  a partir da Eq.(18.4). Nessa situação, a fibra superior, maior  $y$  positivo, deverá apresentar tensão normal nula. Assim:

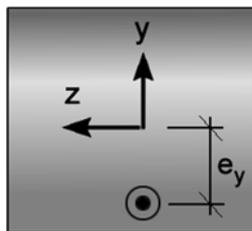


Figura 18.8 Carga excêntrica atuante no eixo  $y$ .

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{12P(-e_y)}{b \cdot h^3} y + \frac{12P \cdot 0}{h \cdot b^3} z \Rightarrow 0 = \frac{P}{A} + \frac{12P(-e_y)h}{b \cdot h^3} \Rightarrow \quad (18.5)$$

$$e_y = \frac{h}{6}$$

Assumindo agora que a carga excêntrica esteja posicionada ao longo do eixo  $z$ , como mostrado na Fig. (18.9), a excentricidade limite  $e_z$  pode ser determinada por meio da Eq.(18.4) sabendo que a tensão normal deve ser nula nas fibras posicionadas ao longo da maior ordenada  $z$ . Portanto:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{12P \cdot 0}{b \cdot h^3} y + \frac{12P(-e_z)}{h \cdot b^3} z \Rightarrow 0 = \frac{P}{A} + \frac{12P(-e_z) b}{h \cdot b^3} \frac{h}{2} \Rightarrow$$

$$e_z = \frac{b}{6} \quad (18.6)$$

Com base nos resultados apresentados nas Eq.(18.5) e Eq.(18.6), pode-se intuitivamente perceber que quando a carga excêntrica está contida nos eixos coordenados e, além disso, esta apresenta excentricidades  $y$  e  $z$  positivas, ao contrário do efetuado anteriormente, as excentricidades limites ao longo dos eixos  $y$  e  $z$  são as mesmas apresentadas nas Eq.(18.5) e Eq.(18.6), respectivamente.

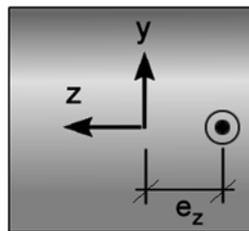


Figura 18.9 Carga excêntrica atuante no eixo  $z$ .

Assim, quando a carga excêntrica encontra-se posicionada ao longo dos eixos coordenados, as excentricidades limites são as ilustradas na Fig. (18.10).

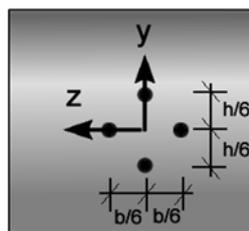


Figura 18.10 Pontos do núcleo de ataque ao longo dos eixos coordenados.

Para a determinação do contorno do núcleo de ataque entre os pontos limites ilustrados na Fig. (18.10), deve-se considerar o caso em que a carga excêntrica encontra-se localizada fora dos eixos coordenados. Esse caso é ilustrado na Fig.(18.11) onde a carga excêntrica atuante é compressiva. As tensões normais, para a solicitação apresentada na Fig. (18.11), são dadas por:

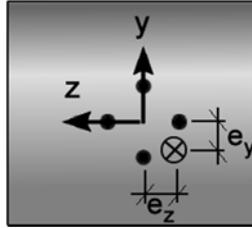


Figura 18.11 Determinação do contorno do núcleo de ataque.

$$\sigma = \frac{-P}{b \cdot h} + \frac{12 \cdot (-P) \cdot (-e_y)}{b \cdot h^3} y + \frac{12 \cdot (-P) \cdot (-e_z)}{h \cdot b^3} z \quad (18.7)$$

Como a carga excêntrica atuante é compressiva, toda a seção transversal deve estar comprimida. Assim, para que a tensão atuante não mude seu sinal, ou seja, passe de compressão a tração em qualquer ponto da seção, a tensão normal na região mais tracionada, no caso apresentado na Fig. (18.11) o ponto formado pelas coordenadas  $(y, z) = \left(\frac{h}{2}, \frac{b}{2}\right)$ , deve ser nula. Portanto:

$$\sigma = \frac{-P}{b \cdot h} + \frac{12Pe_y}{b \cdot h^3} \cdot \frac{h}{2} + \frac{12Pe_z}{h \cdot b^3} \cdot \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{6e_y}{h} + \frac{6e_z}{b} \Rightarrow \quad (18.8)$$

$$e_y = \left(1 - \frac{6e_z}{b}\right) \frac{h}{6}$$

Como mostrado na Eq.(18.8), verifica-se que  $e_y$  varia linearmente com  $e_z$ . Dessa forma, para os casos de seções transversais retangulares o núcleo de ataque fica delimitado pela região hachurada mostrada na Fig. (18.12).

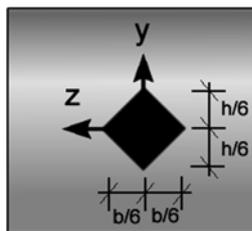


Figura 18.12 Núcleo de ataque para seções retangulares.

De forma semelhante, pode-se também definir o núcleo de ataque de seções transversais circulares. Sabendo que nessas seções o momento de inércia é igual a

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \text{ e a área igual a } A = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ a excentricidade limite que delimita o núcleo de}$$

ataque é dada por  $e = \frac{d}{8}$ , sendo  $d$  o diâmetro da seção.

### 18.4 – Flexão em Barras de Seção Transversal Assimétrica

Durante o capítulo 17 foram estudados problemas mecânicos relacionados à análise das tensões normais atuantes em elementos de barra geral submetidos a esforços de flexão cujas seções transversais apresentavam pelo menos um eixo de simetria. Naquela oportunidade foi demonstrado que as deformações normais variavam linearmente ao longo da altura da seção. Como consequência, assumindo a validade da lei de Hooke, as tensões normais variavam também linearmente ao longo da altura da seção, como ilustrado na Fig. (18.13).

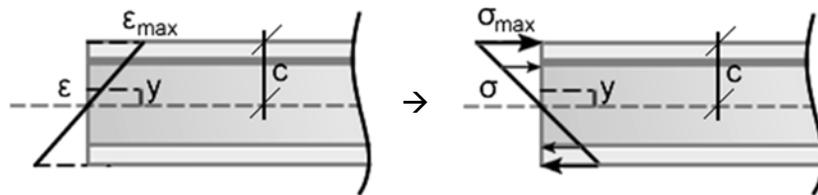


Figura 18.13 Tensões e deformações atuantes em problemas de flexão.

As variações das deformações e tensões normais ao longo da altura da seção podem ser expressas em função das tensões e deformações máximas atuantes. Assim:

$$\varepsilon = -\left(\frac{y}{c}\right)\varepsilon_{MAX} \quad \sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{MAX} \quad (18.9)$$

Com base nas hipóteses de equilíbrio do elemento estrutural, é possível relacionar a tensão normal no plano da seção transversal ao momento fletor atuante. Das condições de equilíbrio tem-se, inicialmente, que a somatória das forças em relação ao eixo da barra deve ser nula. Assim, assumindo por simplicidade que a barra possua seção transversal retangular, como apresentado na Fig.(18.14), tem-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A dF = 0 \Rightarrow \int_A \sigma dA = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_{MAX}}{c} \int_A y dA = 0 \quad (18.10)$$

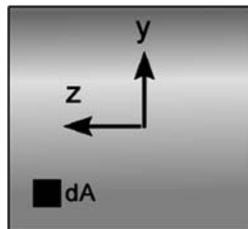


Figura 18.14 Tensões e deformações atuantes em problemas de flexão.

A Eq.(18.10) é atendida uma vez que a integral mostrada representa o momento estático da seção, o qual é nulo em relação ao centro de gravidade da seção. Para que as condições de equilíbrio sejam atendidas, deve-se também verificar se a somatória dos momentos fletores é nula em relação aos eixos  $z$  e  $y$ . Assim:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \int_A y dF - M_z = 0 \Rightarrow M_z = \int_A \sigma y dA \Rightarrow$$

$$M_z = -\frac{\sigma_{MAX}}{c} \int_A y^2 dA \quad (18.11)$$

Sabe-se que a integral  $\int_A y^2 dA$  representa o momento de inércia da seção em relação ao eixo  $z$ . Portanto, a Eq.(18.11) pode ser reescrita como:

$$M_z = -\frac{\sigma_{MAX}}{c} I_z \quad (18.12)$$

As Eq.(18.10), Eq.(18.11) e Eq.(18.12) foram apresentadas e aplicadas aos problemas discutidos no capítulo 17. Porém, naquela oportunidade, não foi verificado se a somatória dos momentos fletores em relação ao eixo  $y$  era atendida. O equilíbrio dos momentos em relação ao eixo  $y$  pode ser efetuado como:

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \int_A z dF = 0 \Rightarrow M_y = 0 = \int_A \sigma z dA \Rightarrow$$

$$M_y = 0 = -\frac{\sigma_{MAX}}{c} \int_A yz dA \quad (18.13)$$

A integral  $\int_A yz dA$  apresentada na Eq.(18.13) é denominada produto de inércia de uma área, sendo uma propriedade geométrica de área assim como o são o momento de inércia e o momento estático. O produto de inércia apresenta valor nulo quando a área considerada possui pelo menos um eixo de simetria. Dessa forma, para os problemas estudados no capítulo 17, esta integral era nula e conseqüentemente a somatória dos momentos em torno do eixo  $y$  era automaticamente atendida.

No entanto, o produto de inércia não é nulo em seções transversais assimétricas. Dessa forma, para o estudo de problemas envolvendo a avaliação das tensões normais em barras de seções transversais assimétricas submetidas à flexão deve-se considerar o termo dependente do produto de inércia. Este estudo será apresentado neste capítulo. Porém, antes de mostrar a formulação e as hipóteses assumidas para este problema deve-se estudar um pouco mais sobre a determinação das propriedades geométricas das seções, em especial o cálculo do produto de inércia.

### 18.4.1 – Propriedades Geométricas das Seções. Produto de Inércia

Conforme apresentado na Eq.(18.13), se a seção transversal for definida pelos eixos  $yz$ , o produto de inércia é definido por:

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (18.14)$$

Quando o produto de inércia é calculado para uma área que possua pelo menos um eixo de simetria seu valor torna-se nulo. Para a avaliação do produto de inércia em relação a um eixo qualquer, pode-se aplicar o teorema dos eixos paralelos. Por meio desse teorema, obtém-se que o produto de inércia em relação a eixos distantes  $\Delta y$  e  $\Delta z$  de um eixo de referência qualquer é dado por:

$$I_{yz} = \int_A (y + \Delta y)(z + \Delta z) dA \Rightarrow \quad (18.15)$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA + \Delta y \int_A z dA + \Delta z \int_A y dA + \Delta y \Delta z \int_A dA$$

O primeiro termo apresentado na Eq.(18.15) refere-se ao produto de inércia da área em relação ao seu próprio centro de gravidade. Os dois termos seguintes representam o momento estático da área, em relação aos eixos  $y$  e  $z$  respectivamente. Estes termos serão nulos, uma vez que são avaliados em relação ao centro de gravidade da área considerada. Finalmente, o último termo da Eq.(18.15) resulta no produto das distâncias envolvendo o eixo considerado e o centro de gravidade da área, e a área analisada. De uma forma mais compacta, a Eq.(18.15) pode ser reescrita como:

$$I_{yz} = \overline{I}_{yz} + \Delta y \Delta z A \quad (18.16)$$

sendo que o termo  $\overline{I}_{yz}$  representa o produto de inércia da área em relação ao seu próprio centro de gravidade.

### 18.4.2 – Exemplo 3

Determine o produto de inércia da área mostrada na Fig. (18.15), cujas dimensões estão apresentadas em mm.

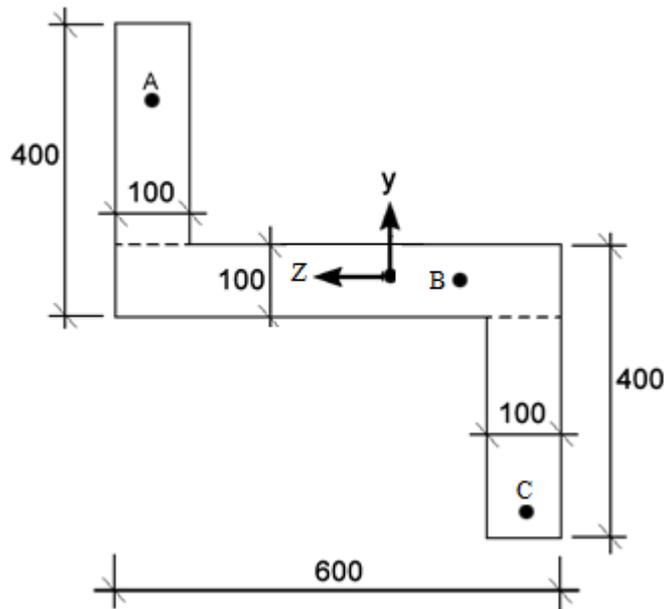


Figura 18.15 Área considerada. Dimensões em mm.

O primeiro passo para a solução deste exemplo é a determinação do centro de gravidade da área analisada. Assim:

$$y_{cg} = \frac{300 \cdot 100 \cdot 550 + 100 \cdot 600 \cdot 350 + 300 \cdot 100 \cdot 150}{300 \cdot 100 + 100 \cdot 600 + 300 \cdot 100} \Rightarrow y_{cg} = 350 \text{ mm}$$

$$z_{cg} = \frac{300 \cdot 100 \cdot 550 + 100 \cdot 600 \cdot 300 + 300 \cdot 100 \cdot 50}{300 \cdot 100 + 100 \cdot 600 + 300 \cdot 100} \Rightarrow z_{cg} = 300 \text{ mm}$$

A área considerada foi subdividida em três subáreas denominadas A, B e C, conforme indicado na Fig. (18.15). Assim, o produto de inércia da área total será igual a somatória do produto de inércia de cada uma das áreas isolada. Assim:

$$I_{yz}^A = (300 \cdot 100) \cdot 200 \cdot 250 \Rightarrow I_{yz}^A = 1,50 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz}^B = (100 \cdot 600) \cdot 0 \cdot 0 \Rightarrow I_{yz}^B = 0 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz}^C = (300 \cdot 100) \cdot (-200) \cdot (-250) \Rightarrow I_{yz}^C = 1,50 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Assim:

$$I_{yz} = I_{yz}^A + I_{yz}^B + I_{yz}^C \Rightarrow I_{yz} = 1,50 \cdot 10^9 + 0 + 1,50 \cdot 10^9 \Rightarrow I_{yz} = 3,0 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

### 18.4.3 – Inércias Principais

Em diversas aplicações de engenharia, os projetistas desejam determinar os valores dos momentos de inércia e do produto de inércia em relação a eixos

coordenados rotacionados em relação a um sistema de referência previamente definido. Nessa situação, as propriedades geométricas da área analisada são definidas em relação ao sistema de referência  $yz$ , por exemplo, sendo necessário o conhecimento dessas propriedades em relação a um sistema rotacionado  $y'z'$ , conforme apresentado na Fig. (18.16).

Para tal finalidade, os pontos definidos no sistema rotacionado  $y'z'$  podem ser escritos em função de suas coordenadas no sistema  $yz$ . Por meio de funções trigonométricas básicas e da Fig. (18.16), pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} y' &= y \cos(\theta) + z \operatorname{sen}(\theta) \\ z' &= -y \operatorname{sen}(\theta) + z \cos(\theta) \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (18.17)$$

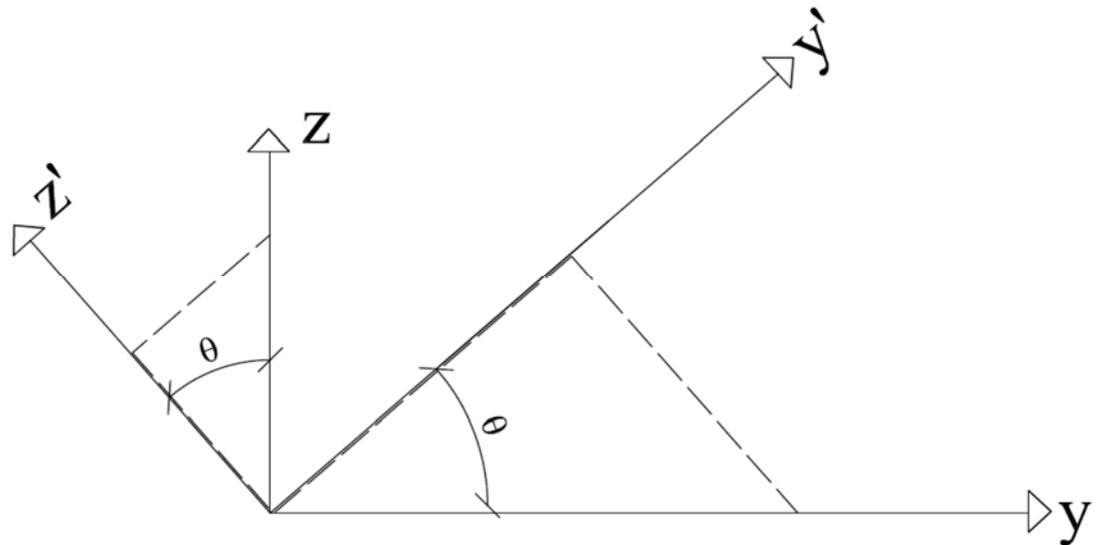


Figura 18.16 Coordenadas dadas em sistemas rotacionados.

Assim, as propriedades geométricas da área, em especial os momentos de inércia e o produto de inércia em relação aos eixos  $y'$  e  $z'$ , podem ser obtidas avaliando estas grandezas utilizando as coordenadas  $y'z'$  mostradas na Eq.(18.17). Dessa forma, sabendo que:

$$I'_y = \int_A (z')^2 dA \quad I'_z = \int_A (y')^2 dA \quad I'_{yz} = \int_A y'z' dA \quad (18.18)$$

Os momentos de inércia e o produto de inércia, referenciados ao sistema rotacionado  $y'z'$ , podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 I'_y &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos(2\theta) - I_{yz} \operatorname{sen}(2\theta) \\
 I'_z &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos(2\theta) + I_{yz} \operatorname{sen}(2\theta) \\
 I'_{yz} &= \frac{I_y - I_z}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + I_{yz} \cos(2\theta)
 \end{aligned} \tag{18.19}$$

A dedução da Eq.(18.19) foi omitida nessas notas por simplicidade. No entanto, para tal finalidade, basta substituir os valores das novas coordenadas  $y'$  e  $z'$  apresentadas na Eq.(18.17) na Eq.(18.18).

As expressões mostradas na Eq.(18.19) relacionam os momentos de inércia e o produto de inércia, definidos em relação ao sistema  $y'z'$ , com estas propriedades de área calculadas em relação a um sistema de coordenadas previamente definido,  $yz$ . Deve-se notar que estas expressões dependem do ângulo de inclinação entre os eixos  $y$  e  $y'$ , o qual é positivo se medido no sentido anti-horário. Devido ao caráter periódico das funções trigonométricas envolvidas, cosseno e seno, é intuitivo perceber que haverá ângulos particulares nos quais os valores das propriedades geométricas da área serão extremos, ou seja, máximo ou mínimo. Para a determinação desses ângulos, devem ser empregados os conhecimentos do cálculo diferencial, o qual prevê que a função apresentará valores extremos quando sua derivada primeira for nula (ponto de inflexão). Assim, os eixos em relação aos quais os momentos de inércia apresentarão valores extremos podem ser obtidos como:

$$\frac{dI'_y}{d\theta} = -\frac{I_y - I_z}{2} 2\operatorname{sen}(2\theta) - 2I_{yz} \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \tag{18.20}$$

A Eq.(18.20) fornece dois ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , os quais são defasados de  $90^\circ$ , que definem dois eixos em relação aos quais os momentos de inércia apresentam seus valores extremos. Os valores dos momentos de inércia em relação aos eixos dados pela Eq.(18.20) podem ser facilmente determinados substituindo seus ângulos na primeira das expressões apresentadas na Eq.(18.19). Efetuando este procedimento obtém-se:

$$I_{MAX/MIN} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \tag{18.21}$$

As inércias extremas definidas na Eq.(18.21) são denominadas momentos principais de inércia e os eixos onde estas atuam eixos principais de inércia. Os eixos principais de inércia apresentam uma característica importante e que deve ser

ênfaticada. Em relação a estes eixos, ou seja, nos eixos em relação aos quais as inércias são máxima ou mínima, o produto de inércia é nulo. Essa conclusão, que será omitida aqui por simplicidade, pode ser facilmente obtida substituindo-se os ângulos determinados na Eq.(18.20) na expressão que relaciona o produto de inércia a eixos quaisquer, terceira equação mostrada na Eq.(18.19).

Quando uma dada área apresenta dois eixos de simetria, os eixos principais de inércia são os próprios eixos de simetria. Quando uma seção apresenta apenas um eixo de simetria, um eixo principal de inércia encontra-se sobre o eixo de simetria enquanto o outro eixo encontra-se localizado perpendicularmente ao eixo de simetria. Quando a seção é assimétrica, os eixos principais são determinados por meio da Eq.(18.20) e seus valores pela Eq.(18.21).

#### 18.4.4 – Exemplo 4

Determine os momentos principais de inércia e a inclinação dos eixos principais da seção transversal mostrada na Fig. (18.17), cujas dimensões estão apresentadas em mm.

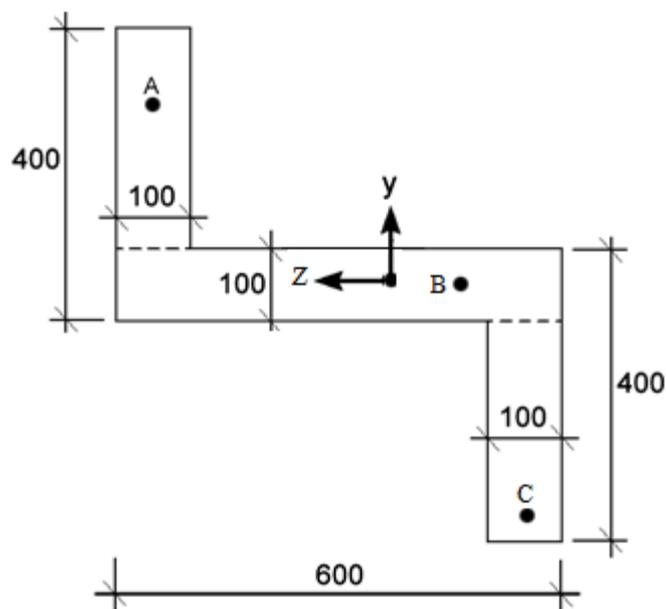


Figura 18.17 Área considerada. Dimensões em mm.

Conforme calculado no exemplo 3, tem-se que:

$$y_{cg} = 350 \text{ mm} \quad z_{cg} = 300 \text{ mm} \quad I_{yz} = 3,0 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Assim, para a determinação dos momentos principais de inércia e das inclinações dos eixos principais, devem ser determinados os momentos de inércia em relação ao sistema  $yz$ . Portanto:

$$I_z = \frac{100 \cdot (300)^3}{12} + 100 \cdot 300 \cdot (550 - 350)^2 + \frac{600 \cdot (100)^3}{12} + \frac{100 \cdot (300)^3}{12} + 100 \cdot 300 \cdot (150 - 350)^2 \Rightarrow I_z = 2,90 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_z = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{300 \cdot (100)^3}{12} + 100 \cdot 300 \cdot (550 - 300)^2 + \frac{100 \cdot (600)^3}{12} + \frac{300 \cdot (100)^3}{12} + 100 \cdot 300 \cdot (50 - 300)^2 \Rightarrow I_y = 5,60 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_y = 5,60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Assim, as inércias principais são calculadas com base na Eq.(18.21). Dessa forma:

$$I_{MAX/MIN} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{MAX/MIN} = \frac{5,60 \cdot 10^{-3} + 2,90 \cdot 10^{-3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,60 \cdot 10^{-3} - 2,90 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2 + (3,0 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$I_{MAX/MIN} = 4,25 \cdot 10^{-3} \pm 3,290 \cdot 10^{-3}$$

$$I_{MAX} = 7,54 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \quad I_{MIN} = 9,60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

As inclinações dos eixos principais são obtidas por meio da Eq.(18.20). Assim:

$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{-2 \cdot 3,0 \cdot 10^{-3}}{5,60 \cdot 10^{-3} - 2,90 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$

$$\tan(2\theta) = -2,22222 \Rightarrow \theta_{p1} = -32,886^\circ \Rightarrow$$

$$\theta_{p2} = \theta_{p1} + 90^\circ \Rightarrow \theta_{p2} = -32,886^\circ + 90^\circ \Rightarrow \theta_{p2} = 57,114^\circ$$

Para determinar em qual das inclinações atuam cada uma das inércias principais encontradas, deve-se substituir os ângulos calculados anteriormente na primeira das expressões apresentadas na Eq.(18.19). Assim:

$$I'_y = \frac{5,60 \cdot 10^{-3} + 2,90 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{5,60 \cdot 10^{-3} - 2,90 \cdot 10^{-3}}{2} \cos[2(-32,886)] - 3 \cdot 10^{-3} \text{ sen}[2(-32,886)] \Rightarrow I'_y = 7,54 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Dessa forma, em torno do eixo rotacionado de  $-32,886^\circ$  atua a maior das inércias principais calculadas. Conseqüentemente, em torno do eixo rotacionado de  $57,114^\circ$  atuará a menor inércia principal. Conforme mostrado na Fig. (18.18), em torno do eixo  $I_{MAX}$  encontra-se a maior porção de área afastada do centro de gravidade, enquanto em

torno do eixo  $I_{\min}$ , por outro lado, maior porção de área encontra-se próxima ao centro de gravidade.

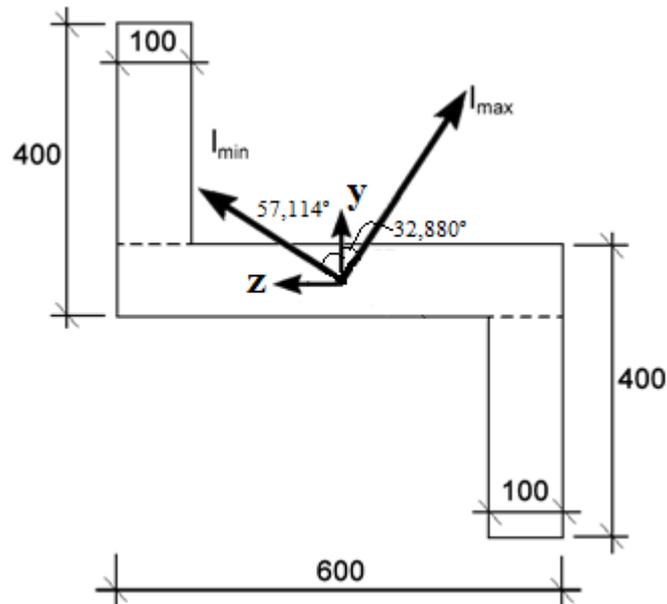


Figura 18.18 Orientação dos eixos principais.

#### 18.4.5 – Exemplo 5

Determine os momentos principais de inércia e a inclinação dos eixos principais da seção transversal mostrada na Fig. (18.19), cujas dimensões estão apresentadas em mm.

Para resolver este exemplo deve-se, inicialmente, determinar as coordenadas do centro de gravidade da seção. Assim:

$$y_{cg} = \frac{200 \cdot 10 \cdot 100 + 10 \cdot 90 \cdot 5}{200 \cdot 10 + 10 \cdot 90} \Rightarrow y_{cg} = 70,517 \text{ mm}$$

$$z_{cg} = \frac{200 \cdot 10 \cdot 5 + 10 \cdot 90 \cdot 55}{200 \cdot 10 + 10 \cdot 90} \Rightarrow z_{cg} = 20,517 \text{ mm}$$

Com base nas coordenadas do centro de gravidade da seção transversal podem ser determinados os valores dos momentos de inércia em relação aos eixos  $y$  e  $z$ . Dessa forma:

$$I_z = \frac{10 \cdot (200)^3}{12} + 200 \cdot 10 \cdot (100 - 70,517)^2 + \frac{90 \cdot (10)^3}{12} + 90 \cdot 10 \cdot (5 - 70,517)^2$$

$$I_z = 1,2276 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_z = 1,2276 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{200 \cdot (10)^3}{12} + 200 \cdot 10 \cdot (5 - 20,517)^2 + \frac{10 \cdot (90)^3}{12} + 90 \cdot 10 \cdot (55 - 20,517)^2$$

$$I_y = 2,1759 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_y = 2,1759 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

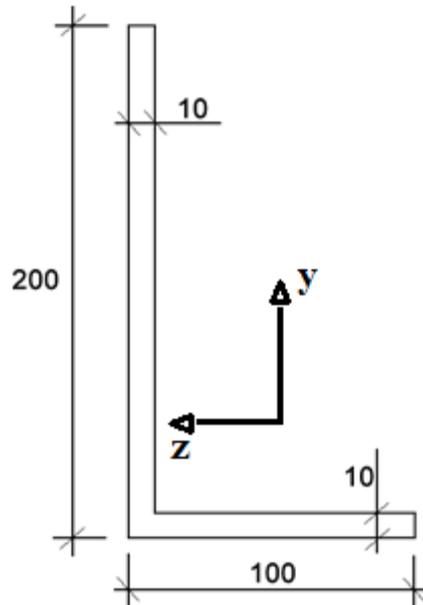


Figura 18.19 Área considerada. Dimensões em mm.

Já o produto de inércia é dado por:

$$I_{yz} = 200 \cdot 10 \cdot (100 - 70,517) \cdot (20,517 - 5) + 90 \cdot 10 \cdot (5 - 70,517) \cdot (20,517 - 55)$$

$$I_{yz} = 2,9483 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_{yz} = 2,9483 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

As inércias principais podem ser determinadas utilizando a Eq.(18.21). Assim:

$$I_{MAX/MIN} = \frac{2,1759 \cdot 10^{-6} + 1,2276 \cdot 10^{-5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,1759 \cdot 10^{-6} - 1,2276 \cdot 10^{-5}}{2}\right)^2 + (2,9483 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$I_{MAX/MIN} = 7,2260 \cdot 10^{-6} \pm 5,8477 \cdot 10^{-6}$$

$$I_{MAX} = 1,3074 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 \qquad I_{MIN} = 1,3783 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

As inclinações dos eixos principais são obtidas por meio da Eq.(18.20). Assim:

$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{-2 \cdot 2,9483 \cdot 10^{-6}}{2,1759 \cdot 10^{-6} - 1,2276 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow$$

$$\tan(2\theta) = 0,583816 \Rightarrow \theta_{p1} = 15,138^\circ \Rightarrow$$

$$\theta_{p2} = \theta_{p1} + 90^\circ \Rightarrow \theta_{p2} = 15,138^\circ + 90^\circ \Rightarrow \theta_{p2} = 105,138^\circ$$

Para determinar em qual das inclinações atuam cada uma das inércias principais determinadas, deve-se substituir os ângulos calculados na primeira das expressões apresentadas na Eq.(18.19). Assim:

$$I'_y = \frac{2,1759 \cdot 10^{-6} + 1,2276 \cdot 10^{-5}}{2} + \frac{2,1759 \cdot 10^{-6} - 1,2276 \cdot 10^{-5}}{2} \cos(2 \cdot 15,138^\circ) - 2,9483 \cdot 10^{-6} \operatorname{sen}(2 \cdot 15,138^\circ) \Rightarrow I'_y = 1,3783 \cdot 10^{-6} m^4$$

Portanto, em torno do eixo inclinado de  $15,138^\circ$  atua a menor inércia principal, enquanto o eixo inclinado de  $105,138^\circ$  contém a maior inércia principal.

#### 18.4.6 – Tensões Normais na Flexão de Seções Transversais Assimétricas

Os problemas envolvendo a determinação das tensões normais na flexão estudados até o momento assumiam que a seção transversal considerada apresentava pelo menos um eixo de simetria. Isso simplificava sobremaneira o cálculo, uma vez que os eixos principais de inércia localizam-se sobre os eixos de simetria da seção.

Para a análise das tensões normais em barras fletidas de seção transversal assimétrica, a equação geral das tensões normais na flexão, estudada no capítulo 17, permanece válida. Porém, esta equação deve ser avaliada considerando os momentos principais de inércias, de forma que o produto de inércia seja nulo e a Eq.(18.13) seja atendida. Consequentemente, os momentos fletores atuantes devem ser decompostos segundo os eixos principais de inércia, os quais são determinados conhecendo-se os valores das inércias em relação a um sistema conhecido.

Dessa forma, as tensões normais na flexão de barras de seção transversal assimétrica podem ser determinadas por meio da seguinte relação:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M'_z}{I'_z} y' + \frac{M'_y}{I'_y} z' \quad (18.22)$$

onde as variáveis que contém ' referem-se aos eixos principais de inércia.

Portanto, com os eixos principais de inércia conhecidos e os valores dos momentos fletores determinados segundo os eixos principais, a análise das tensões normais na flexão pode ser efetuada utilizando-se a mesma metodologia aplicada no capítulo 17.

## 18.4.7 – Exemplo 6

A seção transversal mostrada na Fig. (18.20) está submetida à ação de um momento fletor atuante ao longo do sentido positivo do eixo  $z$ , cuja intensidade é  $M_0$ . Determine o maior valor de  $M_0$  de forma que a tensão normal máxima atuante nesta seção seja igual a 82 MPa.

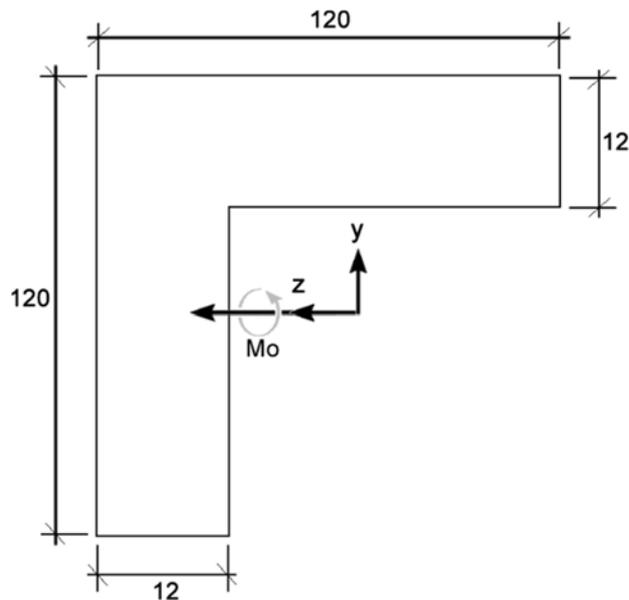


Figura 18.20 Área considerada. Dimensões em mm.

O primeiro passo para a resolução deste problema é a determinação das coordenadas do centro de gravidade da seção. Assim:

$$y_{cg} = \frac{120 \cdot 12 \cdot 60 + 108 \cdot 12 \cdot (108 + 6)}{120 \cdot 12 + 108 \cdot 12} \Rightarrow y_{cg} = 85,58 \text{ mm}$$

$$z_{cg} = \frac{120 \cdot 12 \cdot 6 + 108 \cdot 12 \cdot (54 + 12)}{120 \cdot 12 + 108 \cdot 12} \Rightarrow z_{cg} = 34,42 \text{ mm}$$

A partir das coordenadas do centro de gravidade, as quais estão ilustradas na Fig. (18.21), os valores dos momentos de inércia e do produto de inércia ficam definidos como:

$$I_z = \frac{12 \cdot (120)^3}{12} + 12 \cdot 120 \cdot (60 - 85,58)^2 + \frac{108 \cdot (12)^3}{12} + 108 \cdot 12 \cdot (114 - 85,58)^2$$

$$I_z = 3,73257 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_z = 3,73257 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{120 \cdot (12)^3}{12} + 120 \cdot 12 \cdot (6 - 34,42)^2 + \frac{12 \cdot (108)^3}{12} + 12 \cdot 108 \cdot (66 - 34,42)^2$$

$$I_y = 3,73257 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_y = 3,73257 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{yz} = 12 \cdot 120 \cdot (34,42 - 6) \cdot (60 - 85,58) + 108 \cdot 12 \cdot (34,42 - 66) \cdot (114 - 85,58)$$

$$I_{yz} = -2,21002 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_{yz} = -2,21002 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Dessa forma, as inércias principais podem ser avaliadas utilizando a Eq.(18.21).

Assim:

$$I_{MAX/MIN} = \frac{3,73257 \cdot 10^{-6} + 3,73257 \cdot 10^{-6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,73257 \cdot 10^{-6} - 3,73257 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2 + (-2,21002 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$I_{MAX/MIN} = 3,73257 \cdot 10^{-6} \pm 2,21002 \cdot 10^{-6}$$

$$I_{MAX} = 5,94259 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \qquad I_{MIN} = 1,52255 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

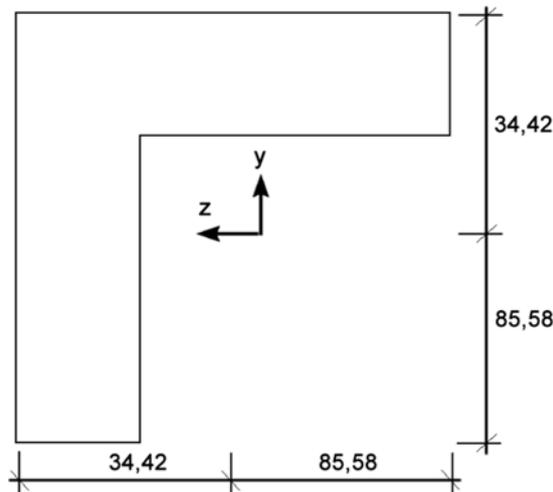


Figura 18.21 Coordenadas do centro de gravidade. Dimensões em mm.

Os eixos principais podem ser calculados utilizando a Eq.(18.20). Dessa forma:

$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{-2 \cdot (-2,21002 \cdot 10^{-6})}{3,73257 \cdot 10^{-6} - 3,73257 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow$$

$$\tan(2\theta) = \infty \Rightarrow \theta_{p1} = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\theta_{p2} = \theta_{p1} + 90^\circ \Rightarrow \theta_{p2} = 45^\circ + 90^\circ \Rightarrow \theta_{p2} = 135^\circ$$

Deve-se utilizar a Eq.(18.19) para determinar em qual das inclinações determinadas acima atuam cada uma das inércias principais determinadas. Assim:

$$I'_y = \frac{3,73257 \cdot 10^{-6} + 3,73257 \cdot 10^{-6}}{2} + \frac{3,73257 \cdot 10^{-6} - 3,73257 \cdot 10^{-6}}{2} \cos(2 \cdot 45^\circ)$$

$$- (-2,21002 \cdot 10^{-6}) \text{ sen}(2 \cdot 45^\circ) \Rightarrow I'_y = 5,94259 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Portanto, verifica-se que em torno do eixo inclinado de  $45^\circ$  atua a maior inércia principal, enquanto o eixo inclinado de  $135^\circ$  contém a menor inércia principal.

Para que as tensões normais sejam determinadas, deve-se agora decompor o momento fletor aplicado ao longo dos eixos principais de inércia. Esse procedimento, conforme ilustrado na Fig. (18.22), conduz a:

$$M'_y = M_0 \cos(45^\circ) \Rightarrow M'_y = \frac{\sqrt{2}}{2} M_0$$

$$M'_z = M_0 \operatorname{sen}(45^\circ) \Rightarrow M'_z = \frac{\sqrt{2}}{2} M_0$$

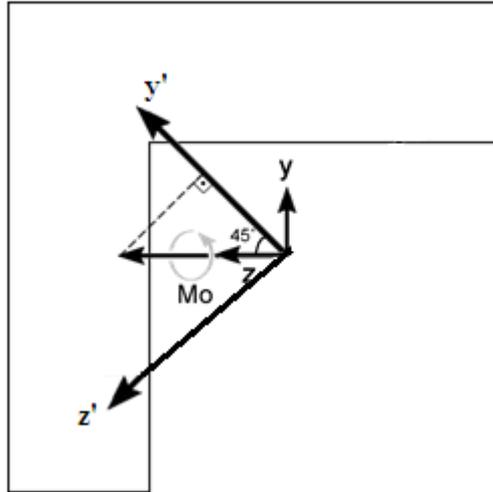


Figura 18.22 Sistema de eixos principais e decomposição do momento aplicado.

Existem dois pontos críticos nesta seção, os quais estão apresentados na Fig. (18.23). No ponto A atua a maior tensão de tração, enquanto no ponto B encontra-se a maior tensão compressiva. Porém, pelo fato do ponto A encontrar-se mais distante do centro de gravidade que o ponto B, verifica-se facilmente que a tensão normal atuante no ponto A será de maior intensidade (ou em valor absoluto) que a tensão atuante no ponto B. Conseqüentemente, o ponto a ser verificado nesta análise é o ponto A.

Por meio da Eq.(18.17) pode-se determinar as coordenadas do ponto A com relação ao sistema de eixos principais. Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45) & \operatorname{sen}(45) \\ -\operatorname{sen}(45) & \cos(45) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85,58 \\ 22,42 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 \\ -0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85,58 \\ 22,42 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76,367 \\ -44,660 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Sabendo que a tensão normal atuante no ponto A pode ser calculada com a Eq.(18.22) tem-se:

$$\sigma_A = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}M_0}{1,52255 \cdot 10^{-6}}(-44,660 \cdot 10^{-3}) + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}M_0}{5,94259 \cdot 10^{-6}}(76,367 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow$$

$$\sigma_A = 29828M_0$$

Como a tensão admissível do material é igual a 82 MPa, tem-se que o momento aplicado deve ser no máximo igual a :

$$\sigma_A = 29828M_0 = 82 \cdot 10^3 \Rightarrow M_0 = 2,749 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

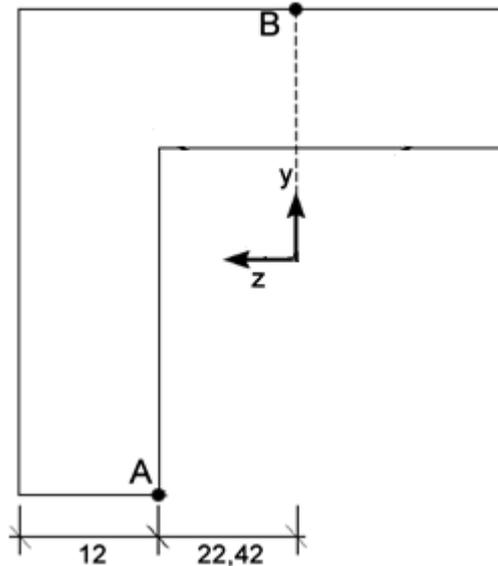


Figura 18.23 Ponto a ser analisado.

#### 18.4.8 – Exemplo 7

Determine a tensão normal, atuante no ponto P da Fig.(18.24), gerada pela ação de um momento fletor  $M_z = -20,0 \text{ kNm}$ .

A seção transversal apresentada na Fig. (18.24) é a mesma analisada nos exemplos 3 e 4 discutidos anteriormente neste capítulo. Das análises anteriores tem-se que:

$$y_{cg} = 350 \text{ mm} ; z_{cg} = 300 \text{ mm} ; I_y = 5,60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 ; I_z = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 ;$$

$$I_{yz} = 3,0 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 ; I_{MAX} = 7,54 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 ; I_{MIN} = 9,60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 ;$$

$$\theta_{p1} = -32,886^\circ ; \theta_{p2} = 57,114^\circ$$

A posição dos eixos principais de inércia é apresentada na Fig. (18.25).

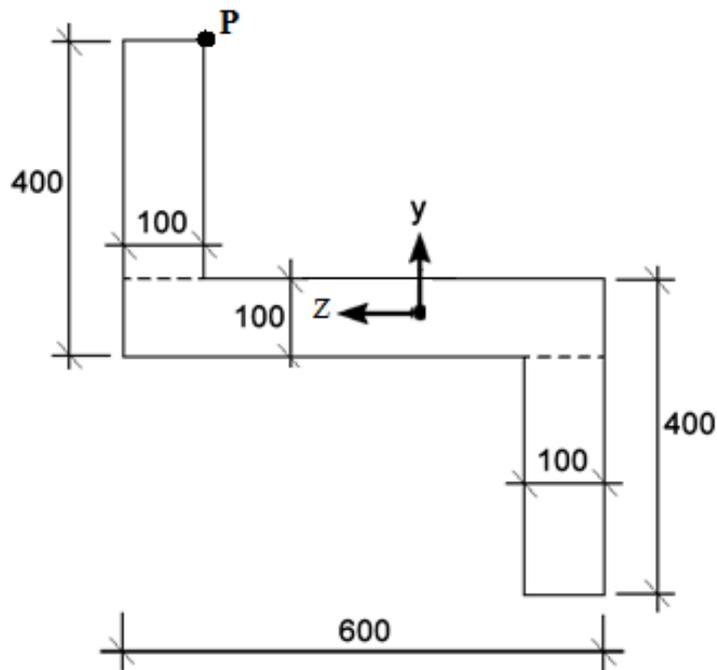


Figura 18.24 Seção transversal considerada. Dimensões em mm.

A decomposição do momento fletor atuante,  $M_z = -20,0 \text{ kNm}$ , em relação aos eixos principais  $y'z'$  pode ser efetuada por meio da matriz de rotação apresentada na Eq. (18.17). Portanto:

$$\begin{bmatrix} M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-32,886^\circ) & \text{sen}(-32,886^\circ) \\ -\text{sen}(-32,886^\circ) & \cos(-32,886^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,840 & -0,543 \\ 0,543 & 0,840 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,86 \\ -16,8 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

As coordenadas do ponto P, em relação ao sistema de referência  $y'z'$ , podem ser obtidas utilizando a Eq.(18.17). Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-32,886^\circ) & \text{sen}(-32,886^\circ) \\ -\text{sen}(-32,886^\circ) & \cos(-32,886^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,840 & -0,543 \\ 0,543 & 0,840 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185,4 \\ 358,05 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Portanto, a tensão normal atuante no ponto P pode ser calculada por meio da Eq.(18.22). Assim:

$$\sigma_p = -\frac{-16,80}{9,60 \cdot 10^{-4}} 185,4 \cdot 10^{-3} + \frac{10,86}{7,54 \cdot 10^{-3}} 358,05 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \sigma_p = 3760,20 \text{ kN/m}^2$$

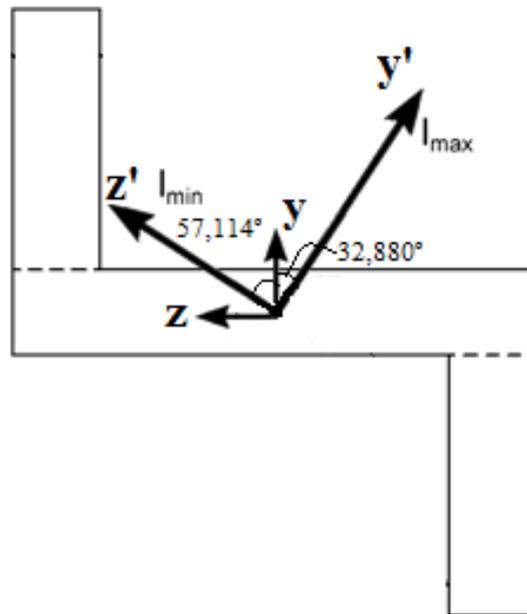


Figura 18.25 Localização dos eixos principais.

### 18.5 – Flexão em Barras de Seção Transversal Assimétrica considerando Materiais Não-Homogêneos

A metodologia para a determinação das tensões normais na flexão apresentada no item anterior foi desenvolvida considerando que o elemento de barra geral era composto por um único material. Assim, a barra geral fletida possuía seção transversal assimétrica formada por um único material, o qual assumiu-se homogêneo. Porém, o procedimento apresentado pode ser também aplicado ao caso onde a barra geral fletida de seção transversal assimétrica é composta por materiais de diferentes módulos de elasticidade longitudinal, formando um sistema não homogêneo.

Nos problemas de flexão envolvendo barras de seção transversal assimétrica em sistemas não homogêneos, a metodologia anteriormente apresentada pode ser aplicada desde que um processo de homogeneização seja considerado. Este processo de homogeneização foi mostrado e aplicado no capítulo 17, onde a flexão de barras não homogêneas de seção transversal com pelo menos um eixo de simetria foi estudado. Assim, aplicando o processo de homogeneização descrito no capítulo 17 junto à metodologia apresentada no item 18.4 pode-se determinar as tensões normais devido à flexão em barras não homogêneas de seção transversal assimétrica.

## 18.5.1 – Exemplo 8

Determine as tensões normais máximas devido à flexo-compressão na seção transversal não homogênea apresentada na Fig. (18.26). Nesta seção atuam  $M_z = 10 \text{ kNm}$ ,  $M_y = 6 \text{ kNm}$  e  $N = -2 \text{ kN}$ . Além disso, as propriedades materiais são as seguintes:  $E_1 = 100 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 150 \text{ GPa}$  e  $E_3 = 200 \text{ GPa}$ .

Para a solução deste problema devem ser, inicialmente, determinados os fatores de homogeneização. Tomando o material 3 como referência, estes fatores assumem os seguintes valores:

$$n_{13} = \frac{E_1}{E_3} \Rightarrow n_{13} = \frac{100}{200} \Rightarrow n_{13} = 0,5$$

$$n_{23} = \frac{E_2}{E_3} \Rightarrow n_{23} = \frac{150}{200} \Rightarrow n_{23} = 0,75$$

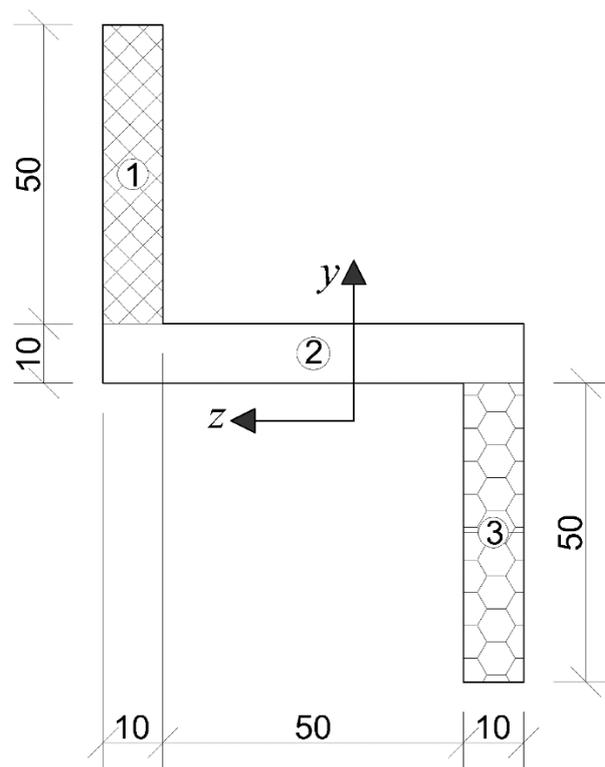


Figura 18.26 Seção transversal considerada. Dimensões em cm.

O valor da área homogeneizada da seção assume o seguinte valor:

$$A = 0,5 \cdot (10 \cdot 50) + 0,75 \cdot (70 \cdot 10) + 10 \cdot 50 \Rightarrow A = 1275 \text{ cm}^2$$

A coordenada  $y_{cg}$  do centro de gravidade da seção fica assim determinada:

$$y_{cg} = \frac{0,5 \cdot (10 \cdot 50) \cdot 85 + 0,75 \cdot (70 \cdot 10) \cdot 55 + 10 \cdot 50 \cdot 25}{0,5 \cdot (10 \cdot 50) + 0,75 \cdot (70 \cdot 10) + 10 \cdot 50} \Rightarrow y_{cg} = 49,118 \text{ cm}$$

Assim, o valor do momento de inércia da seção em torno do eixo  $z$  assume o seguinte valor:

$$I_z = \left[ \frac{10 \cdot (50)^3}{12} + 10 \cdot 50 \cdot (85 - 49,118)^2 \right] \cdot 0,5 + \left[ \frac{70 \cdot (10)^3}{12} + 70 \cdot 10 \cdot (55 - 49,118)^2 \right] \cdot 0,75 + \frac{10 \cdot (50)^3}{12} + 10 \cdot 50 \cdot (25 - 49,118)^2 \Rightarrow I_z = 7,91507 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Já a coordenada  $z_{cg}$  do centro de gravidade da seção fica assim determinada:

$$z_{cg} = \frac{0,5 \cdot (10 \cdot 50) \cdot 5 + 0,75 \cdot (70 \cdot 10) \cdot 35 + 10 \cdot 50 \cdot 65}{0,5 \cdot (10 \cdot 50) + 0,75 \cdot (70 \cdot 10) + 10 \cdot 50} \Rightarrow z_{cg} = 40,882 \text{ cm}$$

Dessa forma, o valor do momento de inércia em torno do eixo  $y$  pode ser assim determinado:

$$I_y = \left[ \frac{50 \cdot (10)^3}{12} + 10 \cdot 50 \cdot (5 - 40,882)^2 \right] \cdot 0,5 + \left[ \frac{10 \cdot (70)^3}{12} + 70 \cdot 10 \cdot (35 - 40,882)^2 \right] \cdot 0,75 + \frac{50 \cdot (10)^3}{12} + 10 \cdot 50 \cdot (65 - 40,882)^2 \Rightarrow I_y = 8,51507 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Para que as tensões normais na flexão de seções transversais assimétricas sejam avaliadas, deve-se também determinar o valor do produto de inércia. Para a seção transversal não homogênea assimétrica apresentada na Fig. (18.26) o produto de inércia pode ser assim calculado:

$$I_{yz} = [10 \cdot 50 \cdot (85 - 49,118)(40,882 - 5)] \cdot 0,5 + [70 \cdot 10 \cdot (55 - 49,118)(40,882 - 35)] \cdot 0,75 + 10 \cdot 50 \cdot (25 - 49,118)(40,882 - 65) \Rightarrow I_{yz} = 6,30882 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Dessa forma, as inércias principais podem ser avaliadas utilizando a Eq.(18.21).

Assim:

$$I_{MAX/MIN} = \frac{8,51507 \cdot 10^5 + 7,91507 \cdot 10^5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8,51507 \cdot 10^5 - 7,91507 \cdot 10^5}{2}\right)^2 + (6,30882 \cdot 10^5)^2}$$

$$I_{MAX} = 1,45310 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 \qquad I_{MIN} = 1,89912 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

A direção dos eixos principais de inércia podem ser calculados utilizando a Eq.(18.20). Dessa forma:

$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{-2 \cdot (6,30882 \cdot 10^5)}{8,51507 \cdot 10^5 - 7,91507 \cdot 10^5} \Rightarrow$$

$$\tan(2\theta) = -21,0294 \Rightarrow \theta_{p1} = -43,639^\circ$$

$$\theta_{p2} = \theta_{p1} + 90^\circ \Rightarrow \theta_{p2} = -43,639^\circ + 90^\circ \Rightarrow \theta_{p2} = 46,361^\circ$$

Para determinar em qual das inclinações calculadas anteriormente atuam cada uma das inércias principais encontradas, deve-se substituir os ângulos calculados anteriormente na primeira das expressões apresentadas na Eq.(18.19). Assim:

$$I'_y = \frac{8,51507 \cdot 10^5 + 7,91507 \cdot 10^5}{2} + \frac{8,51507 \cdot 10^5 - 7,91507 \cdot 10^5}{2} \cos[2(-43,639^\circ)] - 6,30882 \cdot 10^5 \text{ sen}[2(-43,639^\circ)] \Rightarrow I'_y = 1,45310 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Portanto, em torno do eixo principal rotacionado de  $-43,639^\circ$  atua a maior das inércias principais calculadas. Consequentemente, em torno do eixo rotacionado de  $46,361^\circ$  atuará a menor inércia principal. Conforme ilustrado na Fig. (18.27), em torno do eixo  $y'$  encontra-se a maior porção de área afastada do centro de gravidade, enquanto em torno do eixo  $z'$ , por outro lado, maior porção de área encontra-se próxima ao centro de gravidade.

Os momentos fletores atuantes estão definidos em relação aos eixos  $yz$ . No entanto, para que a análise seja efetuada, estes esforços solicitantes devem ser definidos em relação ao sistema  $y'z'$ . A decomposição dos momentos fletores atuantes em relação aos eixos principais  $y'z'$  pode ser efetuada por meio da matriz de rotação apresentada na Eq. (18.17). Portanto:

$$\begin{bmatrix} M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-43,639^\circ) & \sin(-43,639^\circ) \\ -\sin(-43,639^\circ) & \cos(-43,639^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7237 & -0,6901 \\ 0,6901 & 0,7237 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,559 \\ 11,378 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

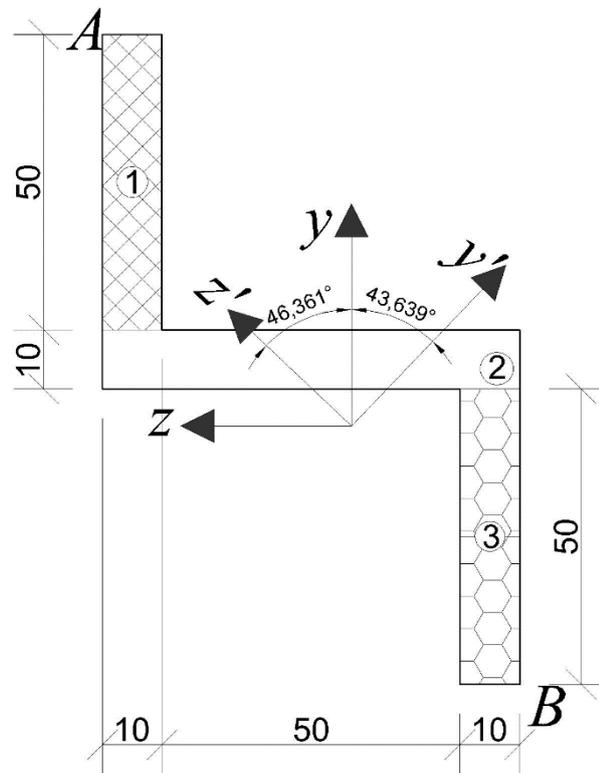


Figura 18.27 Localização dos eixos principais de inércia. Dimensões em cm.

Os pontos onde as maiores tensões normais irão atuar são os pontos A e B apresentados na Fig. (18.27). Estes pontos estão localizados nas posições extremas do eixo  $y'$ . Assim, para que os pontos A e B sejam descritos em relação ao sistema  $y'z'$  a matriz de rotação apresentada na Eq. (18.17) deve ser empregada. Assim, para o ponto A tem-se:

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-43,639^\circ) & \sin(-43,639^\circ) \\ -\sin(-43,639^\circ) & \cos(-43,639^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 - 49,118 \\ 40,882 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7237 & -0,6901 \\ 0,6901 & 0,7237 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60,882 \\ 40,882 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,848 \\ 71,601 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Já para o ponto B pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(-43,639^\circ) & \sin(-43,639^\circ) \\ -\sin(-43,639^\circ) & \cos(-43,639^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -49,118 \\ 40,882 - 70 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,7237 & -0,6901 \\ 0,6901 & 0,7237 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -49,118 \\ -29,118 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15,452 \\ -54,969 \end{bmatrix} \text{ cm} \end{aligned}$$

Assim, a tensão normal atuante no ponto A, pode ser assim calculada:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= 0,5 \cdot \left\{ \left[ \frac{-2}{1275 \cdot 10^{-4}} - \frac{11,378 \cdot (0,15848)}{1,89912 \cdot 10^{-3}} + \frac{-2,559 \cdot (0,71601)}{1,45310 \cdot 10^{-2}} \right] \right\} \Rightarrow \\ \sigma_A &= -545,632 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

Já a tensão normal atuante no ponto B assume o seguinte valor:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{-2}{1275 \cdot 10^{-4}} - \frac{11,378 \cdot (-0,15452)}{1,89912 \cdot 10^{-3}} + \frac{-2,559 \cdot (-0,54969)}{1,45310 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \\ \sigma_B &= 1006,877 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

Deve-se ressaltar que como o ponto B pertence ao material de referência, a tensão nele calculada não necessita ser multiplicada por nenhum fator de homogeneização.

## 19. – Tensões de Cisalhamento na Flexão

---

### 19.1 – Introdução

Elementos de barra geral submetidos a esforços de flexão estão, normalmente, também expostos a esforços cortantes. Isso ocorre pelo fato dos momentos fletores serem originados, em sua grande maioria, por forças distribuídas ou concentradas ao longo do comprimento do elemento estrutural. Assim, no problema de barras fletidas, além das tensões normais decorrentes da flexão, estarão também presentes tensões de cisalhamento.

O esforço cortante é o resultado da distribuição das tensões de cisalhamento ao longo da seção transversal (integração das tensões de cisalhamento ao longo da seção). Estas tensões atuam no plano da seção transversal e também ao longo do comprimento da barra, como mostra o equilíbrio de um elemento infinitesimal apresentado na Fig. (19.1).

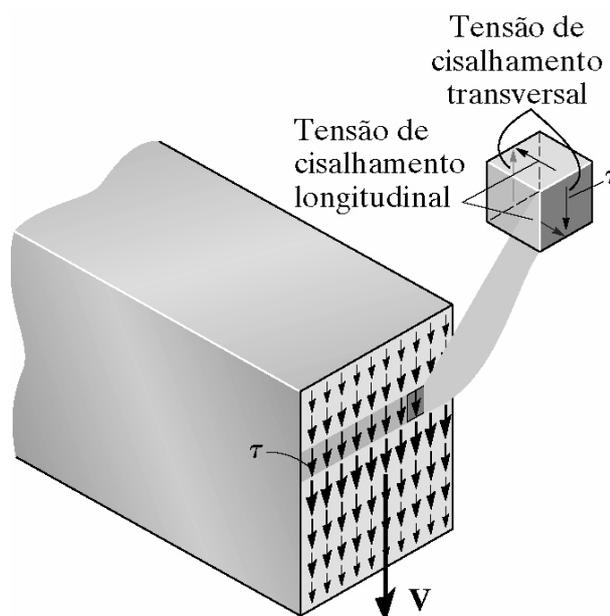


Figura 19.1 Distribuição das tensões de cisalhamento no plano de uma seção transversal.

Mecanicamente, este efeito pode ser verificado por meio de um conjunto de tábuas sobrepostas submetido a uma força concentrada. Quando as tábuas estão somente sobrepostas (sem conexão entre elas) estas deslizam umas sobre as outras, como mostra a ilustração **a** da Fig. (19.2a).

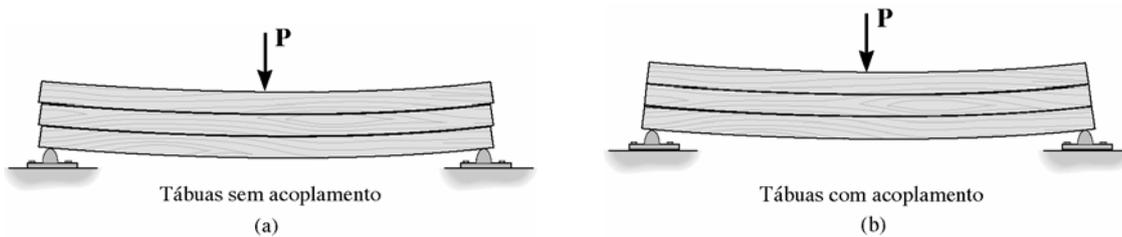


Figura 19.2 Representação da existência do cisalhamento longitudinal.

Porém, se as tábuas forem mantidas unidas por algum mecanismo, todo o conjunto deforma-se uniformemente, como ilustra o desenho **b** da Fig. (19.2b). Se as tábuas forem coladas, estas não deslizaram pelo fato do cisalhamento presente ser resistido pela cola. Considerando agora que a barra fletida seja não mais composta por três tábuas, mas sim por uma única, a tensão de cisalhamento gerada pelo esforço cortante deverá ser resistida pelas fibras do material, por meio da coesão existente entre suas partículas.

Devido à presença das tensões de cisalhamento no plano da seção transversal, serão também observadas deformações distorcionais nessa região, as quais apresentam um padrão consideravelmente complexo, como indicado na Fig. (19.3). Segundo esta figura, verifica-se que a seção transversal, inicialmente plana, não permanece plana após a deformação.

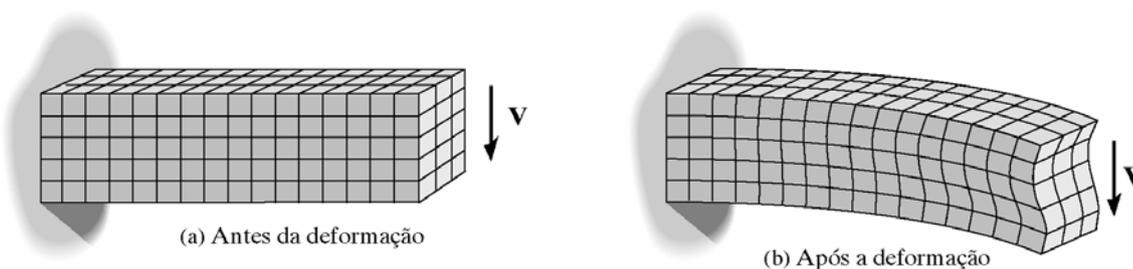


Figura 19.3 Deformações na seção transversal.

Essa constatação não obedece a uma das hipóteses da formulação das tensões normais na flexão, a qual previa que as seções transversais inicialmente planas e perpendiculares ao eixo da barra permaneciam dessa maneira após a deformação.

Embora essa observação seja realmente verdadeira, a deformação distorcional observada é suficientemente pequena, podendo ser desprezada nas aplicações práticas. Isso ocorre, especialmente se seções transversais esbeltas (aquelas cuja altura é bem maior que à base) são utilizadas, como correntemente observado nas aplicações de engenharia.

### 19.2 – Formulação do Problema do Cisalhamento na Flexão

Para que o equacionamento do problema mecânico envolvendo as tensões de cisalhamento na flexão seja desenvolvido, deve-se efetuar o equilíbrio de forças, atuantes ao longo da direção do eixo da barra, de um elemento infinitesimal pertencente ao elemento estrutural. Para tal fim, deve-se considerar um elemento de barra geral submetido a um conjunto de carregamentos que causam, nos pontos que constituem a estrutura, esforços cortante e de flexão, como mostrado na Fig. (19.4a). Isolando um elemento de comprimento  $dx$ , que representa uma seção transversal desta barra como mostram as Fig. (19.4b) e Fig. (19.4c), verifica-se que devido à presença do momento fletor, existirão tensões normais nesse elemento cuja variação é linear ao longo da altura da seção transversal.

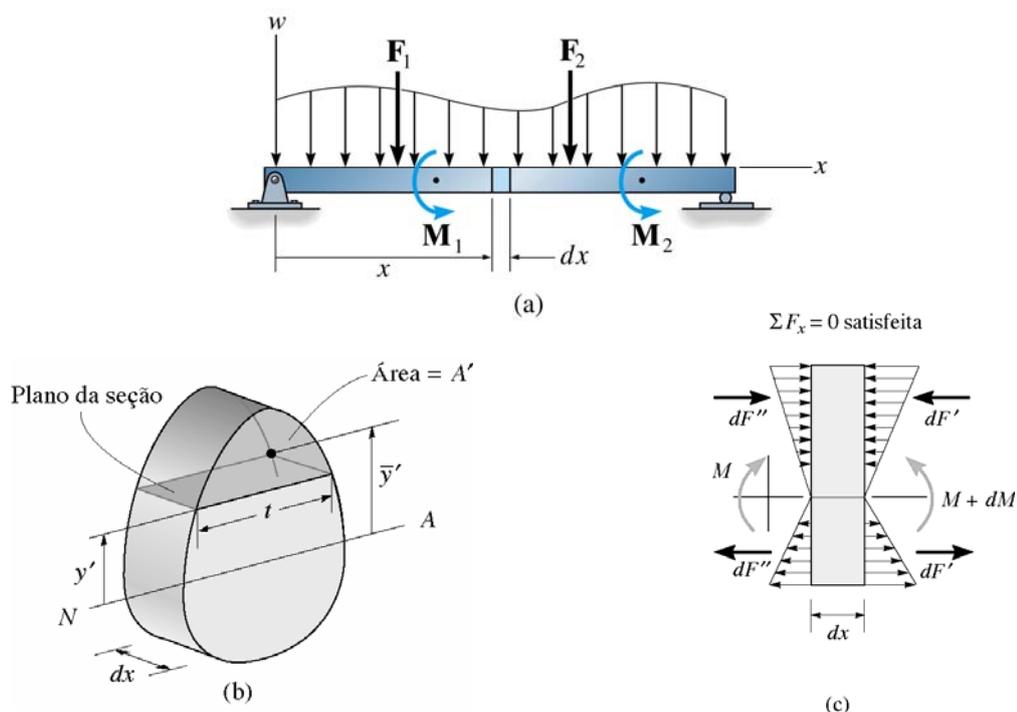


Figura 19.4 Elementos submetidos a esforços cortante e de flexão.

O elemento infinitesimal mostrado na Fig. (19.4c) pode ser seccionado ao longo de sua altura, como mostrado na Fig. (19.5). Verifica-se que o equilíbrio do elemento seccionado somente é possível devido ao surgimento das tensões de cisalhamento atuantes ao longo do eixo da barra.

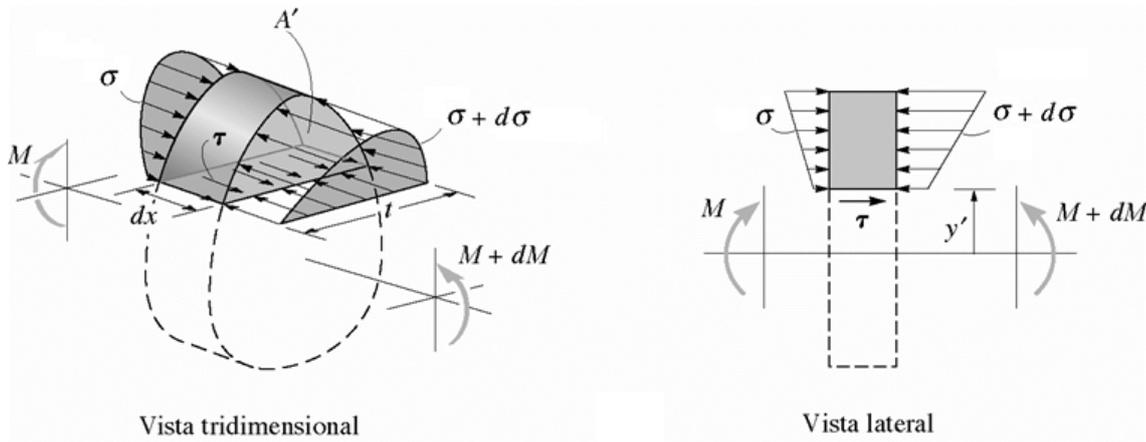


Figura 19.5 Secção do elemento da seção transversal.

Fazendo o equilíbrio do elemento infinitesimal seccionado obtém-se:

$$\sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A (\sigma + d\sigma) dA - \int_A \sigma dA - \tau \cdot t \cdot dx = 0 \quad (19.1)$$

A Eq.(19.1) pode ser reescrita aplicando a fórmula da flexão para o caso em que apenas um momento fletor é não nulo. Nessa situação, esta equação torna-se:

$$\int_A \frac{(M_z + dM_z)}{I_z} y dA - \int_A \frac{M_z}{I_z} y dA - \tau \cdot t \cdot dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A \frac{dM_z}{I_z} y dA = \tau \cdot t \cdot dx \quad (19.2)$$

O primeiro membro da Eq.(19.2) contém uma integral que depende da variação do momento fletor, da inércia em torno do eixo do vetor momento e da ordenada  $y$ . Verifica-se facilmente que  $dM_z$  e  $I_z$ , embora possam variar ao longo da estrutura, são constantes para uma dada seção transversal da barra. Dessa forma, essas variáveis podem ser colocadas fora da integral. Assim, a Eq.(19.2) pode ser reescrita como:

$$\tau = \frac{dM_z}{I_z \cdot t \cdot dx} \int_A y dA \quad (19.3)$$

A integral  $\int_A y dA$  é conhecida como momento estático. Essa grandeza é uma propriedade da seção transversal e foi utilizada e definida no capítulo 17. Designa-se o momento estático, normalmente, pela letra  $Q$ . Além disso, foram mostradas no capítulo 5 as relações diferenciais que conectam o momento fletor ao esforço cortante. Com base

nas definições apresentadas naquele capítulo, mais precisamente na Eq.(5.4), verifica-se que  $\frac{dM}{dx} = V$ . Portanto, levando-se em consideração essas duas observações, pode-se reescrever a Eq.(19.3) da seguinte maneira:

$$\tau = \frac{V_y \cdot Q}{I_z \cdot t} \quad (19.4)$$

A Eq.(19.4) permite a determinação das tensões de cisalhamento na flexão para qualquer ponto localizado na seção transversal de um elemento fletido. Por meio dessa relação, verifica-se que a tensão de cisalhamento é máxima quando  $Q$  é máximo, uma vez que os outros parâmetros dessa equação não variam ao longo da altura da seção transversal.  $Q$  será máximo quando a área considerada para seu cálculo for aquela contida completamente acima ou abaixo do centroide.

Assim, a tensão de cisalhamento irá variar conforme varie o momento estático ao longo da altura da seção transversal. Para seções transversais retangulares, o momento estático poderá ser calculado com base no apresentado na Fig. (19.6).

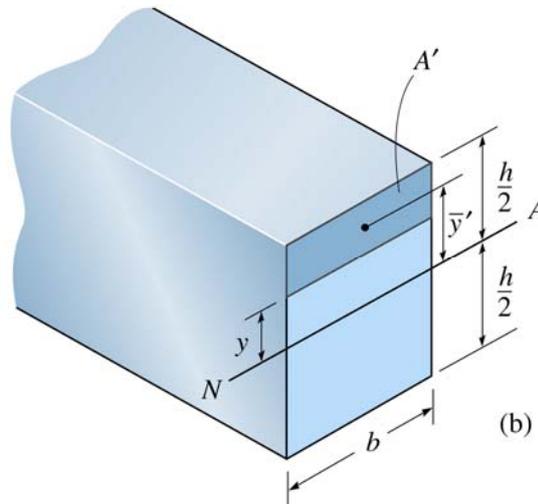


Figura 19.6 Seção do elemento da seção transversal.

Portanto, utilizando a definição de momento estático tem-se:

$$Q = b \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} + y \right] \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot b \quad (19.5)$$

Como  $V$ ,  $t$  e  $I$  não variam ao longo da altura da seção, constata-se que a tensão de cisalhamento irá variar de forma quadrática ao longo da altura da seção. Seu valor será máximo no centroide e nulo nas extremidades da seção.

Para o caso particular das seções transversais retangulares e quadradas, a tensão de cisalhamento será máxima no centroide, sendo igual a  $\tau_{\max} = \frac{1,5V}{A}$ .

### 19.3 – Limitações do Uso da Fórmula do Cisalhamento

A tensão de cisalhamento determinada pela Eq.(19.4) é de grande importância no domínio da mecânica dos sólidos/resistência dos materiais. Porém, esta apresenta algumas limitações que precisam ser destacadas. A primeira delas refere-se à adoção da condição de tensão de cisalhamento uniformemente distribuída ao longo da base da seção transversal. Considerando teorias mais avançadas (como a teoria da elasticidade) que não estão no escopo desta disciplina, pode-se mostrar que essa condição não é perfeitamente atendida. Quando a razão  $b/h$  é baixa, o erro fornecido pela Eq.(19.4) é pequeno. Por exemplo, quando  $b/h = 0,5$ , o erro fornecido é de apenas 3%. No entanto, quando essa razão cresce para 2, o erro aumenta para 40%. Apesar disso, deve-se destacar que nas aplicações de engenharia, as seções transversais são projetadas para apresentar baixa razão  $b/h$ , e conseqüentemente alta inércia. Assim, essa equação pode ser aplicada desde que acompanhada de coeficientes de segurança adequados.

Outro ponto de destaque deve ser dado às seções transversais formadas por diferentes elementos geométricos. Em especial, nos pontos de conexão entre esses, como observado na junção entre mesa e alma de perfis do tipo I e T. Nessa região ocorre uma grande concentração de tensão de cisalhamento em decorrência da mudança brusca da dimensão da base. Assim, nessa região a tensão de cisalhamento não é uniforme e coeficientes de segurança devem ser utilizados para garantir a segurança das estruturas.

Além disso, seções transversais com contorno irregular, como mostrado na Fig. (19.7) levam também a distribuições não uniformes de tensão de cisalhamento. Apesar de todas essas limitações, para aplicações práticas devem ser empregados coeficientes de segurança, os quais são utilizados para garantir um nível de segurança adequado à estrutura. Assim, imperfeições na modelagem do problema e nas resistências dos materiais são levadas em consideração e “cobertas” por esses coeficientes.

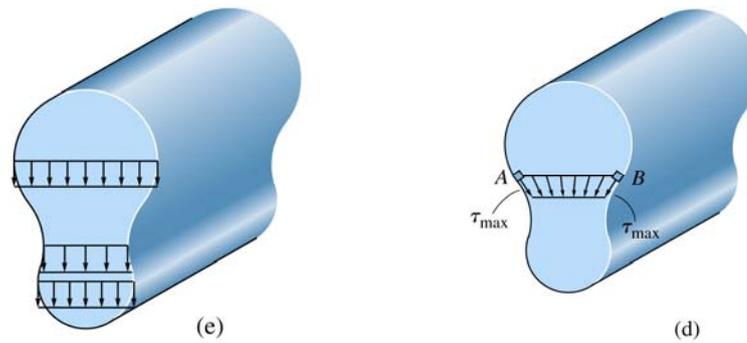


Figura 19.7 Tensões de cisalhamento em seções de contorno irregular.

### 19.4 – Exemplo 1

Para a seção transversal mostrada na Fig. (19.8), determine as tensões de cisalhamento atuantes nos pontos *A*, *B* e *C*. Em seguida, mostre a variação das tensões de cisalhamento ao longo da altura da seção.

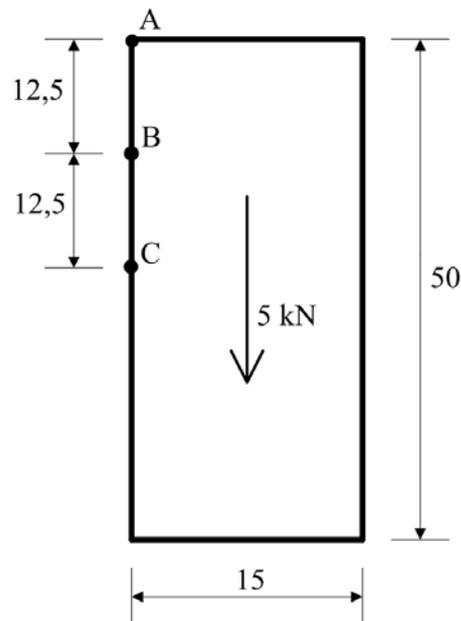


Figura 19.8 Seção transversal considerada. Dimensões em cm.

Para o problema considerado verifica-se que  $V = 5,0\text{kN}$  e  $t = 15\text{cm}$ . O momento de inércia, em torno do eixo perpendicular ao sentido de atuação de  $V$ , é facilmente calculado como:

$$I = \frac{15 \cdot 50^3}{12} \Rightarrow I = 156250 \text{ cm}^4 \Rightarrow I = 1,5625 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Portanto, as tensões de cisalhamento podem ser determinadas utilizando a Eq.(19.4). Para o ponto B, a área a ser considerada para a determinação do momento estático é a área hachurada mostrada na Fig. (19.9).

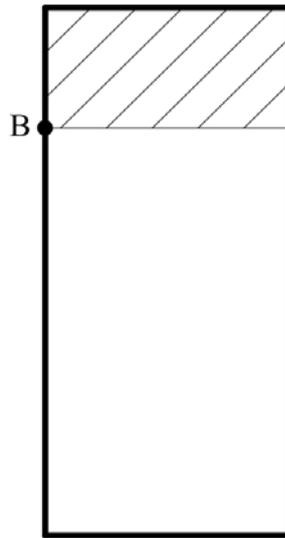


Figura 19.9 Área considerada para a determinação de  $Q$  no ponto B.

Então, a tensão de cisalhamento atuante nesse ponto é dada por:

$$\tau_B = \frac{5,0 \cdot \left[ 0,15 \cdot 0,125 \cdot \left( 0,25 - \frac{0,125}{2} \right) \right]}{0,15 \cdot 1,5625 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \tau_B = 75,0 \text{ kN/m}^2$$

Já para o ponto C, a área a ser utilizada para a determinação do momento estático é a área hachurada mostrada na Fig. (19.10).

Portanto, utilizando a Eq.(19.4) a tensão de cisalhamento é calculada como:

$$\tau_C = \frac{5 \cdot \left[ 0,25 \cdot 0,15 \cdot \left( \frac{0,25}{2} \right) \right]}{0,15 \cdot 1,5625 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \tau_C = 100,0 \text{ kN/m}^2$$

A tensão de cisalhamento atuante no ponto A é nula, uma vez que nas extremidades da seção transversal o momento estático é nulo. Assim, no ponto A:

$$Q = 0 \quad \therefore \quad \tau = 0$$

Portanto, a variação das tensões de cisalhamento ao longo da altura da seção transversal é a mostrada na Fig. (19.11). Como mostrado anteriormente neste capítulo, esta variação é quadrática.

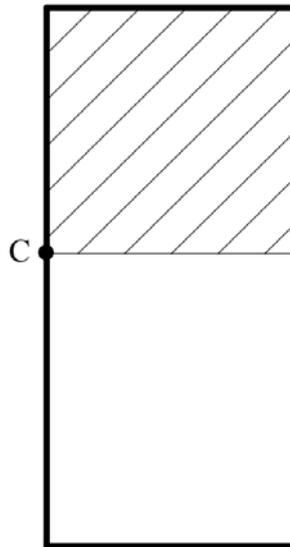


Figura 19.10 Área considerada para a determinação de  $Q$  no ponto C.

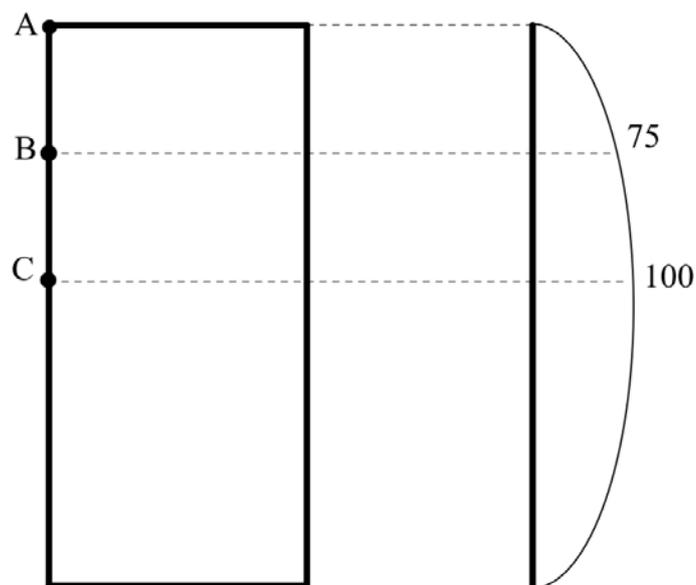


Figura 19.11 Variação das tensões de cisalhamento ao longo da altura da seção.

A tensão de cisalhamento média pode ser calculada dividindo-se o esforço cortante atuante pela área da seção. Assim:

$$\tau_{med} = \frac{5,0}{0,15 \cdot 0,50} \Rightarrow \tau_{med} = 66,667 \text{ kN/m}^2$$

Como mostrado anteriormente nesse capítulo, para seções retangulares e quadradas, a tensão de cisalhamento máxima atuante na seção transversal é igual a uma

vez e meia a tensão cisalhante média. Esse resultado foi verificado para o exemplo analisado.

### 19.5 – Exemplo 2

Determine as tensões de cisalhamento atuantes nos pontos *A*, *B*, *C* e *D* ilustrados na Fig. (19.12) e mostre a variação dessas tensões de cisalhamento ao longo da altura da seção transversal. O esforço cortante presente é igual a 80 kN. As dimensões apresentadas na Fig. (19.12) são dadas em mm.

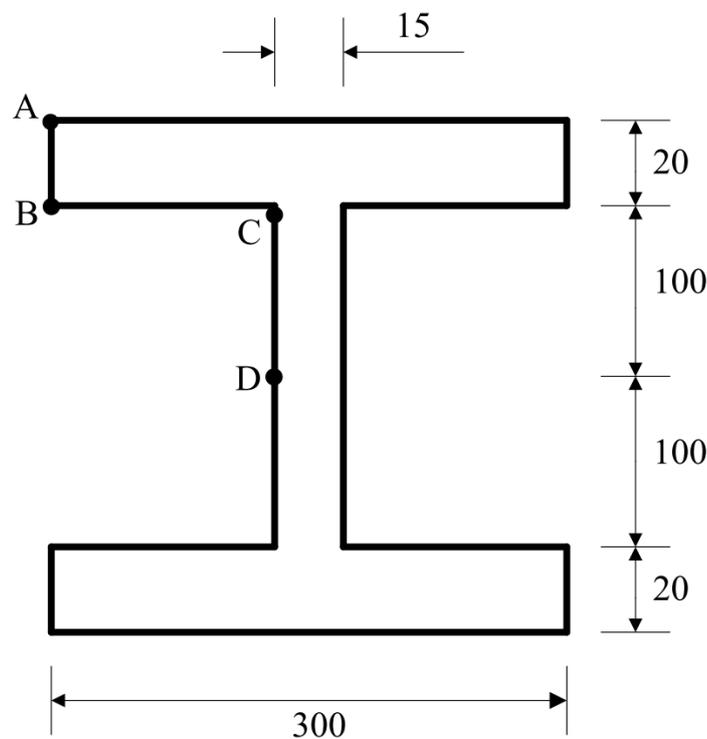


Figura 19.12 Seção transversal considerada. Dimensões em mm.

Para que este problema seja resolvido, deve-se, inicialmente, determinar as coordenadas do centroide da seção transversal. Como a seção considerada é duplamente simétrica, verifica-se que o centroide encontra-se posicionado na interseção entre seus eixos de simetria. Assim, o momento de inércia da área em torno do eixo perpendicular ao sentido de atuação de *V* é dado por:

$$I = \left[ \frac{0,300 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^3}{12} + 0,300 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (110 \cdot 10^{-3})^2 \right] \cdot 2 + \frac{15 \cdot 10^{-3} \cdot (200 \cdot 10^{-3})^3}{12}$$

$$I = 1,556 \cdot 10^{-4} m^4$$

Para o ponto A, como este encontra-se posicionado no extremo da seção, o momento estático desse ponto é nulo. Assim,  $\tau = 0$ , pois  $Q_A = 0$ .

Já para o ponto B, a tensão de cisalhamento atuante é determinada por meio da Eq.(19.4). Assim:

$$\tau_B = \frac{80 \cdot [0,300 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (110 \cdot 10^{-3})]}{0,300 \cdot 1,556 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \tau_B = 1131,105 \text{ kN/m}^2$$

No ponto C, as tensões de cisalhamento podem também ser determinadas por meio da Eq.(19.4). Porém, como este ponto pertence à alma da seção, a dimensão de  $t$  não é mais 300 mm, mas sim 15 mm. Dessa forma, a tensão de cisalhamento nesse ponto é dada por:

$$\tau_C = \frac{80 \cdot [0,300 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (110 \cdot 10^{-3})]}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 1,556 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \tau_C = 22622,108 \text{ kN/m}^2$$

Finalmente, no ponto D observa-se o máximo valor de  $Q$ . Isso ocorre pelo fato do ponto D estar posicionado no centroide da seção. A tensão de cisalhamento nesse ponto é dada pela Eq.(19.4). Assim:

$$\tau_D = \frac{80 \cdot \left[ 0,300 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (110 \cdot 10^{-3}) + 15 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{100 \cdot 10^{-3}}{2} \right) \right]}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 1,556 \cdot 10^{-4}}$$

$$\tau_D = 25192,802 \text{ kN/m}^2$$

Assim, devido à simetria da seção transversal em relação ao centroide, a variação das tensões de cisalhamento ao longo da altura da seção é a mostrada na Fig. (19.13).

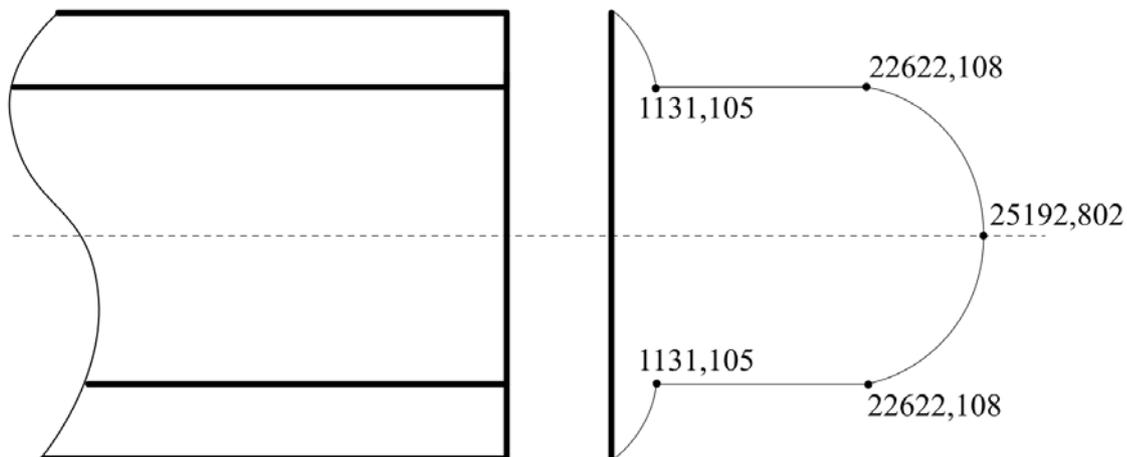


Figura 19.13 Variação das tensões de cisalhamento ao longo da altura da seção.

### 19.6 – Exemplo 3

Determine as tensões de cisalhamento máximas que atuam nos materiais 1 e 2 da seção transversal ilustrada na Fig. (19.14). Sabe-se que esta seção transversal está solicitada por um esforço cortante  $y$  de intensidade igual a 100 kN. Além disso, os módulos de elasticidade longitudinal dos materiais 1 e 2 são iguais a  $E_1 = 200\text{ GPa}$  e  $E_2 = 120\text{ GPa}$ , respectivamente.

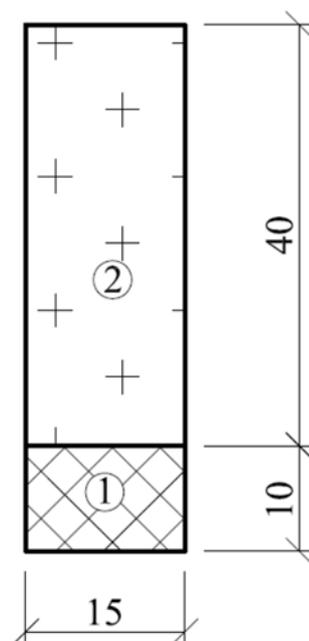


Figura 19.14 Seção transversal a ser analisada. Dimensões em cm.

Para a resolução desse exemplo deve-se efetuar a homogeneização da seção transversal de forma semelhante ao apresentado no capítulo 17. Tomando o material 1 como referência tem-se:

$$n = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow n = \frac{120}{200} \Rightarrow n = 0,60$$

Assim, a dimensão da base homogeneizada assume o seguinte valor:

$$b_{homog} = bn \Rightarrow b_{homog} = 15 \cdot 0,60 \Rightarrow b_{homog} = 9 \text{ cm}$$

Portanto, a seção homogeneizada assume a configuração apresentada na Fig. (16.15).

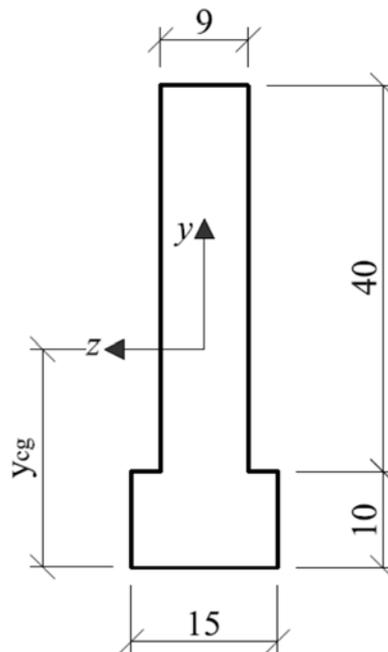


Figura 19.15 Seção transversal homogeneizada. Dimensões em cm.

Para a seção homogeneizada apresentada na Fig. (19.15) obtém-se o seguinte valor para a coordenada  $y$  do centro de gravidade.

$$y_{cg} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 5 + 9 \cdot 40 \cdot 30}{15 \cdot 10 + 40 \cdot 9} \Rightarrow y_{cg} = 22,647 \text{ cm}$$

O valor do momento de inércia da seção transversal homogeneizada em torno do eixo  $z$  pode ser assim determinado:

$$I = \frac{15 \cdot (10)^3}{12} + 15 \cdot 10 \cdot (22,647 - 5)^2 + \frac{9 \cdot (40)^3}{12} + 9 \cdot 40 \cdot (22,647 - 30)^2$$

$$I = 1,1543 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

A tensão de cisalhamento máxima no material 2 ocorre no centro de gravidade da seção transversal. Assim:

$$\tau_2 = \frac{100 \cdot \left[ 9 \cdot 27,353 \cdot \frac{27,353}{2} \right]}{1,1543 \cdot 10^5 \cdot 9} \Rightarrow \tau_2 = 0,3241 \text{ kN/cm}^2 \Rightarrow \tau_2 = 3241 \text{ kPa}$$

A tensão de cisalhamento anteriormente determinada refere-se ao material homogeneizado. Para a determinação da tensão de cisalhamento no material 2 real, deve-se utilizar o fato de homogeneização  $n$ . Assim:

$$\tau_{2MAX} = n\tau_2 \Rightarrow \tau_{2MAX} = 0,60 \cdot 3241 \Rightarrow \tau_{2MAX} = 1944,6 \text{ kPa}$$

A tensão de cisalhamento no material 1 é dada por:

$$\tau_1 = \frac{100 \cdot \left[ 15 \cdot 10 \cdot (22,647 - 5) \right]}{1,1543 \cdot 10^5 \cdot 15} \Rightarrow \tau_1 = 0,1529 \text{ kN/cm}^2 \Rightarrow \tau_1 = 1529 \text{ kPa}$$

Como o material de referência adotado para a homogeneização da seção transversal foi o material 1, verifica-se que a tensão de cisalhamento determinada anteriormente é a máxima tensão de cisalhamento no material 1, ou seja:

$$\tau_{1MAX} = \tau_1 \Rightarrow \tau_{1MAX} = 1529 \text{ kPa}$$

De forma semelhante, o problema poderia também ser resolvido aplicando-se o fator de homogeneização diretamente sobre as propriedades geométricas da seção e sobre as tensões homogeneizadas. Seguindo esta metodologia, a qual foi utilizada no capítulo 17 tem-se:

$$y_{cg} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 5 + 0,6 \cdot (15 \cdot 40) \cdot 30}{15 \cdot 10 + 0,6 \cdot (15 \cdot 40)} \Rightarrow y_{cg} = 22,647 \text{ cm}$$

$$I = \frac{15 \cdot (10)^3}{12} + 15 \cdot 10 (22,647 - 5)^2 + 0,6 \cdot \frac{(15 \cdot 40)^3}{12} + 0,6 \cdot (15 \cdot 40) (22,647 - 30)^2$$

$$I = 1,1543 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Verifica-se que a tensão de cisalhamento máxima no material 2 ocorre no centro de gravidade da seção transversal. Portanto:

$$\tau_2 = 0,6 \frac{100 \cdot [0,6] \left[ 15 \cdot 27,353 \cdot \frac{27,353}{2} \right]}{1,1543 \cdot 10^5 \cdot (0,6 \cdot 15)} \Rightarrow \tau_2 = 0,19446 \text{ kN/cm}^2 \Rightarrow$$

$$\tau_2 = 1944,6 \text{ kPa}$$

Já a tensão de cisalhamento no material 1 ocorre na interface entre os materiais 1 e 2. Assim:

$$\tau_1 = \frac{100 \cdot [15 \cdot 10 \cdot (22,647 - 5)]}{1,1543 \cdot 10^5 \cdot 15} \Rightarrow \tau_1 = 0,1529 \text{ kN} / \text{cm}^2 \Rightarrow \tau_1 = 1529 \text{ kPa}$$

## 20. – Fluxo de Cisalhamento em Seções Formadas por Elementos Esbeltos

---

---

### 20.1 – Fluxo de Cisalhamento Perpendicular ao Plano da Seção Transversal

Em diversas aplicações de engenharia, as seções transversais de elementos estruturais submetidos a esforços de flexão são formadas por componentes esbeltos, os quais são fixados por meio de parafusos, cola ou solda. Essa solução é comumente empregada em estruturas de aço e madeira, onde chapas finas são soldadas/coladas, pregadas/parafusadas, objetivando construir uma seção transversal com maior inércia, de forma a melhor resistir aos esforços de flexão.

Durante o capítulo 19 foi estudada a determinação da variação das tensões de cisalhamento em elementos de barra geral submetidos a esforços de flexão. Naquela oportunidade, foi possível obter uma expressão para a avaliação do valor da tensão de cisalhamento bem como de sua variação ao longo da altura da seção transversal. Nesse estudo foi mostrado que a seguinte relação é válida:

$$\tau_{ij} = \frac{V_j Q_k}{I_k t_k} \quad (20.1)$$

onde os índices  $i, j$  e  $k$  representam os eixos  $x, y$  e  $z$ .  $V$  indica o valor do esforço cortante na seção transversal em análise,  $Q$  representa o momento estático do ponto analisado,  $I$  é o momento de inércia da seção em relação ao eixo  $k$  e  $t$  é a espessura da seção transversal, na direção  $k$ , do ponto analisado.

Neste capítulo, uma variante do problema citado anteriormente, e estudado no capítulo 19, será apresentada. Considerando a existência de tensões de cisalhamento em elementos fletidos, será apresentada a grandeza “fluxo de cisalhamento”, a qual mensurará a variação do valor das tensões de cisalhamento atuantes ao longo do

comprimento do elemento estrutural. Com base nessa grandeza pode-se dimensionar o espaçamento dos parafusos/pregos bem como o valor da resistência da solda/cola para elementos estruturais cujas seções transversais sejam compostas por perfis esbeltos.

Para a determinação da expressão do fluxo de cisalhamento deve-se considerar a viga apresentada na Fig. (20.1), a qual está fletida e em equilíbrio sob a ação de carregamentos externos.

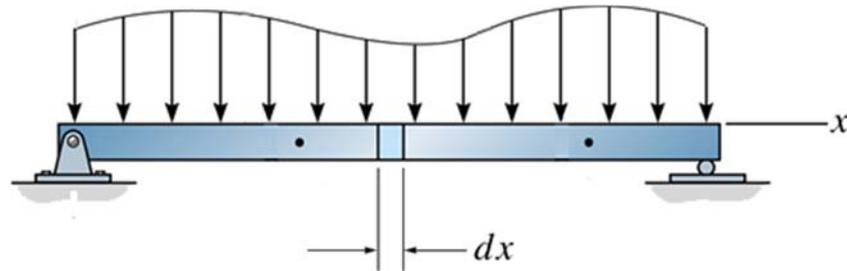


Figura 20.1 Viga solicitada à flexão na condição de equilíbrio.

Isolando um elemento infinitesimal de comprimento  $dx$  desta viga, observa-se que surgirão esforços solicitantes para que a condição de equilíbrio seja mantida. Dessa forma, a configuração deste elemento infinitesimal é a apresentada na Fig. (20.2).

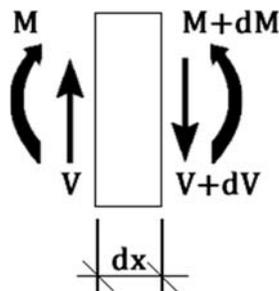


Figura 20.2 Elemento infinitesimal da viga.

Seccionando o elemento infinitesimal apresentado na Fig. (20.2) ao longo de sua altura e tomando apenas sua parte superior, obtém-se o elemento mostrado na Fig. (20.3).

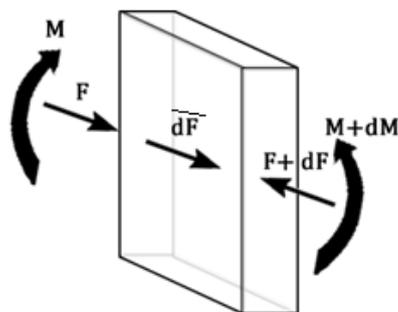


Figura 20.3 Elemento infinitesimal seccionado ao longo de sua altura.

Sabe-se que os momentos fletores geram tensões normais no plano da seção transversal. Se essas tensões forem integradas ao longo da área da seção, estas transformam-se em forças equivalentes de intensidade  $F$ , conforme ilustrado na Fig. (20.3). Sabendo que o elemento apresentado nesta figura encontra-se na condição de equilíbrio, podem ser aplicadas as equações de equilíbrio de corpo rígido. Assim, impondo o equilíbrio de forças ao elemento mostrado na Fig. (20.3) obtém-se:

$$F + \frac{d\bar{F}}{dx} dx - F - dF = 0 \quad (20.2)$$

Sabendo que  $\sigma = M/I y$  e que  $F = \int_A \sigma dA$  pode-se reescrever a Eq.(20.2) como:

$$\int_A \frac{M}{I} y dA + \frac{d\bar{F}}{dx} dx - \int_A \frac{M}{I} y dA - \int_A \frac{dM}{I} y dA = 0 \Rightarrow \quad (20.3)$$

$$\frac{d\bar{F}}{dx} dx = \int_A \frac{dM}{I} y dA$$

O momento fletor e o momento de inércia da seção transversal dependem apenas da seção transversal analisada, sendo, portanto, constantes com relação ao termo  $dA$ . Além disso, sabendo que a integral  $\int_A y dA$  é igual ao momento estático da seção, pode-se reescrever a Eq.(20.3) da seguinte forma:

$$\frac{d\bar{F}}{dx} dx = \frac{dM}{I} \int_A y dA \Rightarrow \frac{d\bar{F}}{dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Q}{I} \quad (20.4)$$

O termo apresentado no primeiro membro da Eq.(20.4) é denominado *fluxo de cisalhamento*,  $q$ , uma vez que representa uma medida da intensidade da tensão de cisalhamento atuante ao longo do comprimento da barra. Lembrando, das relações diferenciais, que  $V = \frac{dM}{dx}$  pode-se escrever a expressão do fluxo de cisalhamento como:

$$q_i = \frac{V_j Q_k}{I_k} \quad (20.5)$$

A aplicação da Eq.(20.5) segue os mesmos procedimentos já estudados durante o capítulo 19. A seguir, esta grandeza será aplicada à análise da conexão entre elementos esbeltos.

### 20.2 – Exemplo 1

Determine a quantidade de parafusos e o espaçamento entre eles para que uma viga de comprimento igual a 3,0 metros, cuja seção transversal está mostrada na Fig. (20.4), resista a um esforço cortante  $V_y = 15 \text{ kN}$ . Os parafusos a serem utilizados possuem diâmetro igual a 3,175 mm e tensão de escoamento igual a  $\sigma_E = 450 \text{ MPa}$ .

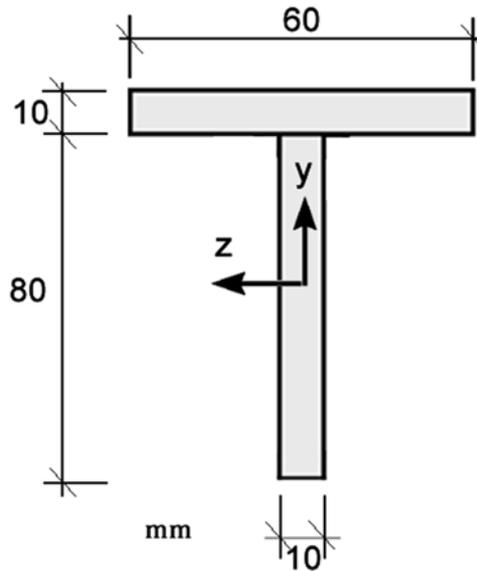


Figura 20.4 Seção transversal T.

Os parafusos serão inseridos na ligação entre a mesa e a alma do perfil mostrado na Fig. (20.4). Portanto, o fluxo de cisalhamento deve ser calculado nesta posição. Para que o fluxo seja calculado, devem ser determinadas algumas propriedades geométricas da seção transversal. Assim, o centro de gravidade da seção está posicionado na seguinte coordenada  $y$ .

$$\bar{y} = \frac{60 \cdot 10 \cdot 85 + 10 \cdot 80 \cdot 40}{60 \cdot 10 + 10 \cdot 80} \Rightarrow \bar{y} = 59,286 \text{ mm}$$

Com base no resultado anterior, pode-se determinar o valor do momento de inércia da seção transversal atuante em torno do eixo  $z$ , o qual é igual a:

$$I_z = \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 60 \cdot 10 \cdot (85 - 59,286)^2 + \frac{10 \cdot 80^3}{12} + 10 \cdot 80 \cdot (40 - 59,286)^2 \Rightarrow$$

$$I_z = 1,125952 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Já o momento estático na junção mesa/alma será igual a:

$$Q_z = 10 \cdot 60 \cdot (85 - 59,286) \Rightarrow Q_z = 15428,4 \text{ mm}^3$$

Assim, o fluxo de cisalhamento, baseado na Eq.(20.5), é igual a:

$$q_x = \frac{V_y Q_z}{I_z} \Rightarrow q_x = \frac{15000 \cdot 15428,4}{1,125952 \cdot 10^6} \Rightarrow q_x = 205,5380 \frac{N}{mm}$$

Com base no valor da tensão de escoamento do parafuso, sabe-se que cada parafuso é capaz de resistir a uma força igual a:

$$F_{parafuso} = \sigma_E A_{parafuso} \Rightarrow F_{parafuso} = 450 \cdot 10^6 \cdot \pi \left( \frac{0,003175}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$F_{parafuso} = 3562,6819 N$$

Para que o equilíbrio seja observado, o fluxo de cisalhamento devido ao esforço cortante deve ser menor ou igual ao fluxo de cisalhamento mobilizado pelos parafusos. Dessa forma pode-se determinar o espaçamento entre os parafusos da seguinte maneira:

$$q_{resistente} = q_{atuante} \Rightarrow \frac{F_{parafuso}}{esp} = q_x \Rightarrow esp = \frac{3562,6819}{205,5380} \Rightarrow$$

$$esp = 17,33 mm$$

Consequentemente, dividindo-se o comprimento da viga pelo espaçamento dos parafusos obtém-se a quantidade necessária de parafusos. Assim:

$$n = \frac{3000}{17,33} \Rightarrow n = 173,07 \Rightarrow n = 174 \text{ parafusos}$$

### 20.3 – Exemplo 2

A seção transversal mostrada na Fig.(20.5) é composta por três elementos esbeltos de três madeiras. Determine o valor do esforço cortante máximo  $V_y$  que esta seção poderá suportar sabendo que sua tensão de ruptura ao cisalhamento é igual a 400 psi. Além disso, determine o espaçamento máximo que pregos, que resistem a uma força de 400lb, devem ter para que a união entre as mesas e alma seja seguramente efetuada.

O valor do esforço cortante máximo que a seção transversal poderá suportar será determinado com base no valor da tensão de ruptura do material. Assim, o valor da máxima tensão de cisalhamento atuante deverá ser igual à tensão de ruptura do material. Para que esse cálculo seja efetuado, devem ser obtidos, primeiramente, os valores de algumas propriedades geométricas da seção transversal.

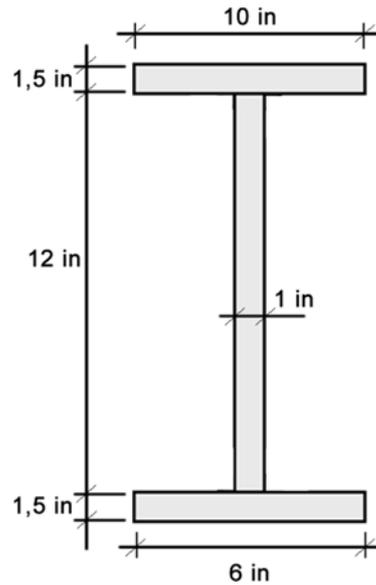


Figura 20.5 Seção transversal I.

A coordenada  $y$  do centro de gravidade é igual a:

$$\bar{y} = \frac{10 \cdot 1,5 \cdot 14,25 + 1 \cdot 12 \cdot 7,5 + 6 \cdot 1,5 \cdot 0,75}{10 \cdot 1,5 + 1 \cdot 12 + 6 \cdot 1,5} \Rightarrow \bar{y} = 8,625 \text{ in}$$

Com base na posição do centro de gravidade da seção transversal, pode-se determinar o valor do momento de inércia da seção transversal em torno do eixo  $z$ . Assim:

$$I_z = \frac{10 \cdot 1,5^3}{12} + 10 \cdot 1,5 \cdot (14,25 - 8,625)^2 + \frac{1 \cdot 12^3}{12} + 1 \cdot 12 \cdot (7,5 - 8,625)^2 + \frac{6 \cdot 1,5^3}{12} + 6 \cdot 1,5 \cdot (0,75 - 8,625)^2 \Rightarrow I_z = 1196,4375 \text{ in}^4$$

O momento estático será máximo quando o ponto considerado estiver posicionado sobre o centro de gravidade da seção transversal. Dessa forma:

$$Q_z^{MAX} = 10 \cdot 1,5 \cdot (14,25 - 8,625) + 1 \cdot (12 + 1,5 - 8,625) \cdot \frac{(12 + 1,5 - 8,625)}{2} \Rightarrow Q_z^{MAX} = 96,2578 \text{ in}^3$$

Assim, o esforço cortante máximo poderá ser determinado com base na tensão de cisalhamento máxima, a qual é calculada utilizando-se a Eq.(20.1). Portanto:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{I_z t_z} \Rightarrow 400 = \frac{V_y \cdot 96,2578}{1196,4375 \cdot 1} \Rightarrow V_y = 4971,804 \text{ lb}$$

Com base no valor do esforço cortante determinado anteriormente, pode-se calcular os valores dos fluxos de cisalhamento nas conexões entre a alma e as mesas utilizando a Eq.(20.8). Para a mesa superior, o fluxo de cisalhamento é dado por:

$$q_x^{SUP} = \frac{V_y Q_z}{I_z} \Rightarrow q_x^{SUP} = \frac{4971,804 \cdot [10 \cdot 1,5 \cdot (14,25 - 8,625)]}{1196,4375} \Rightarrow$$

$$q_x^{SUP} = 350,620 \frac{lb}{in}$$

Já para a mesa inferior o fluxo é dado por:

$$q_x^{INF} = \frac{V_y Q_z}{I_z} \Rightarrow q_x^{INF} = \frac{4971,804 \cdot [6 \cdot 1,5 \cdot (8,625 - 0,75)]}{1196,4375} \Rightarrow$$

$$q_x^{INF} = 294,522 \frac{lb}{in}$$

Considerando a mesa superior, o espaçamento dos pregos deve ser igual a:

$$q_{resistente} = q_{atuante} \Rightarrow \frac{F_{prego}}{esp} = q_x^{SUP} \Rightarrow esp = \frac{400}{350,620} \Rightarrow esp = 1,14 in$$

Já na mesa inferior, o espaçamento dos pregos é obtido de forma semelhante, sendo igual a:

$$q_{resistente} = q_{atuante} \Rightarrow \frac{F_{prego}}{esp} = q_x^{INF} \Rightarrow esp = \frac{400}{294,522} \Rightarrow esp = 1,358 in$$

### 20.4 – Exemplo 3

A seção transversal mostrada na Fig. (20.6) é composta por quatro polímeros esbeltos colados nas quatro regiões indicadas nesta figura. Sabendo que esta seção transversal deve resistir a um esforço cortante  $V_y = 2000 lb$ , determine a tensão cisalhante que deverá ser resistida pela cola nas superfícies a serem coladas.

Para a resolução deste problema, deve-se determinar o valor do fluxo de cisalhamento em cada uma das superfícies a serem coladas. Assim:

$$I_z = \frac{6 \cdot 5,25^3}{12} - \frac{5,5 \cdot 4,75^3}{12} \Rightarrow I_z = 23,2311 in^4$$

Dessa forma, o fluxo de cisalhamento atuante na superfície A, com base na Eq.(20.5), é o seguinte:

$$q_x^A = \frac{V_y Q_z}{I_z} \Rightarrow q_x^A = \frac{2000 \cdot \left[ 5,5 \cdot 0,25 \cdot \left( \frac{4,75}{2} + \frac{0,25}{2} \right) \right]}{23,2311} \Rightarrow q_x^A = 295,9395 \frac{lb}{in}$$

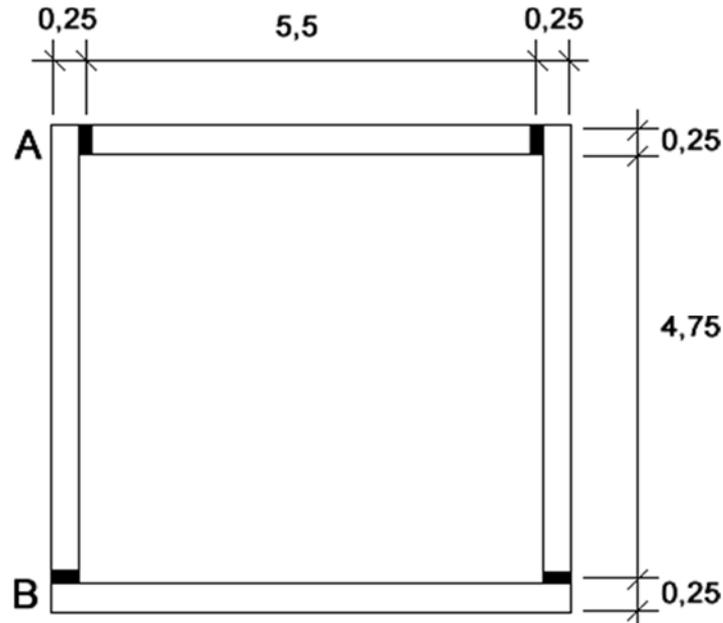


Figura 20.6 Seção transversal caixão. Dimensões em in.

Já o fluxo de cisalhamento atuante na superfície B é dado por:

$$q_x^B = \frac{V_y Q_z}{I_z} \Rightarrow q_x^B = \frac{2000 \cdot \left[ 6,0 \cdot 0,25 \cdot \left( \frac{4,75}{2} + \frac{0,25}{2} \right) \right]}{23,2311} \Rightarrow q_x^B = 322,8430 \frac{lb}{in}$$

A tensão de cisalhamento que deverá ser resistida pela cola é obtida dividindo-se o valor do fluxo de cisalhamento pela espessura da região a ser colada. Como em cada região a ser colada o fluxo é resistido por dois pontos de cola, deve-se dividir o valor do fluxo de cisalhamento por dois. Assim:

$$\tau_A = \frac{q_x^A / 2}{0,25} \Rightarrow \tau_A = \frac{295,9395}{2 \cdot 0,25} \Rightarrow \tau_A = 591,879 \text{ psi}$$

$$\tau_B = \frac{q_x^B / 2}{0,25} \Rightarrow \tau_B = \frac{322,8430}{2 \cdot 0,25} \Rightarrow \tau_B = 645,687 \text{ psi}$$

### 20.5 – Exemplo 4

A viga mostrada na Fig. (20.7) é construída com duas tábuas presas uma à outra na parte superior e na parte inferior por duas fileiras de pregos espaçados de 150 mm.

Se um esforço cortante de intensidade igual a 3 kN está aplicado nesta viga, determine a força cisalhante à qual cada prego resistirá.

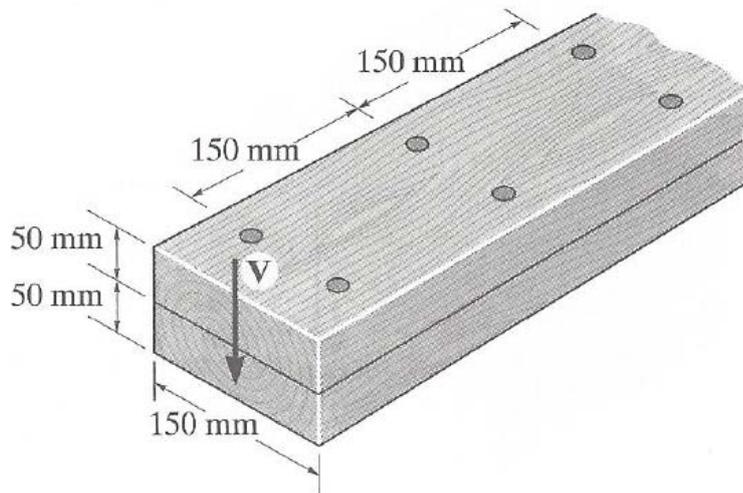


Figura 20.7 Viga analisada.

Para que esse problema seja resolvido deve-se igualar o fluxo de cisalhamento devido ao esforço cortante ao fluxo de cisalhamento decorrente da presença dos pregos. Como existem dois pregos por linha de ligação, cada prego suportará a metade do fluxo devido a esforço cortante nestes pontos. Assim:

$$q_{resistente} = q_{atuante} \Rightarrow \frac{2F_{prego}}{esp} = q_x \Rightarrow$$

$$F_{prego} = \frac{3 \cdot (150 \cdot 50 \cdot 25)}{150 \cdot 100^3} \cdot \frac{150}{2} \Rightarrow F_{prego} = 3,375 \text{ kN}$$

### 20.6 – Exemplo 5

A viga mostrada na Fig. (20.8) é construída com cinco tábuas parafusadas. Determine a força cisalhante desenvolvida em cada parafuso se o espaçamento entre eles for igual a 250 mm e o esforço cortante aplicado for de intensidade igual a 35 kN.

Para que esse problema seja resolvido, devem ser determinadas algumas propriedades geométricas da seção da viga considerada. A coordenada  $y$  do centro de gravidade é igual a:

$$\bar{y} = \frac{\left(25 \cdot 350 \cdot \frac{350}{2}\right) \cdot 3 + 25 \cdot 250 \cdot (350 - 25) \cdot 2}{(25 \cdot 350) \cdot 3 + (25 \cdot 250) \cdot 2} \Rightarrow \bar{y} = 223,387 \text{ mm}$$

Com base na posição do centro de gravidade da seção, pode-se determinar o valor do momento de inércia da seção transversal em torno do eixo  $z$ . Assim:

$$I_z = 3 \cdot \left[ \frac{25 \cdot 350^3}{12} + 25 \cdot 350 \cdot \left( \frac{350}{2} - 223,387 \right)^2 \right] + 2 \cdot \left[ \frac{25 \cdot 250^3}{12} + 25 \cdot 250 \cdot (350 - 25 - 223,387)^2 \right] \Rightarrow I_z = 5,23597 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

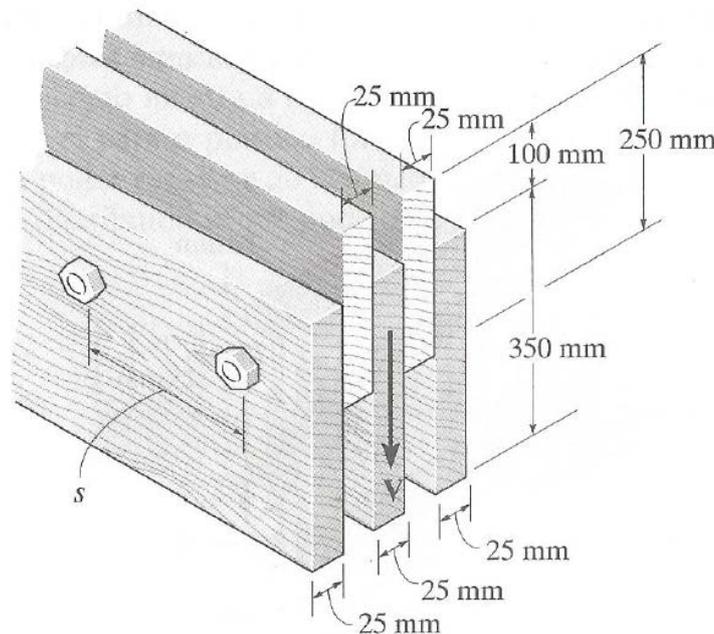


Figura 20.8 Viga analisada.

Os momentos estáticos nos pontos de encontro entre as tábuas são dados por:

$$Q_z^1 = 25 \cdot 350 \cdot \left( \frac{350}{2} - 223,387 \right) \Rightarrow Q_z^1 = 4,23386 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$Q_z^2 = 25 \cdot 350 \cdot \left( \frac{350}{2} - 223,387 \right) + 25 \cdot 250 \cdot (350 - 25 - 223,387) \Rightarrow$$

$$Q_z^2 = 2,11695 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

Como a seção transversal da viga é composta por cinco tábuas, surgirão quatro pontos de fluxo de cisalhamento. Dessa forma, a força cisalhante nos parafusos pode ser assim determinada:

$$q_{resistente} = q_{atuante} \Rightarrow 4 \frac{F_{parafuso}}{esp} = q_x \Rightarrow$$

$$F_{parafuso} = \left[ \left( \frac{35 \cdot 2,11695 \cdot 10^5}{5,23597 \cdot 10^8} \right) \cdot 2 + \left( \frac{35 \cdot 4,23386 \cdot 10^5}{5,23597 \cdot 10^8} \right) \cdot 2 \right] \frac{250}{4} \Rightarrow$$

$$F_{parafuso} = 5,307 \text{ kN}$$

### 20.7 – Fluxo de Cisalhamento Paralelo ao Plano da Seção Transversal

Até o presente momento, foi estudada a determinação da variação do fluxo de cisalhamento atuante ao longo do comprimento de elementos estruturais fletidos formados por seções transversais compostas de partes esbeltas. Embora o estudo tenha sido efetuado considerando que o fluxo de cisalhamento atue ao longo do comprimento da barra, verifica-se que esse mesmo fluxo atua também no plano da seção transversal e que sua intensidade é dada pela Eq.(20.5).

Neste item será estudado o comportamento do fluxo de cisalhamento que surge no plano de seções transversais compostas por elementos de parede fina (esbeltos). Elementos de paredes finas são aqueles cuja espessura da parede é pequena se comparada com sua altura ou mesmo a sua largura. Conforme apresentado no capítulo 19, a tensão de cisalhamento está ligada ao esforço cortante, em elementos fletidos, por meio da seguinte relação:

$$\tau_{ij} = \frac{V_j Q_k}{I_k t_k} \Rightarrow \tau_{ij} t_k = \frac{V_j Q_k}{I_k} \quad (20.6)$$

Igualando o resultado apresentado na Eq.(20.6) com a expressão apresentada na Eq.(20.5) obtém-se:

$$\tau_{ij} t_k = \frac{V_j Q_k}{I_k} = q_i = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_i = \tau_{ij} t_k \quad (20.7)$$

Assim como as tensões de cisalhamento, o fluxo de cisalhamento atua nos planos longitudinal e transversal da barra fletida. Como a seção transversal é formada por elementos de parede fina, assume-se que o fluxo de cisalhamento possua distribuição constante ao longo da parede (espessura) da seção transversal.

Para melhor compreender a variação do fluxo de cisalhamento no plano da seção transversal, pode-se considerar a viga apresentada na Fig. (20.9), a qual está em

equilíbrio quando submetida a um conjunto de carregamentos externos que causa flexão.

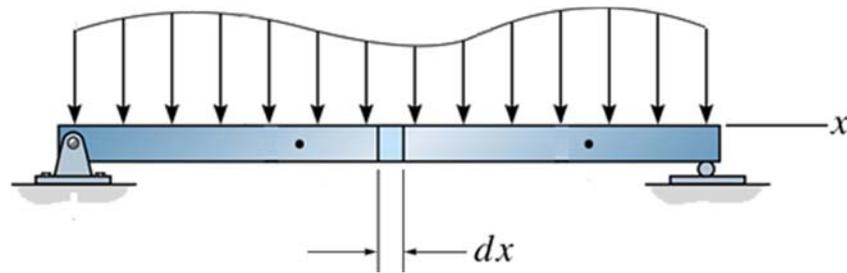


Figura 20.9 Viga solicitada à flexão.

Como a estrutura mostrada na Fig. (20.9) encontra-se em equilíbrio, cada elemento que a compõem estará também em equilíbrio. Isolando um elemento infinitesimal de comprimento  $dx$  desta viga, observa-se o surgimento de esforços solicitantes,  $V$  e  $M$ , conforme indicado na Fig. (20.10), para a restauração da condição de equilíbrio.

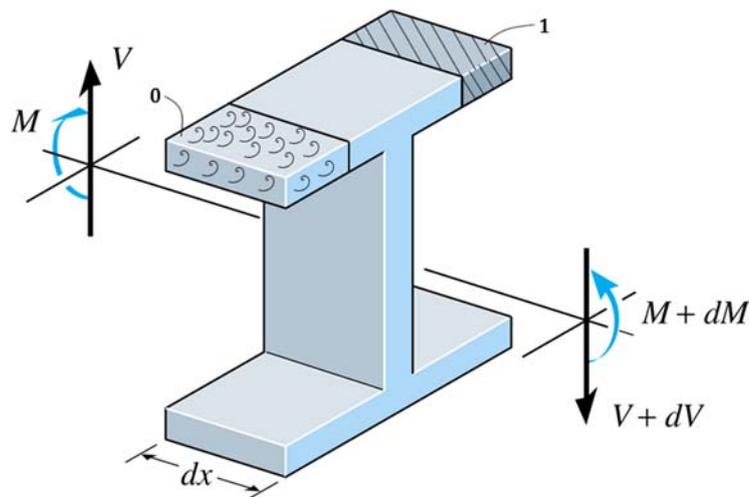


Figura 20.10 Elemento infinitesimal em equilíbrio.

Sabe-se que o momento fletor gera, no plano da seção transversal, tensões normais. Se essas tensões forem integradas ao longo da área desta seção, estas darão origem a forças orientadas ao longo do comprimento da barra. Se a região hachurada 1, mostrada na Fig. (20.10), for isolada da seção transversal, observa-se que sua configuração de equilíbrio é a apresentada na Fig. (20.11). Conforme mostrado nesta figura, as forças  $F$  e  $dF$  são o resultado da integração das tensões normais na área da seção transversal, as quais são decorrentes dos momentos  $M$  e  $dM$ , respectivamente.

Já a parcela  $\overline{dF}$  representa o fluxo de cisalhamento atuante ao longo do comprimento da barra, conforme estudado nos itens anteriores.

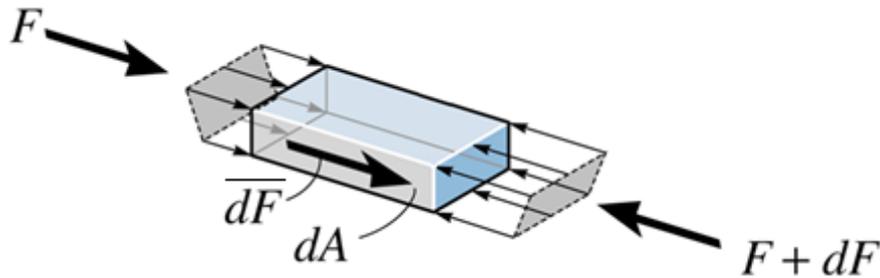


Figura 20.11 Elemento hachurado 1. Condição de equilíbrio.

Sabe-se que o fluxo de cisalhamento atua ao longo do comprimento da barra. No entanto, para que a condição de equilíbrio no elemento considerado seja mantida, deve surgir, no plano da seção transversal, um fluxo de cisalhamento de mesma intensidade daquele atuante ao longo do comprimento da barra. O sentido desse fluxo no plano da seção transversal é o mostrado na Fig. (20.12). O surgimento do fluxo de cisalhamento no plano da seção é decorrente da condição de equilíbrio das tensões de cisalhamento, conforme discutido no capítulo 12.

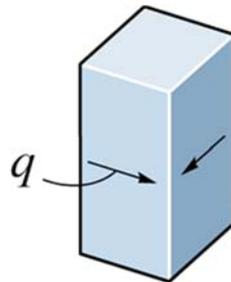


Figura 20.12 Elemento hachurado 1. Fluxo de Cisalhamento atuante no plano da seção transversal.

Análise semelhante pode ser efetuada para o elemento hachurado 0 indicado na Fig. (20.10). Isolando este elemento, surgirão forças de intensidade  $F$  e  $dF$  que estão associadas à atuação do momento fletor. Além disso, surgirá uma força  $\overline{dF}$ , decorrente da presença do fluxo de cisalhamento orientado ao longo do comprimento da barra, conforme ilustrado na Fig. (20.13).

Assim como analisado para o elemento hachurado 1, o fluxo de cisalhamento do elemento hachurado 0 é orientado ao longo do comprimento da barra. Este pode ser mensurado por meio da Eq.(20.5) e deve estar também atuando no plano da seção

transversal para que o equilíbrio das tensões de cisalhamento seja observado. Portanto, para o elemento hachurado 0, constata-se que o fluxo de cisalhamento atuante ao longo do comprimento da barra produz também um fluxo de cisalhamento orientado no plano da seção transversal como indicado na Fig. (20.14).

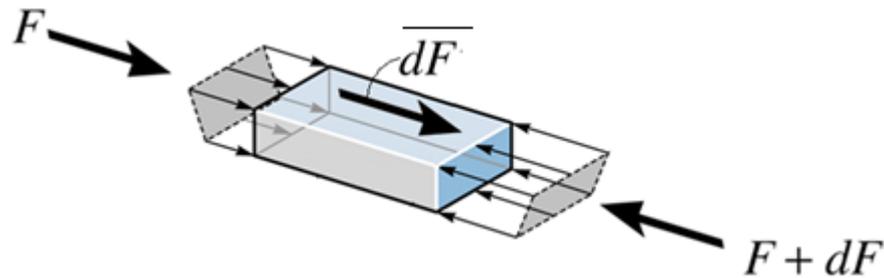


Figura 20.13 Elemento hachurado 0. Condição de equilíbrio.

Nas mesas inferiores pode ser feita análise semelhante. No entanto, como o momento aplicado produzirá tensões normais de tração, as forças  $F$  e  $dF$  terão sentidos opostos ao apresentado na Fig. (20.11) e Fig. (20.13). Consequentemente, os fluxos de cisalhamento atuantes no plano da seção transversal possuirão sentidos opostos aos mostrados nessas figuras.

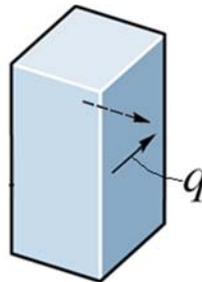


Figura 20.14 Elemento hachurado 0. Fluxo de Cisalhamento atuante no plano da seção transversal.

Ao longo da alma, o fluxo de cisalhamento segue ao sentido do esforço cortante atuante. Portanto, com base nesta análise, o sentido do fluxo de cisalhamento no plano da seção transversal apresenta a configuração ilustrada na Fig. (20.15).

Análise semelhante à efetuada anteriormente pode ser utilizada para a determinação do sentido do fluxo de cisalhamento atuante no plano de seções transversais compostas por elementos de paredes finas com formato quaisquer.

Além da determinação do sentido do fluxo de cisalhamento no plano da seção transversal, é de grande importância que seja também estudado o comportamento de sua variação ao longo do comprimento dos elementos de paredes finas. Deve-se ressaltar

que a relação que permite o cálculo do fluxo de cisalhamento no plano da seção, Eq.(20.5), assume que os elementos que compõem a seção sejam de paredes finas e que o esforço cortante seja aplicado ao longo de um dos eixos principais de inércia.

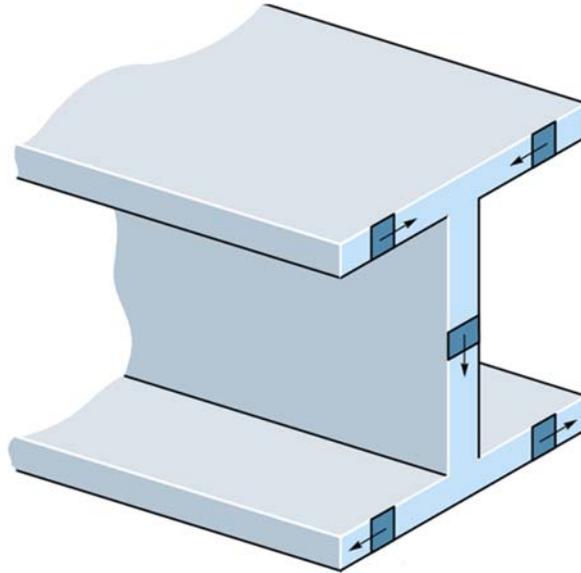


Figura 20.15 Fluxo de cisalhamento no plano da seção transversal.

Considerando a Eq.(20.5), pode-se determinar a intensidade do fluxo de cisalhamento ao longo da aba direita de um perfil I, como ilustrado na Fig. (20.16), da seguinte forma:

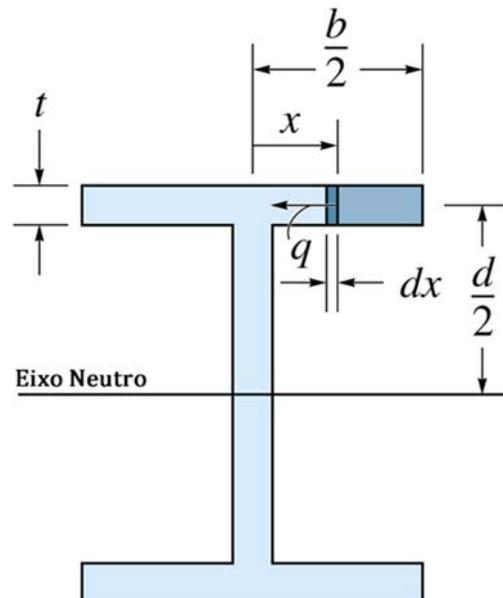


Figura 20.16 Fluxo de cisalhamento na aba de um perfil I.

$$q = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q = \frac{V_y}{I_z} \left( \frac{b}{2} - x \right) t \frac{d}{2} \Rightarrow q = \frac{V_y t d}{2I_z} \left( \frac{b}{2} - x \right) \quad (20.8)$$

Como apresentado na Eq.(20.8), verifica-se que ao longo das mesas o fluxo de cisalhamento apresenta variação linear, sendo nulo em  $x = b/2$  e igual a  $q_{MAX} = \frac{V_y t d b}{4I_z}$  em  $x = 0$ . Para as demais mesas da seção transversal pode-se efetuar análise semelhante. Porém, essas conduzirão ao mesmo resultado apresentado na Eq.(20.8). Portanto, ao longo das mesas da seção transversal, a distribuição do fluxo de cisalhamento apresenta variação linear como apresentado na Fig. (20.17).

O fluxo de cisalhamento atuante nas mesas pode ser integrado para a determinação de suas forças equivalentes. Integrando a Eq.(20.8) ao longo da aba obtém-se:

$$F_{mesa} = \int_0^{b/2} \frac{V_y t d}{2I_z} \left( \frac{b}{2} - x \right) dx \Rightarrow F_{mesa} = \frac{V_y t d b^2}{16I_z} \quad (20.9)$$

As forças equivalentes atuantes em cada uma das mesas, bem como seus sentidos, estão ilustradas na Fig. (20.17). Deve-se notar que embora o fluxo resulte em forças horizontais, estas são auto equilibradas de modo que a condição de equilíbrio permaneça válida.

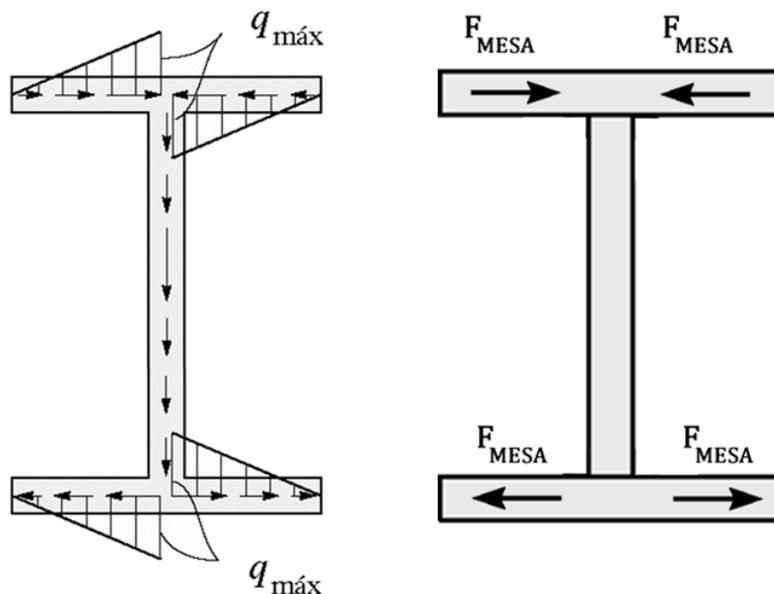


Figura 20.17 Variação do fluxo de cisalhamento e força equivalente ao longo da mesa de um perfil I.

Para a determinação da variação da intensidade do fluxo de cisalhamento ao longo da alma de uma seção I, pode-se efetuar análise semelhante à feita para a aba do perfil. Considerando a ilustração apresentada na Fig. (20.18) e a Eq.(20.5) tem-se:

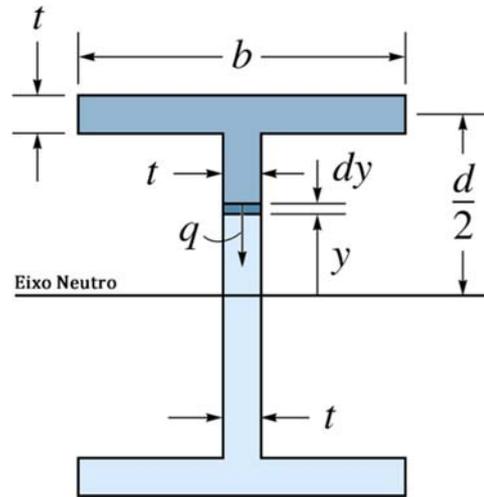


Figura 20.18 Fluxo de cisalhamento na alma de um perfil I.

$$q = \frac{V_y Q_k}{I_k} \Rightarrow q = \frac{V_y}{I_z} \left\{ \frac{btd}{2} + \left( \frac{d}{2} - \frac{t}{2} - y \right) t \left[ \frac{\left( \frac{d}{2} - \frac{t}{2} - y \right)}{2} + y \right] \right\} \quad (20.10)$$

Rearranjando os termos da Eq.(20.10) obtém-se:

$$q = \frac{V_y t}{I_z} \left\{ \frac{bd}{2} + \left( \frac{d}{2} - \frac{t}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2} - \frac{t}{2} + y \right) \right\} \Rightarrow \quad (20.11)$$

$$q = \frac{V_y t}{I_z} \left\{ \frac{bd}{2} + \frac{d^2}{8} - \frac{dt}{4} + \frac{t^2}{8} - \frac{ty}{4} - \frac{y^2}{2} \right\}$$

Como a seção analisada é de paredes finas, assume-se que  $t$  é muitas vezes menor que as demais dimensões da seção transversal. Dessa forma, esse termo pode ser desprezado. Assim, a Eq.(20.11) pode ser reescrita como:

$$q = \frac{V_y t}{I_z} \left\{ \frac{bd}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \right\} \quad (20.12)$$

Assim, com base no resultado apresentado na Eq.(20.12), constata-se que o fluxo de cisalhamento varia parabolicamente ao longo da alma. Sua intensidade é máxima quando  $y = 0$  sendo igual a  $q_{\max} = \frac{V_y t}{I_z} \left( \frac{bd}{2} + \frac{d^2}{8} \right)$ .

A força equivalente decorrente da presença do fluxo de cisalhamento na alma do perfil é obtida integrando-se o fluxo ao longo do comprimento da alma. Assim:

$$F_{alma} = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{V_y t}{I_z} \left\{ \frac{bd}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \right\} dy \Rightarrow F_{alma} = \frac{V_y t d^2}{4 I_z} \left( 2b + \frac{d}{3} \right) \quad (20.13)$$

Para que o equilíbrio se mantenha, a força equivalente atuante na alma do perfil deve ser igual ao esforço cortante aplicado. Assim, a variação do fluxo de cisalhamento e a força equivalente atuante na alma do perfil podem ser ilustradas como apresentado na Fig. (20.19).

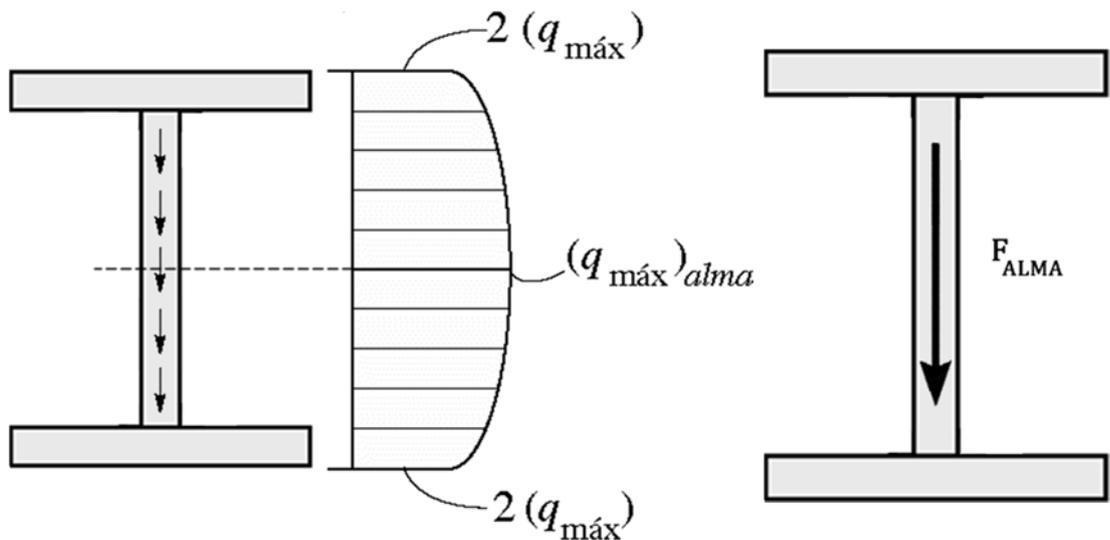


Figura 20.19 Variação do fluxo de cisalhamento e força equivalente ao longo da alma de um perfil I.

Da análise apresentada anteriormente, três pontos importantes devem ser destacados. No primeiro deles, constata-se que o fluxo de cisalhamento,  $q$ , varia ao longo da seção transversal, uma vez o valor do momento estático,  $Q$ , também varia conforme o segmento de área analisado. Em particular,  $q$  variará linearmente ao longo de segmentos que sejam perpendiculares à direção de atuação do esforço cortante,  $V$ , e parabolicamente em casos contrários.

O segundo ponto a ser destacado é que o fluxo de cisalhamento atuará sempre ao longo da direção paralela às paredes finas do elemento. Sua contribuição na direção da espessura é desprezada. Isso decorre da análise apresentada anteriormente e ilustrado na Fig. (20.15).

Finalmente, no terceiro ponto, o sentido de  $q$  é tal que o fluxo de cisalhamento parece "fluir" ao longo da seção transversal. Esse fluxo é orientado das periferias para o interior da seção transversal, combinando-se e fluindo para baixo através da alma, e

finalmente separando-se e fluindo do interior para as periferias. É importante destacar que a visualização desse fluxo simplificará sobremaneira o estabelecimento do sentido de  $q$  e do correspondente  $\tau$ .

Outros exemplos de orientação do sentido do fluxo de cisalhamento ao longo de seções transversais compostas de elementos de paredes finas estão mostrados na Fig. (20.20).

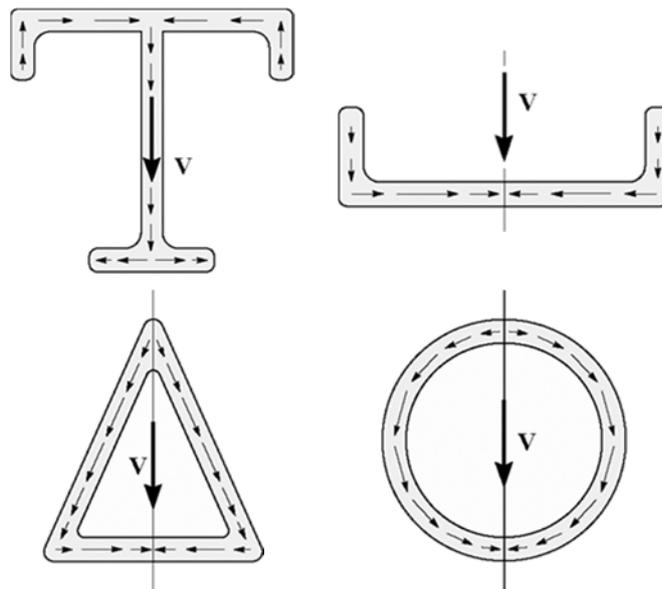


Figura 20.20 Orientação do fluxo de cisalhamento para outras seções transversais.

### 20.8 – Exemplo 6

Determine a variação do fluxo de cisalhamento para a seção transversal ilustrada na Fig. (20.21) sabendo que esta é sujeita a um esforço cortante  $V_y = 20 \text{ kN}$  e que a espessura da parede da seção é igual a 10 mm.

Conforme apresentado anteriormente, sabe-se que ao longo das áreas horizontais o fluxo de cisalhamento apresentará variação linear e ao longo das áreas verticais esta variação será parabólica. Portanto, basta que sejam determinadas as intensidades dos fluxos nos pontos A, B, C e no eixo do centro de gravidade para que a variação do fluxo de cisalhamento seja determinada. Assim, a coordenada  $y$  do centro de gravidade é dada por:

$$\bar{y} = \frac{2 \cdot (10 \cdot 80 \cdot 40) + 400 \cdot 10 \cdot 85}{2 \cdot (10 \cdot 80) + 400 \cdot 10} \Rightarrow \bar{y} = 72,143 \text{ mm}$$

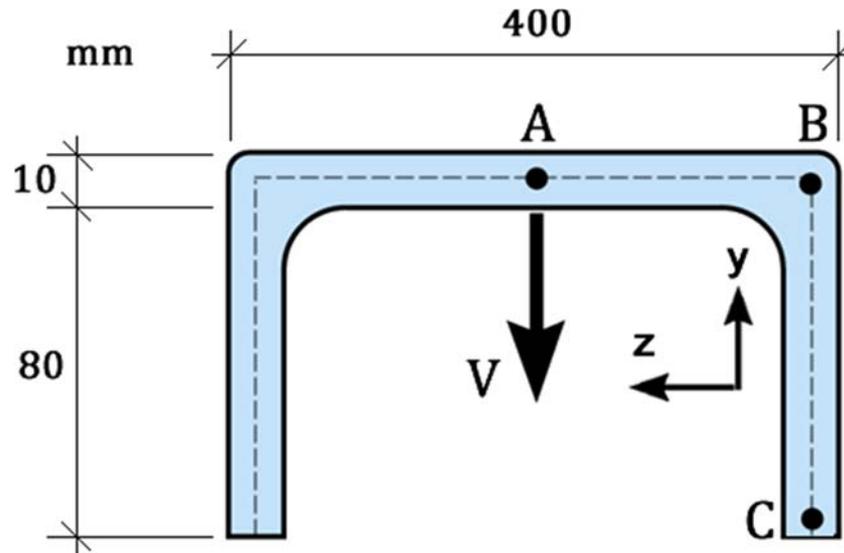


Figura 20.21 Seção a ser analisada.

Com a posição do centro de gravidade determinada, pode-se calcular o valor do momento de inércia da seção. Dessa forma:

$$I_z = 2 \cdot \left[ \frac{10 \cdot 80^3}{12} + 10 \cdot 80 \cdot (72,143 - 40)^2 \right] + \frac{400 \cdot 10^3}{12} + 400 \cdot 10 \cdot (72,143 - 85)^2 \Rightarrow$$

$$I_z = 3,20 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I_z = 3,20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

O fluxo de cisalhamento no ponto C é nulo, uma vez que nesse ponto o momento estático da área é nulo. Então:

$$Q_c = 0$$

O momento estático da área avaliado no ponto B pode ser calculado considerando a ilustração apresentada na Fig. (20.22). Com base nessa figura tem-se:

$$Q_B = 10 \cdot 72,143 \cdot \frac{72,143}{2} - 10 \cdot (17,857 - 5) \cdot \frac{(17,857 - 5)}{2} \Rightarrow$$

$$Q_B = 25196,55 \text{ mm}^3 \Rightarrow Q_B = 2,519655 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

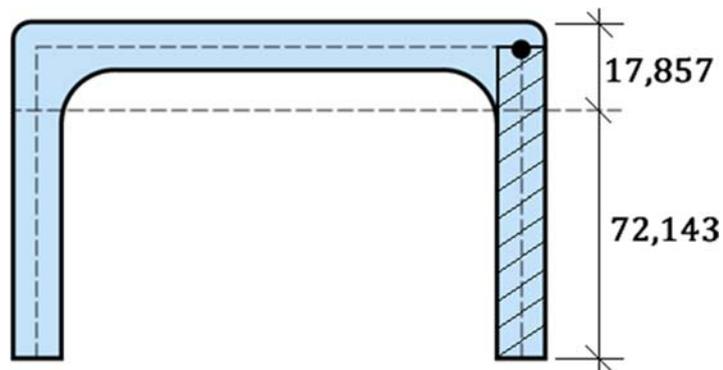


Figura 20.22 Momento estático da área no ponto B. Dimensões em mm.

Já o momento estático da área no centro de gravidade é dado por:

$$Q_{cg} = 10 \cdot 72,143 \cdot \frac{72,143}{2} \Rightarrow Q_{cg} = 26023,06 \text{ mm}^3 \Rightarrow$$

$$Q_{cg} = 2,602306 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

Finalmente, o momento estático da área, avaliado no ponto A, pode ser determinado utilizando-se a ilustração mostrada na Fig. (20.23). Assim:

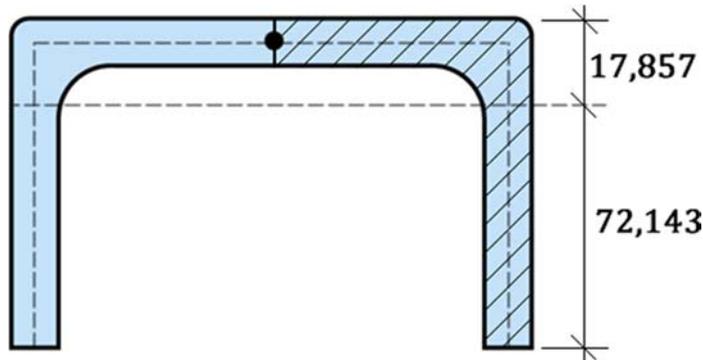


Figura 20.23 Momento estático da área no ponto A. Dimensões em mm.

$$Q_A = 10 \cdot 72,143 \cdot \frac{72,143}{2} - 10 \cdot 17,857 \cdot \frac{17,857}{2} - 190 \cdot 10 \cdot (17,857 - 5) \Rightarrow$$

$$Q_A = 0$$

Com os valores dos momentos estáticos avaliados em todos os pontos de interesse, pode-se calcular a intensidade do fluxo de cisalhamento nesses pontos utilizando a Eq.(20.5). Assim:

$$q_A = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_A = \frac{20 \cdot 0}{3,20 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow q_A = 0 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$q_B = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_B = \frac{20 \cdot 2,519655 \cdot 10^{-5}}{3,20 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow q_B = 157,48 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$q_C = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_C = \frac{20 \cdot 0}{3,20 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow q_C = 0 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$q_{cg} = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_{cg} = \frac{20 \cdot 2,602306 \cdot 10^{-5}}{3,20 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow q_{cg} = 162,64 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Com base nos valores de fluxo de cisalhamento determinados anteriormente, sua distribuição no plano da seção transversal é a apresentada na Fig. (20.24).

A intensidade da força na mesa pode ser obtida integrando-se o fluxo de cisalhamento ao longo de seu comprimento. Sabendo que esta integral representa a área da variação do fluxo tem-se:

$$F_{\text{mesa}} = 157,48 \cdot \frac{0,195}{2} \Rightarrow F_{\text{mesa}} = 15,35 \text{ kN}$$

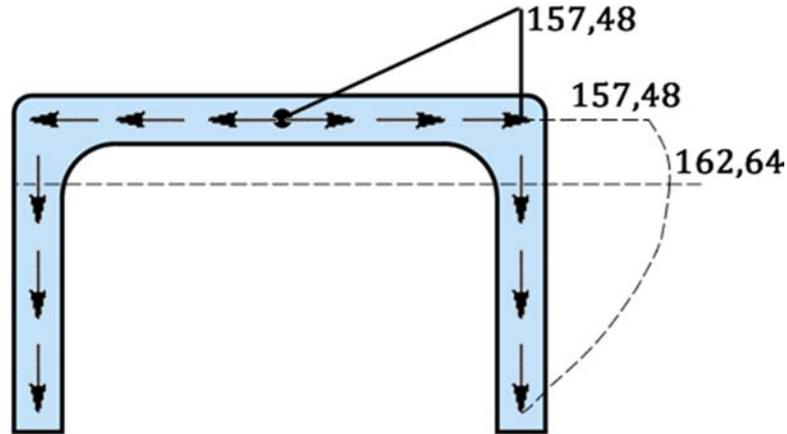


Figura 20.24 Variação do fluxo de cisalhamento no plano da seção transversal.

Ao longo das almas da seção, a intensidade da força atuante deve ser igual ao esforço cortante, de forma que a condição de equilíbrio seja observada. Portanto, a força na alma é dada por:

$$F_{\text{alma}} = \frac{20}{2} \Rightarrow F_{\text{alma}} = 10 \text{ kN}$$

Dessa forma, a variação das forças no perfil pode ser ilustrada como apresentado na Fig. (20.25):

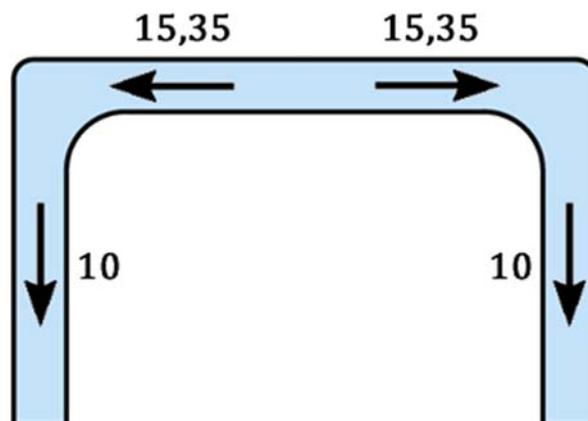


Figura 20.25 Variação da força nas paredes finas da seção transversal.

20.9 – Exemplo 7

Determine a distribuição do fluxo de cisalhamento para a seção transversal mostrada na Fig. (20.26), sabendo que esta é submetida a um esforço cortante igual a  $V_y = 20 \text{ kN}$ .

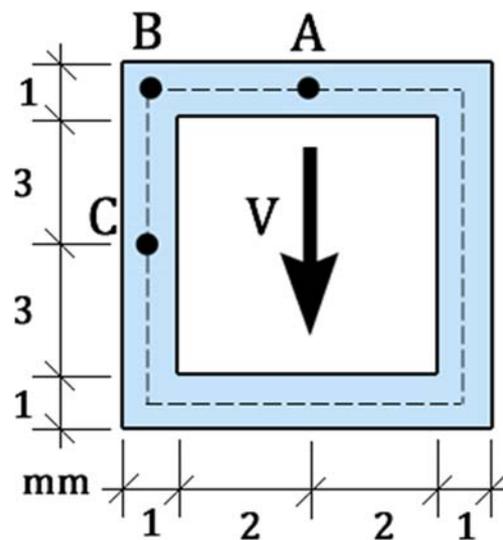


Figura 20.26 Seção transversal a ser analisada.

Devido à simetria da seção transversal, basta que a intensidade do fluxo de cisalhamento seja calculada nos pontos A, B e C ilustrados na Fig. (20.26) para que sua variação seja determinada. Sabendo que nas áreas horizontais o fluxo apresentará variação linear e que nas áreas verticais esta variação é parabólica, devem ser determinados os valores dos momentos estáticos nos pontos A, B e C. Devido à simetria da seção verifica-se que seu centro de gravidade encontra-se localizado na intersecção entre os eixos de simetria da figura. Assim, o momento de inércia da seção é igual a:

$$I_z = \frac{6 \cdot 8^3}{12} - \frac{4 \cdot 6^3}{12} \Rightarrow I_z = 184 \text{ mm}^4$$

O momento estático da seção transversal avaliado no ponto A é nulo, uma vez que nesse ponto  $Q_A$  é calculado considerando toda a área da seção. Portanto:

$$Q_A = 0$$

Já no ponto B, o momento estático deve ser calculado considerando-se apenas a área hachurada mostrada na Fig. (20.27). Considerando apenas as dimensões médias da seção tem-se:

$$Q_B = 5 \cdot 1 \cdot 3,5 \Rightarrow Q_B = 17,5 \text{ mm}^3$$

Finalmente, no ponto C o momento estático é dado por:

$$Q_C = 6 \cdot 1 \cdot 3,5 + 2 \cdot (3 \cdot 1 \cdot 1,5) \Rightarrow Q_C = 30 \text{ mm}^3$$

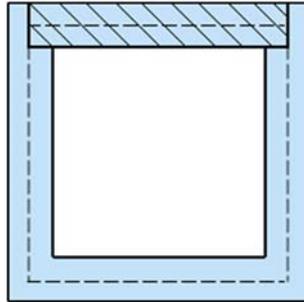


Figura 20.27 Área hachurada para o cálculo do momento estático do ponto B.

Com base nos valores dos momentos estáticos determinados anteriormente, pode-se calcular as intensidades dos fluxos de cisalhamento. Utilizando a Eq.(20.5), constata-se que o fluxo de cisalhamento no ponto A é igual a:

$$q_A = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_A = \frac{10 \cdot 0}{184} \Rightarrow q_A = 0 \frac{kN}{m}$$

Já nos pontos B e C, o fluxo de cisalhamento deve ser dividido por dois, uma vez que a área considerada para o cálculo do momento estático possui ambas as extremidades seccionadas. Assim:

$$q_B = \frac{V_j Q_k}{2 I_k} \Rightarrow q_B = \frac{10 \cdot 17,5}{2 \cdot 184} \Rightarrow q_B = 0,475 \frac{kN}{mm}$$

$$q_C = \frac{V_j Q_k}{2 I_k} \Rightarrow q_C = \frac{10 \cdot 30}{2 \cdot 184} \Rightarrow q_C = 0,815 \frac{kN}{mm}$$

Com base nos valores calculados anteriormente, constata-se que o fluxo de cisalhamento possui a variação mostrada na Fig. (20.28).

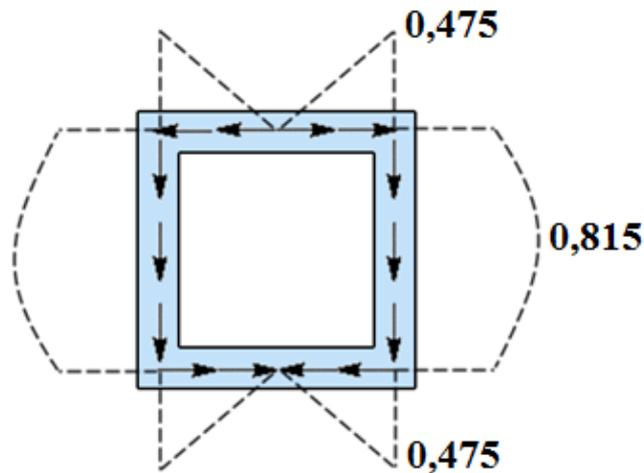


Figura 20.28 Distribuição do fluxo de cisalhamento para a seção analisada.

### 20.10 – Exemplo 8

Determine o valor do fluxo de cisalhamento nos pontos A e B e também o valor do maior fluxo de cisalhamento atuante na seção transversal mostrada na Fig. (20.29).

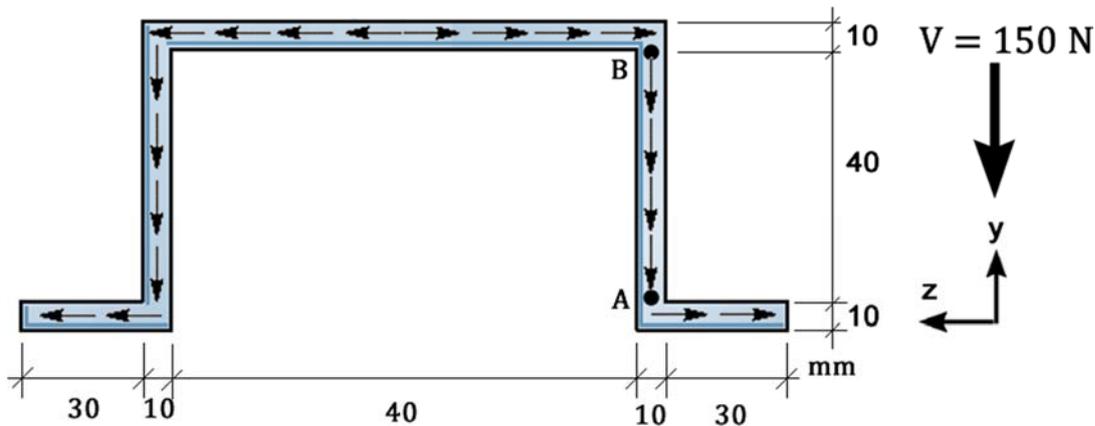


Figura 20.29 Seção transversal a ser analisada.

Para que a Eq.(20.5) seja aplicada, deve-se determinar as coordenadas do centro de gravidade da seção e também seu momento de inércia em torno do eixo  $z$ . Assim:

$$\bar{y} = \frac{2 \cdot (40 \cdot 10 \cdot 5) + 2 \cdot (10 \cdot 40 \cdot 30) + 60 \cdot 10 \cdot 55}{2 \cdot (40 \cdot 10) + 2 \cdot (10 \cdot 40) + 60 \cdot 10} \Rightarrow \bar{y} = 27,7272 \text{ mm}$$

A partir da posição do centro de gravidade, pode-se calcular o valor do momento de inércia da seção. Então:

$$I_z = 2 \cdot \left[ \frac{40 \cdot 10^3}{12} + 40 \cdot 10 \cdot (27,7272 - 5)^2 \right] +$$

$$2 \cdot \left[ \frac{10 \cdot 40^3}{12} + 10 \cdot 40 \cdot (27,7272 - 30)^2 \right] + \left[ \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 60 \cdot 10 \cdot (27,7272 - 55)^2 \right] \Rightarrow$$

$$I_z = 9,81969 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

O momento estático do ponto A é dado por:

$$Q_A = 40 \cdot 10 \cdot (27,7272 - 5) \Rightarrow Q_A = 9090,88 \text{ mm}^3$$

Já o momento estático do ponto B é igual a:

$$Q_B = 40 \cdot 10 \cdot (27,7272 - 5) + 17,7272 \cdot 10 \cdot \frac{17,7272}{2} -$$

$$(40 - 17,7272) \cdot 10 \cdot \frac{(40 - 17,7272)}{2} \Rightarrow Q_B = 8181,76 \text{ mm}^3$$

O momento estático apresentará seu valor máximo quando o ponto analisado encontrar-se sobre o centro de gravidade da seção. Assim, será nesse ponto que o fluxo de cisalhamento apresentará seu valor máximo. Portanto:

$$Q_{cg} = 40 \cdot 10 \cdot (27,7272 - 5) + 17,7272 \cdot 10 \cdot \frac{17,7272}{2} \Rightarrow Q_{cg} = 10662,15 \text{ mm}^3$$

Com base nos valores dos momentos estáticos calculados anteriormente, conclui-se que os fluxos de cisalhamento atuantes nos pontos de interesse serão iguais a:

$$q_A = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_A = \frac{150 \cdot 9090,88}{9,81969 \cdot 10^5} \Rightarrow q_A = 1,389 \frac{N}{mm}$$

$$q_B = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_B = \frac{150 \cdot 8181,76}{9,81969 \cdot 10^5} \Rightarrow q_B = 1,250 \frac{N}{mm}$$

$$q_{cg} = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_{cg} = \frac{150 \cdot 10662,15}{9,81969 \cdot 10^5} \Rightarrow q_{cg} = 1,629 \frac{N}{mm}$$

### 20.11 – Centro de Cisalhamento

Até o presente momento, foram estudadas as variações e as intensidades dos fluxos de cisalhamento atuantes no plano de seções transversais compostas por elementos de paredes finas onde o esforço cortante era aplicado ao longo de um de seus

eixos principais de inércia. Porém, pode-se perguntar: o que ocorre quando esta condição não é atendida?

Esta pergunta será respondida neste item, onde os efeitos mecânicos da aplicação do esforço cortante em um eixo que não seja um eixo principal de inércia serão apresentados. Serão consideradas seções transversais abertas formadas por elementos de paredes finas. Dessa forma, as dimensões da linha média dos elementos esbeltos poderão ser utilizadas para a determinação do fluxo.

Um caso clássico que enquadra-se na categoria dos problemas que serão estudados nesse item é o de um perfil do tipo C submetido à ação de uma força de intensidade  $P$  aplicada ao longo de um eixo vertical que não seja principal, conforme mostrado na Fig. (20.30). Embora a estrutura mostrada nessa figura seja isostática e em balanço, nessa situação o perfil não será apenas fletido, mas também sofrerá a ação de uma torção.

Para compreender o motivo pelo qual o elemento de barra torce, sem que seja aplicado nenhum momento de torção, deve-se estudar a distribuição do fluxo de cisalhamento nas mesas e na alma deste perfil. Para a seção analisada, a distribuição do fluxo de cisalhamento é apresentada na Fig. (20.30). Quando integrado, o fluxo de cisalhamento dá origem a forças resultantes nesses elementos. Impondo o equilíbrio dos momentos resultantes dessas forças, constata-se que surge um momento que tende a torcer a seção transversal. Observando a barra formada pelo perfil C, apresentada na Fig. (20.30), verifica-se que a torção ocorrerá no sentido horário, já que são as forças reativas internas que garantem o equilíbrio.

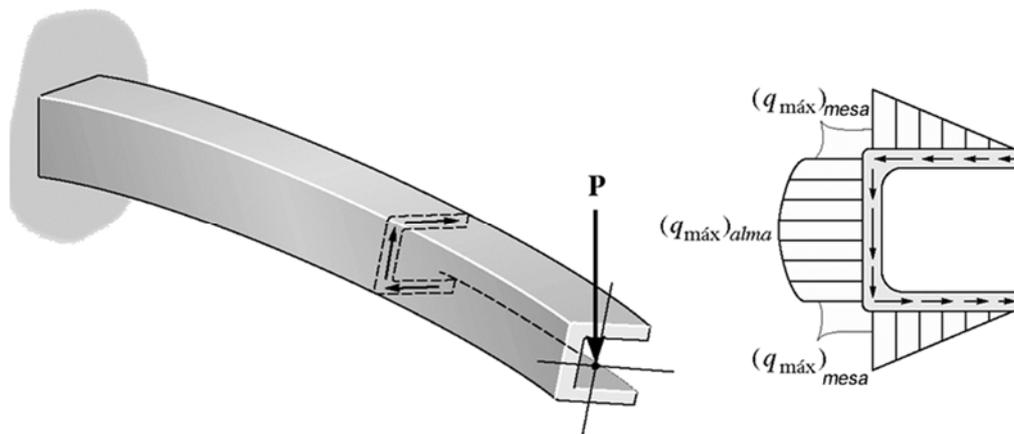


Figura 20.30 Seção aberta submetida à flexão e à torção.

Em diversas aplicações de engenharia é interessante que esforços de torção sejam evitados em elementos de barra geral. Em especial, esforços de torção devem ser evitados quando seções transversais "abertas" são utilizadas, como em perfis do tipo C e C enrijecido, uma vez que essas seções (abertas) possuem baixa inércia à torção (sugere-se que o leitor relembre esta afirmação com os problemas estudados no capítulo 16). Nessas situações, os efeitos da torção podem ser evitados se a carga  $P$  for aplicada em um ponto conveniente, conforme mostrado na Fig. (20.31). O ponto em questão é denominado  $O$  e dista  $e$  do eixo da alma do perfil.

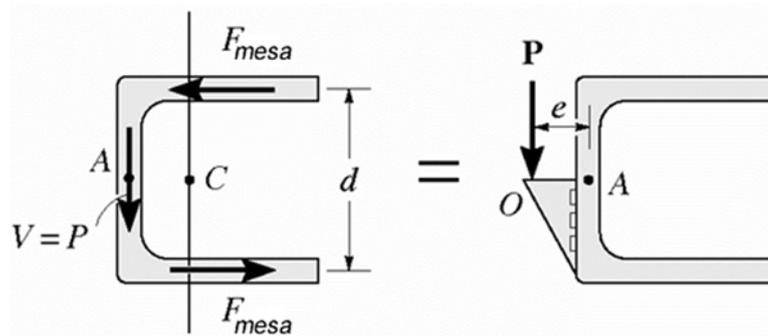


Figura 20.31 Ponto conveniente  $O$ . Centro de cisalhamento.

Para a determinação da excentricidade  $e$ , deve-se impor as condições de equilíbrio de corpo rígido. Efetuando a somatória de momentos em relação ao ponto  $A$ , mostrado na Fig. (20.31), tem-se:

$$F_{mesa} \frac{d}{2} + F_{mesa} \frac{d}{2} - Pe = 0 \Rightarrow e = \frac{F_{mesa} d}{P}$$

O valor da força equivalente na mesa,  $F_{mesa}$ , é obtido integrando-se o fluxo de cisalhamento ao longo da mesa. Este fluxo depende diretamente da intensidade da carga  $P$ . Portanto, a excentricidade  $e$ , que mede a distância do ponto de aplicação da carga, pode ser expresso unicamente em função de parâmetros geométricos da seção transversal. O ponto  $O$ , no qual a carga  $P$  é aplicada fazendo a viga fletir sem torcer, é denominado *centro de cisalhamento* ou *centro de flexão*. Em tabelas elaboradas por fabricantes de perfis produzidos industrialmente, a posição do centro de cisalhamento é, normalmente, indicada.

Deve-se enfatizar que o centro de cisalhamento se apoiará sempre sobre os eixos principais de inércia da seção transversal. Considerando o perfil C apresentado anteriormente, porém rotacionado de  $90^\circ$ , com uma carga  $P$  aplicada ao longo de um de

seus eixos principais de inércia, como mostra a Fig. (20.32), constata-se que a barra fletirá sem torcer. Isso ocorre devido à simetria do fluxo de cisalhamento nas mesas e alma. Quando o esforço cortante é aplicado ao longo de um dos eixos principais de inércia a barra flete sem torcer.

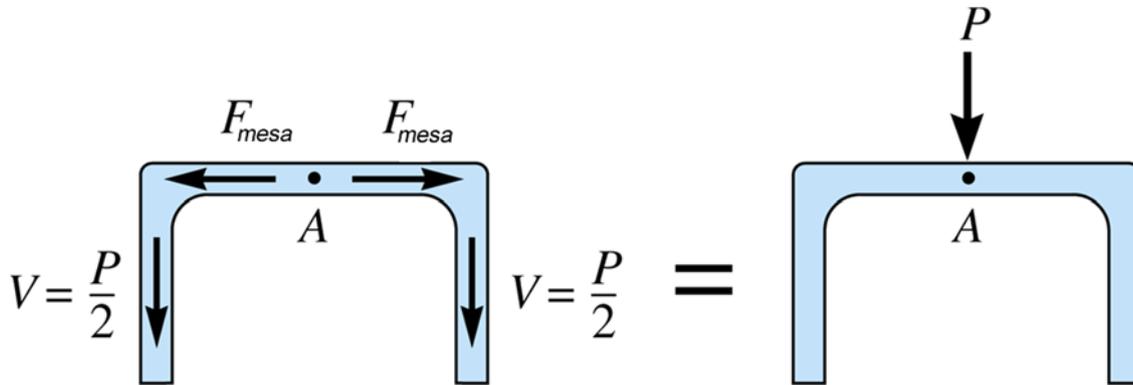


Figura 20.32 Ponto conveniente 0. Centro de cisalhamento.

Obviamente, se uma seção transversal possuir dois eixos de simetria, o centro de cisalhamento será localizado na interseção desses eixos.

### 20.12 – Exemplo 9

Determine a posição do centro de cisalhamento do perfil C mostrado na Fig. (20.33).

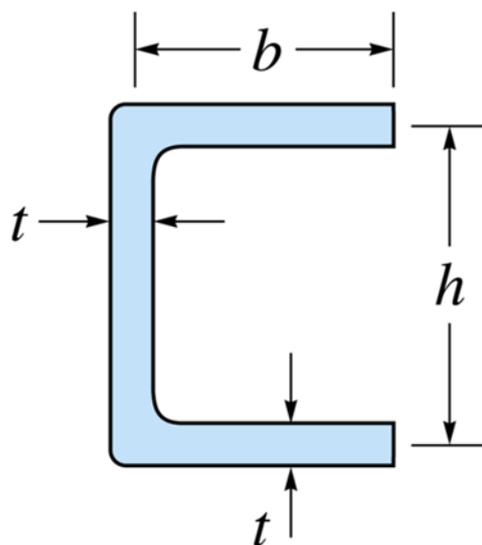


Figura 20.33 Seção transversal a ser analisada.

Sabe-se que a distribuição do fluxo de cisalhamento no perfil C segue o padrão apresentado na Fig.(20.34). Além disso, sabe-se também que a integração do fluxo de cisalhamento nos elementos de paredes finas conduz à determinação das intensidades das forças equivalentes. Para que a posição do centro de cisalhamento seja determinada, deve-se efetuar a somatória dos momentos em relação ao ponto A, envolvendo as forças equivalentes nas mesas e na alma e também a força P aplicada.

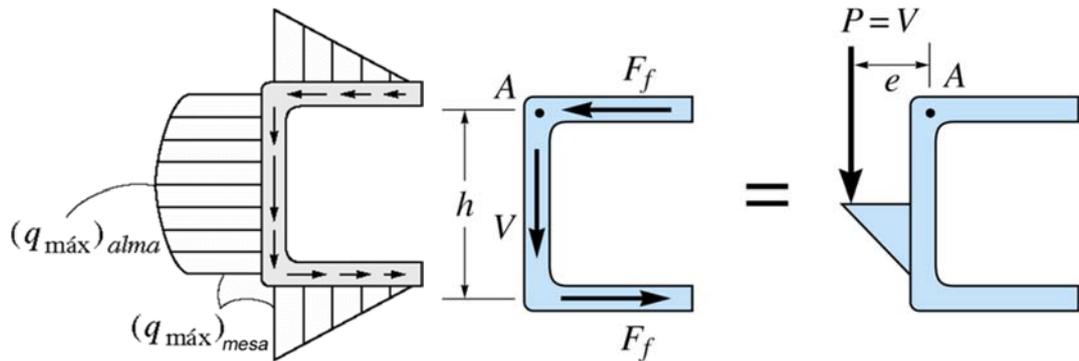


Figura 20.34 Distribuição do fluxo de cisalhamento e forças equivalente nos elementos de parede fina.

Portanto, o primeiro passo para a solução do problema é a determinação do fluxo de cisalhamento nas mesas. Assim, o valor do momento de inércia da seção é igual a:

$$I_z = 2 \cdot \left[ \frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{t \cdot h^3}{12}$$

Como a seção transversal é composta por elementos de paredes finas, os termos de alta ordem de  $t$  podem ser desprezados. Portanto:

$$I_z = 2 \cdot \left[ b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{t \cdot h^3}{12} \Rightarrow I_z = \frac{t \cdot h^2}{2} \left( b + \frac{h}{6} \right)$$

O momento estático da mesa do perfil, como anteriormente estudado neste capítulo, é igual a:

$$Q_{mesa} = b \cdot t \cdot \frac{h}{2}$$

Dessa forma, a intensidade máxima do fluxo na mesa, segundo a Eq.(20.5), é igual a:

$$q_{mesa} = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_{mesa} = \frac{P \cdot b \cdot t \cdot \frac{h}{2}}{\frac{t \cdot h^2}{2} \left( b + \frac{h}{6} \right)} \Rightarrow q_{mesa} = \frac{P \cdot b}{h \left( b + \frac{h}{6} \right)}$$

Sabendo que a variação do fluxo de cisalhamento na mesa é linear, pode-se determinar a força equivalente nesse elemento integrando o fluxo na mesa. Assim:

$$F_{\text{mesa}} = \int_b q_{\text{mesa}} db \Rightarrow F_{\text{mesa}} = \frac{P \cdot b}{h \left( b + \frac{h}{6} \right)} \frac{b}{2} \Rightarrow F_{\text{mesa}} = \frac{P \cdot b^2}{2h \left( b + \frac{h}{6} \right)}$$

De posse do valor da força equivalente na mesa, pode-se aplicar a condição de equilíbrio de momentos em relação ao ponto A mostrado na Fig. (20.32). Dessa forma:

$$-F_{\text{mesa}} h + Pe = 0 \Rightarrow \frac{P \cdot b^2}{2h \left( b + \frac{h}{6} \right)} h - Pe = 0 \Rightarrow e = \frac{b^2}{2 \left( b + \frac{h}{6} \right)}$$

Assim, a excentricidade  $e$  depende unicamente das propriedades geométricas da seção transversal. Independentemente do valor da carga  $P$  aplicada, o perfil fletirá sem torcer se esta carga for aplicada na excentricidade determinada anteriormente.

### 20.13 – Exemplo 10

Determine a posição do centro de cisalhamento do perfil C enrijecido mostrado na Fig. (20.35), sabendo que suas dimensões estão apresentadas em in.

Para que esse problema seja resolvido, devem ser determinadas as intensidades dos fluxos de cisalhamento nas mesas e nos enrijecedores. Em seguida, esses fluxos devem ser integrados nos elementos de paredes finas, de forma a se obter suas forças equivalentes. Finalmente, impõe-se o equilíbrio em termos de momento em relação a um ponto particular. Para esse problema, efetua-se a somatória dos momentos em relação ao ponto A mostrado na Fig. (20.36).

Para a determinação do fluxo de cisalhamento deve-se utilizar a Eq.(20.5), a qual depende do momento de inércia da seção transversal e do momento estático das áreas consideradas. Assim:

$$I_z = 2 \cdot \left[ \frac{t \cdot 1^3}{12} + t \cdot 1 \cdot 1,5^2 \right] + 2 \cdot \left[ \frac{1,8 \cdot t^3}{12} + 1,8 \cdot t \cdot 2^2 \right] + \frac{t \cdot 4^3}{12}$$

Desprezando os termos de alta ordem de  $t$ , uma vez que a seção é composta por elementos de paredes finas, tem-se:

$$I_z = 2 \cdot \left[ \frac{t \cdot 1^3}{12} + t \cdot 1 \cdot 1,5^2 \right] + 2 \cdot \left[ 1,8 \cdot t \cdot 2^2 \right] + \frac{t \cdot 4^3}{12} \Rightarrow I_z = 24,4t$$

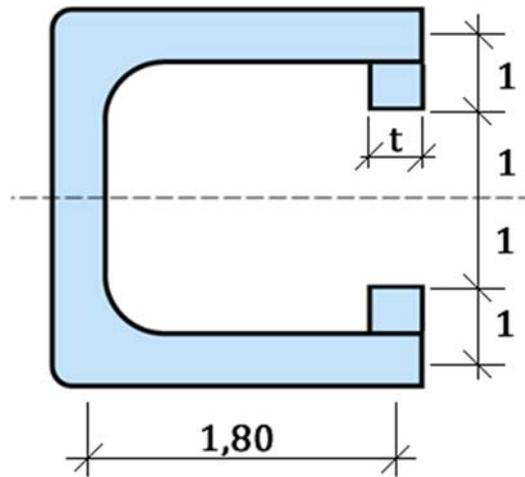


Figura 20.35 Seção transversal a ser analisada.

O valor do momento estático dos enrijecedores é igual a:

$$Q_{\text{enrijecedor}} = t \cdot 1 \cdot 1,5 \Rightarrow Q_{\text{enrijecedor}} = 1,5t$$

Já o valor do momento estático das mesas é igual a:

$$Q_{\text{mesa}} = t \cdot 1 \cdot 1,5 + 1,8 \cdot t \cdot 2 \Rightarrow Q_{\text{mesa}} = 5,1t$$

Com base nos valores dos momentos de inércia e estático das áreas, verifica-se que a intensidade máxima do fluxo de cisalhamento nos enrijecedores é igual a:

$$q_{\text{enrijecedor}} = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_{\text{enrijecedor}} = \frac{P \cdot 1,5t}{24,4t} \Rightarrow q_{\text{enrijecedor}} = 0,061475P$$

E nas mesas, o valor máximo é igual a:

$$q_{\text{mesa}} = \frac{V_j Q_k}{I_k} \Rightarrow q_{\text{mesa}} = \frac{P \cdot 5,1t}{24,4t} \Rightarrow q_{\text{mesa}} = 0,2090P$$

Assim, a distribuição dos fluxos de cisalhamento na seção transversal é apresentada na Fig. (20.36). A força equivalente na mesa é obtida integrando-se o fluxo ao longo do comprimento da mesa. Sabendo que essa integral é igual à área do fluxo tem-se:

$$F_{\text{mesa}} = \left( \frac{0,2090P + 0,061475P}{2} \right) 1,8 \Rightarrow F_{\text{mesa}} = 0,2434P$$

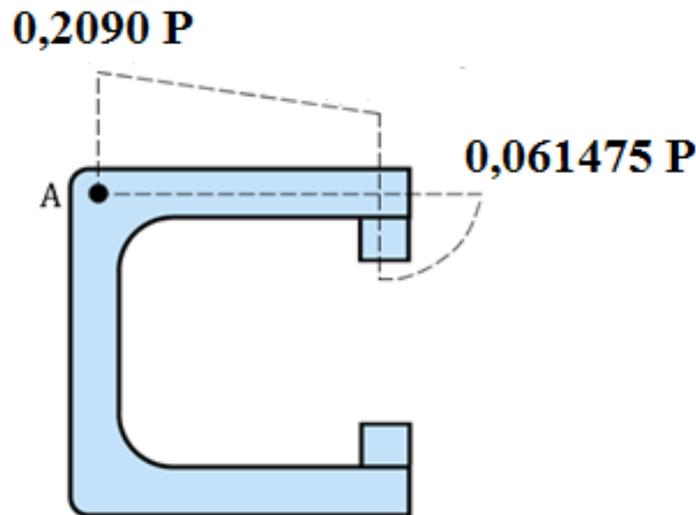


Figura 20.36 Distribuição do fluxo de cisalhamento nos elementos de parede fina.

Já nos enrijecedores, a força equivalente é obtida de forma semelhante. Assim:

$$F_{\text{enrijecedor}} = \int_0^1 \frac{P}{24,4t} t \cdot s \left(1 + \frac{s}{2}\right) ds \Rightarrow F_{\text{enrijecedor}} = \frac{P}{24,4} \int_0^1 s + \frac{s^2}{2} ds \Rightarrow$$

$$F_{\text{enrijecedor}} = 0,0273P$$

Impondo a condição de equilíbrio de momentos em relação ao ponto A, apresentado na Fig. (20.36), obtém-se:

$$F_{\text{mesa}} \cdot 4 + 2 \cdot F_{\text{enrijecedor}} \cdot 1,8 - Pe = 0 \Rightarrow 0,2434P \cdot 4 + 2 \cdot 0,0273P \cdot 1,8 - Pe = 0$$

$$e = 1,072 \text{ in}$$

Dessa forma, assim como no exemplo anterior, a excentricidade de aplicação da carga que provoca apenas flexão na barra depende somente das propriedades geométricas da seção transversal. Se comparado ao perfil C sem enrijecedor, analisado no exemplo anterior tem-se a seguinte resposta:

$$e = \frac{b^2}{2\left(b + \frac{h}{6}\right)} \Rightarrow e = \frac{1,8^2}{2\left(1,8 + \frac{4}{6}\right)} \Rightarrow e = 0,6567 \text{ in}$$

Assim, a presença dos enrijecedores permite que a carga seja aplicada a uma distância maior.

20.14 – Exemplo 11

Determine a posição do centro de cisalhamento da seção transversal apresentada na Fig. (20.37).

Para que esse problema seja resolvido deve-se, inicialmente, determinar as coordenadas do centro de gravidade da seção. Assim:

$$z_{cg} = \frac{(6 \cdot 1 \cdot 12)2 + (12 \cdot 1 \cdot 6)2}{(6 \cdot 1)2 + (12 \cdot 1)2} \Rightarrow z_{cg} = 8 \text{ cm}$$

A localização do centro de gravidade da seção ao longo do eixo  $y$ ,  $y_{cg}$ , encontra-se na metade de sua altura devido à simetria da seção em relação a este eixo.

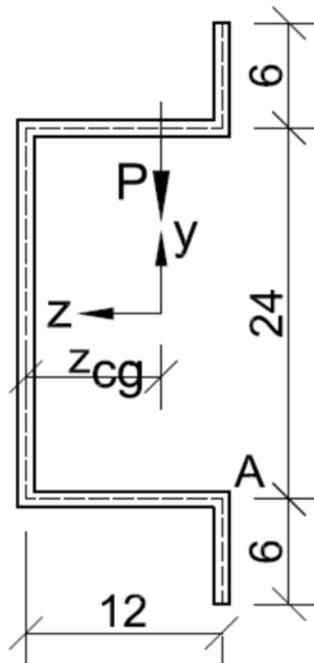


Figura 20.37 Estrutura a ser analisada. Dimensões em cm.

O momento de inércia da seção em torno do eixo  $z$  é igual a:

$$I_z = \left[ \frac{1 \cdot 6^3}{12} + 1 \cdot 6 \cdot 15^2 \right] 2 + \left[ \frac{12 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 12 \cdot 12^2 \right] 2 + \frac{1 \cdot 24^3}{12} \Rightarrow I_z = 7346 \text{ cm}^4$$

A força equivalente atuante em cada um dos elementos de paredes finas que compõem a seção transversal pode ser obtida integrando-se o fluxo de cisalhamento ao longo do comprimento da parede. Observando os sentidos das forças ilustrados na Fig. (20.38), estas podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$F_1 = \frac{V}{I} \int_0^6 1 \cdot x \cdot \left[ 12 + (6-x) + \frac{x}{2} \right] dx \Rightarrow F_1 = \frac{V}{I} \int_0^6 x \cdot \left[ 18 - \frac{x}{2} \right] dx \Rightarrow F_1 = 288 \frac{V}{I}$$

$$F_2 = \frac{V}{I} \int_0^{12} (6 \cdot 1 \cdot 15 + 1 \cdot x \cdot 12) dx \Rightarrow F_2 = \frac{V}{I} \int_0^{12} (90 + 12x) dx \Rightarrow F_2 = 1944 \frac{V}{I}$$

$$F_3 = 2 \frac{V}{I} \int_0^{12} \left[ 6 \cdot 1 \cdot 15 + 12 \cdot 1 \cdot 12 + 1 \cdot x \cdot \left( (12-x) + \frac{x}{2} \right) \right] dx \Rightarrow$$

$$F_3 = 2 \frac{V}{I} \int_0^{12} 234 + 12 \cdot x - \frac{x^2}{2} dx \Rightarrow F_3 = 6768 \frac{V}{I}$$

Com base nas forças equivalentes determinadas anteriormente constata-se que o equilíbrio em termos de forças pode ser assim expresso:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 2F_1 + F_3$$

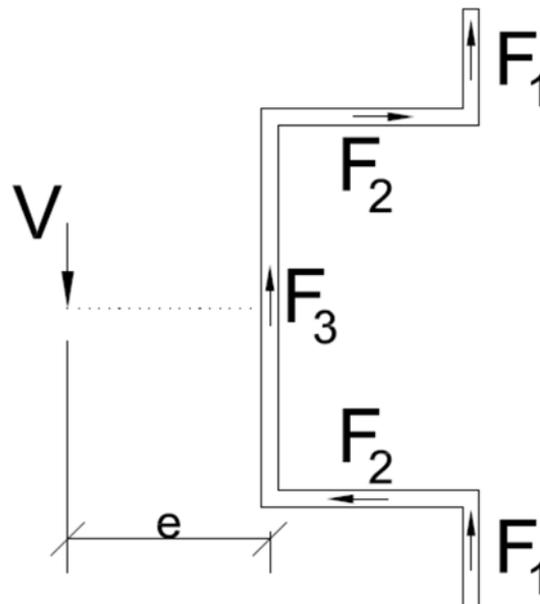


Figura 20.38 Sentido de atuação das forças equivalente e posicionamento do centro de torção.

A posição do centro de cisalhamento resulta da condição de que na seção exista somente um esforço cortante estaticamente equivalente, passando por um ponto sobre o eixo de simetria distante  $e$  do eixo de redução. A condição de equivalência pode ser expressa como:

$$\sum M = 0 \Rightarrow V \cdot e + 2(F_1 \cdot 12) - 2(F_2 \cdot 12) = 0 \Rightarrow V \cdot e = 24(F_2 - F_1)$$

Do equilíbrio de forças na direção  $y$  foi mostrado que:  $V = 2F_1 + F_3$ . Assim, a equação anterior pode ser assim reescrita:

$$V \cdot e = 24(F_2 - F_1) \Rightarrow (2F_1 + F_3)e = 24(F_2 - F_1) \Rightarrow e = \frac{24(F_2 - F_1)}{2F_1 + F_3}$$

Substituindo os valores das forças equivalentes obtém-se:

$$e = \frac{24(F_2 - F_1)}{2F_1 + F_3} \Rightarrow e = \frac{24\left(1944\frac{V}{I} - 288\frac{V}{I}\right)}{2\left(288\frac{V}{I}\right) + 6768\frac{V}{I}} \Rightarrow e = 5,41 \text{ cm}$$

### 20.15 – Exemplo 13

Determine a localização  $e$  do centro de cisalhamento para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na Fig. (20.39). Os segmentos têm espessura  $t$ .

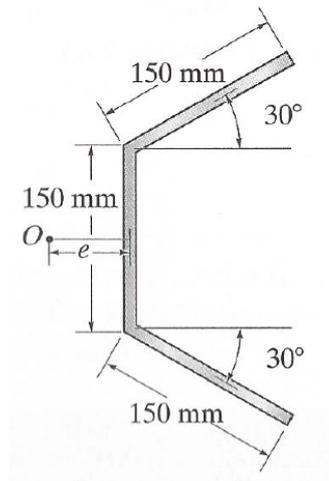


Figura 20.39 Seção transversal a ser analisada.

Para a determinação do centro de cisalhamento da seção transversal mostrada na Fig. (20.39) deve-se determinar o momento de inércia dessa seção em torno do eixo  $z$ . Como existem porções da seção transversal que não estão alinhadas com os eixos  $y$  e  $z$ , o momento de inércia deve ser calculado utilizando a definição, via integral, ou seja,

$$I_z = \int_A y^2 dA . \text{ Portanto:}$$

$$I_z = \frac{t \cdot 150^3}{12} + 2 \int_A y^2 dA \Rightarrow I_z = \frac{t \cdot 150^3}{12} + 2 \int_0^{150} t (s \cdot \text{sen}(30^\circ) + 75)^2 ds \Rightarrow$$

$$I_z = \frac{t \cdot 150^3}{12} + 2 \int_0^{150} t \left( \frac{s^2}{4} + 75 \cdot s + 5625 \right) ds \Rightarrow I_z = 281250t + 3937500t$$

$$I_z = 4218750t$$

A força resultante do fluxo de cisalhamento na porção inclinada da seção transversal é obtida integrando-se o fluxo de cisalhamento ao longo do comprimento da seção. Assim, o fluxo de cisalhamento, em função de uma ordenada  $s$  que se inicia na parte superior do perfil, pode ser assim expresso:

$$q_x = \frac{VQ_z}{I_z} \Rightarrow q_x = \frac{V}{I_z} st \left( 75 + 150 \cdot \text{sen}(30^\circ) - \frac{s}{2} \text{sen}(30^\circ) \right) \Rightarrow$$

$$q_x = \frac{V}{I_z} st \left( 150 - \frac{s}{4} \right)$$

Portanto, a força na porção inclinada da seção transversal assume o seguinte valor:

$$F_{\text{mesa}} = \int_s q_x ds \Rightarrow F_{\text{mesa}} = \frac{V}{I_z} \int_0^{150} st \left( 150 - \frac{s}{4} \right) ds \Rightarrow F_{\text{mesa}} = \frac{Vt}{I_z} 1406250 \Rightarrow$$

$$F_{\text{mesa}} = \frac{Vt}{4218750t} 1406250 \Rightarrow F_{\text{mesa}} = \frac{V}{3}$$

Impondo o equilíbrio de momentos em relação ao ponto O obtém-se:

$$Ve = 2 \left[ \frac{V}{3} \cos(30) \cdot 75 \right] \Rightarrow e = 43,3 \text{ mm}$$

### 20.16 – Exemplo 14

Determine a localização  $e$  do centro de cisalhamento para os elementos de paredes finas que compõem a seção transversal mostrada na Fig. (20.40). Todos os segmentos têm espessura  $t$ .

Para a determinação do centro de cisalhamento da seção transversal apresentada na Fig. (20.40) deve-se calcular as forças equivalentes nos elementos de paredes finas que a compõem. Como existem elementos de paredes finas que não estão alinhados com

os eixos  $y$  e  $z$ , o valor da inércia da seção em torno do eixo  $z$  deve ser avaliado utilizando-se a definição de momento de inércia, ou seja,  $I_z = \int_A y^2 dA$ .

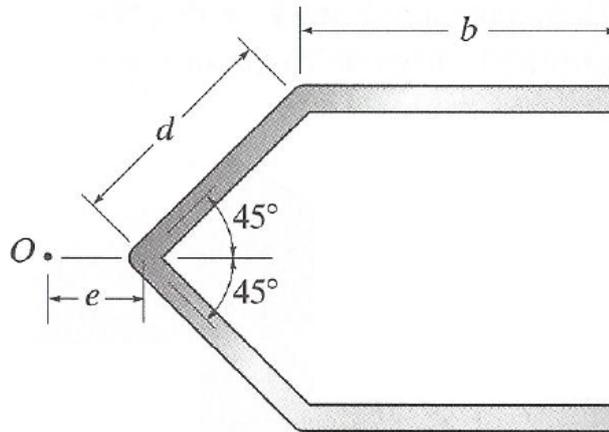


Figura 20.40 Seção transversal a ser analisada.

Por meio de simples constatação geométrica, verifica-se facilmente que estes elementos de paredes finas podem ser descritos como:

$$y = s \cdot \text{sen}(45^\circ)$$

sendo  $s$  a coordenada paralela a maior dimensão do elemento de parede fina.

Portanto,  $I_z$  pode ser calculado como:

$$I_z = \left[ \frac{bt^3}{12} + bt \left( \frac{\sqrt{2}}{2} d \right)^2 \right] 2 + \left[ \int_0^d t (s \cdot \text{sen}(45^\circ))^2 ds \right] 2$$

Como os elementos que compõem a seção transversal analisada são de paredes finas, os termos de alta ordem de  $t$  podem ser desprezados. Assim:

$$I_z = btd^2 + 2 \int_0^d t \frac{s^2}{2} ds \Rightarrow I_z = btd^2 + \frac{td^3}{3}$$

A força equivalente nas mesas da seção (elementos de paredes finas horizontais) é dada por:

$$F_{\text{mesa}} = \frac{V}{I_z} \int_A y dA \Rightarrow F_{\text{mesa}} = \frac{V}{I_z} \int_0^b st \frac{\sqrt{2}}{2} d \cdot ds \Rightarrow F_{\text{mesa}} = \frac{V}{I_z} tdb^2 \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Substituindo o valor de  $I_z$  obtém-se:

$$F_{mesa} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} V t d b^2}{b t d^2 + \frac{t d^3}{3}} \Rightarrow F_{mesa} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{V b^2}{(3b d + d^2)}$$

Efetuada a somatória de momentos em relação ao ponto onde os elementos de paredes finas inclinados encontram-se obtém-se o valor de  $e$ . Assim:

$$V e = 2 \cdot F_{mesa} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} d \Rightarrow V e = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} d \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{V b^2}{(3b d + d^2)} \Rightarrow e = \frac{3}{2} \frac{b^2}{(3b + d)}$$

## **21. – Deslocamentos em Vigas. Linha Elástica**

---

### 21.1 – Introdução

Nos projetos de engenharia estrutural, o estabelecimento de limites para os valores das deflexões, ou deslocamentos, de elementos estruturais submetidos a esforços de flexão é de grande importância. Os valores dos deslocamentos dos pontos materiais pertencentes aos elementos estruturais estão diretamente relacionados ao bom desempenho da estrutura e também ao conforto e bem estar de seus usuários.

Embora a condição de equilíbrio seja atendida em diversas situações, ou seja, o colapso mecânico não é observado, o deslocamento excessivo da estrutura pode causar sua inutilização. Como mostrado na Fig. (21.1), o deslocamento excessivo de uma viga, pertencente ao sistema estrutural de um edifício, pode resultar no ineficiente funcionamento de portas e janelas, além do descolamento dos revestimentos das paredes e das lajes. Assim, nessas situações a estrutura não atende às suas condições de serviço.



Figura 21.1 Deslocamentos excessivos em estruturas.

Existem diversos métodos que permitem a determinação dos deslocamentos em elementos de barra geral fletidos. Dentre estes, será apresentado nestas notas, o método conhecido como *Linha Elástica*. A linha elástica refere-se à forma exibida pelo eixo de um elemento de barra geral composto por material elástico em sua configuração deslocada.

Para fins ilustrativos, podem ser analisadas, qualitativamente, as linhas elásticas dos elementos de viga apresentados na Fig. (21.2). Nestes elementos atuam ações externas que produzem flexão, conduzindo a estrutura a uma configuração deslocada em relação à sua posição original. A linha formada pela união dos pontos pertencentes ao eixo da viga na posição deslocada define a linha elástica. Nas ilustrações apresentadas na Fig. (21.2), as linhas na cor azul representam as linhas elásticas.

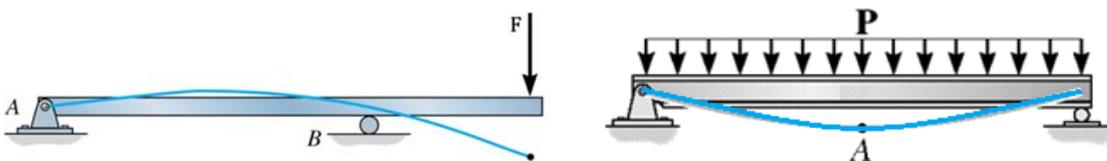


Figura 21.2 Linha elástica em vigas.

O estudo da linha elástica que será apresentado neste capítulo visa à avaliação dos deslocamentos em elementos estruturais do tipo viga. Portanto, objetiva-se determinar, para os pontos localizados sobre o eixo da viga, o deslocamento perpendicular ao eixo da viga e suas rotações.

Para a determinação da(s) expressão(ões) que representa(m) a linha elástica, deve-se considerar as condições de vinculação atuantes na estrutura. Se em um dado ponto, localizado na ordenada  $x$  ao longo do comprimento da viga, o deslocamento  $v$  for nulo, como nos apoios fixo e móvel e também nos engastes, tem-se  $v(x) = 0$ . Por outro lado, se a rotação for nula neste ponto, como ocorre nos engastes, tem-se que  $dv(x)/dx = v'(x) = 0$ .

Além disso, os valores dos esforços solicitantes (momento fletor e esforço cortante) ao longo dos pontos da viga devem também ser considerados. Para as vigas mostradas na Fig. (21.2), constata-se que o momento fletor nos pontos onde atuam os apoios do tipo fixo é nulo. Com relação ao esforço cortante, verifica-se que seu valor é igual a  $F$ , para a primeira das vigas mostradas na Fig. (21.2), no ponto localizado na extremidade do balanço, ou seja, no ponto onde a força concentrada é aplicada.

O conjunto formado pelos valores dos deslocamentos, das rotações e dos esforços solicitantes conhecidos ao longo dos pontos da estrutura analisada é denominado condições de contorno aplicadas a estrutura. As condições de contorno serão utilizadas para a determinação das expressões que definem a linha elástica.

Para encerrar a parte introdutória deste capítulo, deve-se dedicar atenção especial aos pontos cuja rotação seja nula. Estes pontos representam inflexões na curva de deslocamento, portanto, serão nestes pontos em que os deslocamentos apresentarão seus valores extremos, máximos ou mínimos, locais ou globais. Dessa forma, os valores extremos dos deslocamentos, que serão utilizados para as verificações de projeto, devem ser calculados nos pontos onde a rotação é nula. Para a segunda viga mostrada na Fig. (21.2), constata-se que o deslocamento máximo ocorre no ponto A, localizado no centro do vão. Não por acaso, nesse ponto a rotação é nula.

Tal constatação pode ser também obtida matematicamente, uma vez que a rotação é igual a derivada primeira do deslocamento em relação ao comprimento do elemento estrutural, ou seja,  $dv(x)/dx = v'(x) = 0$ . Utilizando os conhecimentos do cálculo diferencial, quando  $v'(x) = 0$  tem-se um ponto de extremo de  $v(x)$ .

## 21.2 – Equação da Linha Neutra

Para que o cálculo dos deslocamentos em vigas via linha elástica seja possível, deve-se, inicialmente, formular o problema associando as deformações no plano da seção transversal aos carregamentos atuantes e aos esforços solicitantes produzidos por estes. Para tal fim, pode-se considerar a viga prismática mostrada na Fig. (21.3), a qual está em equilíbrio quando submetida a um conjunto de ações externas.

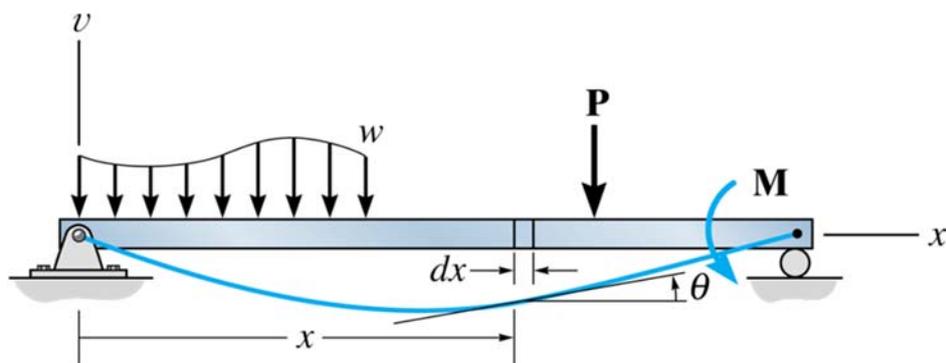


Figura 21.3 Viga submetida a um conjunto de ações externas.

Assumindo que a viga obedeça ao regime de pequenos deslocamentos, pode-se aproximar sua configuração deslocada por um arco de círculo. Dessa forma, um elemento infinitesimal de comprimento  $dx$  irá apresentar, antes e depois da deformação, as configurações geométricas mostradas na Fig. (21.4). Por meio desta figura observa-se que a deformação normal no elemento varia conforme o ponto analisado percorre a altura da seção transversal, como já discutido nos capítulos 17 e 18.

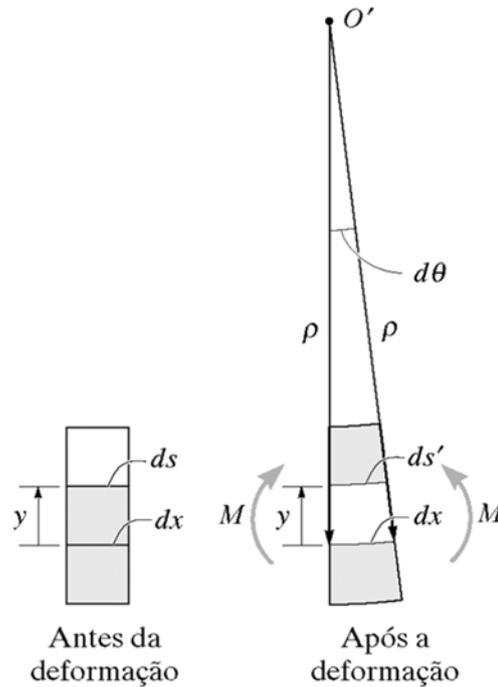


Figura 21.4 Elemento infinitesimal da viga. Antes e após a deformação.

Utilizando a definição de deformação normal, verifica-se que a deformação normal ao longo de uma dada fibra dessa seção pode ser calculada por:

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} \quad (21.1)$$

Conforme mostrado na Fig. (21.4), verifica-se que antes da deformação  $ds = dx$ . Após a deformação, a configuração deslocada da viga será aproximada por um arco de círculo. Assim, o conjunto de pontos que compõe a fibra que permanece com comprimento  $dx$ , isto é, a fibra que mantém-se indeformada, pode ser definido a partir de um arco de círculo de raio  $\rho$  e centro  $O'$ . Uma vez que  $d\theta$  define o ângulo entre os lados do elemento infinitesimal considerado (a abertura do arco de círculo), tem-se que:

$$ds = dx = \rho d\theta \quad (21.2)$$

De forma semelhante, o comprimento deformado de uma dada fibra,  $ds'$ , pode ser definido em função do arco de círculo de raio  $\rho$  e centro  $O'$ . Assim, para as fibras deformadas tem-se que:

$$ds' = (\rho - y)d\theta \quad (21.3)$$

Com base nas Eq.(21.2) e Eq.(21.3), pode-se reescrever a Eq.(21.1) como:

$$\varepsilon = \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{y}{\rho} \quad (21.4)$$

Como o problema envolve apenas a flexão em torno do eixo  $z$ , sabe-se que as tensões normais, neste caso, estão associadas ao momento fletor atuante por meio da seguinte relação, conforme apresentado no capítulo 17:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y \quad (21.5)$$

Utilizando a lei de Hooke ( $\sigma = E\varepsilon$ ) e a Eq.(21.4), pode-se reescrever a Eq.(21.5) da seguinte forma:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y \Rightarrow E\varepsilon = -\frac{M}{I}y \Rightarrow -E\frac{y}{\rho} = -\frac{M}{I}y \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (21.6)$$

A Eq.(21.6) relaciona o valor inverso do raio do arco de círculo, também conhecido como curvatura, ao momento fletor atuante. O próximo passo para a obtenção da formulação da linha elástica envolve a associação da curvatura ao deslocamento da viga. Para tal fim, deve-se considerar um elemento representativo da linha elástica de uma viga como mostrado na Fig. (21.5).

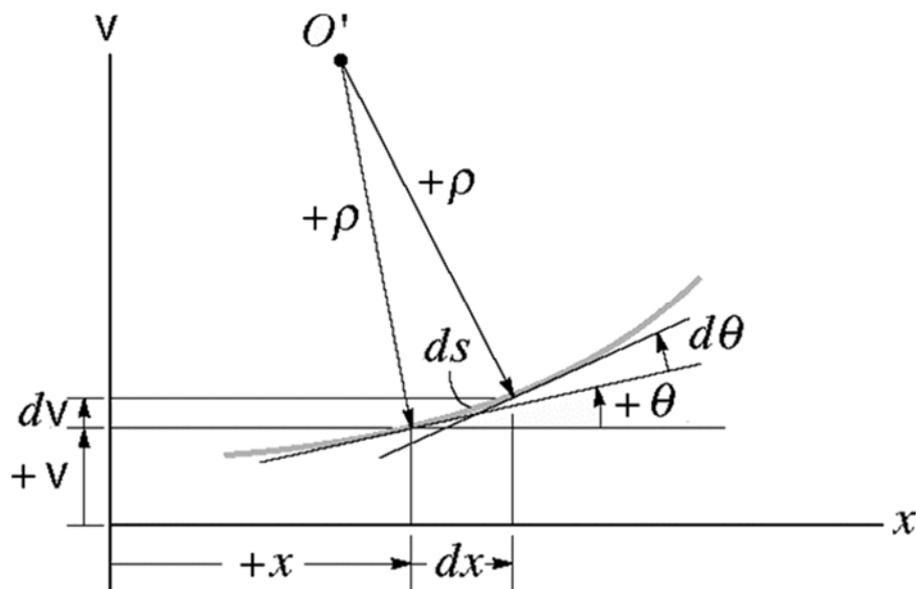


Figura 21.5 Elemento representativo da linha elástica

Conforme mostrado na Fig. (21.5),  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $x$  e a tangente à curva de deflexão, ou linha elástica, em um dado ponto. O ângulo  $\theta$  possui valor positivo se medido no sentido anti-horário. Assumindo-se que a viga obedeça ao regime de pequenos deslocamentos e pequenas rotações, o comprimento infinitesimal da linha elástica  $ds$  pode ser assim calculado:

$$ds = \rho d\theta \quad (21.7)$$

Portanto, a curvatura pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (21.8)$$

Com base na Eq.(21.8), admitindo-se o sistema cartesiano clássico, a curvatura é positiva se a concavidade da linha elástica estiver voltada para o sentido positivo do eixo  $y$ , sendo negativa em caso contrário, como mostra a Fig. (21.6).

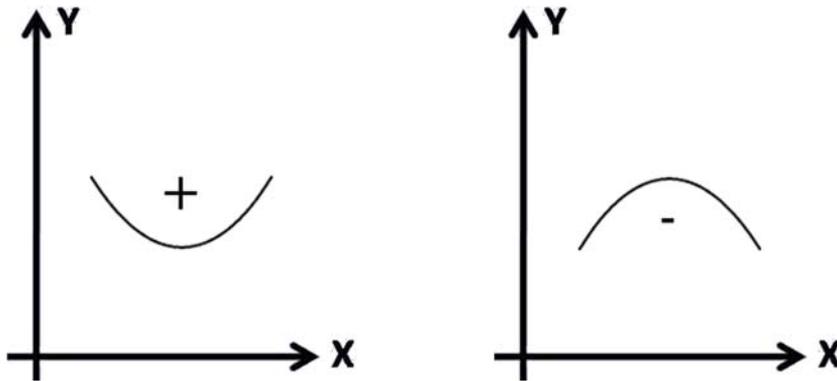


Figura 21.6 Sinais para a curvatura da linha elástica.

A inclinação da curva de deflexão é igual à sua primeira derivada, ou seja,  $dv/dx$ . Com base na Fig. (21.5), verifica-se que, geometricamente, a inclinação da curva de deflexão é dada pela variação do deslocamento,  $dv$ , dividido pelo incremento do comprimento da linha elástica ao longo do eixo  $x$ ,  $dx$ . Como  $dv$  e  $dx$  são infinitesimais, pode-se escrever que:

$$\tan(\theta) = \frac{dv}{dx} \quad (21.9)$$

Essa formulação assume que a viga obedeça ao regime de pequenos deslocamentos, e conseqüentemente ao de pequenas rotações. Isso faz com que tanto os deslocamentos quanto as rotações sejam muito pequenos. Portanto, admite-se que a curva de deflexão seja praticamente horizontal. Como consequência dessa hipótese tem-se que:

$$ds \approx dx \quad (21.10)$$

Assim, a curvatura, expressa pela Eq.(21.8), passa a ser dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (21.11)$$

Uma vez que a Eq.(21.10) é verdadeira, pelas hipóteses consideradas, tem-se que o ângulo  $\theta$  é muito pequeno. Nessa condição sabe-se que  $\tan(\theta) \approx \theta$ . Com base nesta informação, pode-se reescrever a Eq.(21.9) como:

$$\tan(\theta) = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \theta = \frac{dv}{dx} \quad (21.12)$$

Derivando a Eq.(21.12) em relação ao comprimento da linha elástica tem-se:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (21.13)$$

Utilizando os resultados apresentados nas Eq.(21.11) e Eq.(21.13) obtém-se:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (21.14)$$

A Eq.(21.14) relaciona a curvatura ao deslocamento da viga. Para que o deslocamento seja relacionado ao esforço solicitante atuante deve-se utilizar a Eq.(21.6), a qual expressa a curvatura em função do momento fletor atuante. Igualando as curvaturas dadas pelas Eq.(21.6) e Eq.(21.14) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (21.15)$$

A Eq.(21.15) pode ser integrada sucessivamente para a obtenção do deslocamento da viga, e conseqüentemente da expressão da linha elástica, desde que sejam conhecidas as variações do momento fletor,  $M$ , do módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , e do momento de inércia da seção transversal em torno do eixo  $z$ ,  $I$ , ao longo do comprimento da barra.

A Eq.(21.15) pode ainda ser escrita em função do esforço cortante,  $V$ , ou do carregamento distribuído,  $q$ , atuante na viga. Para a obtenção dessas expressões devem ser utilizadas as relações diferenciais apresentadas no capítulo 5. As relações diferenciais preveem que, na situação de equilíbrio, as seguintes condições são válidas.

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \frac{dV}{dx} = -q \quad (21.16)$$

Portanto, com base nas relações diferenciais mostradas na Eq.(21.16), pode-se reescrever a Eq.(21.15) na seguinte forma.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{EI} \right) \Rightarrow \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{1}{EI} \frac{dM}{dx} \Rightarrow \quad (21.17)$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{V}{EI}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{V}{EI} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{d^3v}{dx^3} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{V}{EI} \right) \Rightarrow \frac{d^4v}{dx^4} = \frac{1}{EI} \frac{dV}{dx} \Rightarrow \quad (21.18)$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{q}{EI}$$

Portanto, as equações que permitem a determinação das deflexões em vigas, e consequentemente da linha neutra, são as mostradas na Eq.(21.19).

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v'' = \frac{M}{EI} \quad \frac{d^3v}{dx^3} = v''' = \frac{V}{EI} \quad \frac{d^4v}{dx^4} = v'''' = -\frac{q}{EI} \quad (21.19)$$

Em muitas aplicações de engenharia, é comum a utilização de elementos estruturais cujas seções transversais tenham suas dimensões variando ao longo de seu comprimento. Nessa situação, o momento de inércia, que depende das dimensões da seção transversal, deverá ser expresso considerando tal variação. Portanto, nesses casos deve-se integrar sucessivamente uma das Eq.(21.19) considerando a variação das dimensões da seção transversal.

Como resultado das integrações sucessivas das Eq.(21.19), surgem termos livres que necessitam ser determinados em função das condições de contorno presentes na viga. As condições de contorno referem-se a pontos onde os deslocamentos, rotações ou esforços solicitantes são conhecidos. Para a viga mostrada na Fig. (21.7) constata-se que as condições de contorno são as seguintes:



Figura 21.7 Viga engastada apoiada.

$$v(A) = 0 \quad v(B) = 0 \quad \frac{dv(A)}{dx} = v'(A) = 0 \quad (21.20)$$

Em pontos onde ocorrem descontinuidades, como nos pontos de atuação de ações pontuais (forças ou momentos) e pontos em que ocorrem mudanças nas dimensões da seção transversal, condições de compatibilidade de deslocamentos e

rotações devem ser incluídas na análise. Para a viga mostrada na Fig. (21.8) têm-se as seguintes condições de contorno.

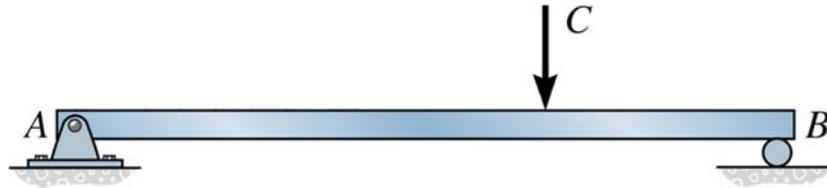


Figura 21.8 Viga bi apoiada com carga pontual.

$$\begin{aligned}
 v(A) &= 0 & v(B) &= 0 \\
 \frac{d^2v(A)}{dx^2} EI &= v''(A) EI = M(A) = 0 \\
 \frac{d^2v(B)}{dx^2} EI &= v''(B) EI = M(B) = 0 \\
 v_{AC}(C) &= v_{CB}(C) & v'_{AC}(C) &= v'_{CB}(C)
 \end{aligned}
 \tag{21.21}$$

### 21.2.1 – Exemplo 1

Determine a expressão da linha elástica para a viga mostrada na Fig. (21.9). Calcule também o deslocamento máximo da viga e os valores das rotações nos apoios. Considere que o produto  $EI$  seja constante para toda a extensão da viga.

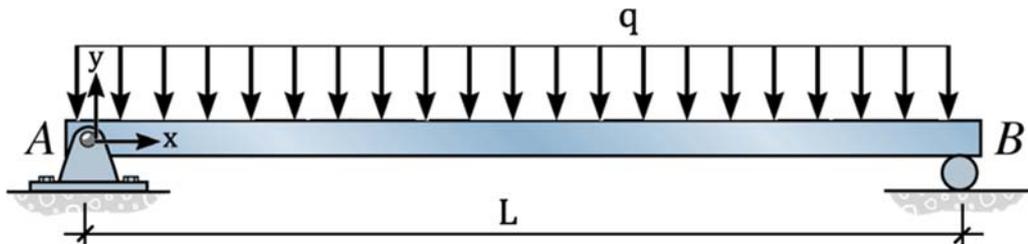


Figura 21.9 Viga a ser analisada.

Para a solução deste exemplo, deve-se determinar a expressão que relaciona o momento fletor atuante ao sistema de coordenadas posicionado no apoio A. Para isso, deve-se inicialmente calcular as reações de apoio. Devido à simetria da estrutura verifica-se facilmente que estas são iguais a:

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$

Assim, para uma seção genérica distante de  $x$  do apoio A, como ilustrado na Fig. (21.10), pode-se expressar o momento fletor efetuando-se seu equilíbrio de corpo rígido. Portanto:

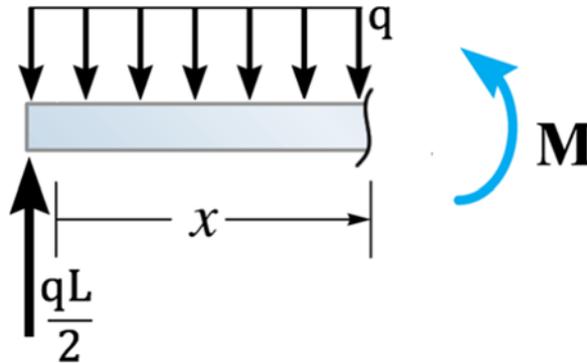


Figura 21.10 Determinação da equação do momento fletor.

$$\sum M = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{2}x + qx\frac{x}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

Utilizando a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right] \quad (21.22)$$

Integrando a Eq.(21.22) em relação ao comprimento da viga obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C_1 \right] \quad (21.23)$$

Integrando a Eq.(21.23) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.24)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + C_1x + C_2 \right]$$

Para que as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  sejam determinadas, deve-se aplicar as condições de contorno do problema. Estas duas constantes de integração são determinadas utilizando-se as duas condições de contorno do problema. Assim, sabe-se que:

$$v(A) = v(0) = 0$$

$$v(B) = v(L) = 0$$

Com a primeira das condições de contorno obtém-se:

$$v(A) = v(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12}0^3 - \frac{q}{24}0^4 + C_1 \cdot 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Já a aplicação da segunda delas resulta em:

$$v(B) = v(L) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12} L^3 - \frac{q}{24} L^4 + C_1 L \right] \Rightarrow C_1 = -\frac{q}{24} L^3$$

Dessa forma, a expressão do deslocamento da viga fica assim escrita:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 - \frac{q}{24} L^3 x \right] \quad (21.25)$$

As rotações são calculadas com base na primeira derivada da Eq.(21.25). Assim, a expressão que relaciona as rotações de todos os pontos da viga é a seguinte:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 - \frac{q}{24} L^3 \right] \quad (21.26)$$

Para o apoio A, a rotação é dada por:

$$\frac{dv(A)}{dx} = \frac{dv(0)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4} 0^2 - \frac{q}{6} 0^3 - \frac{q}{24} L^3 \right] \Rightarrow \frac{dv(0)}{dx} = -\frac{q}{24} \frac{L^3}{EI}$$

Já a rotação do apoio B é igual a:

$$\frac{dv(B)}{dx} = \frac{dv(L)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4} L^2 - \frac{q}{6} L^3 - \frac{q}{24} L^3 \right] \Rightarrow \frac{dv(L)}{dx} = \frac{q}{24} \frac{L^3}{EI}$$

O deslocamento máximo ocorre nos pontos onde a rotação é nula. Assim, para a viga em questão o deslocamento máximo ocorrerá em:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 - \frac{q}{24} L^3 \right] = 0 \Rightarrow 6Lx^2 - 4x^3 - L^3 = 0 \quad (21.27)$$

Resolvendo o polinômio cúbico mostrado na Eq.(21.27) obtêm-se as seguintes raízes:

$$x_1 = \frac{1}{2}(L - \sqrt{3}L) \quad x_2 = \frac{1}{2}(L + \sqrt{3}L) \quad x_3 = \frac{L}{2}$$

Constata-se facilmente que as raízes  $x_1$  e  $x_2$  resultam em valores para coordenadas  $x$  que não pertencem ao domínio da viga. Portanto, não são soluções possíveis para o problema. O ponto onde ocorre o deslocamento máximo é o ponto dado pela raiz  $x_3$ . Assim, o deslocamento máximo ocorre no centro do vão.

## 21.2.2 – Exemplo 2

Determine o deslocamento e a rotação para o ponto B da viga engastada mostrada na Fig. (21.11). Considere que o produto  $EI$  seja constante para toda a extensão da viga.

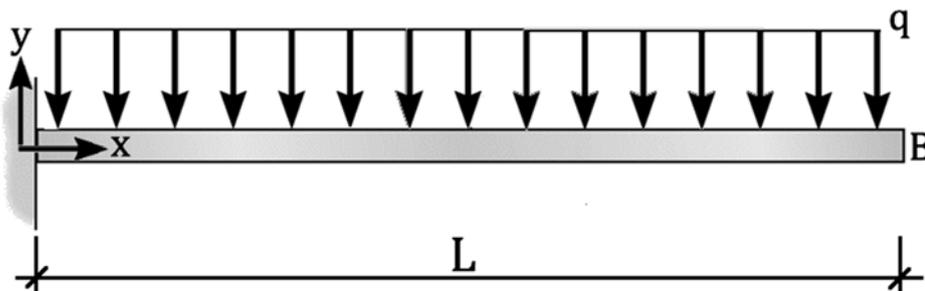


Figura 21.11 Viga a ser analisada.

Para a determinação da equação da linha elástica será utilizada a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19). Assim, deve-se obter uma expressão que relacione o valor do momento fletor à ordenada  $x$  ao longo do comprimento da viga. Esta equação é escrita com base nas reações de apoio da viga. Para a viga em análise, as reações de apoio são as apresentadas na Fig. (21.12).

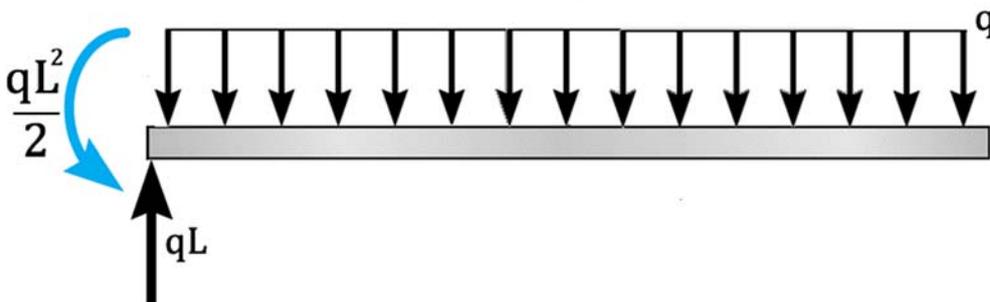


Figura 21.12 Reações de apoio.

Efetuando o equilíbrio de corpo rígido considerando as reações de apoio apresentadas na Fig. (21.12), pode-se escrever a intensidade do momento fletor ao longo do comprimento da viga, o qual resulta em:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -qLx + \frac{qL^2}{2} + qx\frac{x}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2}x^2$$

Utilizando a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2}x^2 \right] \quad (21.28)$$

Integrando a Eq.(21.28) uma vez em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2} x^2 \right] dx \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right] \quad (21.29)$$

Integrando a Eq.(21.29) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right] dx \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{6} x^3 - \frac{qL^2}{4} x^2 - \frac{q}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \right] \quad (21.30)$$

As duas constantes de integração,  $C_1$  e  $C_2$ , que surgiram do processo de integrações sucessivas, devem ser determinadas com base nas condições de contorno do problema. Com base na Fig. (21.11), observa-se que as condições de contorno são as seguintes:

$$v(0) = 0 \quad \frac{dv}{dx}(0) = 0$$

Utilizando a primeira condição de contorno apresentada acima obtém-se:

$$v(0) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{6} 0^3 - \frac{qL^2}{4} 0^2 - \frac{q}{24} 0^4 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Com a segunda condição de contorno determina-se  $C_1$ . Assim:

$$\frac{dv(0)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2} 0^2 - \frac{qL^2}{2} 0 - \frac{q}{6} 0^3 + C_1 \right] \Rightarrow C_1 = 0$$

Portanto, as expressões dos deslocamentos e rotações para os pontos que constituem a viga são iguais a:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{6} x^3 - \frac{qL^2}{4} x^2 - \frac{q}{24} x^4 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - \frac{q}{6} x^3 \right] \quad (21.31)$$

Avaliando as expressões mostradas na Eq.(21.31) para a extremidade do balanço obtém-se:

$$v(L) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{6} L^3 - \frac{qL^2}{4} L^2 - \frac{q}{24} L^4 \right] \Rightarrow v(L) = -\frac{qL^4}{8EI}$$

$$\frac{dv(L)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2} L^2 - \frac{qL^2}{2} L - \frac{q}{6} L^3 \right] \Rightarrow \frac{dv(L)}{dx} = -\frac{qL^3}{6EI}$$

Percebe-se, intuitivamente, que os valores de deslocamento e rotação calculados na extremidade do balanço são os valores máximos atuantes na viga.

### 21.2.3 – Exemplo 3

Determine a expressão da linha elástica para a viga mostrada na Fig. (21.13). Além disso, calcule o deslocamento e a rotação no ponto B. Considere que o produto EI seja constante para toda a extensão da viga.

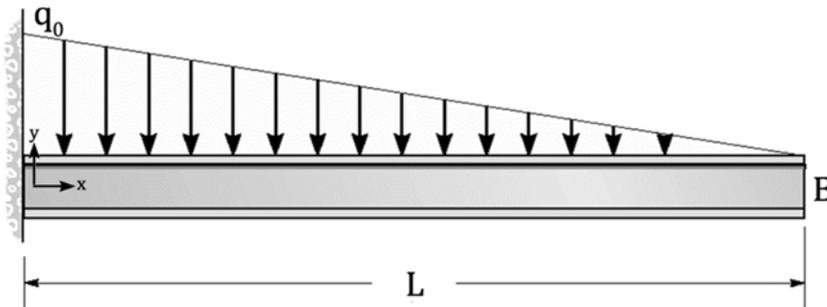


Figura 21.13 Viga a ser analisada.

Para a resolução deste exemplo será utilizada a terceira expressão mostrada na Eq.(21.19), a qual depende da variação do carregamento distribuído ao longo do comprimento da viga,  $q$ . Como o carregamento distribuído considerado varia linearmente ao longo do comprimento da viga, pode-se escrever sua variação como:

$$q = q_0 - \frac{q_0}{L} x$$

Assim, pode-se escrever a terceira expressão da Eq.(21.19) como:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = - \left[ q_0 - \frac{q_0}{L} x \right] \frac{1}{EI} \Rightarrow \frac{d^4 v}{dx^4} = \left[ \frac{q_0}{L} x - q_0 \right] \frac{1}{EI} \quad (21.32)$$

Integrando a Eq.(21.32) ao longo do comprimento da viga obtém-se:

$$\int \frac{d^4 v}{dx^4} dx = \int \left[ \frac{q_0}{L} x - q_0 \right] \frac{1}{EI} dx \Rightarrow \frac{d^3 v}{dx^3} = \left[ \frac{q_0}{2L} x^2 - q_0 x + C_1 \right] \frac{1}{EI} \quad (21.33)$$

Integrando a Eq.(21.33) novamente em relação ao comprimento da viga resulta em:

$$\int \frac{d^3v}{dx^3} dx = \int \left[ \frac{q_0}{2L} x^2 - q_0 x + C_1 \right] \frac{1}{EI} dx \Rightarrow$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \left[ \frac{q_0}{6L} x^3 - \frac{q_0}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \right] \frac{1}{EI} \quad (21.34)$$

Efetuada a integração da Eq.(21.34) em relação à  $x$  obtém-se a expressão das rotações dos pontos que compõem a viga. Assim:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \left[ \frac{q_0}{6L} x^3 - \frac{q_0}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \right] \frac{1}{EI} dx \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = \left[ \frac{q_0}{24L} x^4 - \frac{q_0}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \right] \frac{1}{EI} \quad (21.35)$$

Finalmente, integrando a Eq.(21.35) em relação ao comprimento da viga obtém-se a expressão da linha elástica. Dessa forma:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \left[ \frac{q_0}{24L} x^4 - \frac{q_0}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \right] \frac{1}{EI} dx \Rightarrow$$

$$v = \left[ \frac{q_0}{120L} x^5 - \frac{q_0}{24} x^4 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \right] \frac{1}{EI} \quad (21.36)$$

A Eq.(21.36) representa a equação da linha elástica, a qual envolve quatro constantes de integração,  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ . Estas constantes são determinadas com base em quatro condições de contorno do problema. Para a viga mostrada na Fig. (21.13) têm-se as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 ; \frac{dv}{dx}(0) = 0 ; \frac{d^2v(L)}{dx^2} EI = M(L) = 0 ; \frac{d^3v(L)}{dx^3} EI = V(L) = 0 \quad (21.37)$$

Utilizando a primeira das condições de contorno mostradas na Eq.(21.37) obtém-se:

$$v(0) = 0 = \left[ \frac{q_0}{120L} 0^5 - \frac{q_0}{24} 0^4 + \frac{C_1}{6} 0^3 + \frac{C_2}{2} 0^2 + C_3 0 + C_4 \right] \frac{1}{EI} \Rightarrow C_4 = 0$$

Por meio da segunda condição de contorno apresentada na Eq.(21.37) pode-se determinar o valor de  $C_2$ . Assim:

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 = \left[ \frac{q_0}{24L} 0^4 - \frac{q_0}{6} 0^3 + \frac{C_1}{2} 0^2 + C_2 0 + C_3 \right] \frac{1}{EI} \Rightarrow C_3 = 0$$

Com base na última condição de contorno mostrada na Eq.(21.37), que prevê que o esforço cortante seja nulo na extremidade do balanço, tem-se:

$$\frac{d^3v(L)}{dx^3} = 0 = \left[ \frac{q_0}{2L} L^2 - q_0 L + C_1 \right] \frac{1}{EI} \Rightarrow C_1 = \frac{q_0 L}{2}$$

Finalmente, utilizando a condição de contorno que prevê que o momento fletor seja nulo no ponto B obtém-se:

$$\frac{d^2v(L)}{dx^2} = 0 = \left[ \frac{q_0}{6L} L^3 - \frac{q_0}{2} L^2 + \frac{q_0 L}{2} L + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = -\frac{q_0 L^2}{6}$$

Dessa forma, com base nas constantes de integração determinadas anteriormente, as equações que descrevem o deslocamento e a rotação da viga são escritas como:

$$v = \left[ \frac{q_0}{120L} x^5 - \frac{q_0}{24} x^4 + \frac{q_0 L}{12} x^3 - \frac{q_0 L^2}{12} x^2 \right] \frac{1}{EI} \Rightarrow \quad (21.38)$$

$$\frac{dv}{dx} = \left[ \frac{q_0}{24L} x^4 - \frac{q_0}{6} x^3 + \frac{q_0 L}{4} x^2 - \frac{q_0 L^2}{6} x \right] \frac{1}{EI}$$

Com base na Eq.(21.38), verifica-se que os valores do deslocamento e da rotação no ponto B são iguais a:

$$v(B) = v(L) = \left[ \frac{q_0}{120L} L^5 - \frac{q_0}{24} L^4 + \frac{q_0 L}{12} L^3 - \frac{q_0 L^2}{12} L^2 \right] \frac{1}{EI} \Rightarrow$$

$$v(L) = -\frac{q_0 L^4}{30EI}$$

$$\frac{dv(B)}{dx} = \frac{dv(L)}{dx} = \left[ \frac{q_0}{24L} L^4 - \frac{q_0}{6} L^3 + \frac{q_0 L}{4} L^2 - \frac{q_0 L^2}{6} L \right] \frac{1}{EI} \Rightarrow$$

$$\frac{dv(L)}{dx} = -\frac{q_0 L^3}{24EI}$$

#### 21.2.4 – Exemplo 4

Determine as expressões que representam o deslocamento e a rotação dos pontos da viga mostrada na Fig. (21.14). Considere que o produto EI seja constante para toda a extensão da viga.

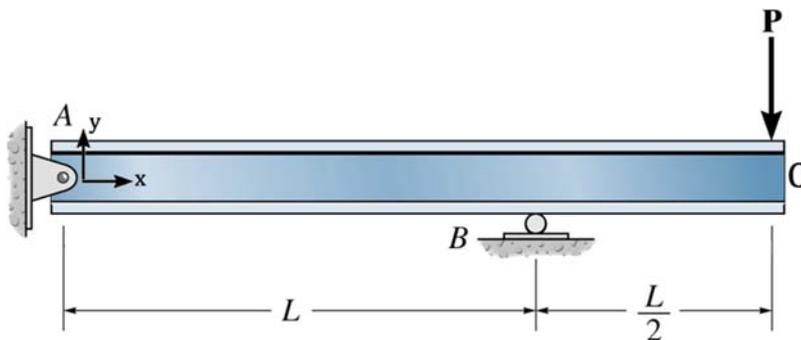


Figura 21.14 Viga a ser analisada.

Assumindo que a reação do apoio A atue no sentido de  $y$  negativo e que a reação do apoio B atue no sentido de  $y$  positivo, pode-se efetuar o equilíbrio de corpo rígido desta viga com o objetivo de determinar suas reações de apoio, as quais resultam em:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow -P \frac{3}{2}L + R_B L = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3}{2}P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P + \frac{3}{2}P - R_A = 0 \Rightarrow R_A = \frac{1}{2}P$$

Para a determinação das expressões do deslocamento e da rotação será utilizada a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19). Como o apoio B está posicionado de forma interna à viga, verifica-se que a equação do momento fletor deverá ser avaliada nos intervalos  $0 \leq x \leq L$  e  $L \leq x \leq \frac{3}{2}L$ . Assim:

$$\text{Para } 0 \leq x \leq L \quad \sum M = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}x + M(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M(x) = -\frac{P}{2}x$$

$$\text{Para } L \leq x \leq \frac{3}{2}L \quad \sum M = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}x - \frac{3P}{2}(x-L) + M(x) = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = Px - \frac{3PL}{2}$$

Considerando inicialmente o intervalo  $0 \leq x \leq L$ , pode-se escrever que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{2}x \right] \quad (21.39)$$

Integrando a Eq.(21.39) uma vez em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{2}x \right] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{4}x^2 + C_1 \right] \quad (21.40)$$

Integrando a Eq.(21.40) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{4}x^2 + C_1 \right] dx \Rightarrow v = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2 \right] \quad (21.41)$$

As duas constantes de integração,  $C_1$  e  $C_2$ , que surgiram do processo de integrações sucessivas, devem ser determinadas com base nas condições de contorno do problema. No intervalo considerado, constata-se, a partir da Fig. (21.14), que as seguintes as condições de contorno são observadas:

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0$$

Utilizando a primeira condição de contorno apresentada acima obtém-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{12} 0^3 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Com a segunda condição de contorno do intervalo tem-se:

$$v(L) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{12} L^3 + C_1 L \right] \Rightarrow C_1 = \frac{PL^2}{12}$$

Dessa forma, as expressões dos deslocamentos e das rotações para os pontos que constituem a viga no intervalo  $0 \leq x \leq L$  são as seguintes:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{12} x^3 + \frac{PL^2}{12} x \right] \Rightarrow \quad (21.42)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{4} x^2 + \frac{PL^2}{12} \right]$$

Considerando agora o intervalo  $L \leq x \leq \frac{3}{2}L$ , pode-se escrever a primeira das expressões mostradas na Eq.(21.19) como:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ Px - \frac{3PL}{2} \right] \quad (21.43)$$

Integrando a Eq.(21.43) em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ Px - \frac{3PL}{2} \right] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{2} x^2 - \frac{3PL}{2} x + C_3 \right] \quad (21.44)$$

Integrando a Eq.(21.44) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{2} x^2 - \frac{3PL}{2} x + C_3 \right] dx \Rightarrow \quad (21.45)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{6} x^3 - \frac{3PL}{4} x^2 + C_3 x + C_4 \right]$$

As duas constantes de integração,  $C_3$  e  $C_4$ , que surgiram na Eq.(21.45) são determinadas com base nas condições de contorno do problema. No intervalo considerado observam-se as seguintes condições de contorno:

$$v(L) = 0 ; \frac{d^2v(L)}{dx^2} EI = M \left( \frac{3}{2}L \right) = 0 ; \frac{d^3v(L)}{dx^3} EI = V \left( \frac{3}{2}L \right) = P$$

Porém, constata-se, por meio da Eq.(21.45), que as constantes de integração dependem apenas linearmente da variável  $x$ . Dessa forma, as duas últimas condições de contorno apresentadas neste intervalo não conduzem à determinação de  $C_3$  e  $C_4$ .

Para que a viga apresente continuidade sobre o apoio B, tem-se que a rotação neste ponto deve ser igual para ambos os intervalos que concorrem a este ponto. Assim, surge uma condição de continuidade igual a:

$$\frac{dv_{AB}(L)}{dx} = \frac{dv_{BC}(L)}{dx}$$

Sabendo que a expressão de  $\frac{dv_{AB}}{dx}$  é dada pela Eq.(21.42) obtém-se:

$$\frac{dv_{AB}(L)}{dx} = \frac{dv_{BC}(L)}{dx} \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P}{4}L^2 + \frac{PL^2}{12} \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{2}L^2 - \frac{3PL}{2}L + C_3 \right] \Rightarrow$$

$$C_3 = \frac{5PL^2}{6}$$

Como o deslocamento é nulo sobre o ponto B,  $x = L$ , determina-se a constante  $C_4$ , a qual é igual a:

$$v(L) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{6}L^3 - \frac{3PL}{4}L^2 + \frac{5PL^2}{6}L + C_4 \right] \Rightarrow C_4 = \frac{PL^3}{4}$$

Portanto, as expressões que relacionam o deslocamento e a rotação aos pontos posicionados ao longo do comprimento da viga, no intervalo  $L \leq x \leq \frac{3}{2}L$ , são as seguintes:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{6}x^3 - \frac{3PL}{4}x^2 + \frac{5PL^2}{6}x + \frac{PL^3}{4} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{2}x^2 - \frac{3PL}{2}x + \frac{5PL^2}{6} \right]$$

### 21.2.5 – Exemplo 5

Sabe-se que a equação que exprime o deslocamento dos pontos de uma viga biapoiada é a mostrada na Eq.(21.46). Com base nesta equação, determine o carregamento distribuído que deu origem a este deslocamento e também os esforços cortantes nos pontos  $x = 0$  e  $x = L$ .

$$v = -\frac{q_0}{90EI L^2} \left[ 3L^5 x - 5L^3 x^3 + 3Lx^5 - x^6 \right] \quad (21.46)$$

De acordo com a última das expressões mostradas na Eq.(21.19) tem-se que:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = v'''' = -\frac{q}{EI}$$

Portanto, o carregamento distribuído  $q$  é obtido derivando-se quatro vezes a Eq.(21.46) em relação à variável  $x$ . Assim:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{q_0}{90EIL^2} [3L^5x - 5L^3x^3 + 3Lx^5 - x^6] \\ \frac{dv}{dx} &= -\frac{q_0}{90EIL^2} [3L^5 - 15L^3x^2 + 15Lx^4 - 6x^5] \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= -\frac{q_0}{90EIL^2} [-30L^3x + 60Lx^3 - 30x^4] \\ \frac{d^3v}{dx^3} &= -\frac{q_0}{90EIL^2} [-30L^3 + 180Lx^2 - 120x^3] \\ \frac{d^4v}{dx^4} &= -\frac{q_0}{90EIL^2} [360Lx - 360x^2] \end{aligned} \quad (21.47)$$

Com base na última das expressões mostradas na Eq.(21.47) tem-se:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{q_0}{90EIL^2} [360Lx - 360x^2] = -\frac{q}{EI} \Rightarrow q = \frac{4q_0}{L^2} [Lx - x^2]$$

Assim, é um carregamento parabólico. Os valores dos esforços cortantes nos pontos  $x = 0$  e  $x = L$  são dados por:

$$\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{V}{EI} \Rightarrow V = \frac{d^3v}{dx^3} EI$$

Para o ponto  $x = 0$  tem-se:

$$V = -\frac{q_0}{90EIL^2} [-30L^3 + 180L \cdot 0^2 - 120 \cdot 0^3] EI \Rightarrow V = \frac{q_0L}{3}$$

Já para o ponto  $x = L$  obtém-se:

$$V = -\frac{q_0}{90EIL^2} [-30L^3 + 180LL^2 - 120L^3] EI \Rightarrow V = -\frac{q_0L}{3}$$

### 21.3 – Vigas Submetidas à Ações Concentradas

Em muitas aplicações de engenharia, estruturas são solicitadas por ações concentradas ao longo de seu comprimento. Tais ações são normalmente forças e momentos atuantes em um ou mais pontos materiais que compõem a estrutura. Em problemas deste tipo, ocorrem descontinuidades nas expressões que definem as

intensidades do momento fletor e do esforço cortante ao longo do comprimento da estrutura. Portanto, em problemas onde ações concentradas estão presentes, as equações que definem o deslocamento e a rotação devem ser escritas entre os trechos onde as descontinuidades estão presentes.

Apesar dos esforços solicitantes nos pontos onde as ações concentradas atuam poderem ser descontínuos, o deslocamento e a rotação nestes pontos devem ser contínuos. Assim, deve-se garantir a continuidade da estrutura. Como os deslocamentos e as rotações são definidos por trechos, deve-se garantir que as expressões que os descrevem sejam contínuas exatamente nos pontos onde as ações concentradas atuam.

### 21.3.1 – Exemplo 6

Determine a equação da linha elástica para a viga mostrada na Fig. (21.15). Considere que o produto  $EI$  seja constante para toda a extensão da viga.

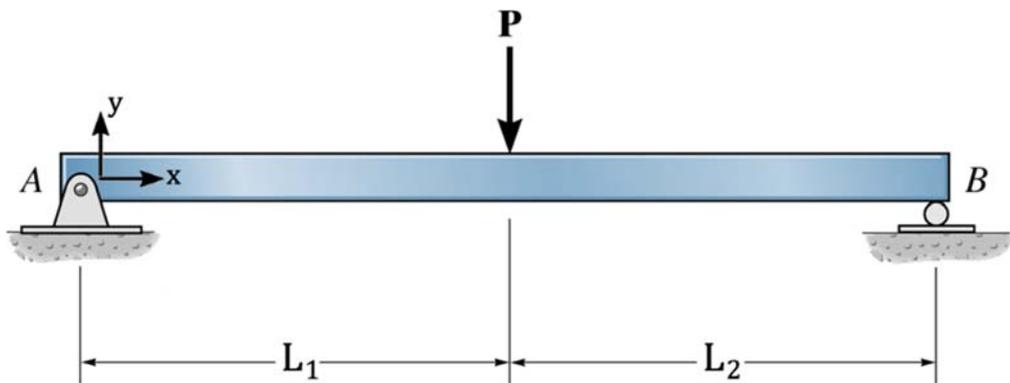


Figura 21.15 Viga a ser analisada.

Considerando que as duas reações de apoio estejam orientadas no sentido de  $y$  positivo, pode-se aplicar as equações de equilíbrio de corpo rígido para sua determinação. Assim:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow PL_1 - R_B(L_1 + L_2) = 0 \Rightarrow R_B = \frac{PL_1}{(L_1 + L_2)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P + \frac{PL_1}{(L_1 + L_2)} + R_A = 0 \Rightarrow R_A = \frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}$$

Devido à presença de uma força concentrada de intensidade  $P$  localizada em  $x = L_1$ , constata-se a expressão que define a linha elástica deverá ser escrita em trechos, sendo seus intervalos iguais a  $0 \leq x \leq L_1$  e  $L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)$ . Considerando o primeiro

destes intervalos, verifica-se que a expressão que define o momento fletor ao longo do intervalo é dada por:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -\frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}x + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}x$$

Utilizando a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) obtém-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}x \quad (21.48)$$

Integrando a Eq.(21.48) em relação à  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}x \right] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{2(L_1 + L_2)}x^2 + C_1 \right] \quad (21.49)$$

Integrando a Eq.(21.49) também em relação à  $x$  obtém-se o resultado apresentado na Eq.(21.50):

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{2(L_1 + L_2)}x^2 + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.50)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)}x^3 + C_1x + C_2 \right]$$

Já para o trecho definido pelo intervalo  $L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)$ , tem-se que o momento fletor é dado pela seguinte expressão:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -\frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}x + P(x - L_1) + M(x) = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = \frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}x - Px + PL_1$$

Com base na primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) pode-se escrever que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}x - Px + PL_1 \right] \quad (21.51)$$

Integrando a Eq.(21.51) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{(L_1 + L_2)}x - Px + PL_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.52)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{2(L_1 + L_2)}x^2 - \frac{P}{2}x^2 + PL_1x + C_3 \right]$$

Integrando a Eq.(21.52) em relação à variável  $x$  resulta em:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{2(L_1 + L_2)} x^2 - \frac{P}{2} x^2 + PL_1 x + C_3 \right] dx \Rightarrow \quad (21.53)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} x^3 - \frac{P}{6} x^3 + \frac{PL_1}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \right]$$

Segundo ilustrado na Fig. (21.15), observa-se que o problema apresenta as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 \quad v(L_1 + L_2) = 0 \quad (21.54)$$

Além dessas duas condições de contorno, deve-se impor as condições de continuidade no ponto onde a ação concentrada atua. Portanto:

$$v_{0 \leq x \leq L_1}(L_1) = v_{L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)}(L_1) \quad \frac{dv_{0 \leq x \leq L_1}(L_1)}{dx} = \frac{dv_{L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)}(L_1)}{dx} \quad (21.55)$$

Dessa forma, têm-se quatro condições de contorno a serem atendidas, as quais serão utilizadas para a determinação das quatro constantes que surgiram durante o processo de integrações sucessivas das relações diferenciais que resultaram nas expressões do deslocamento de cada trecho. Sabendo que os deslocamentos dos dois trechos considerados são dados pelas Eq.(21.50) e Eq.(21.53), pode-se utilizar a primeira condição de contorno mostrada na Eq.(21.54) para a determinação de  $C_2$ .

Assim:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} 0^3 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Com base na segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.55) tem-se:

$$\frac{dv_{0 \leq x \leq L_1}(L_1)}{dx} = \frac{dv_{L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)}(L_1)}{dx}$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{2(L_1 + L_2)} (L_1)^2 + C_1 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{2(L_1 + L_2)} (L_1)^2 - \frac{P}{2} (L_1)^2 + PL_1 L_1 + C_3 \right] \quad (21.56)$$

$$C_1 = \frac{P}{2} (L_1)^2 + C_3$$

Utilizando a primeira condição de contorno mostrada na Eq.(21.55) obtém-se:

$$v_{0 \leq x \leq L_1}(L_1) = v_{L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)}(L_1)$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} (L_1)^3 + C_1 L_1 \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} (L_1)^3 - \frac{P}{6} (L_1)^3 + \frac{PL_1}{2} (L_1)^2 + C_3 L_1 + C_4 \right] \quad (21.57)$$

$$C_1 L_1 = \frac{P(L_1)^3}{3} + C_3 L_1 + C_4$$

Substituindo o valor de  $C_1$ , determinado na Eq.(21.56), na expressão Eq.(21.57) obtém-se:

$$\left[ \frac{P}{2}(L_1)^2 + C_3 \right] L_1 = \frac{P(L_1)^3}{3} + C_3 L_1 + C_4 \Rightarrow C_4 = \frac{P(L_1)^3}{6} \quad (21.58)$$

A partir do resultado obtido na Eq.(21.58), pode-se determinar o valor de  $C_3$  utilizando a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.54). Assim:

$$v(L_1 + L_2) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} (L_1 + L_2)^3 - \frac{P}{6} (L_1 + L_2)^3 + \frac{PL_1}{2} (L_1 + L_2)^2 \right] + \\ & \frac{1}{EI} \left[ C_3 (L_1 + L_2) + \frac{P(L_1)^3}{6} \right] = 0 \Rightarrow \\ & \frac{PL_2}{6} (L_1 + L_2) - \frac{P}{6} (L_1 + L_2)^2 + \frac{PL_1}{2} (L_1 + L_2) + C_3 + \frac{P(L_1)^3}{6(L_1 + L_2)} = 0 \\ & C_3 = \frac{P}{6} (L_1 + L_2)^2 - \frac{P(L_1)^3}{6(L_1 + L_2)} - P(L_1 + L_2) \left( \frac{L_2}{6} + \frac{L_1}{2} \right) \end{aligned}$$

Com base no valor de  $C_3$  determinado anteriormente, pode-se escrever  $C_1$  como:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{P}{2} (L_1)^2 + C_3 \\ C_1 &= \frac{P}{2} (L_1)^2 + \frac{P}{6} (L_1 + L_2)^2 - \frac{P(L_1)^3}{6(L_1 + L_2)} - P(L_1 + L_2) \left( \frac{L_2}{6} + \frac{L_1}{2} \right) \end{aligned}$$

Considerando as condições de contorno do problema foram determinadas as constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ . Assim, as expressões dos deslocamentos para os dois trechos considerados podem ser reescritas como:

Para  $0 \leq x \leq L_1$

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} x^3 \right] + \\ & \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{P}{2} (L_1)^2 + \frac{P}{6} (L_1 + L_2)^2 - \frac{P(L_1)^3}{6(L_1 + L_2)} - P(L_1 + L_2) \left( \frac{L_2}{6} + \frac{L_1}{2} \right) \right) x \right] \end{aligned}$$

$$\text{Para } L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} x^3 - \frac{P}{6} x^3 + \frac{PL_1}{2} x^2 + \frac{P(L_1)^3}{6} \right] +$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{6} (L_1 + L_2)^2 - \frac{P(L_1)^3}{6(L_1 + L_2)} - P(L_1 + L_2) \left( \frac{L_2}{6} + \frac{L_1}{2} \right) \right] x$$

### 21.3.2 – Aplicação do Princípio da Superposição dos Efeitos

Conforme discutido no item anterior, condições de compatibilidade de deslocamento e rotação devem ser aplicadas aos pontos onde ações concentradas atuam, para que as equações que exprimem estas grandezas ao longo do comprimento da viga sejam contínuas. Deve-se destacar que para cada ponto de aplicação de uma ação concentrada são inseridas na análise duas condições de compatibilidade. Portanto, em vigas submetidas a um grande número de ações concentradas, a determinação da equação da linha elástica, para cada um dos trechos entre as ações concentradas, torna-se uma tarefa onerosa e pouco produtiva.

Para tornar a análise de problemas envolvendo ações concentradas mais rápida e eficiente, pode ser aplicado o princípio da superposição dos efeitos. Nos problemas envolvendo a determinação da linha elástica esse princípio pode ser utilizado, uma vez que assume-se que a viga seja composta por material de comportamento mecânico elástico linear e que esta seja governada pelo regime de pequenos deslocamentos. Além disso, verifica-se que os deslocamentos são diretamente proporcionais aos esforços solicitantes atuantes.

Quando o princípio da superposição dos efeitos é aplicado à obtenção da linha elástica, determinam-se os deslocamentos ao longo da viga para cada carregamento atuante, seja ele concentrado ou distribuído, de forma isolada. O deslocamento da estrutura, considerando a atuação conjunta de todas as ações externas, é obtido superpondo-se os deslocamentos obtidos considerando cada ação externa atuando de forma isolada.

Para ilustrar a aplicação do princípio da superposição dos efeitos, pode-se considerar a viga bi apoiada ilustrada na Fig. (21.16), a qual é submetida a três forças concentradas de intensidades  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . Nesta viga, o deslocamento ao longo de seu

comprimento pode ser obtido superpondo-se os deslocamentos causados pela ação de cada uma das forças concentradas de forma isolada. Assim, nesse caso, podem ser empregadas as expressões de deslocamento obtidas na análise do exemplo 6.

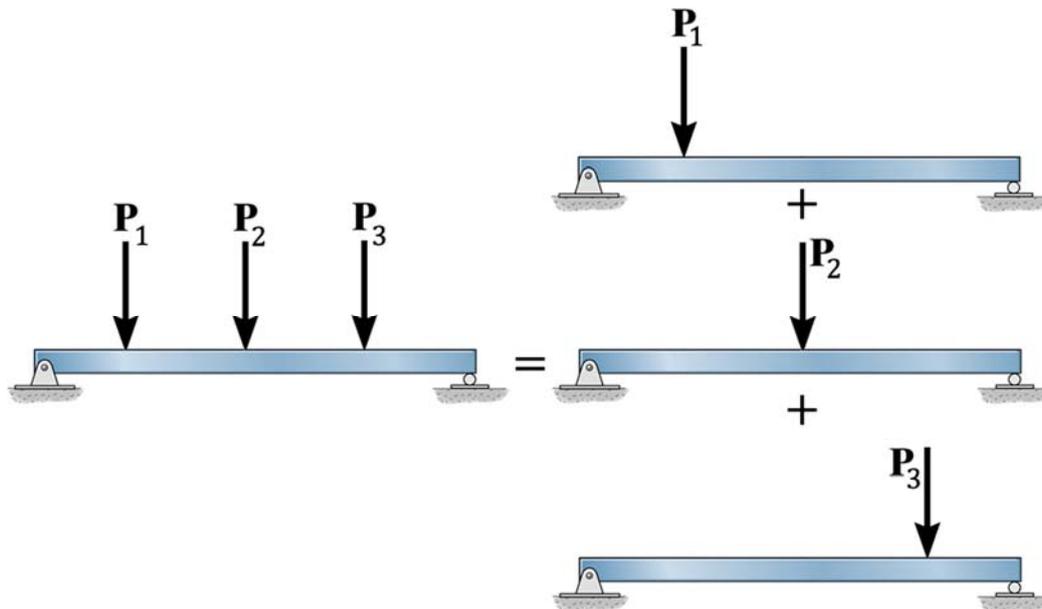


Figura 21.16 Aplicação do princípio da superposição dos efeitos.

### 21.3.3 – Exemplo 7

Determine o deslocamento no centro do vão da viga mostrada na Fig. (21.17). Considere que o produto  $EI$  seja igual a  $32000 \text{ kNm}^2$  e que as forças concentradas possuam intensidades iguais a  $P_1 = 10 \text{ kN}$  e  $P_2 = 15 \text{ kN}$ .

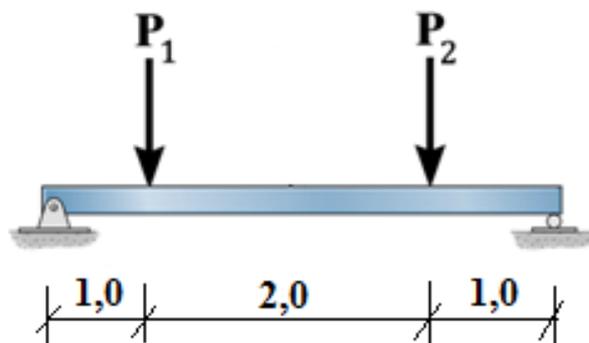


Figura 21.17 Viga a ser analisada. Dimensões em metro.

Para a solução deste exemplo será empregado o princípio da superposição dos efeitos. Assim, o deslocamento no centro do vão será determinado assumindo-se, inicialmente, apenas a presença de  $P_1$ . Em seguida, o deslocamento no centro do vão

será novamente calculado considerando apenas a atuação de  $P_2$ . Aplicando o princípio da superposição dos efeitos, obtém-se o deslocamento no ponto desejado superpondo-se os deslocamentos gerados por cada uma das ações concentradas de forma isolada, como mostrado na Fig. (21.18).

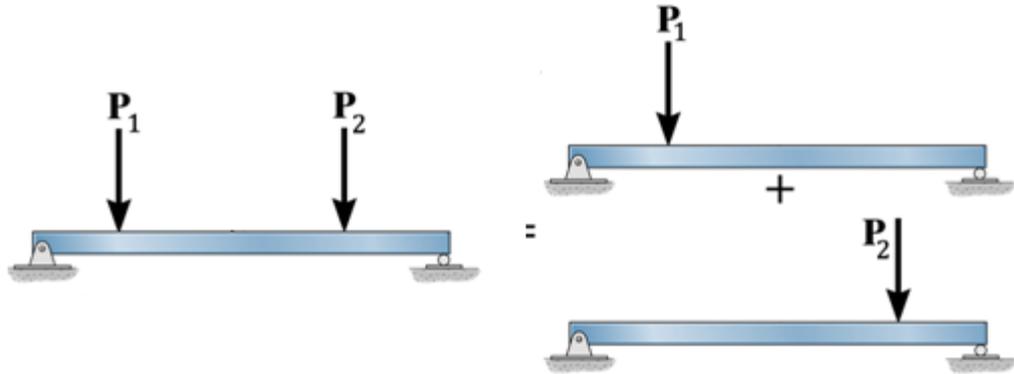


Figura 21.18 Sobreposição dos efeitos.

A determinação do deslocamento no centro do vão para as duas condições mostradas na Fig. (21.18) pode ser efetuada utilizando as equações de deslocamento obtidas no exemplo 6. Naquela análise foram obtidas as expressões mostradas na Eq.(21.59).

Para  $0 \leq x \leq L_1$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} x^3 \right] + \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{P}{2}(L_1)^2 + \frac{P}{6}(L_1 + L_2)^2 - \frac{P(L_1)^3}{6(L_1 + L_2)} - P(L_1 + L_2) \left( \frac{L_2}{6} + \frac{L_1}{2} \right) \right) x \right] \quad (21.59)$$

Para  $L_1 \leq x \leq (L_1 + L_2)$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL_2}{6(L_1 + L_2)} x^3 - \frac{P}{6} x^3 + \frac{PL_1}{2} x^2 + \frac{P(L_1)^3}{6} \right] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{P}{6}(L_1 + L_2)^2 - \frac{P(L_1)^3}{6(L_1 + L_2)} - P(L_1 + L_2) \left( \frac{L_2}{6} + \frac{L_1}{2} \right) \right] x$$

Considerando o caso onde atua apenas a força  $P_1$ , o deslocamento no centro do vão é dado pela segunda expressão da Eq.(21.59). Assim:

$$v_{P_1} = \frac{1}{32000} \left[ \frac{10 \cdot 3}{6(1+3)} 2^3 - \frac{10}{6} 2^3 + \frac{10 \cdot 1}{2} 2^2 + \frac{10 \cdot 1^3}{6} \right] +$$

$$+ \frac{1}{32000} \left[ \frac{10}{6} (1+3)^2 - \frac{10 \cdot 1^3}{6(1+3)} - 10(1+3) \left( \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \right) \right] 2 \Rightarrow$$

$$v_{P_1} = -2,86458 \cdot 10^{-4} m$$

Para a determinação do deslocamento no centro do vão para o caso onde atua apenas  $P_2$ , deve-se utilizar a primeira das expressões mostradas na Eq.(21.59). Dessa forma:

$$v_{P_2} = \frac{1}{32000} \left[ \frac{15 \cdot 1}{6(3+1)} 2^3 + \left( \frac{15}{2} 3^2 + \frac{15}{6} (3+1)^2 - \frac{15 \cdot 3^3}{6(3+1)} - 15(3+1) \left( \frac{1}{6} + \frac{3}{2} \right) \right) 2 \right]$$

$$v_{P_2} = -4,2969 \cdot 10^{-4} m$$

Assim, aplicando o princípio da superposição dos efeitos, obtém-se que o deslocamento no centro do vão, para o caso onde as duas forças concentradas  $P_1$  e  $P_2$  atuam conjuntamente, é igual a:

$$v = v_{P_1} + v_{P_2} = -2,86458 \cdot 10^{-4} - 4,2969 \cdot 10^{-4} m \Rightarrow v = -7,16148 \cdot 10^{-4} m$$

### 21.4 – Vigas Estaticamente Indeterminadas

Problemas envolvendo estruturas estaticamente indeterminadas foram discutidos durante os capítulos 14 e 15. Naquela oportunidade, elementos de barra geral estaticamente indeterminados submetidos a esforços solicitantes normal e de torção foram analisados, sendo suas reações de apoio e o campo de deslocamentos ao longo de seu domínio determinados.

Neste item serão discutidos problemas estaticamente indeterminados envolvendo elementos de barra geral submetidos a esforços de flexão. Um problema pode ser classificado como estaticamente indeterminado quando são restringidos mais graus de liberdade do que aqueles necessários para impedir o deslocamento de corpo rígido da estrutura. Nestes problemas, a utilização das equações de equilíbrio de corpo rígido apenas não é suficiente para a determinação de todas as reações de apoio da estrutura, sendo necessária a aplicação de condições de compatibilidade escritas em termos de deslocamento.

As reações de apoio que decorrem dos graus de liberdade restringidos que excedem aqueles necessários para o impedimento do deslocamento de corpo rígido da estrutura são conhecidas como reações redundantes. O número das reações redundantes conduz ao grau de indeterminação da estrutura. Para ilustrar a obtenção do grau de indeterminação de uma barra estaticamente indeterminada, pode-se considerar a barra mostrada na Fig. (21.19).

Devido à presença de um engaste e de um apoio móvel, verifica-se que são restringidos na estrutura quatro graus de liberdade, os quais dão origem a quatro reações de apoio incógnitas. Sabendo que no caso em análise a estrutura não apresentará deslocamento de corpo rígido se três graus de liberdade forem convenientemente restringidos, conclui-se que para a barra mostrada na Fig. (21.19) tem-se grau de indeterminação igual a um. Dessa forma, a estrutura torna-se isostática se uma das restrições aos graus de liberdade atuantes nos apoios for removida.

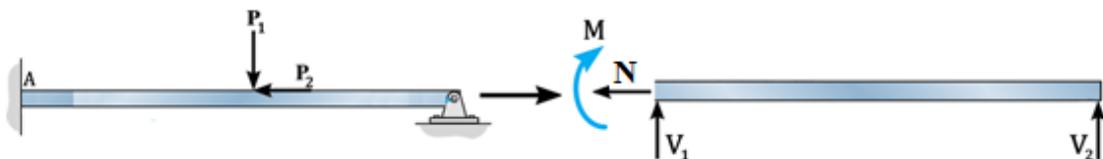


Figura 21.19 Elemento de barra geral estaticamente indeterminado.

No decorrer dessas notas serão apresentados dois métodos para a análise de vigas estaticamente indeterminadas. Ambos os métodos aplicam os conceitos da linha elástica para a determinação das reações de apoio na estrutura. O primeiro deles é denominado método da integração direta e exprime as reações de apoio redundantes nas equações que definem os esforços solicitantes ao longo do comprimento da viga. O segundo é denominado método das forças e utiliza o princípio da superposição dos efeitos para a solução do problema.

#### 21.4.1 – Método da Integração Direta

No método da integração direta, utilizam-se diretamente as expressões apresentadas na Eq.(21.19), as quais deverão ser integradas sucessivamente, para a obtenção do valor das reações de apoio redundantes do problema. Como as vigas analisadas serão estaticamente indeterminadas, as equações que exprimem a variação do momento fletor e do esforço cortante ao longo do comprimento da viga serão escritas

em função das reações de apoio redundantes. Dessa forma, por meio dessa abordagem, além das constantes de integração que surgem do processo de integrações sucessivas de uma das Eq.(21.19), deverão ser determinadas também as reações incógnitas envolvidas nas equações do momento fletor e do esforço cortante.

Apesar da expressão da linha elástica envolver variáveis relacionadas às reações de apoio redundantes, às quais a princípio são desconhecidas, deve-se destacar que sempre haverá condições de contorno suficientes para a sua determinação. Isso se deve ao fato das reações de apoio redundantes sempre atuarem em pontos onde os deslocamentos são conhecidos. Assim, para cada uma das reações de apoio redundantes haverá uma condição de contorno em deslocamento ou rotação que deverá ser empregada para a sua determinação. Essa abordagem é direta e permite a resolução eficiente de diversos problemas de vigas estaticamente indeterminadas comumente encontradas na engenharia de estruturas.

#### 21.4.2 – Exemplo 8

Determine a expressão da linha elástica para a viga estaticamente indeterminada mostrada na Fig. (21.20) utilizando o método da integração direta. Obtenha também as expressões para suas reações de apoio. Considere que o produto  $EI$  seja constante para toda a extensão da viga.

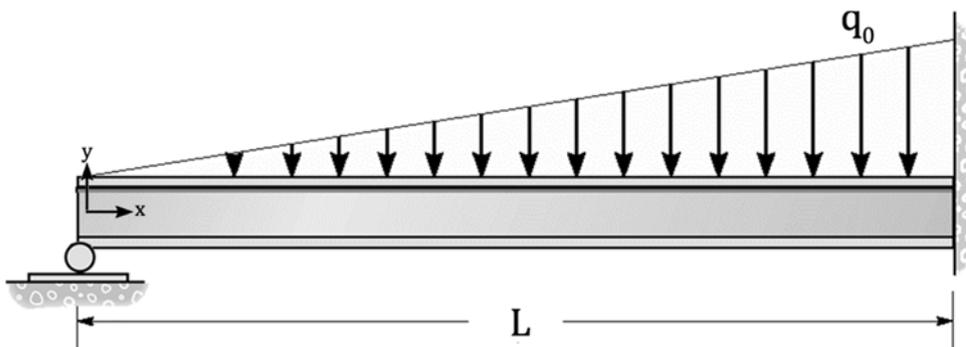


Figura 21.20 Viga a ser analisada.

Com base na Fig. (21.20), percebe-se que a viga a ser analisada apresenta grau de indeterminação igual a 1, portanto, tem-se uma reação de apoio redundante. Assim, a equação que descreverá a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga deverá ser escrita em função da reação de apoio redundante. O diagrama de corpo livre da viga mostrada na Fig. (21.20) é ilustrado na Fig. (21.21).

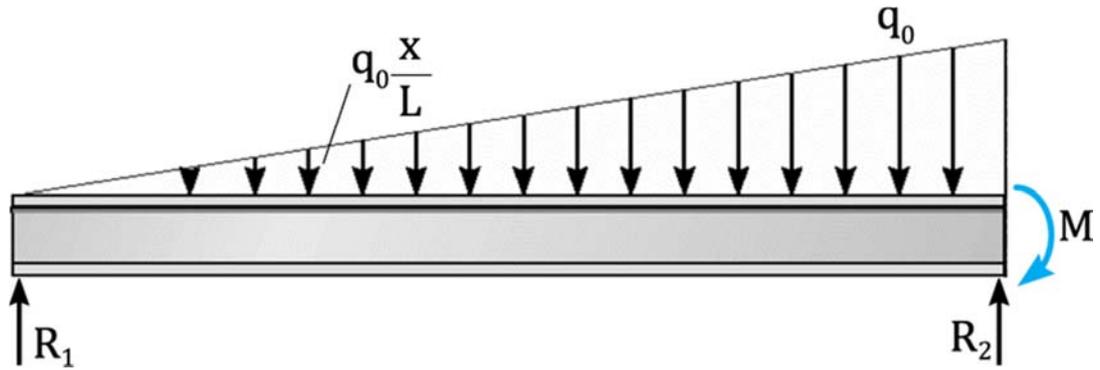


Figura 21.21 Diagrama de corpo livre.

Considerando o diagrama de corpo livre apresentado na Fig.(21.21), pode-se escrever a equação do momento fletor como:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -R_1 x + \frac{q_0}{L} x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = R_1 x - \frac{q_0}{6L} x^3$$

Utilizando a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) pode-se escrever que:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ R_1 x - \frac{q_0}{6L} x^3 \right] \quad (21.60)$$

Integrando a Eq.(21.60) em relação à variável \$x\$ tem-se:

$$\int \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ R_1 x - \frac{q_0}{6L} x^3 \right] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{2} x^2 - \frac{q_0}{24L} x^4 + C_1 \right] \quad (21.61)$$

Integrando a Eq.(21.61) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{2} x^2 - \frac{q_0}{24L} x^4 + C_1 \right] dx \Rightarrow v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{6} x^3 - \frac{q_0}{120L} x^5 + C_1 x + C_2 \right] \quad (21.62)$$

As duas constantes de integração que surgiram do processo de integrações sucessivas, \$C\_1\$ e \$C\_2\$, e também a reação vertical do apoio móvel, \$R\_1\$, devem ser determinadas com base nas condições de contorno do problema. Com base na ilustração mostrada na Fig. (21.20), observa-se que a estrutura apresenta as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 ; v(L) = 0 ; \frac{dv}{dx}(L) = 0 \quad (21.63)$$

Utilizando a primeira condição de contorno apresentada na Eq.(21.63) obtém-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{6} 0^3 - \frac{q_0}{120L} 0^5 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Aplicando a terceira condição de contorno mostrada na Eq.(21.63) tem-se:

$$\frac{dv(L)}{dx} = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{2} L^2 - \frac{q_0}{24L} L^4 + C_1 \right] \Rightarrow C_1 = \frac{q_0}{24} L^3 - \frac{R_1}{2} L^2 \quad (21.64)$$

Finalmente, utilizando a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.63) obtém-se:

$$v(L) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{6} L^3 - \frac{q_0}{120L} L^5 + C_1 L \right] \Rightarrow C_1 = \frac{q_0}{120} L^3 - \frac{R_1}{6} L^2 \quad (21.65)$$

Igualando os resultados obtidos nas Eq.(21.64) e Eq.(21.65) determina-se o valor de  $R_1$ . Assim:

$$\frac{q_0}{24} L^3 - \frac{R_1}{2} L^2 = \frac{q_0}{120} L^3 - \frac{R_1}{6} L^2 \Rightarrow -\frac{R_1}{3} L^2 = -\frac{q_0}{30} L^3 \Rightarrow R_1 = \frac{q_0}{10} L$$

Com base no valor de  $R_1$  calculado anteriormente determina-se  $C_1$ . Portanto:

$$C_1 = \frac{q_0}{24} L^3 - \frac{q_0}{10} L \frac{1}{2} L^2 \Rightarrow C_1 = -\frac{q_0}{120} L^3$$

Assim, a equação da linha elástica é igual a:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{q_0}{10} L \frac{1}{6} x^3 - \frac{q_0}{120L} x^5 - \frac{q_0}{120} L^3 x \right] \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{q_0}{60} L x^3 - \frac{q_0}{120L} x^5 - \frac{q_0}{120} L^3 x \right]$$

Para encerrar o exemplo, deve-se também calcular as expressões para as reações de apoio da estrutura. Como a reação redundante da viga foi determinada utilizando a integração direta das Eq.(21.19), as reações de apoio restantes podem ser facilmente obtidas efetuando-se o equilíbrio de corpo rígido. Utilizando as reações indicadas na Fig. (21.21) obtém-se:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{q_0}{10} L - \frac{q_0}{2} L + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{2}{5} q_0 L$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -\frac{q_0}{10} L L + \frac{q_0}{2} L \frac{1}{3} L - M = 0 \Rightarrow M = \frac{q_0}{6} L^2 - \frac{q_0}{10} L^2 \Rightarrow$$

$$M = \frac{q_0}{15} L^2$$

## 21.4.3 – Exemplo 9

Determine a expressão da linha elástica para a viga bi engastada mostrada na Fig. (21.22) utilizando o método da integração direta. Obtenha também as expressões para suas reações de apoio. Considere que o produto  $EI$  seja constante para toda a extensão da viga.

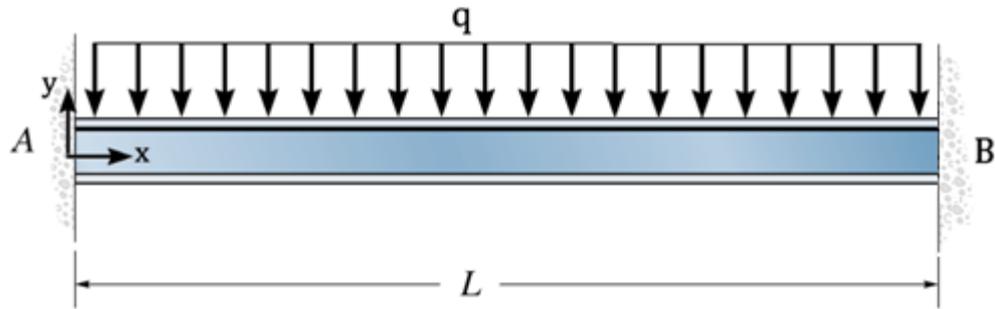


Figura 21.22 Viga a ser analisada.

A viga ilustrada na Fig.(21.22) apresenta grau de indeterminação igual a 2. Assim, com a retirada conveniente de duas restrições ao deslocamento a viga considerada torna-se isostática. Pelo fato de possuir grau de indeterminação igual a 2, existem duas reações de apoio redundantes, as quais serão determinadas por meio do método da integração direta. Assim, a equação que descreverá a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga será escrita em função das duas reações de apoio redundantes. Para o problema em questão, o diagrama de corpo livre é o apresentado na Fig. (21.23).

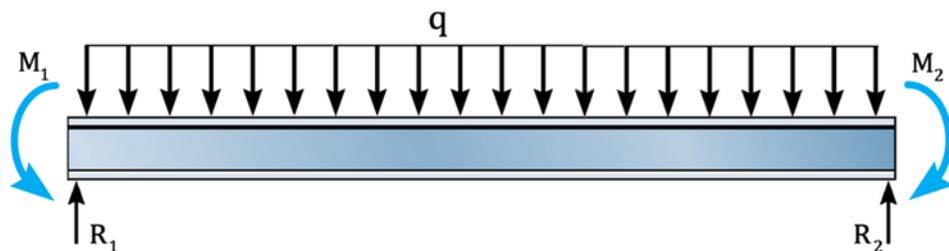


Figura 21.23 Diagrama de corpo livre.

A equação que descreve a variação do momento fletor atuante ao longo do comprimento da viga pode ser escrita com base no diagrama de corpo livre mostrado na Fig. (21.23). Dessa forma:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -R_1x + M_1 + qx \cdot \frac{x}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = R_1x - M_1 - \frac{q}{2}x^2$$

Com base na primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) pode-se escrever que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ R_1x - M_1 - \frac{q}{2}x^2 \right] \quad (21.66)$$

Integrando a Eq.(21.66) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ R_1x - M_1 - \frac{q}{2}x^2 \right] dx \Rightarrow \quad (21.67)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{2}x^2 - M_1x - \frac{q}{6}x^3 + C_1 \right]$$

Integrando a Eq.(21.67) em relação à  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{2}x^2 - M_1x - \frac{q}{6}x^3 + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.68)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{6}x^3 - \frac{M_1}{2}x^2 - \frac{q}{24}x^4 + C_1x + C_2 \right]$$

As duas constantes de integração,  $C_1$  e  $C_2$ , que surgiram do processo de integrações sucessivas e também as duas reações do apoio A,  $R_1$  e  $M_1$ , devem ser determinadas com base nas condições de contorno do problema. A partir da ilustração mostrada na Fig. (21.22), verifica-se que a viga analisada possui as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 ; v(L) = 0 ; \frac{dv}{dx}(0) = 0 ; \frac{dv}{dx}(L) = 0 \quad (21.69)$$

Por meio da primeira condição de contorno mostrada na Eq.(21.69) obtém-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{6}0^3 - \frac{M_1}{2}0^2 - \frac{q}{24}0^4 + C_10 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Utilizando a terceira condição de contorno apresentada na Eq.(21.69) tem-se:

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{2}0^2 - M_10 - \frac{q}{6}0^3 + C_1 \right] \Rightarrow C_1 = 0$$

Com a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.69) obtém-se:

$$v(L) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{6}L^3 - \frac{M_1}{2}L^2 - \frac{q}{24}L^4 \right] \Rightarrow M_1 = \frac{R_1}{3}L - \frac{q}{12}L^2 \quad (21.70)$$

Finalmente, aplicando a última das condições de contorno expressas na Eq.(21.69) obtém-se:

$$\frac{dv(L)}{dx} = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_1}{2} L^2 - M_1 L - \frac{q}{6} L^3 \right] \Rightarrow M_1 = \frac{R_1}{2} L - \frac{q}{6} L^2 \quad (21.71)$$

Igualando os resultados obtidos nas Eq.(21.70) e Eq.(21.71) obtém-se:

$$\frac{R_1}{3} L - \frac{q}{12} L^2 = \frac{R_1}{2} L - \frac{q}{6} L^2 \Rightarrow -\frac{R_1}{6} L = -\frac{q}{12} L^2 \Rightarrow R_1 = \frac{q}{2} L$$

Com base no valor de  $R_1$  calculado anteriormente determina-se a expressão de  $M_1$ . Assim:

$$M_1 = \frac{q}{2} L \frac{1}{2} L - \frac{q}{6} L^2 \Rightarrow M_1 = \frac{q}{12} L^2$$

Portanto, a equação da linha neutra fica assim definida:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{q}{2} L \frac{1}{6} x^3 - \frac{q}{12} L^2 \frac{1}{2} x^2 - \frac{q}{24} x^4 \right] \Rightarrow v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{q}{12} L x^3 - \frac{q}{24} L^2 x^2 - \frac{q}{24} x^4 \right]$$

Como as duas reações de apoio redundantes foram determinadas anteriormente neste exemplo, as demais reações de apoio podem ser facilmente obtidas efetuando-se o equilíbrio de corpo rígido da estrutura. Assim:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{q}{2} L - qL + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{q}{2} L$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -\frac{q}{2} LL + \frac{q}{12} L^2 + qL \frac{L}{2} - M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = \frac{q}{12} L^2$$

#### 21.4.4 – Superposição dos Efeitos. Método das Forças

O método das forças foi utilizado durante os capítulos 14 e 15 para a análise de estruturas compostas por elementos de barra geral estaticamente indeterminados solicitados por esforços axiais e torcionais. Este método baseia-se no princípio da superposição dos efeitos e na aplicação de condições de compatibilidade de deslocamentos para a determinação das reações de apoio redundantes.

Por meio desse método, a estrutura estaticamente indeterminada é transformada em uma estrutura isostática equivalente. Esta transformação é efetuada removendo-se da estrutura um número de restrições ao deslocamento igual ao seu grau de indeterminação. Com base na estrutura isostática equivalente, calculam-se os deslocamentos provocados pelo carregamento externo atuante nos graus de liberdade redundantes que foram removidos. A análise estrutural envolvendo a estrutura isostática

equivalente e os carregamentos externos atuantes para a obtenção desses deslocamentos é denominada Problema 0.

Em seguida, os deslocamentos nos graus de liberdade cujas restrições foram removidas para a obtenção da estrutura isostática equivalente são calculados considerando como carregamentos atuantes cada uma das reações de apoio redundantes retiradas como consequência da transformação da estrutura estaticamente indeterminada em estrutura isostática equivalente. Cada reação redundante deve ser aplicada isoladamente à estrutura isostática equivalente e os deslocamentos mencionados devem ser calculados para cada uma delas. As análises estruturais envolvendo a estrutura isostática equivalente e cada uma das reações redundantes são denominadas de Problema 1 até Problema n, sendo n o número total de reações redundantes removidas.

Finalmente, o problema é resolvido escrevendo-se condições de compatibilidade de deslocamento para os graus de liberdade removidos no início da análise. Para isso, utiliza-se o princípio da superposição dos efeitos. Dessa forma, os deslocamentos calculados nos Problemas 0 à n, para os graus de liberdade removidos na transformação da estrutura estaticamente indeterminada em estrutura isostática equivalente, são adicionados. Em seguida iguala-se o resultado dessa adição à zero ou ao valor do deslocamento inicial atuante (recalque), caso este exista. Como as reações de apoio redundantes são determinadas diretamente a partir deste procedimento, este método é muitas vezes denominado método das forças.

Para ilustrar o procedimento descrito anteriormente, deve-se considerar a viga engastada e apoiada mostrada na Fig. (21.24). Esta viga possui grau de indeterminação igual a 1, ou seja, removendo-se convenientemente uma das restrições ao deslocamento atuante, a estrutura torna-se isostática. Assim, o primeiro passo para a resolução do problema, via método das forças, é a transformação da estrutura estaticamente indeterminada em uma estrutura isostática equivalente. Esta transformação pode ser efetuada removendo-se a restrição ao deslocamento vertical existente no apoio B. Portanto, o problema 0, o qual envolve a estrutura isostática equivalente e o carregamento externo atuante, é o apresentado na Fig. (21.25). O objetivo do problema 0 é a determinação do deslocamento devido ao carregamento externo atuante no grau de liberdade cuja restrição foi removida para a obtenção da estrutura isostática equivalente. Assim, como indicado na Fig. (21.25), o objetivo do problema 0 é a determinação de  $\Delta_B^0$ .

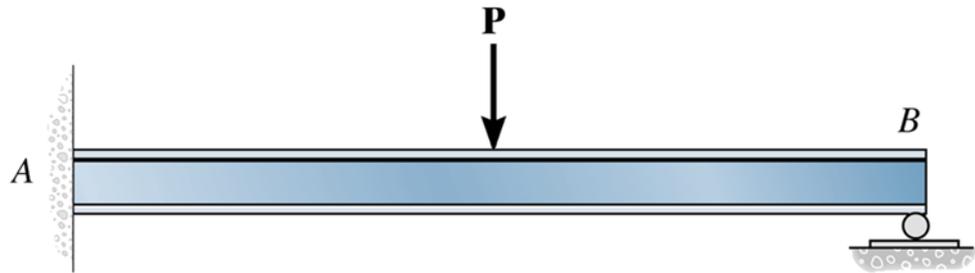


Figura 21.24 Viga engastada apoiada.

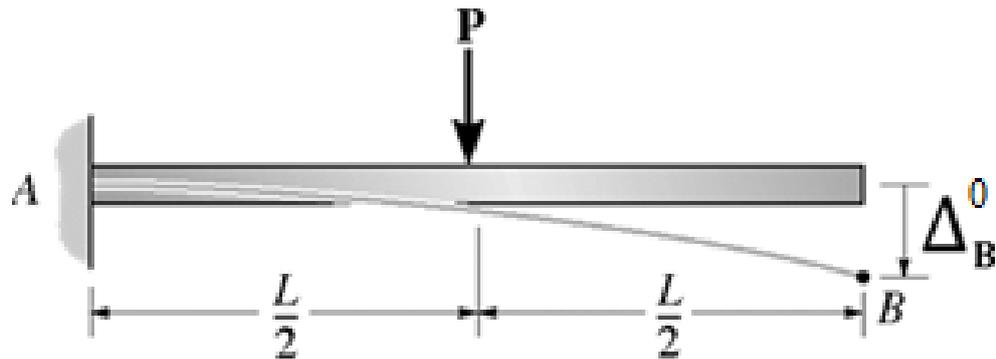


Figura 21.25 Problema 0.

O problema 1 envolverá a estrutura isostática equivalente e a reação de apoio redundante correspondente ao grau de liberdade cuja restrição foi removida para a obtenção da estrutura isostática equivalente. Como a restrição ao deslocamento vertical do ponto B foi retirada, deve-se considerar, neste ponto, a atuação de uma força vertical. Assim, o problema 1, para o caso em discussão, é o apresentado na Fig. (21.26).

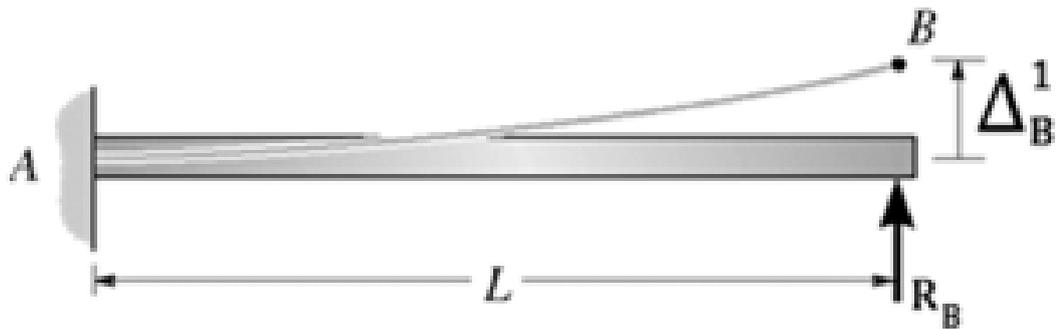


Figura 21.26 Problema 1.

No problema 1, o objetivo é o cálculo do deslocamento decorrente da ação redundante aplicada atuante no grau de liberdade cuja restrição foi removida para a obtenção da estrutura isostática equivalente. Assim, como ilustrado na Fig. (21.26), o objetivo do problema 1 é a determinação de  $\Delta_B^1$ .

Com base nas condições de contorno do problema a ser resolvido (hiperestático), verifica-se que o deslocamento vertical resultante no ponto B deve ser nulo. Isso se deve à existência de um apoio móvel no problema analisado, como indicado na Fig. (21.24). Portanto, usando o princípio da superposição dos efeitos, a condição de compatibilidade do problema deve ser assim escrita:

$$\Delta_B^0 + \Delta_B^1 = 0 \quad (21.72)$$

O termo  $\Delta_B^0$  depende do carregamento externo atuante e o termo  $\Delta_B^1$  depende da reação de apoio redundante. Assim, a resolução da condição de compatibilidade, Eq.(21.72), possibilita a determinação da reação de apoio redundante do problema. Com essa reação determinada, as demais reações de apoio da estrutura poderão ser calculadas a partir das equações de equilíbrio de corpo rígido.

#### 21.4.5 – Exemplo 10

Determine as reações de apoio da viga mostrada na Fig. (21.27) utilizando o método das forças. Assuma que o produto  $EI$  seja constante para toda a extensão da viga.

Com base no ilustrado na Fig. (21.27), constata-se que o grau de indeterminação da estrutura é igual a 1. Dessa forma, a estrutura torna-se isostática se uma das restrições aos graus de liberdade aplicados for removida. No presente exemplo, a estrutura isostática equivalente será formada retirando-se a restrição à rotação do apoio A. Assim, a estrutura isostática equivalente será uma viga bi apoiada e a ação redundante a ser considerada no problema 1 é o momento reativo atuante no apoio A. Com base nestas informações pode-se iniciar a resolução dos dois problemas envolvidos na análise.

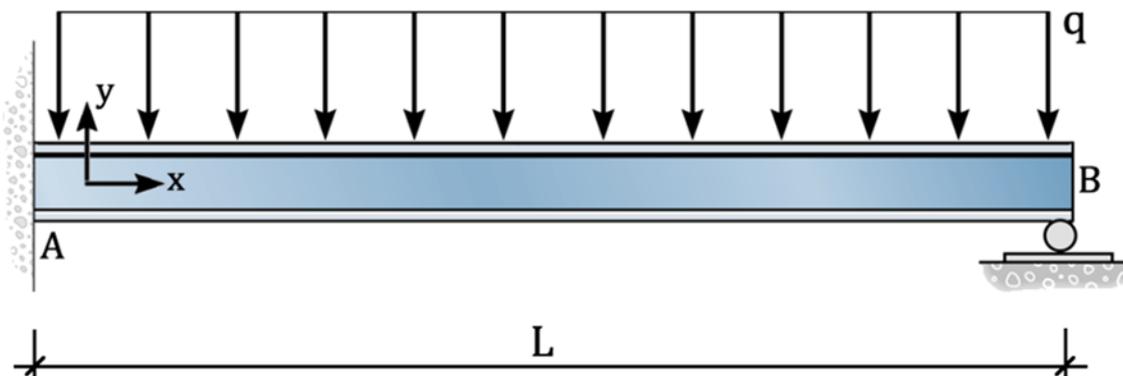


Figura 21.27 Estrutura a ser analisada.

*Problema 0*

O problema 0 envolve a estrutura isostática equivalente e o carregamento externo atuante, como ilustrado na Fig. (21.28). O objetivo deste problema é a determinação da rotação causada pelo carregamento atuante no apoio A.

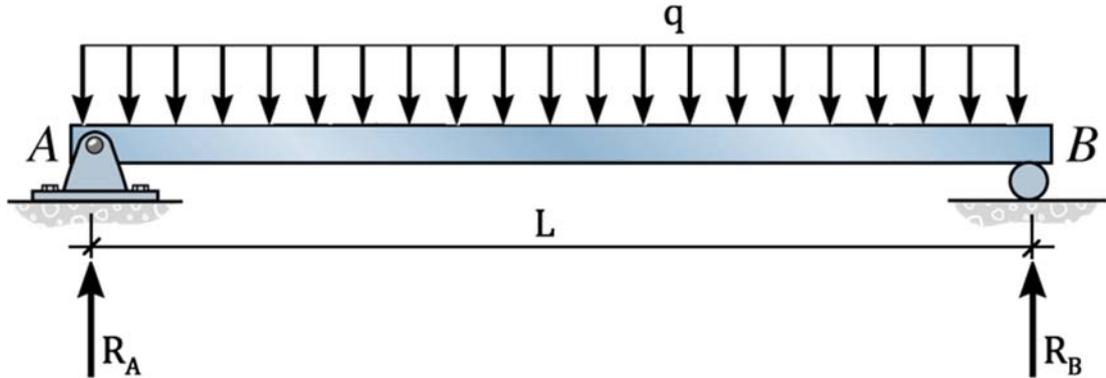


Figura 21.28 Estrutura isostática equivalente e carregamento externo atuante. Problema 0.

Efetuada o equilíbrio de corpo rígido da viga mostrada na Fig. (21.28) obtêm-se as reações de apoio. Assim:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow R_B L - qL \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{qL}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + \frac{qL}{2} - qL = 0 \Rightarrow R_A = \frac{qL}{2}$$

A equação da linha elástica será determinada utilizando a primeira das expressões apresentadas na Eq.(21.19). Portanto, deve-se obter uma equação que expresse a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Com base nas reações de apoio obtidas anteriormente pode-se escrever que:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{2}x + qx \frac{x}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

Utilizando a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right] \quad (21.73)$$

Integrando a Eq.(21.73) em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C_1 \right] \quad (21.74)$$

Integrando a Eq.(21.74) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right] dx \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \right] \quad (21.75)$$

As duas constantes de integração que surgiram do processo de integrações sucessivas,  $C_1$  e  $C_2$ , devem ser determinadas com base nas condições de contorno do problema. Com base na ilustração mostrada na Fig. (21.28), observa-se que a estrutura apresenta as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0 \quad (21.76)$$

Com base na primeira condição de contorno apresentada na Eq.(21.76) obtém-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12} 0^3 - \frac{q}{24} 0^4 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Aplicando a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.76) tem-se:

$$v(L) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12} L^3 - \frac{q}{24} L^4 + C_1 L \right] \Rightarrow C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

Dessa forma, com as constantes de integração determinadas, as equações que descrevem o deslocamento e a rotação dos pontos que compõem a viga mostrada na Fig. (21.28) são as seguintes:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 - \frac{qL^3}{24} x \right]$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 - \frac{qL^3}{24} \right] \quad (21.77)$$

A partir das expressões mostradas na Eq.(21.77), pode-se determinar a rotação no apoio A, ou seja, em  $x = 0$ . Assim:

$$\theta_{10} = \frac{dv(0)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4} 0^2 - \frac{q}{6} 0^3 - \frac{qL^3}{24} \right] \Rightarrow \theta_{10} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

### Problema 1

O problema 1 é formado pela estrutura isostática equivalente e pela reação de apoio redundante correspondente à restrição ao deslocamento removida. Portanto, para o caso em estudo, este problema é o ilustrado na Fig. (21.29).

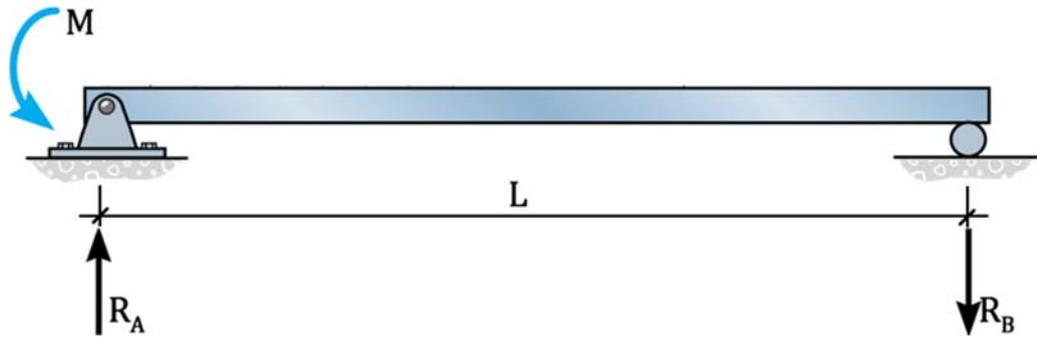


Figura 21.29 Estrutura isostática equivalente e momento reativo no apoio A. Problema 1.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à viga mostrada na Fig. (21.29) obtém-se:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow -R_B L + M = 0 \Rightarrow R_B = \frac{M}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - \frac{M}{L} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{M}{L}$$

Por meio da primeira das expressões apresentadas na Eq.(21.19) obtém-se a equação da linha elástica da viga. Com base nesta expressão, deve-se obter uma equação que descreva a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Com base nas reações de apoio determinadas anteriormente pode-se escrever que:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -\frac{M}{L}x + M + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{M}{L}x - M$$

Com base na primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{L}x - M \right] \quad (21.78)$$

Integrando a Eq.(21.78) em relação ao comprimento da viga obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{L}x - M \right] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{2L}x^2 - Mx + C_1 \right] \quad (21.79)$$

Integrando a Eq.(21.79) em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{2L}x^2 - Mx + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.80)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{6L}x^3 - \frac{M}{2}x^2 + C_1x + C_2 \right]$$

Com base nas condições de contorno do problema determinam-se as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$ . Para o problema em estudo, como mostrado na Fig. (21.29), as condições de contorno são as seguintes:

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0 \quad (21.81)$$

Utilizando a primeira condição de contorno apresentada na Eq.(21.81) obtém-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{6L} 0^3 - \frac{M}{2} 0^2 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Aplicando a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.81) tem-se:

$$v(L) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{6L} L^3 - \frac{M}{2} L^2 + C_1 L \right] \Rightarrow C_1 = \frac{ML}{3}$$

Assim, com base nas constantes de integração determinadas anteriormente, pode-se escrever as equações do deslocamento e da rotação dos pontos que compõem a viga mostrada na Fig. (21.29) da seguinte maneira:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{6L} x^3 - \frac{M}{2} x^2 + \frac{ML}{3} x \right] \quad (21.82)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{2L} x^2 - Mx + \frac{ML}{3} \right]$$

Com base nas expressões mostradas na Eq.(21.82), pode-se determinar a rotação no apoio A. Nesse ponto tem-se  $x = 0$ . Portanto:

$$\theta_{11} = \frac{dv(0)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M}{2L} 0^2 - M 0 + \frac{ML}{3} \right] \Rightarrow \theta_{11} = \frac{ML}{3EI}$$

Com os valores das rotações dos problemas 0 e 1 determinadas, pode-se escrever a condição de compatibilidade do problema. Sabendo que o apoio A não sofre recalque de nenhuma natureza tem-se:

$$\theta_{10} + \theta_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{ML}{3EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{qL^2}{8} \quad (21.83)$$

Assim, com a reação de apoio redundante determinada, as demais reações de apoio podem ser calculadas aplicando-se as equações de equilíbrio de corpo rígido. Com base no resultado apresentado na Eq.(21.83), verifica-se que o diagrama de corpo livre da viga mostrada na Fig. (21.27) assume a forma apresentada na Fig. (21.30).

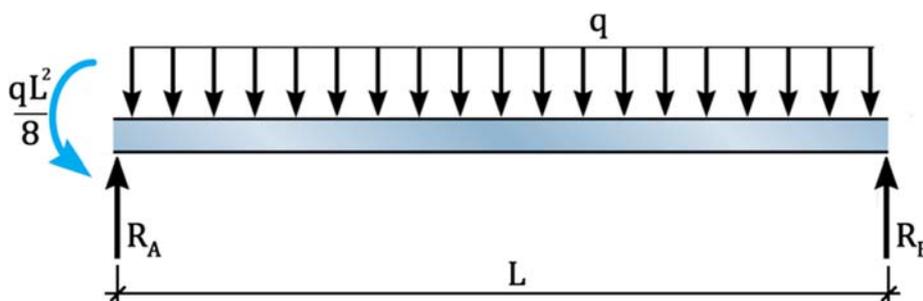


Figura 21.30 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido obtém-se:

$$\sum M(B) = 0 \Rightarrow -R_A L + \frac{qL^2}{8} + \frac{qL^2}{2} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{5qL}{8}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{5qL}{8} + R_B - qL = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3qL}{8}$$

#### 21.4.6 – Exemplo 11

Determine as reações de apoio para a viga bi engastada apresentada na Fig. (21.31) por meio do método das forças. Assuma que o produto  $EI$  seja constante para toda a extensão da viga.

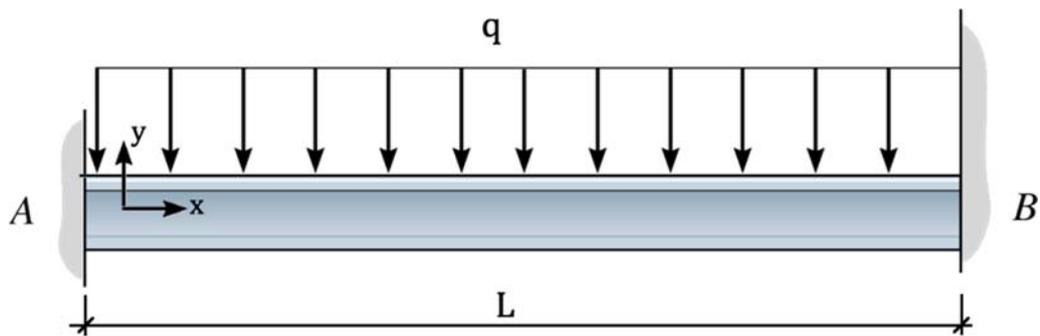


Figura 21.31 Viga a ser analisada.

A viga a ser analisada possui grau de indeterminação igual a 2, conforme ilustrado na Fig. (21.31). Assim, a estrutura torna-se isostática com a remoção conveniente de duas das restrições aos graus de liberdade da viga.

Neste exemplo, a estrutura isostática equivalente será formada removendo-se as restrições ao deslocamento e à rotação do apoio B. Portanto, a estrutura isostática equivalente será uma viga engastada (em balanço) e as ações redundantes a serem consideradas nos problemas 1 e 2 são a reação vertical e o momento reativo no apoio B. A partir dessas informações pode-se iniciar a resolução dos três problemas que compõem esta análise.

#### Problema 0

O problema 0 envolve a estrutura isostática equivalente e o carregamento externo atuante, como ilustrado na Fig. (21.32). O objetivo deste problema é a determinação do deslocamento e da rotação causados pelo carregamento atuante no apoio B, onde as restrições aos graus de liberdade foram removidas.

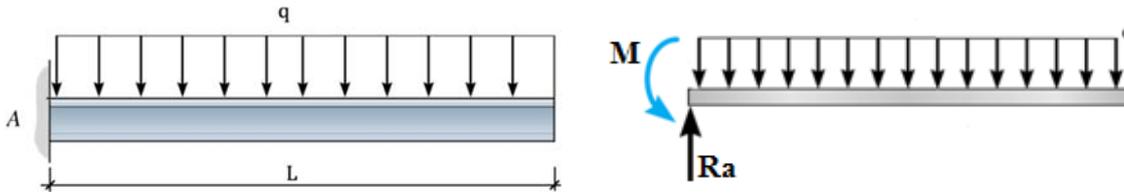


Figura 21.32 Problema 0.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à viga mostrada na Fig. (21.32) obtêm-se as expressões para suas reações de apoio. Assim:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow M - qL \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{qL^2}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - qL = 0 \Rightarrow R_A = qL$$

Com base nas reações de apoio determinadas anteriormente, pode-se escrever uma equação que expresse a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Dessa forma:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -qLx + \frac{qL^2}{2} + qx \frac{x}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2}x^2$$

Utilizando a primeira das expressões apresentadas na Eq.(21.19), a qual permite a determinação da linha elástica da viga, pode-se escrever que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2}x^2 \right] \quad (21.84)$$

Integrando a Eq.(21.84) em relação ao comprimento da viga obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2}x^2 \right] dx \Rightarrow \quad (21.85)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2}x^2 - \frac{qL^2}{2}x - \frac{q}{6}x^3 + C_1 \right]$$

Integrando a Eq.(21.85) em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2}x^2 - \frac{qL^2}{2}x - \frac{q}{6}x^3 + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.86)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{6}x^3 - \frac{qL^2}{4}x^2 - \frac{q}{24}x^4 + C_1x + C_2 \right]$$

As constantes de integração apresentadas na Eq.(21.86),  $C_1$  e  $C_2$ , são determinadas utilizando-se as condições de contorno do problema. Com base no

apresentado na Fig. (21.32) verifica-se que o problema em estudo apresenta as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 \quad \frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (21.87)$$

Com base na primeira condição de contorno da na Eq.(21.87) obtém-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{6} 0^3 - \frac{qL^2}{4} 0^2 - \frac{q}{24} 0^4 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Aplicando a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.87) tem-se:

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2} 0^2 - \frac{qL^2}{2} 0 - \frac{q}{6} 0^3 + C_1 \right] \Rightarrow C_1 = 0$$

Portanto, com os valores das constantes de integração determinadas anteriormente, as equações que descrevem os deslocamentos e as rotações dos pontos que compõem a viga mostrada na Fig. (21.32) podem ser escritas como:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{6} x^3 - \frac{qL^2}{4} x^2 - \frac{q}{24} x^4 \right] \quad (21.88)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - \frac{q}{6} x^3 \right]$$

Com base nas expressões mostradas na Eq.(21.88), pode-se determinar o deslocamento e a rotação no apoio B. Nesse ponto tem-se  $x = L$ . Portanto:

$$\Delta_{10} = v(L) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{6} L^3 - \frac{qL^2}{4} L^2 - \frac{q}{24} L^4 \right] \Rightarrow \Delta_{10} = -\frac{qL^4}{8EI}$$

$$\theta_{20} = \frac{dv(L)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2} L^2 - \frac{qL^2}{2} L - \frac{q}{6} L^3 \right] \Rightarrow \theta_{20} = -\frac{qL^3}{6EI}$$

### Problema 1

O problema 1 é formado pela estrutura isostática equivalente e pela aplicação de uma das reações de apoio redundantes correspondentes às restrições ao deslocamento removidas. Neste problema, a reação de apoio redundante a ser aplicada é a reação vertical do ponto B. Dessa forma, no problema 1, a estrutura a ser analisada é a apresentada na Fig. (21.33).

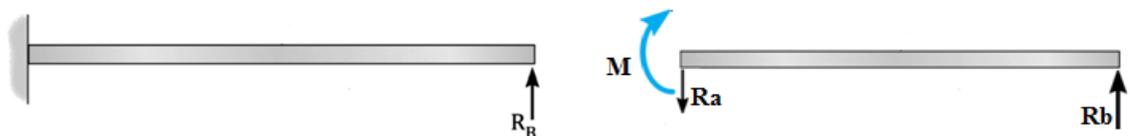


Figura 21.33 Problema 1.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à viga mostrada na Fig. (21.33), determinam-se suas reações de apoio, as quais são iguais a:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow R_B L - M = 0 \Rightarrow M = R_B L$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_A = R_B$$

A equação da linha elástica será determinada utilizando-se a primeira das expressões apresentadas na Eq.(21.19). Assim, para a utilização dessa expressão, deve-se obter uma equação que represente a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Com base nas reações de apoio obtidas anteriormente pode-se escrever que:

$$\sum M = 0 \Rightarrow R_B x - R_B L + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = R_B L - R_B x$$

Utilizando a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) tem-se:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{EI} [R_B L - R_B x] \quad (21.89)$$

Integrando a Eq.(21.89) em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} [R_B L - R_B x] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ R_B L x - \frac{R_B}{2} x^2 + C_1 \right] \quad (21.90)$$

Integrando a Eq.(21.90) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ R_B L x - \frac{R_B}{2} x^2 + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.91)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_B L}{2} x^2 - \frac{R_B}{6} x^3 + C_1 x + C_2 \right]$$

As duas constantes de integração,  $C_1$  e  $C_2$ , que surgiram do processo de integrações sucessivas devem ser determinadas a partir das condições de contorno do problema. Com base na viga apresentada na Fig. (21.33), constata-se que a estrutura apresenta as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 \quad \frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (21.92)$$

Utilizando a primeira condição de contorno apresentada na Eq.(21.92) tem-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_B L}{2} 0^2 - \frac{R_B}{6} 0^3 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Por meio da segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.92) obtém-se:

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 = \frac{1}{EI} \left[ R_B L 0 - \frac{R_B}{2} 0^2 + C_1 \right] \Rightarrow C_1 = 0$$

Portanto, com as constantes de integração determinadas anteriormente, as equações que descrevem o deslocamento e a rotação dos pontos que compõem a viga mostrada na Fig. (21.33) podem ser escritas como:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_B L}{2} x^2 - \frac{R_B}{6} x^3 \right] \quad (21.93)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ R_B L x - \frac{R_B}{2} x^2 \right]$$

Utilizando as expressões mostradas na Eq.(21.93), determinam-se o deslocamento e a rotação no ponto B. Sabendo que nesse ponto  $x = L$  tem-se:

$$\Delta_{11} = v(L) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_B L}{2} L^2 - \frac{R_B}{6} L^3 \right] \Rightarrow \Delta_{11} = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

$$\theta_{21} = \frac{dv(L)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ R_B L L - \frac{R_B}{2} L^2 \right] \Rightarrow \theta_{21} = \frac{R_B L^2}{2EI}$$

### Problema 2

No problema 2, a viga a ser analisada é a formada pela estrutura isostática equivalente e pela aplicação de uma das reações de apoio redundantes correspondentes às restrições ao deslocamento removidas. Como a reação vertical do ponto B foi considerada no problema 1, no problema 2 a ação redundante a ser aplicada é o momento reativo do ponto B. Dessa forma, neste problema, a estrutura a ser analisada é a apresentada na Fig. (21.34).



Figura 21.34 Problema 2.

Com base na aplicação das equações de equilíbrio de corpo rígido à viga mostrada na Fig. (21.34), verifica-se que suas reações de apoio são iguais a:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow M_B - M = 0 \Rightarrow M = M_B$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A + 0 = 0 \Rightarrow R_A = 0$$

Com as reações de apoio determinadas, pode-se escrever uma equação que represente a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Esta

equação será utilizada, juntamente com a primeira das expressões apresentadas na Eq.(21.19), para a determinação da equação da linha elástica da viga mostrada na Fig. (21.34). Assim:

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_B + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = -M_B$$

Com base na primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}[-M_B] \quad (21.94)$$

Integrando a Eq.(21.94) em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI}[-M_B] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}[-M_B x + C_1] \quad (21.95)$$

Integrando a Eq.(21.95) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI}[-M_B x + C_1] dx \Rightarrow v = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{M_B}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \right] \quad (21.96)$$

As duas constantes de integração,  $C_1$  e  $C_2$ , apresentadas na Eq.(21.96) são determinadas a partir das condições de contorno do problema. Com base na viga ilustrada na Fig. (21.34), verifica-se que esta possui as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 \quad \frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (21.97)$$

Com base na primeira condição de contorno apresentada na Eq.(21.97) tem-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{M_B}{2} 0^2 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Utilizando a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.97) obtém-se:

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 = \frac{1}{EI} [-M_B 0 + C_1] \Rightarrow C_1 = 0$$

Dessa forma, com os valores das constantes de integração determinados anteriormente, as equações que descrevem o deslocamento e a rotação dos pontos que compõem a viga mostrada na Fig. (21.34) ficam definidas como:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{M_B}{2} x^2 \right] \quad (21.98)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} [-M_B x]$$

O deslocamento e a rotação no ponto B da viga mostrada na Fig. (21.34) podem ser determinados utilizando as expressões mostradas na Eq.(21.98). Sabendo que no ponto B a coordenada  $x$  é igual a  $L$ , tem-se:

$$\Delta_{12} = v(L) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{M_B L^2}{2} \right] \Rightarrow \Delta_{12} = -\frac{M_B L^2}{2EI}$$

$$\theta_{22} = \frac{dv(L)}{dx} = \frac{1}{EI} [-M_B L] \Rightarrow \theta_{22} = -\frac{M_B L}{EI}$$

Com os valores dos deslocamentos e rotações determinados nos problemas 0, 1 e 2, as condições de compatibilidade do problema podem ser escritas. Sabendo que o apoio B não sofre recalque de nenhuma natureza, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \Delta_{01} + \Delta_{11} + \Delta_{12} &= 0 \\ \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{22} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -\frac{qL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} - \frac{M_B L^2}{2EI} &= 0 \\ -\frac{qL^3}{6EI} + \frac{R_B L^2}{2EI} - \frac{M_B L}{EI} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -\frac{qL^2}{4} + \frac{2R_B L}{3} - M_B &= 0 \\ -\frac{qL^2}{6} + \frac{R_B L}{2} - M_B &= 0 \end{aligned} \quad (21.99)$$

As duas equações mostradas na Eq.(21.99) podem ser organizadas e resolvidas de forma matricial. Assim:

$$\begin{bmatrix} \frac{2L}{3} & -1 \\ \frac{L}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{4} \\ \frac{qL^2}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (21.100)$$

Assim, com as reações de apoio redundantes determinadas, as demais reações de apoio podem ser calculadas aplicando-se as equações de equilíbrio de corpo rígido. Com base no resultado apresentado na Eq.(21.100) tem-se que o diagrama de corpo livre da viga mostrada na Fig. (21.31) assume a forma apresentada na Fig. (21.35).

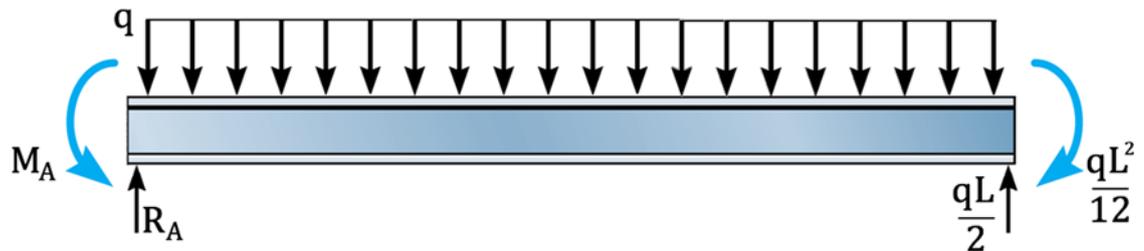


Figura 21.35 Diagrama de corpo livre.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à viga mostrada na Fig. (21.35) determinam-se as reações de apoio restantes. Dessa forma:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow -\frac{qL^2}{12} + \frac{qL}{2}L - qL\frac{L}{2} + M_A = 0 \Rightarrow M_A = \frac{qL^2}{12}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{qL}{2} - qL + R_A = 0 \Rightarrow R_A = \frac{qL}{2}$$

#### 21.4.7 – Exemplo 12

Determine o esforço normal atuante na barra BC, a qual pertence ao sistema estrutural mostrado na Fig. (21.36), utilizando o método das forças. Assuma que o módulo de elasticidade longitudinal da viga e da treliça sejam iguais a  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente. Além disso, considere que o produto  $E_1I$  seja constante para toda a extensão da viga e o produto  $E_2A$  seja constante para toda a extensão do elemento de treliça.

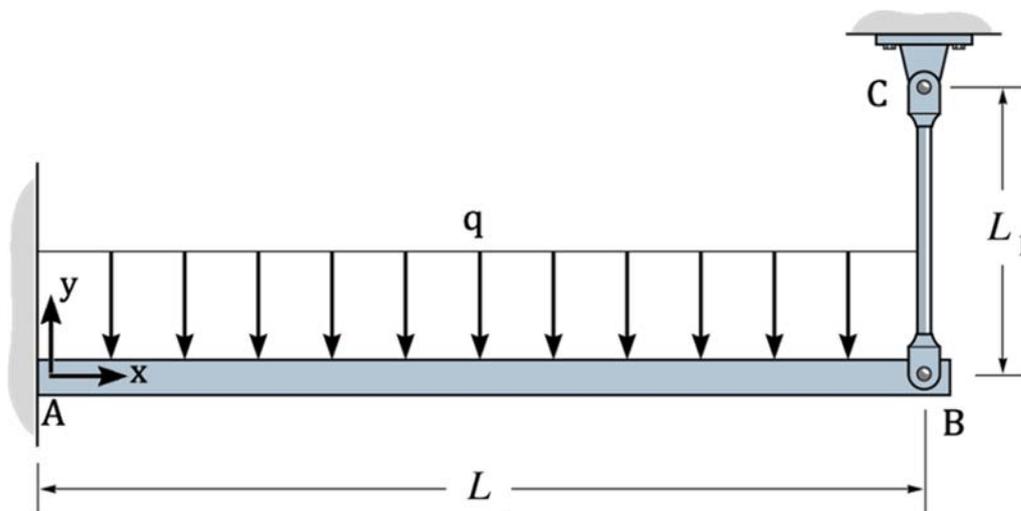


Figura 21.36 Estrutura a ser analisada.

O sistema estrutural apresentado na Fig. (21.36) envolve dois tipos de elementos estruturais. A barra AB é constituída por um elemento de barra geral (viga), enquanto a barra BC é formada por um elemento de barra simples (treliça). Dessa forma, por envolver elementos estruturais distintos, o sistema mostrado na Fig. (21.36) é normalmente denominado de sistema estrutural misto.

No problema em questão, a condição de compatibilidade deve ser escrita para o ponto B, onde os deslocamentos da viga e da treliça devem ser iguais para que exista a

continuidade do sistema estrutural. Como a compatibilidade de deslocamento deve ser escrita para apenas um grau de liberdade, verifica-se que o grau de redundância da estrutura é igual a 1. Portanto, a estrutura isostática equivalente será obtida removendo-se a restrição a um dos graus de liberdade da estrutura.

No problema em questão, a restrição ao deslocamento do nó B será removida para a obtenção da estrutura isostática equivalente. Dessa forma, a estrutura isostática equivalente será composta por uma viga engastada.

### Problema 0

O problema 0 envolve a estrutura isostática equivalente e o carregamento externo atuante, como ilustrado na Fig. (21.37). O objetivo deste problema é a determinação do deslocamento do ponto B, onde a condição de compatibilidade deverá ser escrita.

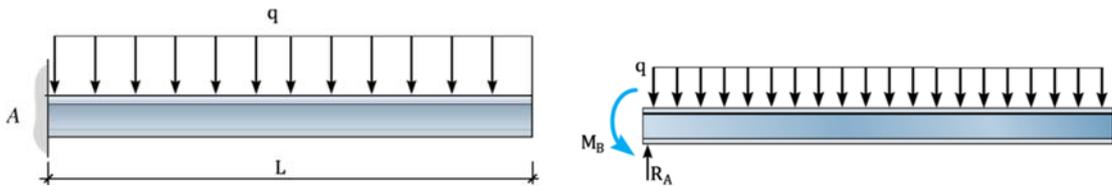


Figura 21.37 Problema 0.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à viga mostrada na Fig. (21.37) obtêm-se as expressões para suas reações de apoio. Dessa forma:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow -qL \frac{L}{2} + M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{qL^2}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - qL = 0 \Rightarrow R_A = qL$$

Com base nas reações de apoio da estrutura, pode-se escrever uma equação que represente a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Para a viga mostrada na Fig. (21.37), esta expressão é dada por:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -qLx + \frac{qL^2}{2} + qx \frac{x}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2}x^2$$

Utilizando a primeira das expressões apresentadas na Eq.(21.19), a qual permite a determinação da linha elástica da viga, pode-se escrever que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2}x^2 \right] \quad (21.101)$$

Integrando a Eq.(21.101) em relação ao comprimento da viga obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{E_1 I} \left[ qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{q}{2} x^2 \right] dx \Rightarrow \quad (21.102)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{qL}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right]$$

Integrando a Eq.(21.102) em relação à variável  $x$  tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{qL}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - \frac{q}{6} x^3 + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.103)$$

$$v = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{qL}{6} x^3 - \frac{qL^2}{4} x^2 - \frac{q}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \right]$$

As constantes de integração apresentadas na Eq.(21.103),  $C_1$  e  $C_2$ , são determinadas com base nas condições de contorno do problema. Conforme apresentado na Fig. (21.37), verifica-se que o problema em estudo apresenta as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 \quad \frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (21.104)$$

Com base na primeira condição de contorno apresentada na Eq.(21.104) tem-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{qL}{6} 0^3 - \frac{qL^2}{4} 0^2 - \frac{q}{24} 0^4 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Aplicando a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.104) obtém-se:

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{qL}{2} 0^2 - \frac{qL^2}{2} 0 - \frac{q}{6} 0^3 + C_1 \right] \Rightarrow C_1 = 0$$

Portanto, com os valores das constantes de integração determinadas anteriormente, as equações que descrevem os deslocamentos e as rotações dos pontos que compõem a viga mostrada na Fig. (21.37) podem ser escritas como:

$$v = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{qL}{6} x^3 - \frac{qL^2}{4} x^2 - \frac{q}{24} x^4 \right] \quad (21.105)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{qL}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - \frac{q}{6} x^3 \right]$$

Com base nas expressões mostradas na Eq.(21.105), pode-se determinar o deslocamento no ponto B. Sabendo que nesse ponto  $x = L$  tem-se:

$$\Delta_{10} = v(L) = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{qL}{6} L^3 - \frac{qL^2}{4} L^2 - \frac{q}{24} L^4 \right] \Rightarrow \Delta_{10} = -\frac{qL^4}{8E_1 I}$$

*Problema 1*

O problema 1 é formado pela estrutura isostática equivalente e pela aplicação da força redundante correspondente à restrição ao deslocamento removida. Neste problema, a reação redundante a ser aplicada é uma força vertical no ponto B, referente à restrição que a barra BC efetua sobre o deslocamento no ponto B. Dessa forma, no problema 1, a estrutura a ser analisada é a apresentada na Fig. (21.38).

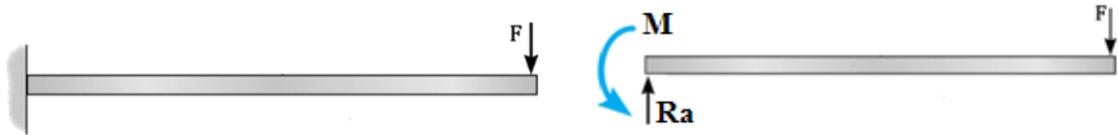


Figura 21.38 Problema 1.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à viga mostrada na Fig. (21.38), determinam-se suas reações de apoio, as quais são iguais a:

$$\sum M(A) = 0 \Rightarrow -FL + M = 0 \Rightarrow M = FL$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - F = 0 \Rightarrow R_A = F$$

A equação da linha elástica será determinada utilizando-se a primeira das expressões apresentadas na Eq.(21.19). Assim, para a utilização dessa expressão, deve-se obter uma equação que represente a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Com base nas reações de apoio obtidas anteriormente, pode-se escrever que:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -Fx + FL + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = Fx - FL$$

Utilizando a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E_1I} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{E_1I} [Fx - FL] \quad (21.106)$$

Integrando a Eq.(21.106) em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{E_1I} [Fx - FL] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{E_1I} \left[ \frac{F}{2} x^2 - FLx + C_1 \right] \quad (21.107)$$

Integrando a Eq.(21.107) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{E_1I} \left[ \frac{F}{2} x^2 - FLx + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.108)$$

$$v = \frac{1}{E_1I} \left[ \frac{F}{6} x^3 - \frac{FL}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \right]$$

As duas constantes de integração,  $C_1$  e  $C_2$ , que surgiram do processo de integrações sucessivas, devem ser determinadas considerando as condições de contorno do problema. Com base na viga apresentada na Fig. (21.38), constata-se que a estrutura apresenta as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 \quad \frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (21.109)$$

Utilizando a primeira condição de contorno apresentada na Eq.(21.109) tem-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{F}{6} 0^3 - \frac{FL}{2} 0^2 + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Por meio da segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.109) obtém-se:

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{F}{2} 0^2 - FL 0 + C_1 \right] \Rightarrow C_1 = 0$$

Portanto, com as constantes de integração determinadas anteriormente, as equações que descrevem o deslocamento e a rotação dos pontos que compõem a viga mostrada na Fig. (21.38) podem ser escritas como:

$$v = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{F}{6} x^3 - \frac{FL}{2} x^2 \right] \quad (21.110)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{F}{2} x^2 - FLx \right]$$

Utilizando as expressões mostradas na Eq.(21.110), determina-se o deslocamento no ponto B. Sabendo que nesse ponto  $x = L$  tem-se:

$$\Delta_{11} = v(L) = \frac{1}{E_1 I} \left[ \frac{F}{6} L^3 - \frac{FL}{2} L^2 \right] \Rightarrow \Delta_{11} = -\frac{FL^3}{3E_1 I}$$

Para que a condição de compatibilidade de deslocamento possa ser escrita, deve-se também determinar o deslocamento da barra BC, no ponto B, ocasionado pela força F. Verifica-se que o sentido da força F a ser considerado, para que esta esteja em coerência com o aplicado no problema 1, é o mostrado na Fig. (21.39).

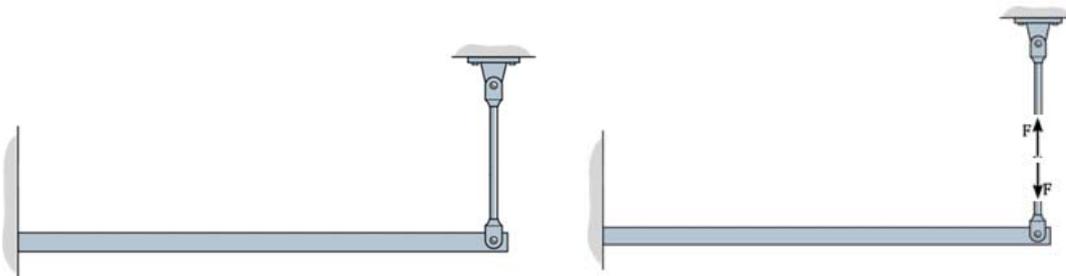


Figura 21.39 Deslocamento barra treliça.

A determinação do deslocamento de barras axialmente carregadas foi estudada no capítulo 14. Conforme apresentado naquela oportunidade, o deslocamento em questão pode ser calculado como:

$$\Delta_B^T = \frac{NL}{EA} \Rightarrow \Delta_B^T = \frac{-FL_1}{E_2A}$$

O deslocamento  $\Delta_B^T$  calculado acima indica um encurtamento na barra de treliça. Dessa forma, conclui-se que o deslocamento do ponto B, considerando a atuação da força F na barra de treliça, ocorre no sentido positivo do eixo y. Portanto, para a aplicação da condição de compatibilidade de deslocamento, deve-se considerar que os deslocamentos do ponto B atuantes no sentido negativo do eixo y são negativos e os deslocamentos atuantes no sentido positivo do eixo y são positivos. Dessa forma, com base nos deslocamentos calculados no problema 0, problema 1 e no deslocamento da barra de treliça, pode-se escrever que:

$$\Delta_{10} + \Delta_{11} = \Delta_B^T \quad (21.111)$$

Considerando o sentido de atuação de cada um dos deslocamentos mostrados na Eq.(21.111), tem-se:

$$-\frac{qL^4}{8E_1I} - \frac{FL^3}{3E_1I} = \frac{FL_1}{E_2A} \Rightarrow F \left[ \frac{L^3}{3E_1I} + \frac{L_1}{E_2A} \right] = -\frac{qL^4}{8E_1I} \Rightarrow$$

$$F = \frac{-\frac{qL^4}{8E_1I}}{\left[ \frac{L^3}{3E_1I} + \frac{L_1}{E_2A} \right]} \quad (21.112)$$

O sinal negativo da Eq.(21.112) indica que o sentido inicialmente arbitrado para a força F é errôneo. Esta força foi assumida como sendo de compressão sobre a barra de treliça, como mostrado na Fig. (21.39). Porém, para o sentido do carregamento q atuante, constata-se que o sentido correto da força F será de tração na barra de treliça, ou seja, oposto ao considerado no problema 1.

#### 21.4.8 – Exemplo 13

Uma viga de comprimento L tem sua seção transversal formada por um perfil do tipo C, conforme indicado na Fig. (21.40). Esta viga é engastada em seu extremo esquerdo enquanto que em seu extremo direito atuam uma força concentrada de

intensidade  $P$  e uma mola de constante elástica  $K$ . Determine o valor da constante da mola  $K$  para que nesta viga não sejam observados esforços de torção. Utilize o princípio da superposição dos efeitos para tal finalidade. O material que compõe a viga possui módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E$ . Além disso, a espessura dos elementos de parede fina que compõem a seção transversal é igual a  $a/20$ .

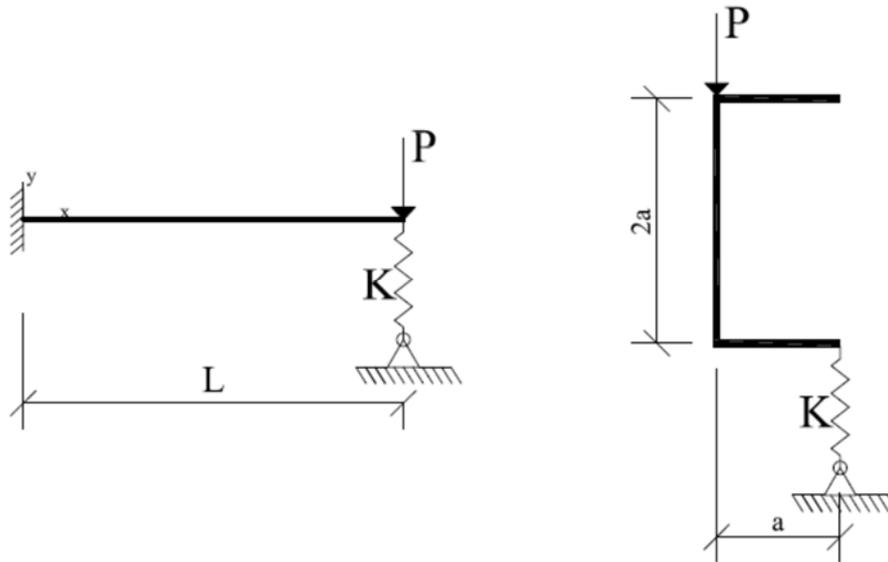


Figura 21.40 Sistema estrutural considerado.

Conforme apresentado no capítulo 20, flexo-torção é comumente observada em barras de seção transversal aberta e não simétrica. Nestes casos, o equilíbrio de momentos envolvendo as forças equivalentes devidas aos fluxos de cisalhamento gera um momento de torção. Este momento é nulo quando o esforço cortante é aplicado em um ponto especial denominado centro de cisalhamento. Portanto, para que a barra analisada sofra flexão sem torção, o esforço cortante, o qual resulta do balanço entre a força externa  $P$  e a força reativa da mola na viga, deve ser aplicado no centro de cisalhamento da seção transversal. Este ponto é determinado conhecendo-se as forças equivalentes atuantes ao longo dos elementos de paredes finas que compõem a seção transversal. Para que este ponto seja determinado, deve-se, inicialmente, calcular o momento de inércia da seção transversal, o qual é igual a:

$$I = 2 \left[ \frac{a \left( \frac{a}{20} \right)^3}{12} + a \left( \frac{a}{20} \right) a^2 \right] + \frac{a}{20} \frac{(2a)^3}{12} \Rightarrow I = 2 \left[ \frac{a^4}{96000} + \frac{a^4}{20} \right] + \frac{a^4}{30} \Rightarrow$$

$$I = 0,1333a^4$$

As forças equivalentes são determinadas integrando as intensidades dos fluxos de cisalhamento ao longo do comprimento dos elementos de paredes finas que compõem a seção transversal. Em seguida, deve-se efetuar o equilíbrio de momentos envolvendo tais forças, para que o centro de cisalhamento seja determinado. Neste exemplo, a somatória de momentos será efetuada em relação ao ponto médio da alma do perfil. Assim, basta que a força  $F_1$  indicada na Fig. (21.41) seja determinada. Portanto:

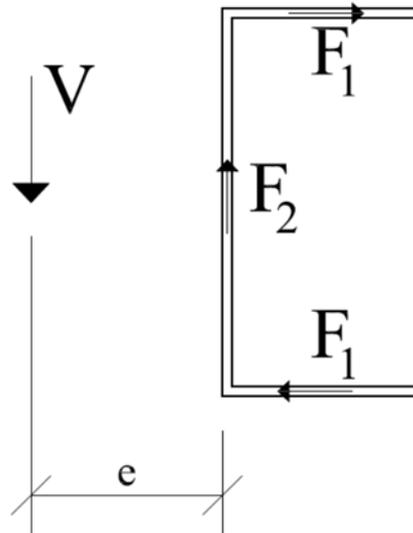


Figura 21.41 Forças equivalentes.

$$F_1 = \frac{V}{I} \int_0^a \left( \frac{a}{20} x \right) a dx \Rightarrow F_1 = \frac{V}{0,1333a^4} \int_0^a \frac{a^2}{20} x dx \Rightarrow F_1 = 0,1875V$$

Portanto, o equilíbrio de momentos conduz a:

$$Ve - 2(F_1 a) = 0 \Rightarrow e = \frac{2(0,1875Va)}{V} \Rightarrow e = 0,375a$$

Para que não haja torção na barra, o balanço de momentos envolvendo a força externa aplicada  $P$  e a reação da mola sobre a viga em relação ao centro de cisalhamento da seção transversal deve ser nulo. Assumindo que a mola esteja comprimida, a reação da mola sobre a viga será orientada na vertical para cima. Dessa forma:

$$Pe - F_m(e + a) = 0 \Rightarrow P \cdot 0,375a = F_m(0,375a + a) \Rightarrow F_m = 0,2727P$$

Com o valor da força na mola calculado anteriormente, basta que o deslocamento na mola seja determinado para que sua constante seja especificada dentro das limitações propostas no enunciado do problema. Este deslocamento será determinado utilizando o princípio da superposição dos efeitos. O problema 0 envolverá

a viga considerada e a carga externa  $P$ . O problema 1 envolverá a viga analisada e a reação da mola sobre a viga. Finalmente, uma condição de compatibilidade envolvendo o deslocamento da mola deverá ser imposta.

*Problema 0*

O problema 0 envolve a viga analisada e a força externa atuante  $P$ . Este problema é indicado na Fig. (21.42), assim como seu diagrama de corpo livre.



Figura 21.42 Problema 0.

A equação que governa a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga é facilmente determinada efetuando o equilíbrio de momentos em relação a uma seção genérica distante  $x$  do engaste. Efetuando este equilíbrio obtém-se:

$$\sum M = 0 \Rightarrow PL + M(x) - Px = 0 \Rightarrow M(x) = Px - PL$$

Com base na primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} [Px - PL] \quad (21.113)$$

Integrando a Eq.(21.113) em relação à variável  $x$  obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} [Px - PL] dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^2}{2} - PLx + C_1 \right] \quad (21.114)$$

Integrando a Eq.(21.114) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^2}{2} - PLx + C_1 \right] dx \Rightarrow \quad (21.115)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^3}{6} - \frac{PLx^2}{2} + C_1x + C_2 \right]$$

As duas constantes de integração,  $C_1$  e  $C_2$ , mostradas na Eq.(21.115) são determinadas a partir das condições de contorno do problema. Com base na viga ilustrada na Fig. (21.42), verifica-se que esta possui as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = 0 \quad \frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (21.116)$$

Com base na primeira condição de contorno apresentada na Eq.(21.116) obtém-se:

$$v(0) = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P0^3}{6} - \frac{PL0^2}{2} + C_1 0 + C_2 \right] \Rightarrow C_2 = 0$$

Utilizando a segunda condição de contorno mostrada na Eq.(21.116) obtém-se:

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P0^2}{2} - PL0 + C_1 \right] \Rightarrow C_1 = 0$$

Portanto, considerando os valores das constantes de integração determinados anteriormente, a equação que descreve o deslocamento dos pontos materiais que compõem a viga mostrada na Fig. (21.42) fica definida como:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^3}{6} - \frac{PLx^2}{2} \right]$$

Assim, o deslocamento do ponto onde a força externa  $P$  atua é igual a:

$$v_0 = v(L) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL^3}{6} - \frac{PLL^2}{2} \right] \Rightarrow v_0 = v(L) = -\frac{PL^3}{3EI} \quad (21.117)$$

### Problema 1

O problema 1 envolve a viga analisada e a reação da mola sobre a viga. O sistema a ser considerado neste problema está apresentado na Fig. (21.43).

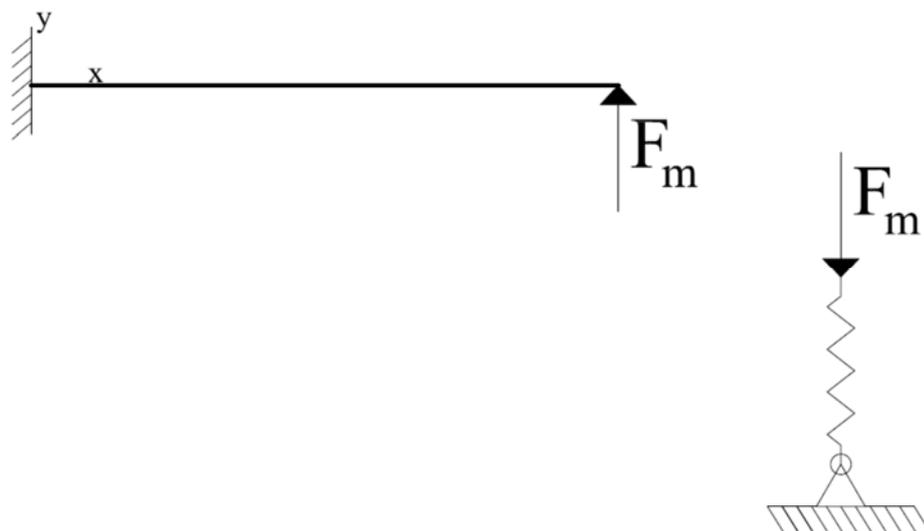


Figura 21.43 Problema 1.

Verifica-se que o sistema a ser considerado no problema 1 é idêntico ao analisado no problema 0, ou seja, uma viga engastada com carga concentrada aplicada

em seu extremo livre. Assim, substituindo a intensidade da força  $P$  mostrada na Eq.(21.117) por  $-F_m$  obtém-se o deslocamento alvo do problema 1. Portanto:

$$v_1 = v(L) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{-F_m L^3}{6} - \frac{-F_m L L^2}{2} \right] \Rightarrow v_1 = v(L) = \frac{F_m L^3}{3EI}$$

Utilizando o valor da força na mola determinado anteriormente, pode-se reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$v_1 = v(L) = \frac{F_m L^3}{3EI} \Rightarrow v_1 = v(L) = \frac{0,2727 PL^3}{3EI}$$

O encurtamento na mola é dado por sua equação característica, ou seja,  $\Delta_{mola} = F_m K \Rightarrow \Delta_{mola} = 0,2727 PK$ . Portanto, a seguinte equação de compatibilidade de deslocamento pode ser escrita, levando-se em consideração que  $v_0$  e  $\Delta_{mola}$  são deslocamentos verticais para baixo enquanto  $v_1$  é um deslocamento vertical para cima:

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 &= \Delta_{mola} \Rightarrow \\ -\frac{PL^3}{3EI} + \frac{0,2727 PL^3}{3EI} &= -0,2727 PK \Rightarrow \\ -\frac{PL^3}{3E0,1333a^4} + \frac{0,2727 PL^3}{3E0,1333a^4} &= -0,2727 PK \Rightarrow \\ K &= \frac{0,15Ea^4}{L^3} \end{aligned}$$

### 21.5 –Efeitos de Temperatura

Durante o capítulo 14 foram estudados os efeitos mecânicos causados em elementos de barra simples por uma variação uniforme de temperatura. Nessa situação, a barra tem seu comprimento aumentado (dilatação) com uma variação positiva de temperatura e diminuído (contração) com uma variação negativa de temperatura. Deve-se mencionar que se o deslocamento longitudinal mobilizado pela variação de temperatura não for impedido, nenhuma tensão extra é gerada na barra.

Quando um elemento de barra geral está submetido a uma variação diferencial (não uniforme) de temperatura, estando sua parte superior sujeita a uma temperatura  $T_1$  e sua face inferior a uma temperatura  $T_2$ , será observada uma curvatura na barra e, conseqüentemente, uma flexão, Fig. (21.44).

Para compreender as deflexões devidas à variação diferencial de temperatura, deve-se considerar um elemento de comprimento  $dx$  isolado de uma barra sujeita a uma variação diferencial de temperatura, Fig. (21.44). As mudanças no comprimento do elemento, em sua base e topo, são, respectivamente, iguais a:

$$\begin{aligned} \alpha (T_2 - T_0) dx \\ \alpha (T_1 - T_0) dx \end{aligned} \quad (21.118)$$

sendo  $T_0$  a temperatura de referência onde a barra foi construída e  $\alpha$  o coeficiente linear de expansão térmica.

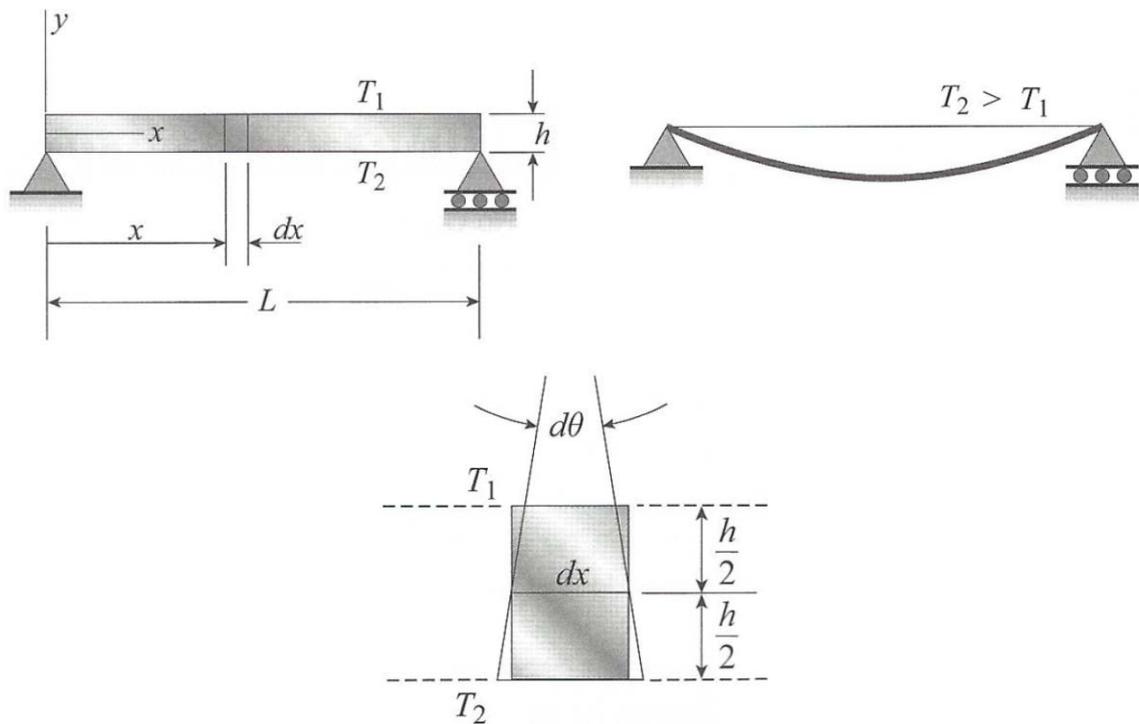


Figura 21.44 Deslocamentos devido à variação diferencial de temperatura.

Assumindo que  $T_2 > T_1$ , os lados do elemento vão rotacionar um em relação ao outro por meio de um ângulo  $d\theta$ . O ângulo  $d\theta$  relaciona-se às mudanças na dimensão do elemento pela seguinte equação:

$$hd\theta = \alpha (T_2 - T_0) dx - \alpha (T_1 - T_0) dx \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha (T_2 - T_1)}{h} \quad (21.119)$$

sendo  $h$  a altura da seção transversal da barra.

Como mostrado na Eq.(21.11),  $\frac{d\theta}{dx}$  é igual à curvatura da barra  $\left(\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}\right)$ . Uma vez que a curvatura é também igual a  $\frac{d^2v}{dx^2}$ , pode-se escrever a seguinte equação da linha elástica para o caso de efeitos diferenciais de temperatura:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \quad (21.120)$$

Se  $T_2 > T_1$ , a barra possuirá uma curvatura positiva, ou seja, será côncava para cima. A parcela  $\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}$  é a parte complementar de  $\frac{M}{EI}$ , a qual foi extensivamente estudada neste capítulo. A Eq.(21.120) é resolvida por meio de um processo de integrações sucessivas, onde utilizam-se as condições de contorno do problema para a determinação das constantes de integração.

As temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  devem ser iguais em valor absoluto para que a utilização da Eq.(21.120) seja possível. No entanto, em diversas aplicações de engenharia, as temperaturas atuantes nas faces inferior e superior das barras não atendem a esta condição. Em tais situações, as temperaturas atuantes devem ser decompostas considerando seu valor médio. Para o sistema apresentado na Fig. (21.45), a temperatura média apresenta o seguinte valor, sendo  $\left|\bar{T}_1\right| \neq \left|\bar{T}_2\right|$ :

$$T_{med} = \frac{\bar{T}_2 + \bar{T}_1}{2} \quad (21.121)$$

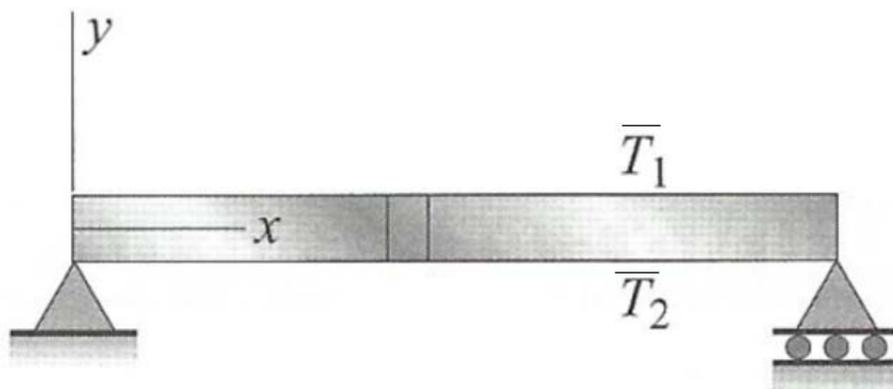


Figura 21.45 Atuação das temperaturas  $\bar{T}_2$  e  $\bar{T}_1$ .

Portanto, nestas situações, as temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  podem ser definidas como:

$$T_1 = \bar{T}_1 - T_{med} \quad (21.122)$$

$$T_2 = \bar{T}_2 - T_{med}$$

Quando as temperaturas atuantes nas faces inferior e superior da barra não possuem mesmo valor absoluto, a barra desloca-se perpendicularmente a seu eixo devido a ação de  $T_1$  e  $T_2$ . Além disso, desloca-se paralelamente a seu eixo (alongamento ou encurtamento) devido a  $T_{med}$ . Tal comportamento decorre da decomposição das temperaturas, como indicado na Fig. (21.46), onde  $T_1$  e  $T_2$  possuirão mesmo valor absoluto e  $T_{med}$  apresenta valor uniforme ao longo do comprimento da barra.

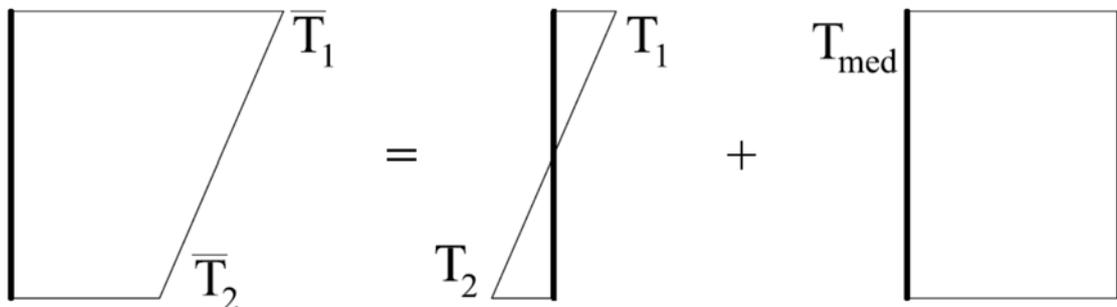


Figura 21.46 Decomposição das temperaturas  $\bar{T}_2$  e  $\bar{T}_1$ .

### 21.5.1 – Exemplo 14

Determine a expressão da linha elástica para a viga mostrada na Fig. (21.47). Sabe-se que nesta viga, cuja seção transversal é retangular com base  $b$  e altura  $h$ , além do carregamento uniformemente distribuído atua também uma variação diferencial de temperatura. Na face inferior da barra uma variação de temperatura igual a  $50^\circ$  é observada, enquanto que em sua face superior uma variação de  $-20^\circ$  é verificada. Considere que o produto  $EI$  seja constante para toda a extensão da viga.

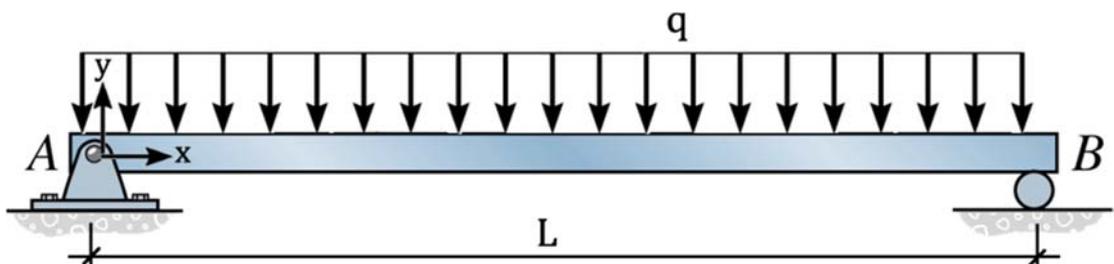


Figura 21.47 Viga a ser analisada.

Para a solução deste exemplo, deve-se determinar a expressão que relaciona o momento fletor atuante ao sistema de coordenadas posicionado no apoio A. Para isso, deve-se, inicialmente, calcular as reações de apoio da estrutura. Devido à simetria da estrutura, e assumindo que as reações de apoio estão orientadas no sentido de  $y$  positivo, verifica-se facilmente que estas reações são iguais a:

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$

Assim, para uma seção genérica distante de  $x$  do apoio A, como ilustrado na Fig. (21.48), pode-se expressar o momento fletor efetuando-se o equilíbrio de corpo rígido. Portanto:

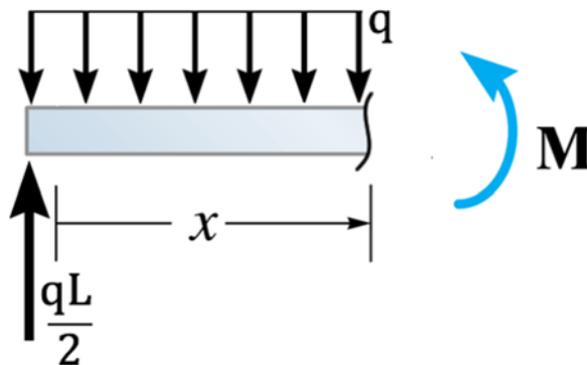


Figura 21.48 Determinação da equação do momento fletor.

$$\sum M = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{2}x + qx\frac{x}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

Os efeitos de temperatura são considerados utilizando a Eq.(21.120). Como

$|\bar{T}_1| \neq |\bar{T}_2|$  deve-se efetuar a decomposição da temperatura atuante. Utilizando as Eq.(21.121) e Eq.(21.122) tem-se:

$$T_{med} = \frac{50 - 20}{2} \Rightarrow T_{med} = 15^\circ$$

Portanto, nestas situações, as temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  podem ser definidas como:

$$T_1 = -20 - 15 \Rightarrow T_1 = -35^\circ$$

$$T_2 = 50 - 15 \Rightarrow T_2 = 35^\circ$$

Utilizando a primeira das equações mostradas na Eq.(21.19) acoplada aos efeitos térmicos, Eq.(21.120), tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right] + \frac{70\alpha}{h} \quad (21.123)$$

Integrando a Eq.(21.123) em relação ao comprimento da viga obtém-se:

$$\int \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right] + \frac{70\alpha}{h} dx \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 \right] + \frac{70\alpha}{h}x + C_1$$
(21.124)

Integrando a Eq.(21.124) em relação ao comprimento da viga tem-se:

$$\int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 \right] + \frac{70\alpha}{h}x + C_1 dx \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 \right] + \frac{70\alpha}{2h}x^2 + C_1x + C_2$$
(21.125)

Para que as constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  sejam determinadas, deve-se aplicar as condições de contorno do problema. As duas constantes de integração são determinadas utilizando-se duas condições de contorno do problema. Assim, sabe-se que:

$$v(A) = v(0) = 0$$

$$v(B) = v(L) = 0$$

Com a primeira das condições de contorno obtém-se:

$$v(A) = v(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12}0^3 - \frac{q}{24}0^4 \right] + \frac{70\alpha}{2h}0^2 + C_10 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Já a aplicação da segunda delas resulta em:

$$v(B) = v(L) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12}L^3 - \frac{q}{24}L^4 \right] + \frac{70\alpha}{2h}L^2 + C_1L \Rightarrow$$

$$C_1 = -\frac{1}{EI} \frac{qL^3}{24} - \frac{35\alpha L}{h}$$

Dessa forma, a expressão da linha elástica da viga fica assim escrita:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 \right] + \frac{35\alpha}{h}x^2 + \left( -\frac{1}{EI} \frac{qL^3}{24} - \frac{35\alpha L}{h} \right) x$$
(21.126)

As rotações são calculadas com base na primeira derivada da Eq.(21.126).

Assim, a expressão que relaciona as rotações de todos os pontos da viga é a seguinte:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 \right] + \frac{70\alpha}{h}x + \left( -\frac{1}{EI} \frac{qL^3}{24} - \frac{35\alpha L}{h} \right)$$
(21.127)

Como verificação ao leitor, o autor sugere que sejam comparadas as respostas obtidas nas Eq.(21.126) e Eq.(21.127) com os resultados apresentados nas Eq.(21.25) e Eq.(21.26).

Como as temperaturas atuantes nas faces inferior e superior da barra são diferentes em valor absoluto, a barra irá deslocar-se perpendicularmente a seu eixo devido a  $T_1$  e  $T_2$ , conforme anteriormente determinado. Além disso, a barra também irá deslocar-se paralelamente a seu eixo devido a  $T_{med}$ . Como  $T_{med}$  apresenta valor positivo, será observado um alongamento da barra. A barra analisada é isostática, portanto, nenhum esforço extra será observado devido a este deslocamento. Utilizando os conceitos apresentados no capítulo 14, o deslocamento axial da barra assume o seguinte valor:

$$\delta = \alpha L \Delta T \Rightarrow \delta = \alpha L T_{med} \Rightarrow \delta = 15 \alpha L$$

## **22. – Estabilidade Estrutural. Flambagem de Colunas**

### 22.1 – Introdução

Os elementos estruturais que compõem um sistema estrutural são projetados para suportar carregamentos externos, com segurança e economia, de forma que a edificação, manufatura ou máquina no qual estejam posicionados exerça com plenitude suas funções. Dessa forma, é de grande importância que os engenheiros projetem os elementos estruturais de maneira que os possíveis modos de falha da estrutura sejam consistentemente considerados.

Os elementos estruturais podem falhar de diversas formas, segundo seu tipo, suas condições de vinculação, os carregamentos atuantes e os materiais que os compõem. Até o presente momento, foram estudadas falhas relacionadas ao esgotamento da capacidade portante do elemento. Esse estudo foi conduzido empregando-se critérios de falha, sendo a falha caracterizada quando o estado de tensão atuante em algum ponto material da estrutura torna negativa (supera) a equação do critério de falha (a capacidade resistente do material).

Outro tipo de falha refere-se ao deslocamento excessivo da estrutura, o qual está relacionado às suas condições de utilização. Nesse caso, embora a estrutura ainda possua capacidade de absorção de carregamento externo, o deslocamento excessivo dos elementos estruturais impossibilita o correto funcionamento do sistema estrutural, impedindo, por consequência, que este atenda às suas finalidades. Tais problemas foram analisados no capítulo 21.

Neste capítulo será estudado um tipo de falha estrutural, o qual refere-se à instabilidade de elementos estruturais comprimidos. Elementos estruturais longos e esbeltos carregados axialmente em compressão poderão defletir-se lateralmente e falhar

por flexão, em vez de falhar por compressão direta. Às falhas decorrentes da deflexão lateral de elementos comprimidos dá-se o nome de flambagem.

A flambagem pode ser facilmente observada aplicando-se uma compressão em uma régua flexível, conforme mostrado na Fig. (22.1). Inicialmente a régua permanece retilínea, no entanto, a partir de uma intensidade crítica da força compressiva ocorre a deflexão lateral. A flambagem pode também ser observada em uma treliça plana composta por duas barras, segundo ilustração da Fig. (22.1). Nesse caso, a deflexão lateral é observada a partir de uma intensidade crítica do esforço normal no elemento estrutural.

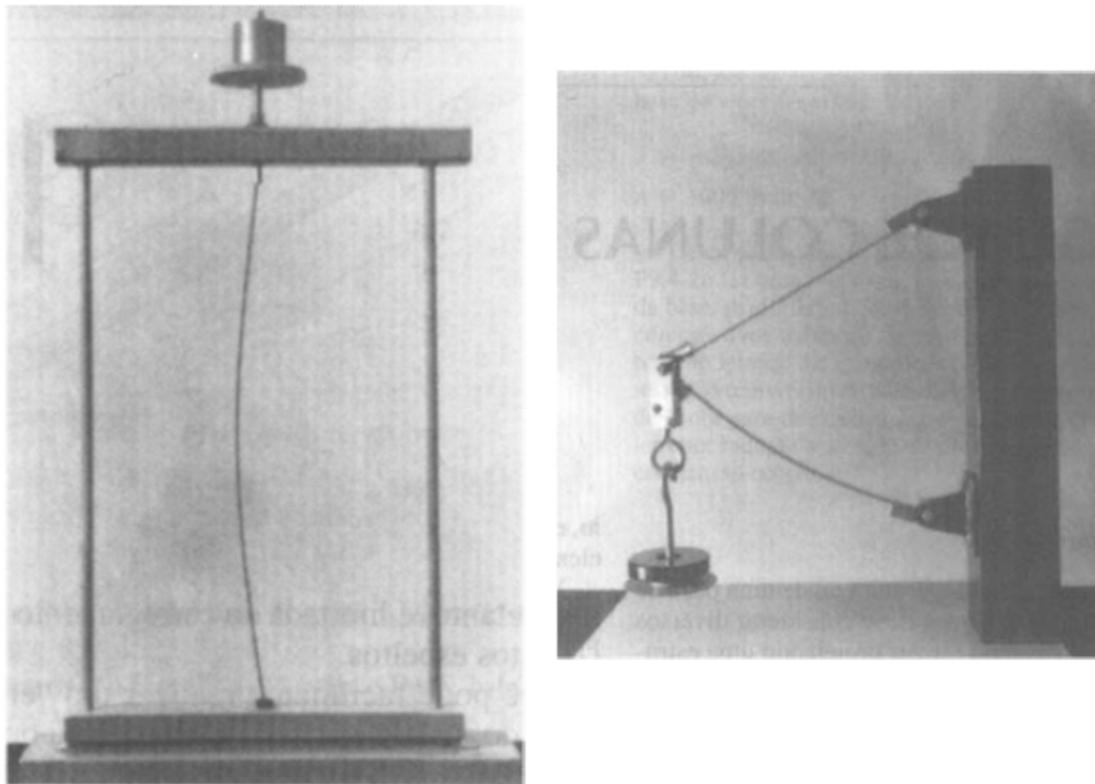


Figura 22.1 Flambagem de elementos axialmente comprimidos.

É importante ressaltar que o fenômeno da flambagem não está limitado a colunas submetidas a esforços de compressão. Este tipo de falha pode ocorrer em vários tipos de estruturas, podendo tomar diferentes formas. Para fins ilustrativos, uma viga fletida poderá flambar lateralmente devido à ação das tensões de compressão em partes de sua seção transversal, como mostrado na Fig. (22.2). Já em tubos cilíndricos, ações decorrentes do impacto podem gerar a flambagem de suas paredes, como ilustrado na Fig. (22.2).

Durante o processo de flambagem o carregamento compressivo é aumentado progressivamente, até que este atinja um valor crítico denominado de carga crítica,  $P_{crítico}$ . A partir desta intensidade de carga, a estrutura perde sua estabilidade defletindo lateralmente de forma súbita. Deve-se ressaltar que, até esse momento, as barras comprimidas analisadas eram sujeitas apenas à deformação axial. Porém, após ser ultrapassado o valor de  $P_{crítico}$  existe uma deflexão lateral e o elemento estrutural, inicialmente comprimido e com deslocamentos direcionados apenas ao longo de seu eixo, passa a comportar-se como viga, ou seja, com deslocamentos perpendiculares ao seu eixo.

Devido ao seu caráter súbito, as falhas por flambagem são frequentemente catastróficas, o que faz com que seja de extrema importância preveni-las.

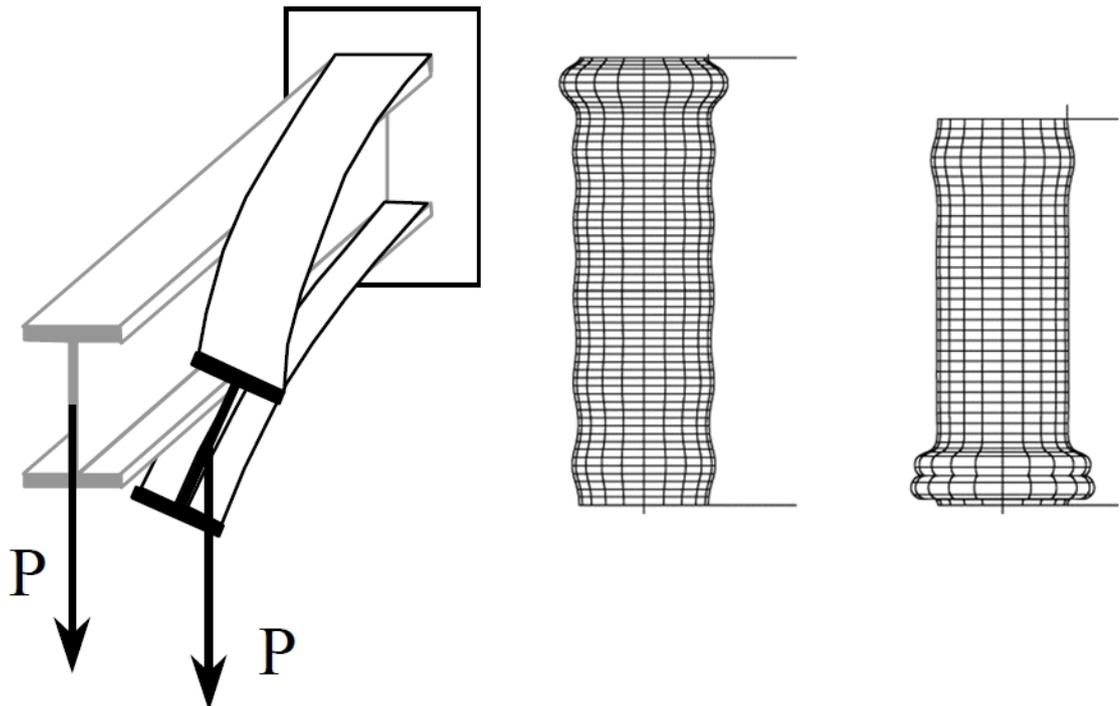


Figura 22.2 Outros tipos de flambagem.

### 22.2 – Condições de Estabilidade ao Equilíbrio

Problemas mecânicos envolvendo elementos estruturais incluem, em sua grande maioria, a aplicação de condições de equilíbrio. Até o presente momento, foram consideradas apenas as equações e as condições que conduziam à situação de equilíbrio. Porém, nada foi dito a respeito da estabilidade dessas condições.

Considerando estruturas susceptíveis à flambagem, a abordagem da estabilidade do equilíbrio é de grande importância para a compreensão deste fenômeno. A estabilidade ao equilíbrio pode ser ilustrada de forma simples considerando o equilíbrio de uma esfera posicionada sobre três superfícies diferentes, conforme mostrado na Fig. (22.3). Por meio desta figura, observa-se que nas três situações consideradas a esfera encontra-se em equilíbrio, ou seja,  $\sum F = 0$  e  $\sum M = 0$ .

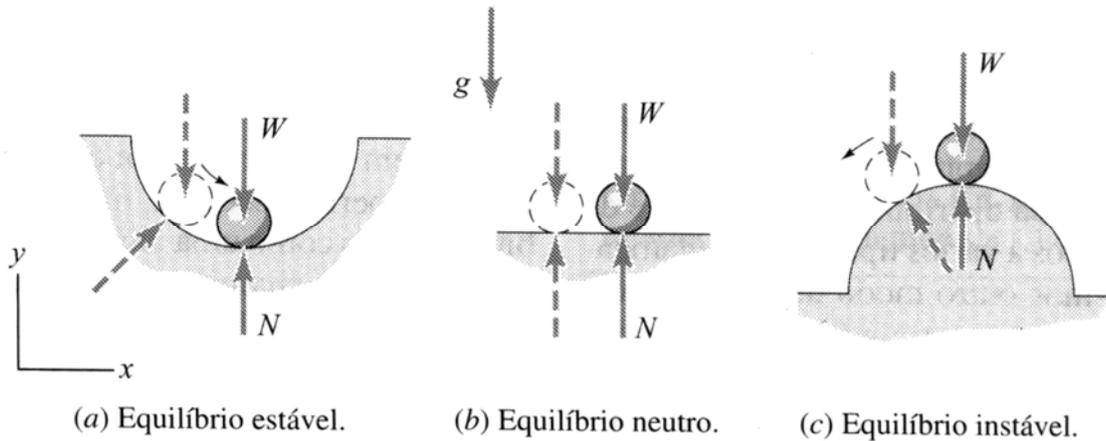


Figura 22.3 Estabilidade ao equilíbrio.

Conforme mostra a ilustração (a) da Fig.(22.3), constata-se que a esfera encontra-se no fundo de um vale na condição de equilíbrio estático. Nessa situação, se a esfera for ligeiramente deslocada para qualquer um de seus lados e em seguida for solta, percebe-se, intuitivamente, que ela retornará ao fundo do vale e à condição de equilíbrio estático. Embora seja introduzida uma perturbação no sistema, este retorna à condição de mínima energia e ao equilíbrio. Diz-se que, nessa situação, o equilíbrio é estável, uma vez que após a introdução da perturbação, a condição de equilíbrio alcançada é igual à observada na condição não deslocada.

Caso a esfera esteja localizada sobre uma superfície plana, como apresentado na ilustração (b) da Fig. (22.3), a aplicação de um deslocamento (perturbação) conduz a esfera à outra posição. Em sua nova posição, posição deslocada, a esfera estará em equilíbrio estático, assim como em sua configuração inicial. Porém, após a aplicação deste deslocamento (perturbação), verifica-se que o equilíbrio é somente possível se for considerada a configuração deslocada do sistema. Diz-se que nessa condição o equilíbrio é neutro, uma vez que o equilíbrio é verificado considerando-se a configuração deslocada do sistema.

Finalmente, na ilustração (c) da Fig. (22.3), apesar da esfera encontrar-se em equilíbrio em sua posição inicial, qualquer deslocamento (perturbação) aplicado ao sistema fará com que esta se afaste cada vez mais da posição de equilíbrio inicial. Nessa condição, diz-se que o equilíbrio é instável, já que qualquer perturbação no sistema, por menor que seja, resulta na perda de equilíbrio do sistema.

Baseando-se nas condições de estabilidade ao equilíbrio apresentadas anteriormente as etapas presentes no processo de flambagem podem ser melhor estudadas. Quando o elemento estrutural está submetido a um carregamento axial que gera um esforço normal inferior à carga crítica,  $P_{crítico}$ , o equilíbrio da estrutura é estável. Nessa situação, a flambagem não ocorre e o deslocamento observado é apenas axial. Após a retirada do carregamento atuante, a estrutura retoma sua configuração inicial, tal como observado na ilustração (a) da Fig. (22.3). Todos os problemas anteriormente estudados neste curso envolvem este tipo de condição de equilíbrio.

Quando o esforço normal atuante no elemento estrutural é superior a  $P_{crítico}$ , a flambagem ocorre. Nessa situação, será observado o deslocamento lateral do elemento e o equilíbrio, caso ele exista, somente será possível considerando a configuração deslocada do sistema. Nesse caso, o equilíbrio é instável já que a nova posição de equilíbrio é consideravelmente diferente da configuração inicial. As condições de equilíbrio não são, normalmente, observadas neste tipo de equilíbrio.

Quando o carregamento axial atuante gera um esforço normal que seja igual a  $P_{crítico}$  tem-se a interface entre os equilíbrios estável e instável. Nesse ponto, o equilíbrio é neutro já que é ainda possível efetuar o equilíbrio do elemento. Porém, este tipo de equilíbrio é efetuado considerando a posição deslocada do elemento. Nesse ponto ocorre a bifurcação do equilíbrio, ou seja, para esforços maiores que  $P_{crítico}$  a configuração final não é definida.

### 22.2.1 – Exemplo 1

Analise as condições de estabilidade da coluna mostrada na Fig. (22.4). Trata-se de uma coluna axialmente solicitada por uma força  $P$ , estando, em seu extremo superior, presa por uma mola de constante elástica  $k$ .

Conforme anteriormente discutido, quando a intensidade de  $P$  é menor que  $P_{crítico}$ , a coluna desloca-se apenas longitudinalmente. Assim, deflexões laterais não são observadas e o equilíbrio observado é do tipo estável.

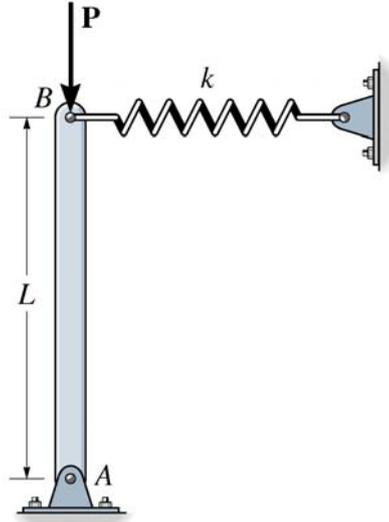


Figura 22.4 Estrutura a ser analisada.

Para que os equilíbrios neutro e instável sejam observados, a coluna deve defletir-se lateralmente, ou seja, possuir uma configuração deslocada lateral. Em seguida, o equilíbrio da estrutura em sua configuração deslocada deve ser formulado. A configuração deslocada assumida para a coluna é apresentada na Fig. (22.5), sendo  $F_m$  a reação da mola sobre a coluna.

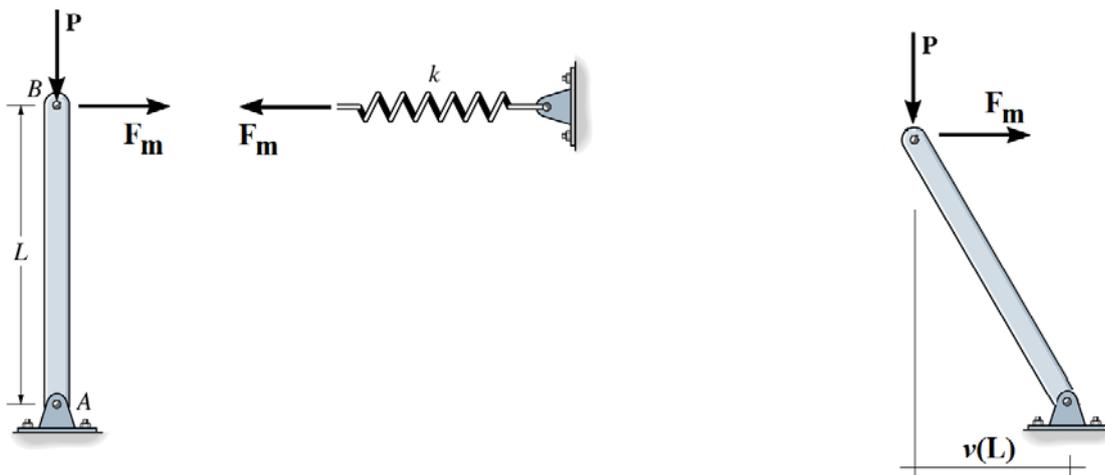


Figura 22.5 Configuração deslocada da coluna.

Efetuando o equilíbrio de momentos em relação ao ponto A, assumindo a validade da equação característica da mola, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow -Pv(L) + F_m L = 0 \Rightarrow -Pv(L) + kv(L)L = 0 \Rightarrow \\ (-P + kL)v(L) &= 0 \end{aligned} \quad (22.1)$$

sendo  $v(L)$  a deflexão lateral da coluna em seu topo.

Quando o equilíbrio é estável, a deflexão lateral da coluna não é observada. Nesta condição  $v(L) = 0$  e o equilíbrio anteriormente formulado é atendido, Eq.(22.1).

Quando  $v(L) \neq 0$ , os termos entre parêntesis devem anular-se para que o equilíbrio seja atendido, Eq.(22.1). Nesta situação tem-se:

$$-P + kL = 0 \Rightarrow P = kL \Rightarrow P_{crítico} = kL$$

Quando  $P = kL$  observa-se a condição de equilíbrio neutro, ou seja, existe uma configuração de equilíbrio a qual é obtida na configuração deslocada da estrutura. Nesta condição, o equilíbrio formulado na Eq.(22.1) é atendido. O carregamento limite para que a flambagem não ocorra é  $P_{crítico} = kL$ .

Por outro lado, quando  $P > kL$  o equilíbrio formulado na Eq.(22.1) não é atendido. Portanto, nesta situação, observa-se a condição de equilíbrio instável da estrutura. A estrutura poderá apresentar uma nova configuração de equilíbrio. Porém, esta será possível em uma condição muito diferente da inicial. Em estruturas reais, tal equilíbrio é observado quando o elemento estrutural desconecta-se do sistema estrutural ao qual pertence, ou seja, tem-se o colapso mecânico do elemento estrutural e do sistema estrutural.

### 22.3 – Flambagem de Euler para colunas biarticuladas

Neste item será apresentada a equação que permite a determinação de  $P_{crítico}$  considerando colunas cujos extremos sejam articulados. Para investigar a condição de estabilidade destas colunas, utiliza-se uma coluna ideal, delimitada em seus extremos por pinos, conforme apresenta a Fig. (22.6).

Para a formulação do problema, as seguintes hipóteses serão assumidas:

1. A coluna é perfeitamente reta e composta por um material de comportamento mecânico elástico linear.
2. A coluna é livre para girar em suas extremidades.

3. A coluna é simétrica em relação ao plano  $xy$  e qualquer deflexão lateral da coluna ocorre neste plano.
4. A coluna é carregada por uma força axial compressiva,  $P$ , aplicada no centro de gravidade da seção.

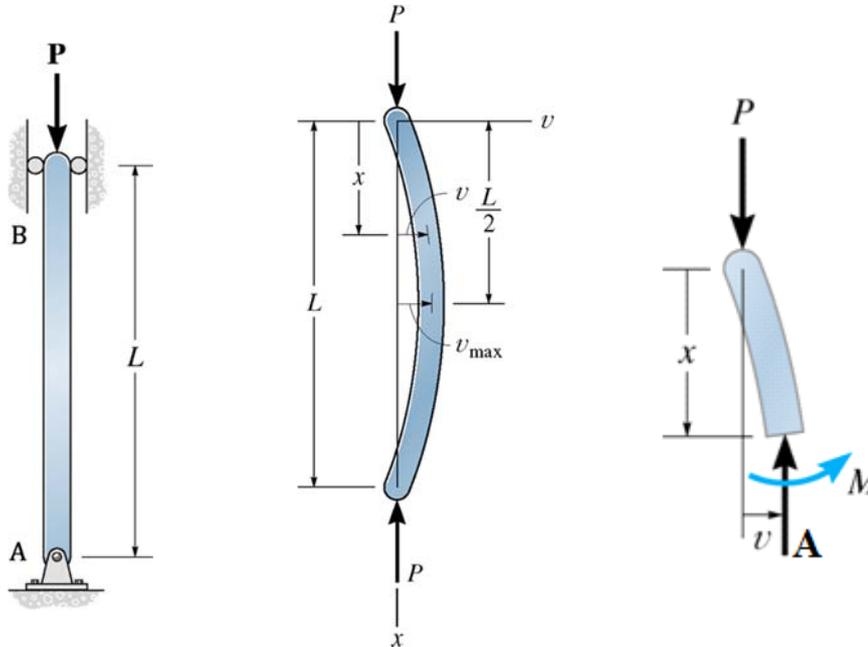


Figura 22.6 Colunas biarticulada. Condição de equilíbrio.

Com relação ao valor da carga  $P$  aplicada, admite-se que:

1. Se  $P$  for menor que  $P_{crítico}$ , a coluna permanecerá reta e terá seu comprimento reduzido pela ação de uma tensão normal uniforme de compressão. Nessa situação o equilíbrio é estável.
2. Se  $P$  for igual a  $P_{crítico}$ , então o equilíbrio na posição não deslocada ainda é possível. Nesse caso o equilíbrio é neutro.

Para a obtenção do valor da carga crítica,  $P_{crítico}$ , efetua-se o equilíbrio de corpo rígido da coluna assumindo-se a atuação da carga axial  $P$  e uma configuração geométrica ligeiramente fletida da coluna. Considerando o diagrama de corpo livre apresentado na última ilustração da Fig. (22.6), pode-se efetuar o equilíbrio da coluna em sua configuração deslocada. Dessa forma tem-se:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\Rightarrow -P + A = 0 &\Rightarrow A = P \\
 \sum M_z = 0 &\Rightarrow Pv(x) + M(x) = 0 &\Rightarrow M(x) = -Pv(x)
 \end{aligned}
 \tag{22.2}$$

Com base no estudo dos deslocamentos de elementos estruturais fletidos, apresentado no capítulo 21, tem-se que a seguinte equação é válida:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (22.3)$$

Assim, substituindo na Eq.(22.3) o valor do momento fletor determinado na Eq.(22.2) tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{-Pv(x)}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI}v(x) = 0 \quad (22.4)$$

A Eq.(22.4) é a equação diferencial que governa a configuração deslocada de uma coluna delimitada por apoios articulados. Trata-se de uma equação diferencial ordinária, homogênea, linear e de segunda ordem. As condições de contorno que a solução dessa equação deve obedecer são as seguintes:

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0 \quad (22.5)$$

A presença do termo  $v(x)$  na equação diferencial Eq.(22.4) indica que a solução desta equação não é obtida integrando-a duas vezes. Na verdade, uma solução de forma simples para esta equação somente é possível se o termo  $EI$  for constante ao longo do comprimento do elemento. Nessa situação, a equação diferencial torna-se ordinária e com coeficientes constantes.

Sendo  $\psi^2 = \frac{P}{EI}$  pode-se reescrever a Eq.(22.4) como:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI}v(x) = 0 \Rightarrow v''(x) + \psi^2v(x) = 0 \quad (22.6)$$

A solução homogênea desta equação diferencial é conhecida, sendo igual a:

$$v(x) = C_1 \text{sen}(\psi x) + C_2 \text{cos}(\psi x) \quad (22.7)$$

Assim, o problema poderá ser formulado se as constantes  $C_1$  e  $C_2$  forem determinadas. Essas constantes deverão obedecer às condições de contorno do problema, as quais estão apresentadas na Eq.(22.5). Portanto, aplicando as condições expressas na Eq.(22.5) obtém-se:

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\Rightarrow C_1 \text{sen}(\psi 0) + C_2 \text{cos}(\psi 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(L) = 0 &\Rightarrow C_1 \text{sen}(\psi L) + C_2 \text{cos}(\psi L) = 0 \Rightarrow C_1 \text{sen}(\psi L) = 0 \end{aligned} \quad (22.8)$$

Com base no resultado apresentado na Eq.(22.8), constata-se que se ambas constantes  $C_1$  e  $C_2$  forem nulas, a deflexão lateral  $v(x)$  será também nula para todos os

pontos materiais que compõem a coluna. Consequentemente, a configuração deslocada final será retilínea e o fenômeno da flambagem não terá sido levado em consideração.

Como se deseja obter uma configuração de equilíbrio alternativa, deve-se considerar um valor de  $\psi$  que satisfaça a segunda condição de contorno,  $v(L) = 0$ , assumindo que a constante  $C_1$  seja diferente de zero, ou seja,  $\psi$  deve satisfazer a equação característica. Assim:

$$C_1 \sin(\psi L) = 0 \quad \text{sendo } C_1 \neq 0 \text{ tem-se} \quad (22.9)$$

$$\sin(\psi L) = 0 \Rightarrow \psi = \frac{n\pi}{L} \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

Sendo  $\psi^2 = \frac{P}{EI}$ , pode-se reescrever o resultado apresentado na Eq.(22.9) como:

$$\psi = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (22.10)$$

O valor da carga atuante  $P$ , que desencadeia o processo de flambagem, é obviamente o menor valor dado pela Eq.(22.10), ou seja, a flambagem ocorrerá quando a variável  $n$  for igual à unidade. Portanto, a carga crítica de flambagem é dada por:

$$P_{crítico} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{crítico} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (22.11)$$

A Eq.(22.11) é conhecida como carga de flambagem de Euler, e recebe este nome devido ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), o qual foi o primeiro pesquisador a estabelecer uma teoria de flambagem para colunas de eixo retilíneo.

A função que representa a configuração deslocada da coluna é denominada de modo de flambagem. O primeiro modo de flambagem,  $n = 1$ , pode também ser chamado de modo fundamental de flambagem, como ilustrado na Fig. (22.7). Embora a coluna possa teoricamente flambar em seu segundo modo, ou seja, com  $n = 2$  e

$P_{crítico} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ , isso é somente possível com a presença de algum suporte lateral,

localizado na posição  $x = L/2$ , que provoque o travamento lateral da coluna nesse ponto, fazendo com que o primeiro modo de flambagem seja prevenido. A configuração deslocada da flambagem em modo 2 é ilustrada na Fig. (22.7). O termo  $C_1$  representa o deslocamento máximo,  $v_{MAX}$ , que ocorre no ponto médio da coluna.

Deve-se notar que a carga crítica é independente da resistência do material, ou seja, de sua tensão de escoamento ou de ruptura. Esta carga, como mostrado na Eq.(22.11), depende apenas das dimensões da coluna ( $I$  e  $L$ ) e da rigidez do material (ou de seu módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ ). Por esta razão, considerando que a flambagem ocorra em regime elástico, as colunas feitas, por exemplo, de aço de alta resistência não apresentam vantagens em relação às feitas de aço de baixa resistência, uma vez que o módulo de elasticidade longitudinal é aproximadamente o mesmo para ambos os aços.

Deve ser ressaltado que a capacidade portante de uma coluna cresce com o aumento dos momentos de inércia de sua seção transversal. Assim, colunas eficientemente projetadas são aquelas onde a maior parte da área de sua seção transversal encontra-se afastada, tanto quanto possível, de seus eixos principais de inércia. Por esta razão, colunas compostas por seções transversais de alma vazada são mais econômicas e eficientes que seções transversais maciças.

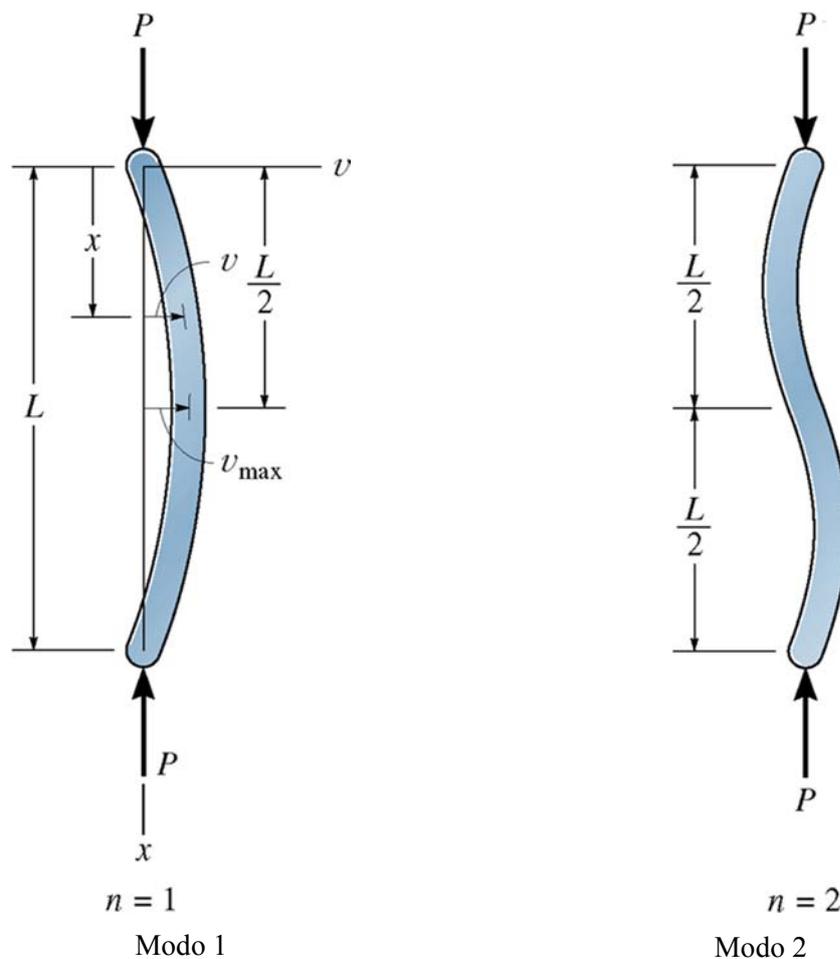


Figura 22.7 Dois primeiros modos de flambagem de uma coluna biarticulada.

É importante também enfatizar que o processo de flambagem ocorrerá relativamente ao eixo principal em torno do qual atua a menor inércia da seção transversal, conforme ilustra a Fig. (22.8). Conseqüentemente, durante o dimensionamento das seções transversais destes elementos estruturais, os engenheiros devem, preferencialmente, atender à condição de momentos principais de inércia idênticos. Por esta razão, seções quadradas, circulares e compostas por perfis do tipo H são frequentemente selecionados para as colunas.

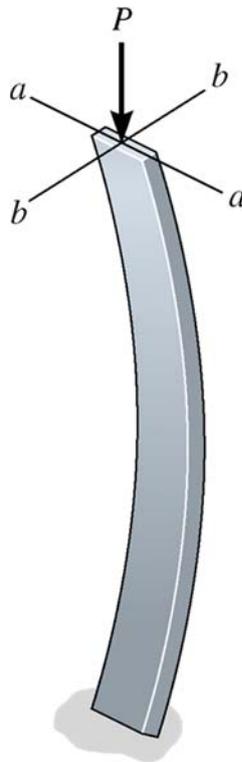


Figura 22.8 Flambagem em torno do eixo aa, eixo principal de menor inércia.

#### 22.4 – Aspectos de Projeto

Para o desenvolvimento de projetos estruturais de colunas, torna-se interessante a definição de duas variáveis geométricas relativas à seção transversal do elemento estrutural. A primeira dela é denominada raio de giração, sendo definida como:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (22.12)$$

Como toda seção transversal possui dois eixos principais de inércia, haverão dois valores de raio de giração, sendo cada um deles referenciado a um eixo principal.

A segunda propriedade geométrica de grande utilidade em projetos de colunas é conhecida como índice de esbeltez,  $\lambda$ . Este índice representa uma medida da flexibilidade da coluna quanto à flambagem, podendo ser classificado como longo, intermediário ou curto. O índice de esbeltez é definido como:

$$\lambda = \frac{L}{r} \quad (22.13)$$

Assim como o raio de giração, existem dois valores para o índice de esbeltez, sendo cada um deles relacionado a um eixo principal de inércia. Quanto maior for o valor do índice de esbeltez, maior será a tendência da flambagem ocorrer em relação a este eixo principal.

Por meio das grandezas definidas nas Eq.(22.12) e Eq.(22.13), pode-se obter uma expressão que permite a determinação da intensidade da tensão normal que causa a flambagem da coluna. Esta equação é obtida utilizando-se a Eq.(22.11). Dessa forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{crítico} = \frac{P_{crítico}}{A} &\Rightarrow \sigma_{crítico} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} \Rightarrow \sigma_{crítico} = \frac{\pi^2 E r^2}{L^2} \Rightarrow \\ \sigma_{crítico} &= \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (22.14)$$

A partir do resultado apresentado na Eq.(22.14), pode-se construir um diagrama cujos eixos sejam  $\sigma_{crítico}$  e  $\lambda$ . Segundo os valores adotados para as propriedades geométricas da seção transversal, o comprimento da coluna e a tensão de escoamento do material, constata-se que a coluna poderá falhar por escoamento do material presente na seção transversal antes da falha por instabilidade geométrica (flambagem). Este diagrama, para dois materiais estruturais correntemente empregados na construção de manufaturas, aço e alumínio, é apresentado na Fig. (22.9).

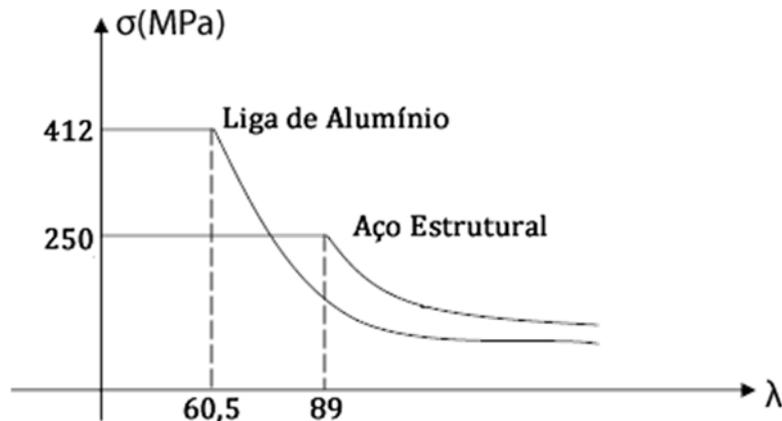


Figura 22.9 Variação da tensão normal de falha com o índice de esbeltez da coluna.

Nos trechos horizontais do diagrama apresentado na Fig. (22.9), observa-se que a falha estrutural ocorre devido ao escoamento do material. Já nos trechos curvos, denominado de hipérbole de Euler, a falha se dá devido à flambagem da coluna. De forma a melhor utilizar o material estrutural e a disposição geométrica da coluna, deve-se procurar projetar colunas cujo par  $\sigma$ ,  $\lambda$  resulte no encontro entre os trechos linear e hiperbólicos apresentados na Fig. (22.9). Nessa situação, tem-se a condição de máxima utilização da capacidade portante do material e máxima capacidade portante da coluna (sistema estrutural), resultando, portanto, na máxima eficiência do sistema.

### 22.5 – Exemplo 2

Uma coluna biarticulada de comprimento igual a 4,0 metros está submetida a uma força compressiva aplicada no centro de gravidade de sua seção transversal. Sabendo que o material que compõe esta coluna possui módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E = 70\text{ GPa}$  e tensão de escoamento igual a  $\sigma_E = 270\text{ MPa}$ , determine a intensidade máxima da carga axial que pode ser aplicada na coluna sem que a falha da estrutura seja observada. A seção transversal da coluna está apresentada na Fig. (22.10), cujas dimensões estão representadas em mm.

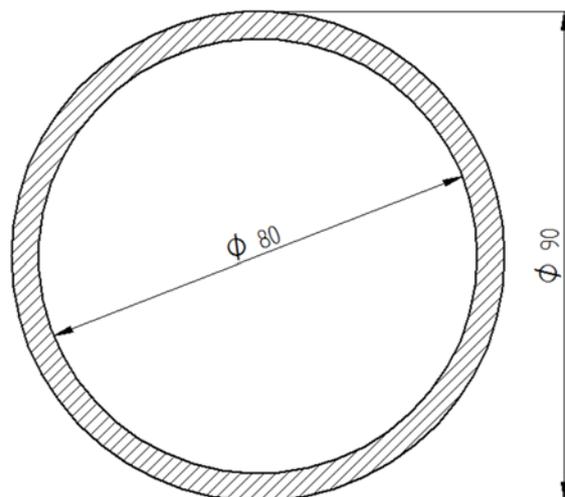


Figura 22.10 Seção transversal da coluna a ser analisada. Dimensões em mm.

Para a resolução desse exemplo, deve-se determinar o valor da carga crítica por meio da Eq.(22.11). Em seguida, deve-se verificar se a tensão mobilizada pela carga crítica é menor que a tensão de escoamento do material. Em caso afirmativo, a maior

força axial que poderá ser aplicada na coluna, sem a ocorrência da falha, será a própria carga crítica. Caso contrário, a força axial máxima será igual à força que conduz ao escoamento a seção transversal da coluna.

As propriedades geométricas da seção transversal são iguais a:

$$A = \pi(45^2 - 40^2) \Rightarrow A = 1335,1767 \text{ mm}^2 \Rightarrow A = 1335,1767 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi}{4}(45^4 - 40^4) \Rightarrow I = 1,21 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \Rightarrow I = 1,21 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{1,21 \cdot 10^6}{1335,1767}} \Rightarrow r = 30,104 \text{ mm} \Rightarrow r = 0,030104 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{4,0}{0,030104} \Rightarrow \lambda = 132,87$$

Devido à simetria da seção transversal em relação a todas as suas direções, observa-se que os valores do momento de inércia, do raio de giração e do índice de esbeltez serão iguais em relação a todas as direções. Portanto, a carga crítica pode ser calculada como:

$$P_{crítico} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{crítico} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^6 \cdot 1,21 \cdot 10^{-6}}{4^2} \Rightarrow P_{crítico} = 52,247 \text{ kN}$$

A tensão normal produzida pela aplicação da carga crítica é igual a:

$$\sigma = \frac{P_{crítico}}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{52,247}{1335,1767 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \sigma = 39131,31 \text{ KPa} \Rightarrow \sigma = 39,13131 \text{ MPa}$$

Como a tensão mobilizada pela aplicação de  $P_{crítico}$  é menor que a tensão de escoamento da seção, constata-se que a maior força axial que poderá ser aplicada sem a observação da falha da estrutura é igual a 52,247 kN.

### 22.6 – Exemplo 3

Uma coluna de comprimento igual a 2,0 m e extremidades articuladas possui seção transversal quadrada. Sabendo que esta coluna é constituída de pinho, cujo módulo de elasticidade longitudinal e tensão de ruptura são iguais a  $E = 13 \text{ GPa}$  e  $\sigma_u = 12 \text{ MPa}$ , respectivamente, determine as dimensões da seção transversal da coluna,

a qual é ilustrada na Fig. (22.11), se esta deve resistir a uma força axial de 100 kN aplicada no centro de gravidade de sua seção transversal sem a ocorrência da falha.

Para que a falha não ocorra nesta coluna, as dimensões da seção transversal devem ser tais que não conduzam nem a flambagem nem a ruptura do material. Dessa forma, as dimensões da seção transversal serão determinadas de forma que essas duas condições de falha sejam atendidas, ou melhor, impedidas. Considerando primeiramente a flambagem, deve-se determinar o valor da carga crítica por meio da Eq.(22.11). Assim:

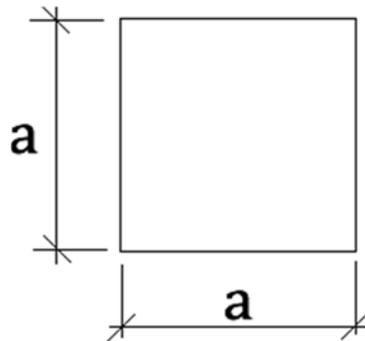


Figura 22.11 Seção transversal da coluna a ser analisada.

$$I = \frac{aa^3}{12} \Rightarrow I = \frac{a^4}{12}$$

Por meio da Eq.(22.11) tem-se:

$$P_{\text{crítico}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow 100 = \frac{\pi^2 \cdot 13 \cdot 10^6 a^4}{2^2 \cdot 12} \Rightarrow a = 0,07821 m \Rightarrow a = 7,821 cm$$

Verificando a condição a ruptura tem-se:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow 12 \cdot 10^3 = \frac{100}{a^2} \Rightarrow a = 0,09129 m \Rightarrow a = 9,129 cm$$

Com base nos valores obtidos para o comprimento do lado da seção transversal da coluna, considerando os modos de falha de flambagem e ruptura da seção, observa-se que o valor que previne ambos os modos de falha é o maior deles, ou seja,  $a = 9,129 cm$ . Com esse valor de comprimento de lado, a tensão mobilizada pelo carregamento atuante é igual à tensão de ruptura e a carga que gera a flambagem é maior que a carga aplicada.

22.7 – Exemplo 4

Uma coluna biarticulada com comprimento igual a 3,5 m e seção transversal retangular, conforme indicado na Fig. (22.12), é feita de um material que possui módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E = 130 \text{ GPa}$ . Para esta coluna, determine as propriedades geométricas de sua seção transversal e as cargas críticas de flambagem em relação aos planos principais de inércia.

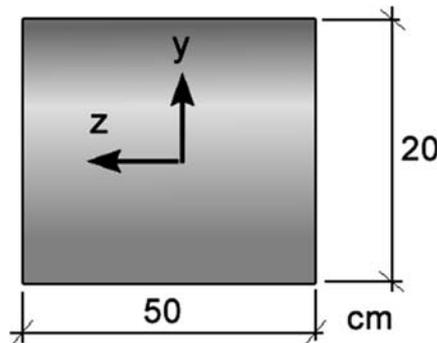


Figura 22.12 Seção transversal da coluna a ser analisada. Dimensões em cm.

As propriedades geométricas da seção transversal são iguais a:

$$A = 20 \cdot 50 \Rightarrow A = 1000 \text{ cm}^2 \Rightarrow A = 0,10 \text{ m}^2$$

$$I_z = \frac{50 \cdot 20^3}{12} \Rightarrow I_z = 3,33333 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_z = 3,33333 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 50^3}{12} \Rightarrow I_y = 2,08333 \cdot 10^5 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_y = 2,08333 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Os raios de giração são dados por:

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \Rightarrow r_z = \sqrt{\frac{3,33333 \cdot 10^{-4}}{0,10}} \Rightarrow r_z = 0,057735 \text{ m} \Rightarrow r_z = 5,7735 \text{ cm}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow r_y = \sqrt{\frac{2,08333 \cdot 10^{-3}}{0,10}} \Rightarrow r_y = 0,14434 \text{ m} \Rightarrow r_y = 14,434 \text{ cm}$$

Já os índices de esbeltez são dados por:

$$\lambda_z = \frac{L}{r_z} \Rightarrow \lambda_z = \frac{3,5}{0,057735} \Rightarrow \lambda_z = 60,6218$$

$$\lambda_y = \frac{L}{r_y} \Rightarrow \lambda_y = \frac{3,5}{0,14434} \Rightarrow \lambda_y = 24,2483$$

Como a esbeltez em torno do eixo  $z$  é maior, a coluna flambará primeiramente em torno desse eixo. Para mostrar essa constatação serão determinados os valores das cargas críticas em relação a cada um dos eixos principais de inércia,  $y$  e  $z$ . Em relação ao eixo  $z$ , a carga crítica será menor que em relação ao eixo  $y$ . Aplicando a Eq.(22.11) tem-se:

$$P_{crítico}^z = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \Rightarrow P_{crítico}^z = \frac{\pi^2 \cdot 130 \cdot 10^6 \cdot 3,33333 \cdot 10^{-4}}{3,5^2} \Rightarrow P_{crítico}^z = 34912,85 \text{ kN}$$

$$P_{crítico}^y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \Rightarrow P_{crítico}^y = \frac{\pi^2 \cdot 130 \cdot 10^6 \cdot 2,08333 \cdot 10^{-3}}{3,5^2} \Rightarrow P_{crítico}^y = 218205,19 \text{ kN}$$

Dessa forma, assim como já previsto pela análise do índice de esbeltez, constata-se que a flambagem ocorrerá primeiramente em torno do eixo  $z$ , que é o eixo que contém a menor inércia, uma vez que  $P_{crítico}^z < P_{crítico}^y$ .

## 22.8 – O Efeito das Condições de Extremidade na Flambagem de Colunas

Nos itens anteriores, o problema da flambagem foi formulado e expressões para a determinação da carga crítica e tensão crítica foram obtidas. Deve-se enfatizar que todo o equacionamento apresentado é válido para colunas cujas extremidades sejam articuladas. Dessa forma, pode-se questionar o que ocorre quando essa condição não é obedecida? Quais são os valores da carga crítica para outros tipos de vinculação que não a articulação? Esse problema será discutido neste item. Inicialmente, será apresentada a análise da flambagem para uma coluna engastada em um extremo e livre no extremo oposto. Para as demais condições de contorno os resultados serão obtidos por indução.

Para a determinação da expressão da carga crítica de uma coluna engastada-livre, deve-se considerar a coluna mostrada na Fig. (22.13), a qual é engastada-livre e submetida a uma carga axial de compressão aplicada no centro de gravidade de sua seção transversal. Por meio das equações de equilíbrio de corpo rígido, obtém-se a expressão do momento fletor atuante ao longo do comprimento da coluna. Assim, como mostrado na última ilustração da Fig. (22.13) tem-se:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow -P[\delta - v(x)] + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = P[\delta - v(x)] \quad (22.15)$$

Utilizando as equações diferenciais do estudo da linha elástica, conforme apresentado no capítulo 21, verifica-se que a deflexão lateral da coluna pode ser expressa por:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{P[\delta - v(x)]}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v(x)}{dx^2} - \frac{P}{EI}\delta + \frac{P}{EI}v(x) = 0 \quad (22.16)$$

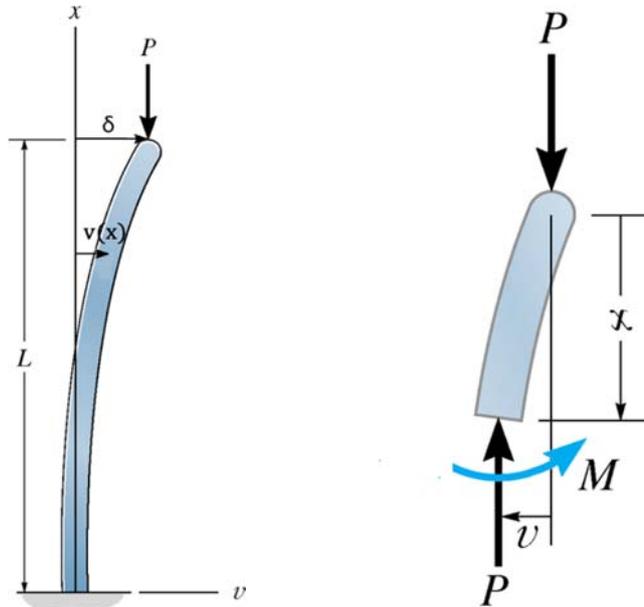


Figura 22.13 Colunas engastada livre. Condição de equilíbrio.

Sendo  $\psi^2 = \frac{P}{EI}$ , pode-se reescrever a Eq.(22.16) como:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} - \psi^2\delta + \psi^2v(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2v(x)}{dx^2} + \psi^2v(x) = \psi^2\delta \quad (22.17)$$

A equação diferencial apresentada na Eq.(22.17) é não homogênea, uma vez que o termo presente em seu segundo membro é não nulo. A solução desta equação diferencial consiste na adição de uma solução particular à sua solução homogênea.

Dessa forma, a solução da Eq.(22.17) é dada por:

$$v(x) = C_1 \text{sen}(\psi x) + C_2 \text{cos}(\psi x) + \delta \quad (22.18)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  que aparecem na Eq.(22.18) serão determinadas considerando as condições de contorno atuantes nas extremidades da coluna. Como se trata de uma coluna engastada livre tem-se que:

$$v(0) = 0 \qquad \frac{dv(0)}{dx} = 0 \qquad (22.19)$$

Por meio da primeira condição de contorno apresentada na Eq.(22.19) obtém-se:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 \sin(\psi 0) + C_2 \cos(\psi 0) + \delta = 0 \Rightarrow C_2 = -\delta \qquad (22.20)$$

Utilizando a segunda condição de contorno apresentada na Eq.(22.19) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dv(0)}{dx} = 0 &\Rightarrow \psi C_1 \cos(\psi x) - \psi C_2 \sin(\psi x) = 0 \Rightarrow \\ \psi C_1 \cos(\psi 0) - \psi C_2 \sin(\psi 0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned} \qquad (22.21)$$

A partir das constantes determinadas nas Eq.(22.20) e Eq.(22.21) pode-se escrever a equação da deflexão lateral da coluna como:

$$v(x) = -\delta \cos(\psi x) + \delta \Rightarrow v(x) = \delta [1 - \cos(\psi x)] \qquad (22.22)$$

No topo da coluna o deslocamento lateral atuante é igual a  $\delta$ . Para que essa condição seja atendida, verifica-se que:

$$v(L) = \delta = \delta [1 - \cos(\psi L)] \Rightarrow \delta \cos(\psi L) = 0 \qquad (22.23)$$

A solução trivial da Eq.(22.23) conduz a um valor nulo para o deslocamento na extremidade da coluna, ou seja,  $\delta = 0$ . Quando a solução trivial é adotada, a flambagem não é representada, uma vez que a deflexão lateral da coluna é nula. Portanto, para que esse fenômeno seja representado, a solução da Eq.(22.23) deve assumir a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta \cos(\psi L) = 0 \text{ sendo } \delta \neq 0 \text{ tem-se} \\ \cos(\psi L) = 0 \Rightarrow \psi = \frac{n\pi}{2L} \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \qquad (22.24)$$

Sendo  $\psi^2 = \frac{P}{EI}$ , pode-se reescrever o resultado apresentado na Eq.(22.24)

como:

$$\psi = \frac{n\pi}{2L} \Rightarrow \frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{4L^2} \Rightarrow P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{4L^2} \qquad (22.25)$$

Considerando o primeiro carregamento que gera a flambagem da coluna, ou seja, aquele cujo  $n = 1$  tem-se:

$$P_{\text{crítico}} = \frac{1^2 \pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{\text{crítico}} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (22.26)$$

Comparando a Eq.(22.26) com a Eq.(22.11), ou seja, as equações que resultam as cargas críticas de flambagem para colunas engastada-livre e biarticuladas,

respectivamente, constata-se que a coluna engastada-livre suporta apenas um quarto da carga que poderia ser aplicada a uma coluna biarticulada antes da flambagem. O formato dessas equações é o mesmo, porém, diferenciam-se pela presença do escalar 4 no denominador. Essas equações poderiam ser reescritas assumindo-se um comprimento equivalente para cada uma das colunas. Nesse caso, a coluna engastada-livre possui comprimento equivalente igual ao dobro do comprimento da coluna biarticulada. De forma a obter uma expressão única para a análise da flambagem de colunas, independentemente de suas condições de vinculação, deve-se empregar o conceito de comprimento equivalente de colunas, o qual será introduzido no item seguinte.

### 22.9 – Comprimento Equivalente

Conforme demonstrado previamente neste capítulo, a fórmula da flambagem de Euler, Eq.(22.11), foi desenvolvida assumindo-se uma coluna cujas extremidades eram biarticuladas. O parâmetro  $L$ , que surgiu nesta equação, representa o comprimento da coluna, o qual é igual à distância entre os pontos onde o momento fletor atuante é nulo.

Caso a coluna considerada esteja vinculada de outra maneira que não a bi articulação, a fórmula de Euler pode ainda ser aplicada, como apresentado no item anterior. No entanto, para estas condições de vinculação, o parâmetro  $L$  deve ser avaliado de forma a representar a distância entre os pontos da coluna onde o momento fletor atuante seja nulo. Esta distância é denominada de comprimento equivalente da coluna,  $L_e$ .

Para colunas biarticuladas,  $L_e$  é igual ao próprio comprimento da coluna. Já para o caso de colunas vinculadas na condição engastado-livre, o comprimento equivalente é igual a duas vezes o comprimento da coluna. Para outros tipos de condições de vinculação, pode-se determinar o comprimento equivalente resolvendo-se uma equação diferencial baseada na deflexão lateral da coluna. Esse procedimento será omitido nessas notas apenas para evitar a repetição de cálculos já amplamente apresentados nos itens 22.3 e 22.8. Para os casos clássicos da mecânica dos sólidos/resistência dos materiais, a determinação dos valores do comprimento equivalente pode ser efetuada com base na seguinte relação:

$$L_e = KL \quad (22.27)$$

onde  $K$  é denominado de fator de extremidade. Para as condições de vinculação clássicas, o valor do parâmetro  $K$  é dado pelas ilustrações apresentadas na Fig. (22.14).

Considerando o fator de extremidade, pode-se escrever a fórmula da flambagem de Euler de uma maneira geral como:

$$P_{crítico} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \Rightarrow P_{crítico} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (22.28)$$

Com base também no fator de extremidade, pode-se definir o índice de esbeltez de em sua forma geral como:

$$\lambda = \frac{KL}{r} \Rightarrow \lambda = \frac{L_e}{r} \quad (22.29)$$

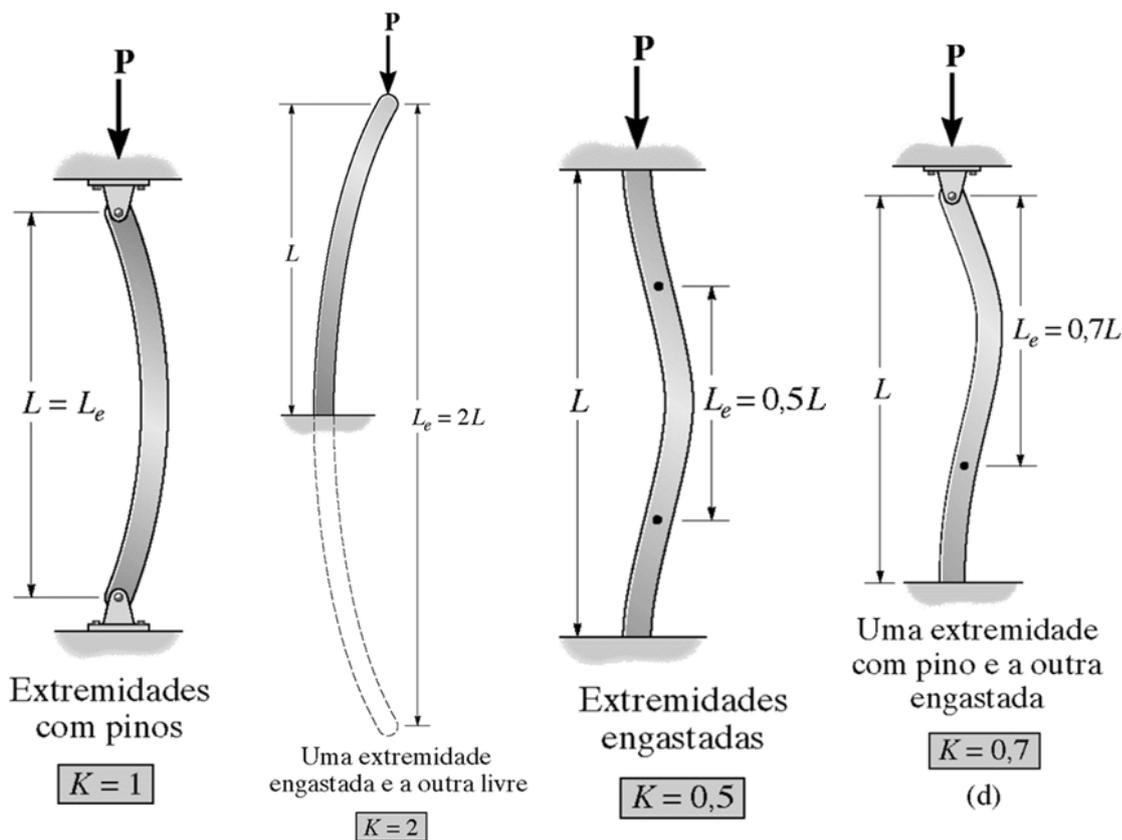


Figura 22.14 Determinação do fator de extremidade.

22.10 – Exemplo 5

A coluna apresentada na Fig. (22.15) é fixa em sua base e vinculada por cabos em seu topo. Sabendo que o perfil que compõe a seção transversal da coluna possui as seguintes propriedades geométricas:

$$A = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 ; I_x = 61,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 ; I_y = 23,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

e que o material que forma a coluna possui as seguintes propriedades mecânicas:

$$E = 70 \text{ GPa} ; \sigma_E = 215 \text{ MPa}$$

Determine o valor da máxima força axial de compressão que pode ser aplicada no centro de gravidade da seção transversal da coluna sem que a falha estrutural seja observada.

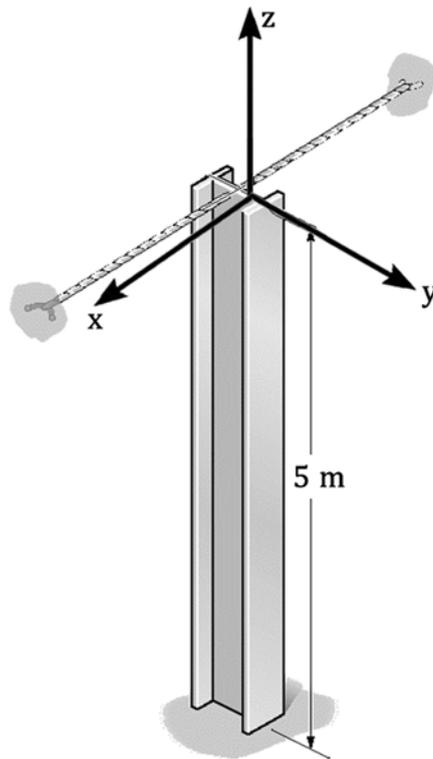


Figura 22.15 Coluna a ser analisada.

Como a coluna será submetida a uma força axial de compressão, deve-se verificar se a falha estrutural não ocorrerá com relação ao escoamento da seção transversal, à flambagem em torno do eixo  $x$  e à flambagem em torno do eixo  $y$ .

Assumindo primeiramente como cenário de falha o escoamento do material presente na seção transversal da coluna, verifica-se que a máxima intensidade da força aplicada poderá ser igual a:

$$\sigma_E = \frac{P_{\text{crítico}}}{A} \Rightarrow P_{\text{crítico}} = 215 \cdot 10^3 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow P_{\text{crítico}} = 1612,5 \text{ kN} \quad (22.30)$$

Considerando a falha por flambagem em torno do eixo  $x$ , pode-se aplicar a Eq.(22.28) para a determinação da carga crítica. Em relação a este eixo, a análise deve ser conduzida considerando a coluna como engastada-livre. Assim:

$$P_{\text{crítico}}^X = \frac{\pi^2 EI_x}{(KL)^2} \Rightarrow P_{\text{crítico}}^X = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^6 \cdot 61,3 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot 5)^2} \Rightarrow \quad (22.31)$$

$$P_{\text{crítico}}^X = 423,505 \text{ kN}$$

Analisando agora a falha por flambagem em torno do eixo  $y$ , constata-se que em relação a este eixo a coluna encontra-se engastada-rotulada. Por meio da Eq.(22.28), sabe-se que a carga crítica da coluna, para a flambagem em torno deste eixo, é dada por:

$$P_{\text{crítico}}^Y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)^2} \Rightarrow P_{\text{crítico}}^Y = \frac{\pi^2 \cdot 70 \cdot 10^6 \cdot 23,2 \cdot 10^{-6}}{(0,7 \cdot 5)^2} \Rightarrow \quad (22.32)$$

$$P_{\text{crítico}}^Y = 1308,428 \text{ kN}$$

Assim, a máxima força axial compressiva que pode ser aplicada à coluna é a menor entre as cargas críticas apresentadas nos resultados das Eq.(22.30), Eq.(22.31) e Eq.(22.32). Portanto, a carga crítica da coluna é igual a  $P_{\text{crítico}} = 423,505 \text{ kN}$  e o modo de falha principal é a flambagem em torno do eixo  $x$ .

Deve-se ressaltar que embora o momento de inércia da seção transversal em torno do eixo  $y$  seja menor que o momento de inércia em torno do eixo  $x$ , o que poderia induzir o analista a pensar que o eixo  $y$  seria o eixo mais propenso à flambagem, as condições de vinculação atuantes nos extremos da coluna tornaram a esbelteza equivalente em torno do eixo  $x$  maior. Apenas para verificação, pode-se aplicar a Eq.(22.29) para a determinação dos valores dos índices de esbelteza equivalentes. Assim:

$$\lambda_x = \frac{KL}{r_x} \Rightarrow \lambda_x = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{\frac{61,3 \cdot 10^{-6}}{7,5 \cdot 10^{-3}}}} \Rightarrow \lambda_x = 110,611$$

$$\lambda_y = \frac{KL}{r_y} \Rightarrow \lambda_y = \frac{0,7 \cdot 5}{\sqrt{\frac{23,2 \cdot 10^{-6}}{7,5 \cdot 10^{-3}}}} \Rightarrow \lambda_y = 62,930$$

Dessa forma, a coluna irá flambar em torno do eixo cuja esbeltez seja maior.

### 22.11 – Exemplo 6

A coluna apresentada na Fig. (22.16) é formada por um aço cujo módulo de elasticidade longitudinal é igual a  $E = 29000 \text{ ksi}$  e tensão de escoamento igual a  $\sigma_E = 60 \text{ ksi}$ . Assumindo que as vigas de contraventamento posicionadas ao longo do comprimento da coluna permitam o giro da coluna naquele ponto, mas não seu deslocamento lateral, e que a seção transversal da coluna possua as seguintes propriedades geométricas:

$$A = 4,43 \text{ in}^2 ; I_x = 29,1 \text{ in}^4 ; I_y = 9,32 \text{ in}^4$$

determine a carga crítica da coluna.

Para a determinação da carga crítica da coluna apresentada na Fig. (22.16), devem ser considerados os cenários de falha referentes ao escoamento da seção transversal, a flambagem em torno do eixo  $x$  e a flambagem em torno do eixo  $y$ .

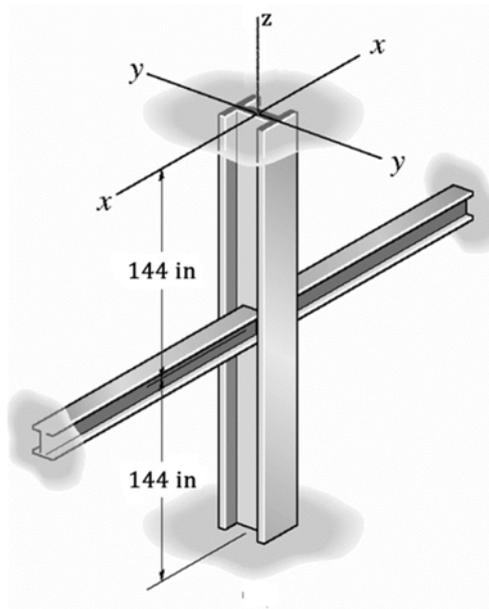


Figura 22.16 Coluna a ser analisada.

Iniciando a análise considerando como cenário de falha o escoamento da seção transversal, observa-se que a máxima intensidade da força aplicada poderá ser igual a:

$$\sigma_E = \frac{P_{critico}}{A} \Rightarrow P_{critico} = 60 \cdot 4,43 \Rightarrow P_{critico} = 265,8 \text{ kip} \quad (22.33)$$

Analisando agora a falha por flambagem em torno do eixo  $x$ , a carga crítica pode ser determinada utilizando-se a Eq.(22.28). Com base nas condições de vinculação da coluna, apresentadas na Fig. (22.16), tem-se:

$$P_{crítico}^x = \frac{\pi^2 EI_x}{(KL)^2} \Rightarrow P_{crítico}^x = \frac{\pi^2 \cdot 29000 \cdot 29,1}{(0,5 \cdot 288)^2} \Rightarrow P_{crítico}^x = 401,667 \text{ kip} \quad (22.34)$$

Considerando a falha por flambagem em torno do eixo  $y$ , constata-se que esta é também dada pela Eq.(22.28). Assim:

$$P_{crítico}^y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)^2} \Rightarrow P_{crítico}^y = \frac{\pi^2 \cdot 29000 \cdot 9,32}{(0,7 \cdot 144)^2} \Rightarrow P_{crítico}^y = 262,538 \text{ kip} \quad (22.35)$$

Assim, a carga crítica da coluna é a menor entre as cargas obtidas nas Eq.(22.33), Eq.(22.34) e Eq.(22.35). Portanto, a carga crítica da coluna é igual a  $P_{crítico} = 262,538 \text{ kip}$ , e o modo de falha principal é a flambagem em torno do eixo  $y$ .

Portanto, nessa coluna, mesmo com as vigas de contraventamento posicionadas para reduzir o comprimento equivalente de flambagem em torno do eixo  $y$ , o modo de falha crítico ainda é a flambagem em torno do eixo  $y$ .

### 22.12 – Flambagem de Colunas na Presença de Momento Fletor

No estudo de estabilidade de colunas apresentado até o momento, as estruturas analisadas e suas condições de contorno eram ideais, ou seja, as colunas eram perfeitamente retilíneas e a força compressiva aplicada estava posicionada no centro de gravidade da seção transversal da coluna. Tais condições são, na verdade, idealizadas, uma vez que os elementos estruturais dificilmente serão perfeitamente retilíneos e o ponto de aplicação da carga axial compressiva nunca será exatamente o centro de gravidade da seção transversal.

De forma a considerar estas imperfeições, que são inerentes ao processo de fabricação do sistema estrutural e de seus elementos, deve-se analisar o problema da estabilidade de colunas comprimidas assumindo-se que a carga axial esteja aplicada com uma dada excentricidade em relação ao centro de gravidade da seção transversal da coluna. Para formular o problema da estabilidade de colunas submetidas a forças excêntricas, deve-se considerar a coluna apresentada na Fig. (22.17). Trata-se de uma coluna solicitada por uma força compressiva de intensidade  $P$ , a qual encontra-se

aplicada com uma excentricidade  $e$  em relação ao centro de gravidade da seção transversal. Nessa estrutura, assume-se que o giro seja permitido em seus extremos, ou seja, a coluna é biarticulada. Além disso, considera-se que o material que compõe a coluna possua comportamento mecânico elástico linear.

Aplicando as equações de equilíbrio de corpo rígido à coluna mostrada na Fig. (22.17), determina-se a expressão do momento fletor atuante ao longo de seu comprimento. Dessa forma, considerando a última ilustração da Fig. (22.17) obtém-se:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow Pe + Pv(x) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = -Pe - Pv(x) \quad (22.36)$$

Por meio das equações diferenciais que permitem a determinação da linha elástica de estruturas fletidas, conforme apresentado nas Eq.(21.19) do capítulo anterior, verifica-se que a deflexão lateral da coluna pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} &\Rightarrow \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{-Pe - Pv(x)}{EI} \Rightarrow \\ \frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI}e + \frac{P}{EI}v(x) &= 0 \end{aligned} \quad (22.37)$$

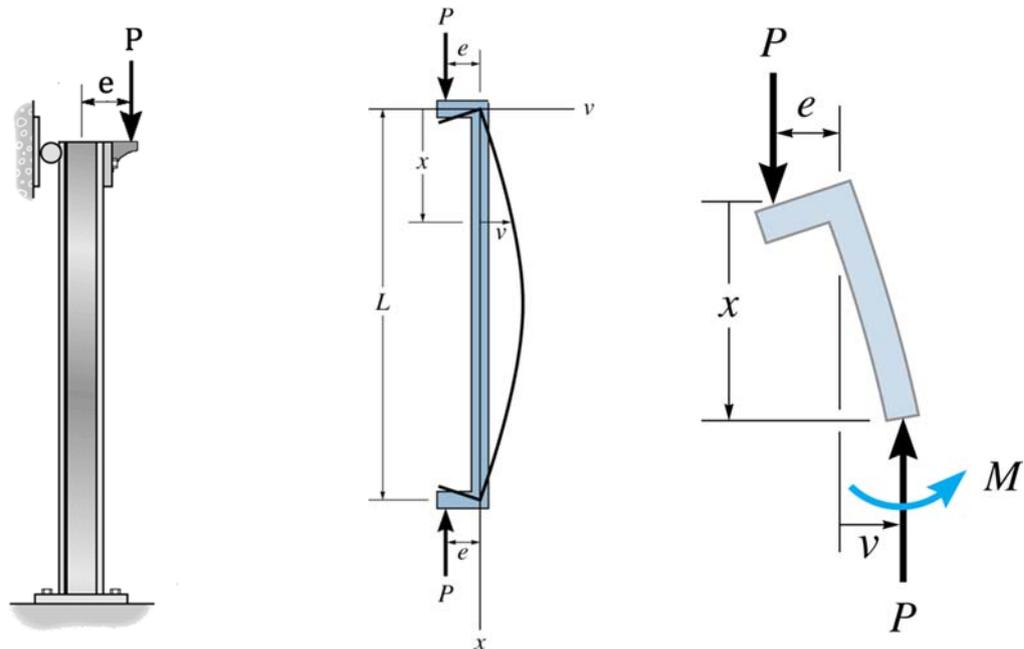


Figura 22.17 Coluna com carregamento aplicado de forma excêntrica em relação ao centro de gravidade.

Sendo  $\psi^2 = \frac{P}{EI}$  pode-se reescrever a Eq.(22.37) como:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI}e + \frac{P}{EI}v(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2v(x)}{dx^2} + \psi^2e + \psi^2v(x) = 0 \quad (22.38)$$

Deve ser destacado que, na situação analisada, caso a excentricidade seja nula, ou seja, se  $e = 0$ , a solução do problema é a mesma obtida para a flambagem de Euler discutida anteriormente. A solução homogênea da equação diferencial apresentada na Eq.(22.38) é a seguinte:

$$v(x) = C_1 \text{sen}(\psi x) + C_2 \cos(\psi x) \quad (22.39)$$

Como o termo livre da Eq.(22.38) é não nulo, sua solução requer a inclusão de uma solução particular à solução homogênea. Para o caso em estudo, a solução particular é dada por:

$$v_p(x) = -e \quad (22.40)$$

Portanto, a solução geral da Eq.(22.38) é obtida sobrepondo-se as soluções homogênea e particular. Dessa forma, a solução geral da Eq.(22.38) pode ser assim escrita:

$$v(x) = C_1 \text{sen}(\psi x) + C_2 \cos(\psi x) - e \quad (22.41)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  que aparecem na Eq.(22.41) são determinadas utilizando as condições de contorno do problema. Sabendo que a coluna é biarticulada, tem-se que as seguintes condições de contorno devem ser atendidas:

$$v(0) = 0 \quad v(L) = 0 \quad (22.42)$$

Aplicando as condições de contorno expressas na Eq.(22.42) obtêm-se:

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\Rightarrow C_1 \text{sen}(\psi 0) + C_2 \cos(\psi 0) - e = 0 \Rightarrow C_2 = e \\ v(L) = 0 &\Rightarrow C_1 \text{sen}(\psi L) + C_2 \cos(\psi L) - e = 0 \Rightarrow \\ &C_1 \text{sen}(\psi L) + e [\cos(\psi L) - 1] = 0 \end{aligned} \quad (22.43)$$

Sabendo que as seguintes identidades trigonométricas são válidas:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\psi L) &= 2 \text{sen}\left(\frac{\psi L}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi L}{2}\right) \\ \text{sen}^2\left(\frac{\psi L}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\psi L)}{2} \end{aligned} \quad (22.44)$$

Pode-se reescrever a última das Eq.(22.43) como:

$$\begin{aligned} C_1 \text{sen}(\psi L) + e [\cos(\psi L) - 1] = 0 &\Rightarrow C_1 \text{sen}(\psi L) = e [1 - \cos(\psi L)] \Rightarrow \\ C_1 2 \text{sen}\left(\frac{\psi L}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi L}{2}\right) &= e 2 \text{sen}^2\left(\frac{\psi L}{2}\right) \Rightarrow C_1 = e \tan\left(\frac{\psi L}{2}\right) \end{aligned} \quad (22.45)$$

Com base nas constantes determinadas nas Eq.(22.43) e Eq.(22.45) pode-se escrever a solução para a deflexão da coluna da seguinte maneira:

$$v(x) = e \tan\left(\frac{\psi L}{2}\right) \text{sen}(\psi x) + e \cos(\psi x) - e \quad (22.46)$$

$$v(x) = e \left[ \tan\left(\frac{\psi L}{2}\right) \text{sen}(\psi x) + \cos(\psi x) - 1 \right]$$

Devido às condições de contorno da coluna, constata-se intuitivamente que a deflexão máxima ocorrerá na metade de seu comprimento. Portanto, o valor da deflexão máxima é assim obtido:

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = v_{\max} = e \left[ \tan\left(\frac{\psi L}{2}\right) \text{sen}\left(\psi \frac{L}{2}\right) + \cos\left(\psi \frac{L}{2}\right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$v_{\max} = e \left[ \frac{\text{sen}^2\left(\psi \frac{L}{2}\right)}{\cos\left(\psi \frac{L}{2}\right)} + \cos\left(\psi \frac{L}{2}\right) - 1 \right] \quad (22.47)$$

Simplificando a Eq.(22.47) obtém-se:

$$v_{\max} = e \left[ \frac{\text{sen}^2\left(\psi \frac{L}{2}\right) + \cos^2\left(\psi \frac{L}{2}\right) - \cos\left(\psi \frac{L}{2}\right)}{\cos\left(\psi \frac{L}{2}\right)} \right] \Rightarrow$$

$$v_{\max} = e \left[ \frac{1}{\cos\left(\psi \frac{L}{2}\right)} - 1 \right] \Rightarrow v_{\max} = e \left[ \sec\left(\psi \frac{L}{2}\right) - 1 \right] \quad (22.48)$$

Deve-se ressaltar que diferentemente de colunas onde a força axial esteja aplicada no centro de gravidade da seção transversal, flambagem de Euler, as quais defletem-se lateralmente apenas se  $P$  iguala ou excede a carga de flambagem de Euler, a deflexão lateral de um elemento carregado excêntrica ocorre independentemente da intensidade da carga compressiva  $P$ . Lembrado que  $\psi^2 = \frac{P}{EI}$  constata-se que o deslocamento máximo pode ser assim reescrito:

$$v_{\max} = e \left[ \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right) - 1 \right] \quad (22.49)$$

Com base no termo entre colchetes da Eq.(22.49), observa-se que este torna-se singular quando o cosseno retorna um valor nulo, fazendo com que a secante torne-se infinito. Sabendo que isso ocorre para ângulos múltiplos de  $90^\circ$ , constata-se que o deslocamento torna-se singular quando:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (22.50)$$

Embora a deflexão lateral da coluna jamais atinja, na prática, um valor infinito, ela torna-se inaceitavelmente grande próximo ao valor apresentado na Eq.(22.50). Portanto, a carga aplicada não deve ser de magnitude tal que satisfaça a Eq.(22.50). Então, a carga axial que conduz a estrutura a um deslocamento singular é a seguinte:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{\text{critico}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (22.51)$$

O resultado apresentado na Eq.(22.51) é o mesmo obtido pela Eq.(22.11), o qual determina a carga crítica para o caso de colunas com cargas não excêntricas. Com base na Eq.(22.51), pode-se igualar o produto EI à carga crítica da seguinte forma:

$$P_{\text{critico}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow EI = \frac{P_{\text{critico}} L^2}{\pi^2} \quad (22.52)$$

Substituindo o resultado mostrado na Eq.(22.52) na expressão do deslocamento máximo, Eq.(22.49), obtém-se:

$$v_{\text{max}} = e \left[ \sec \left( \sqrt{\frac{P}{\frac{P_{\text{critico}} L^2}{\pi^2}}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \Rightarrow v_{\text{max}} = e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{critico}}}} \right) - 1 \right] \quad (22.53)$$

A Eq.(22.53) é uma forma alternativa de se expressar a deflexão máxima para uma coluna submetida a uma força compressiva excêntrica. A partir desta equação, pode-se construir um diagrama que associe o deslocamento lateral máximo da coluna à  $P_{\text{critico}}$  para diversos valores de excentricidade. Este diagrama está apresentado na Fig. (22.18), podendo-se notar que quão maior for a excentricidade da carga, menor será  $P_{\text{critico}}$  para um mesmo deslocamento máximo.

À medida que a intensidade da força aplicada,  $P$ , se aproxima do valor da carga de flambagem de Euler,  $P_{\text{critico}}$ , a deflexão lateral da coluna aumenta sem limite. Por outro lado, no limite quando a excentricidade  $e$  tende a zero, a curva se torna duas linhas retas que representam as configurações retilínea,  $P < P_{\text{critico}}$ , e flambada,  $P = P_{\text{critico}}$ .

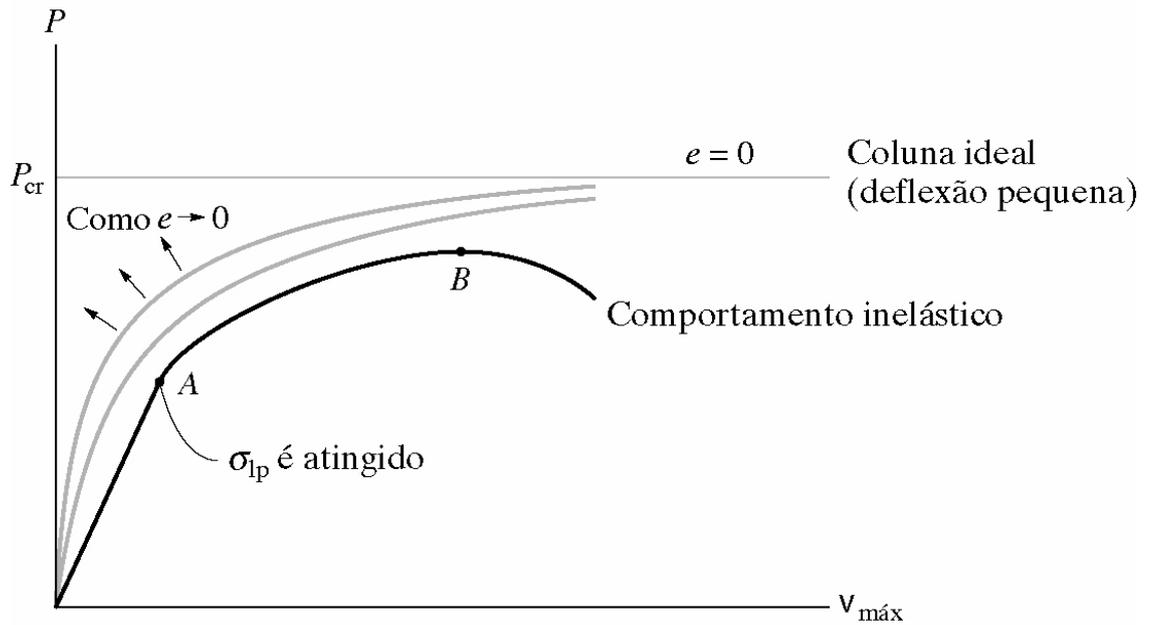


Figura 22.16 Diagrama que associa o deslocamento máximo à  $P_{crítico}$ .

### 22.13 – Tensão Normal Máxima na Presença de Força Axial Excêntrica

Quando uma coluna está submetida a um carregamento axial aplicado de forma excêntrica em relação ao centro de gravidade de sua seção transversal, os esforços solicitantes presentes serão normal e de flexão. Assim, torna-se importante a determinação da tensão normal máxima atuante, a qual é mobilizada pela ação conjunta desses dois esforços solicitantes, de forma a avaliar a segurança da estrutura em relação ao colapso mecânico do material que a compõe.

A tensão normal decorrente da ação do momento fletor será máxima na seção exposta ao máximo valor de momento fletor. Para o caso da coluna biarticulada submetida a um carregamento axial excêntrico, discutido no item anterior, observa-se que o momento fletor máximo ocorrerá na seção transversal onde a deflexão lateral da coluna for máxima. Dessa forma, para o caso em questão, esta seção ocorre no centro da coluna, ou na coordenada  $x = L/2$ .

O deslocamento nessa seção é dado por:

$$v_{\max} = v\left(\frac{L}{2}\right) = e \left[ \sec\left(\frac{\psi L}{2}\right) - 1 \right] \quad (22.54)$$

Com base na equação que expressa a variação do momento fletor ao longo do comprimento da coluna, Eq.(22.36), constata-se que o momento fletor nessa seção será igual a:

$$M(x) = |-Pe - Pv(x)| \Rightarrow M_{MAX}^{L/2}(x) = Pe + Pe \left[ \sec\left(\frac{\psi L}{2}\right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$M_{MAX}^{L/2}(x) = Pe \left[ \sec\left(\frac{\psi L}{2}\right) \right] \quad (22.55)$$

A tensão normal atuante na seção transversal mais solicitada ao momento fletor é obtida aplicando-se o princípio da superposição dos efeitos. Dessa forma, a tensão normal provocada pela ação do momento fletor é adicionada à tensão normal causada pela ação do esforço normal, como mostrado na Fig. (22.19). Dessa forma, a tensão normal máxima pode ser calculada como:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}}{I} c \quad (22.56)$$

onde o parâmetro  $c$  representa a distância entre a fibra mais comprimida e o centro de gravidade da seção transversal.



Figura 22.19 Aplicação da sobreposição dos efeitos para a determinação da tensão normal máxima.

Com base no resultado apresentado na Eq.(22.55), pode-se reescrever a Eq.(22.56) como:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe \left[ \sec\left(\frac{\psi L}{2}\right) \right]}{I} c \quad (22.57)$$

Lembrando que  $r = \sqrt{I/A}$  e  $\psi^2 = P/EI$  tem-se:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe \left[ \sec\left(\frac{\sqrt{P/EI} L}{2}\right) \right]}{r^2 A} c \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}}\right) \right] \quad (22.58)$$

Na Eq.(22.58), o parâmetro  $L$  representa o comprimento livre da coluna em seu plano de flexão. Para colunas cujos extremos sejam não rotulados, deve-se empregar o comprimento equivalente da coluna, conforme indicado na Fig. (22.14) e expresso pela Eq.(22.27).

Outro ponto que deve ser enfatizado é a dependência não linear entre a intensidade da carga aplicada e a tensão normal máxima na coluna. Conforme expressa a Eq.(22.58),  $\sigma_{\max}$  depende da secante de  $P$ . Isso faz com que o princípio da superposição dos efeitos não seja válido para a superposição dos efeitos de diferentes cargas  $P$ . Nesse caso, as diferentes cargas  $P$  devem ser adicionadas antes da determinação da tensão normal por elas mobilizada. Portanto, com relação ao projeto de colunas, os coeficientes de segurança devem ser aplicados sobre as cargas e não sobre as tensões.

### 22.14 – Exemplo 7

A coluna apresentada na Fig. (22.20) é composta por um aço cujo módulo de elasticidade longitudinal é igual a  $E = 200\text{ GPa}$  e tensão de escoamento igual a  $\sigma_E = 250\text{ MPa}$ . Sabendo que a intensidade da carga aplicada é de  $P = 90\text{ kN}$  e que esta é aplicada com uma excentricidade de  $e = 100\text{ mm}$ , determine o valor máximo da tensão normal compressiva atuante na coluna. A seção transversal possui as seguintes propriedades geométricas:  $A = 3787,1\text{ mm}^2$ ,  $r_z = 67,56\text{ mm}$  e  $c = 78,74\text{ mm}$ .

A coluna a ser analisada é do tipo engastada livre. Assim, com base na Eq.(22.27) e na Fig. (22.14), constata-se que seu comprimento equivalente é igual a:

$$L_e = KL \Rightarrow L_e = 2 \cdot 5 \Rightarrow L_e = 10\text{ m}$$

Aplicando a Eq.(22.58) obtém-se:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r_z^2} \sec \left( \frac{L_e}{2r_z} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = \frac{90}{3787,1 \cdot 10^{-6}} \cdot$$

$$\left[ 1 + \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 78,74 \cdot 10^{-3}}{(67,56 \cdot 10^{-3})^2} \sec \left( \frac{10}{2 \cdot 67,56 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{90}{200 \cdot 10^6 \cdot 3787,1 \cdot 10^{-6}}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = 83023,37 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_{\max} = 83,023 \text{ MPa}$$

Como a tensão normal atuante é menor que a tensão de escoamento do material, observa-se que este encontra-se em uma condição segura.

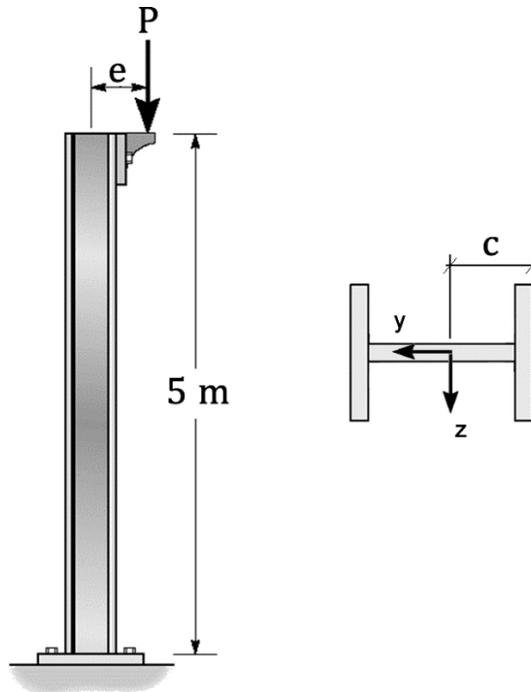


Figura 22.20 Estrutura a ser analisada.

### 22.15 – Exemplo 8

Determine a intensidade do momento fletor máximo atuante no elemento de barra geral ilustrado na Fig. (22.21). Trata-se de uma barra geral solicitada por um carregamento uniformemente distribuído de intensidade  $P$  sendo axialmente solicitada por duas forças  $F$ . Esta barra encontra-se bi apoiada em seus extremos.

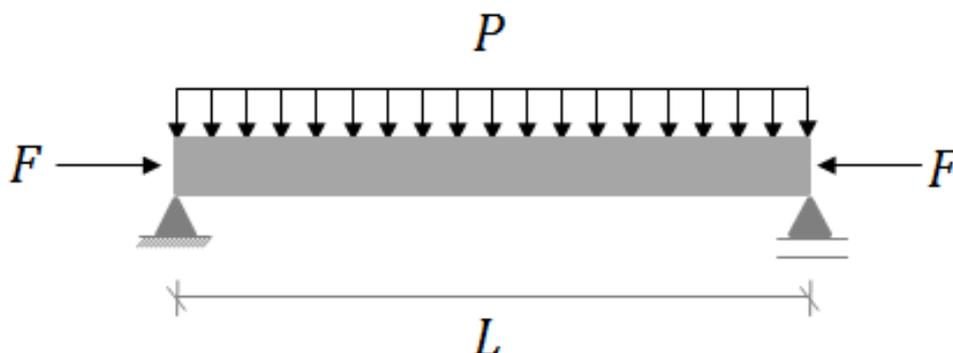


Figura 22.21 Estrutura a ser analisada.

Para a obtenção da expressão do momento fletor, deve-se efetuar o equilíbrio dessa barra em sua configuração deformada. Efetuando uma secção distante  $x$  do extremo esquerdo da barra obtém-se a configuração e ações apresentadas na Fig. (22.22). Impondo sobre as ações apresentadas nessa figura as condições de equilíbrio de corpo rígido obtém-se:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \frac{PL}{2}x + F(-v(x)) - Px\frac{x}{2} - M(x) = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = \frac{PLx}{2} - Fv(x) - \frac{Px^2}{2}$$

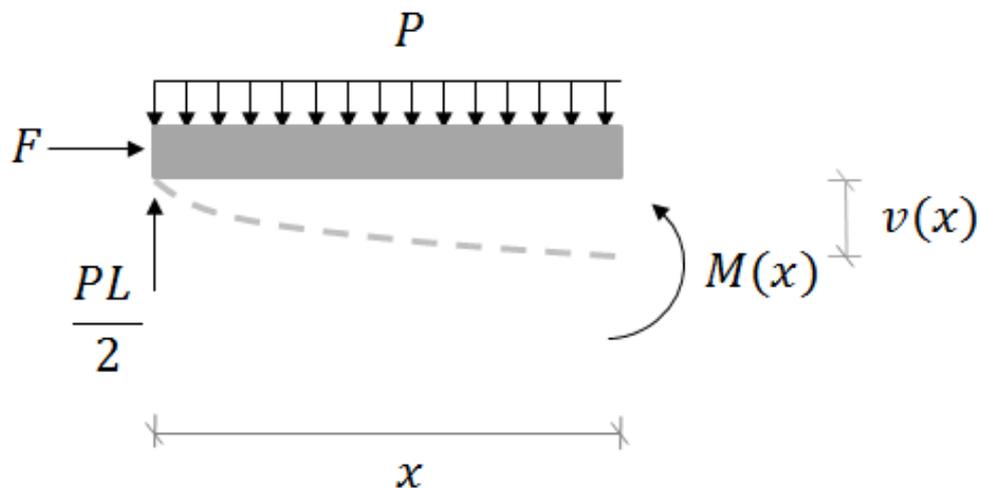


Figura 22.22 Diagrama de corpo livre.

Deve-se destacar que no equilíbrio de corpo rígido efetuado anteriormente o deslocamento  $v(x)$  foi considerado com sinal negativo. Tal procedimento foi considerado pelo fato do deslocamento, segundo a convecção adotada para o equacionamento e apresentada no capítulo 21, apresentar sinal negativo quando orientado nesta direção.

Portanto, por meio da equação da linha elástica pode-se escrever que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PLx}{2} - Fv(x) - \frac{Px^2}{2} \right]$$

Sendo  $\psi^2 = \frac{F}{EI}$ , pode-se reescrever a equação anterior no seguinte formato:

$$v''(x) = \frac{PLx}{2EI} - \left( \frac{Fv(x)}{EI} \right) - \frac{Px^2}{2EI} \Rightarrow v''(x) + \psi^2 v(x) = \frac{P}{2EI} (Lx - x^2) \quad (22.59)$$

A solução geral da Eq. (22.59) é obtida somando-se à sua solução homogênea uma solução particular. A solução homogênea, como anteriormente apresentado neste capítulo, é a seguinte:

$$v_H(x) = C_1 \cos(\psi x) + C_2 \sin(\psi x) \quad (22.60)$$

Já a solução particular pode ser assim escrita:

$$v_p(x) = \frac{P}{F\psi^2} + \frac{PLx}{2F} - \frac{Px^2}{2F} \quad (22.61)$$

Portanto, a solução de deslocamento assume a seguinte forma:

$$v(x) = C_1 \cos(\psi x) + C_2 \sin(\psi x) + \frac{P}{F\psi^2} + \frac{PLx}{2F} - \frac{Px^2}{2F}$$

Sugere-se que o leitor verifique que a solução proposta na equação anterior atende à Eq. (22.59). As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas por meio das condições de contorno do problema. Dessa forma:

$$v(0) = 0 \Rightarrow v(0) = C_1 \cos(\psi 0) + C_2 \sin(\psi 0) + \frac{P}{F\psi^2} + \frac{PL0}{2F} - \frac{P0^2}{2F} \Rightarrow$$

$$C_1 = -\frac{P}{F\psi^2}$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow v(L) = -\frac{P}{F\psi^2} \cos(\psi L) + C_2 \sin(\psi L) + \frac{P}{F\psi^2} + \frac{PL^2}{2F} - \frac{PL^2}{2F} \Rightarrow$$

$$C_2 \sin(\psi L) = -\frac{P}{F\psi^2} [1 - \cos(\psi L)] \Rightarrow C_2 = -\frac{P}{F\psi^2} \left[ \frac{1 - \cos(\psi L)}{\sin(\psi L)} \right]$$

Lembrando que a seguinte relação trigonométrica é válida:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\psi L}{2}\right) = \left[ \frac{1 - \cos(\psi L)}{\sin(\psi L)} \right]$$

Pode-se escrever que:

$$C_2 = -\frac{P}{F\psi^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\psi L}{2}\right)$$

Portanto, a expressão final do deslocamento assume a seguinte forma:

$$v(x) = \frac{-P}{F\psi^2} \cos(\psi x) - \frac{P}{F\psi^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\psi L}{2}\right) \sin(\psi x) + \frac{P}{F\psi^2} + \frac{PLx}{2F} - \frac{Px^2}{2F}$$

Consequentemente, a expressão que resulta a variação do momento fletor ao longo do comprimento da barra pode ser assim escrita:

$$M(x) = -F \left[ \frac{-P}{F\psi^2} \cos(\psi x) - \frac{P}{F\psi^2} \operatorname{tg} \left( \frac{\psi L}{2} \right) \operatorname{sen}(\psi x) + \frac{P}{F\psi^2} + \frac{PLx}{2F} - \frac{Px^2}{2F} \right] + \frac{PLx}{2} - P \frac{x^2}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{\psi^2} \cos(\psi x) + \frac{P}{\psi^2} \operatorname{tg} \left( \frac{\psi L}{2} \right) \operatorname{sen}(\psi x) - \frac{P}{\psi^2} - \frac{PLx}{2} + \frac{Px^2}{2} + \frac{PLx}{2} - \frac{Px^2}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{\psi^2} \cos(\psi x) + \frac{P}{\psi^2} \operatorname{tg} \left( \frac{\psi L}{2} \right) \operatorname{sen}(\psi x) - \frac{P}{\psi^2}$$

$$M(x) = \frac{P}{\psi^2} \left[ \cos(\psi x) + \operatorname{tg} \left( \frac{\psi L}{2} \right) \operatorname{sen}(\psi x) - 1 \right]$$

O momento fletor será máximo quando o deslocamento  $v(x)$  for máximo, ou seja, no centro do vão. Portanto, nesse ponto, o momento fletor possui a seguinte magnitude:

$$M \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{P}{\psi^2} \left[ \cos \left( \psi \frac{L}{2} \right) + \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\psi L}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\psi L}{2} \right)} \operatorname{sen} \left( \psi \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

$$M \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{P}{\psi^2} \left[ \frac{\cos^2 \left( \psi \frac{L}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\psi L}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\psi L}{2} \right)} - 1 \right] \Rightarrow M \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{P}{\psi^2} \left[ \frac{1}{\cos \left( \frac{\psi L}{2} \right)} - 1 \right]$$

De forma a tornar a expressão anterior um pouco mais interessante do ponto de vista de análise, pode-se multiplicar tanto seu numerador quanto seu denominador pelo fator  $\frac{L^2}{8}$ . Assim:

$$M \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{L^2}{8} \frac{P}{\psi^2} \left[ \frac{1}{\cos \left( \frac{\psi L}{2} \right)} - 1 \right] \frac{8}{L^2} \Rightarrow M \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{PL^2}{8} C_m$$

Sendo  $C_m$  igual a:

$$C_m = \frac{8}{(\psi L)^2} \left[ \frac{1}{\cos \left( \frac{\psi L}{2} \right)} - 1 \right]$$

O parâmetro  $C_m$  pode ser interpretado como um coeficiente de majoração correspondente aos efeitos de não linearidade geométrica (efeitos de segunda ordem). Se  $C_m = 1$  observa-se o caso elástico linear. Já quando  $\frac{\psi L}{2} = \frac{\pi}{2}$  tem-se singularidade no valor do deslocamento no meio do vão.

### 22.16 – Dados Para Projeto

Como mostrado anteriormente, Eq.(22.58), nas colunas submetidas a carregamentos axiais excêntricos, a relação entre a tensão normal atuante e a força axial (esforço normal) é não linear. Dessa forma, a determinação da intensidade da carga que gera o escoamento do material de uma dada seção transversal da coluna é uma tarefa, muitas vezes, difícil.

De forma a facilitar a análise desse problema, objetivando o desenvolvimento de projetos, podem ser empregados ábacos de interação ou mesmo programas de computador. Nesse contexto, deve ser calculada a taxa de excentricidade, a qual é definida pela seguinte relação:

$$T_e = \frac{ec}{r^2} \quad (22.62)$$

Em seguida, deve-se escolher o material que comporá a coluna. Com base na tensão de escoamento desse material, determina-se a intensidade de  $P$  por meio de um processo de tentativas, uma vez que a equação da secante é do tipo transcendental. Para fins de projeto, essa solução pode ser obtida com o auxílio de programas de computador e/ou ábacos de interação. Nos procedimentos de projetos, utilizam-se com frequência ábacos de interação como o apresentado na Fig. (22.23).

Deve-se enfatizar que a carga  $P$  é aquela que causará na coluna a tensão de compressão máxima na fibra interna, de sua seção transversal, de sua configuração deslocada côncava. Devido à aplicação de  $P$  com uma excentricidade, esta carga será sempre menor que a carga crítica determinada por meio da fórmula de Euler, Eq.(22.28), a qual assume a condição pouco realista de que a coluna será carregada idealmente de forma axial. Uma vez obtido o valor da carga  $P$ , pode-se aplicar um fator de segurança adequado de forma a especificar uma carga limite segura para a coluna.

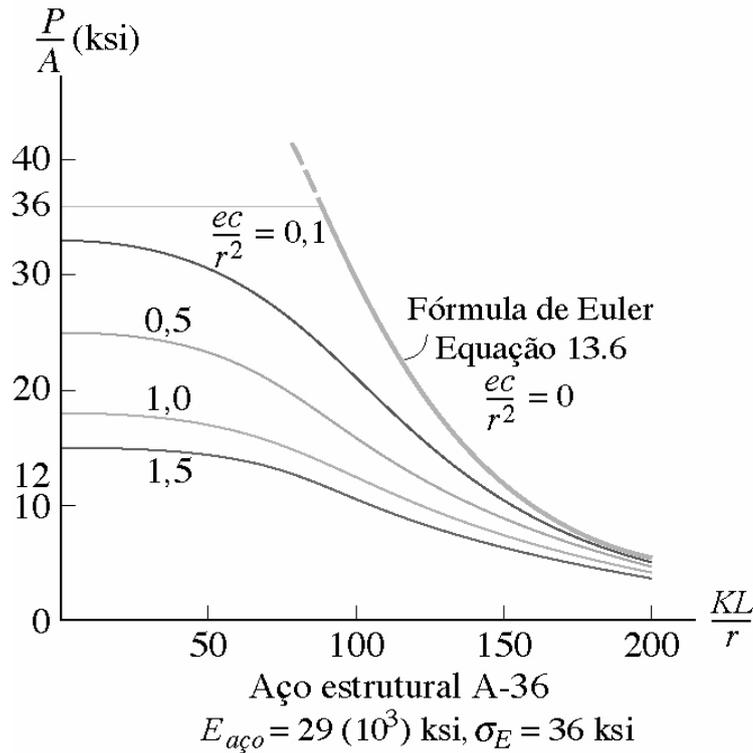


Figura 22.23 Ábaco de interação para aço A36.

### 22.17 – Exemplo 9

A coluna mostrada na Fig. (22.24) está submetida a uma carga  $P$  aplicada de forma excêntrica em relação ao centro de gravidade de sua seção transversal. Sabendo que o aço que compõe a coluna possui o módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E = 29000 \text{ ksi}$  e tensão de escoamento igual a  $\sigma_E = 36 \text{ ksi}$ , determine o valor máximo da intensidade da carga  $P$  que pode ser aplicada sem que a coluna observe a falha estrutural. A seção transversal da coluna é formada por um perfil do tipo w8x40 que possui as seguintes propriedades geométricas:

$$A = 11,7 \text{ in}^2 ; I_y = 49,1 \text{ in}^4 ; c = 4,125 \text{ in} ; r_x = 3,53 \text{ in}$$

A coluna em questão irá falhar se houver a flambagem em torno do eixo  $y$  ou o escoamento do material em decorrência da carga excêntrica aplicada.

Para a análise da flambagem em torno do eixo  $y$ , constata-se que o problema é de flambagem de Euler. Assim, aplicando a Eq.(22.28) e sabendo que em relação a este eixo a coluna encontra-se engastada apoiada obtém-se:

$$P_{crítico} = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)^2} \Rightarrow P_{crítico} = \frac{\pi^2 \cdot 29000 \cdot 49,1}{(0,70 \cdot 144)^2} \Rightarrow P_{crítico} = 1383,115 \text{ kip}$$

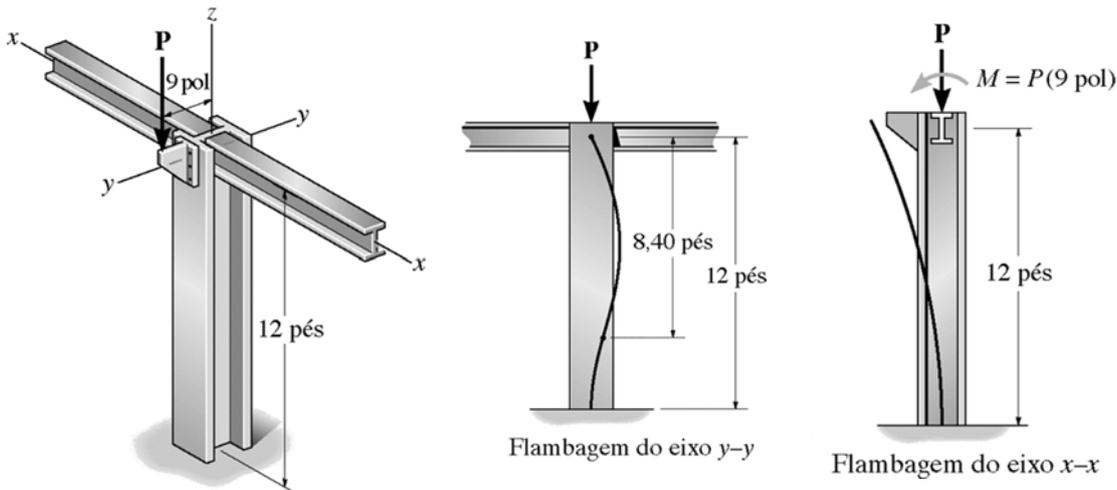


Figura 22.24 Estrutura a ser analisada.

Com relação ao eixo  $x$ , verifica-se que a carga está aplicada de forma excêntrica em relação ao centro de gravidade da seção transversal. Portanto, em relação a este eixo não ocorrerá flambagem, mas sim um aumento gradativo da deflexão lateral da coluna. Em relação a este eixo, a carga máxima é obtida determinando-se a tensão normal máxima atuante, a qual é dada pela Eq.(22.58). Sabendo que em relação a este eixo a coluna é engastada-livre tem-se:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r_x^2} \sec \left( \frac{KL}{2r_x} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$36 = \frac{P}{11,7} \left[ 1 + \frac{9 \cdot 4,125}{(3,53)^2} \sec \left( \frac{2 \cdot 144}{2 \cdot 3,53} \sqrt{\frac{P}{29000 \cdot 11,7}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$421,2 = P \left[ 1 + 2,979 \sec(0,0700\sqrt{P}) \right]$$

A última equação é do tipo transcendental e deve ser resolvida por tentativas ou por um método de minimização. Utilizando um método de minimização unidimensional, obtém-se que a solução da equação é  $P = 88,4 \text{ kip}$ .

Portanto, a maior intensidade da carga  $P$  que pode ser aplicada sem que a falha estrutural seja observada é a menor entre as cargas críticas determinadas. Assim, a maior carga que pode ser aplicada é  $P = 88,4 \text{ kip}$ .

### 22.18 – Flambagem em Regime Inelástico

Durante a análise e formulação dos problemas relacionados a instabilidade de colunas e flambagem anteriormente apresentadas, assumiu-se que o material estrutural comportava-se mecanicamente em regime elástico linear. No entanto, este fenômeno pode também ocorrer em regime inelástico, ou seja, a instabilidade pode também ser observada quando o estado de tensão atuante no material estrutural supera seu limite de proporcionalidade elástico. A análise da flambagem inelástica pode ser efetuada modificando-se a equação de Euler, Eq.(22.28), a qual é válida para materiais em regime elástico linear. Nos itens seguintes deste capítulo serão apresentadas teorias que propõem alterações na equação de Euler objetivando incorporar o comportamento mecânico à instabilidade de colunas em regime inelástico.

#### *22.18.1 – Teoria do Módulo Tangente*

Quando o estado de tensão atuante em um dado material supera seu limite elástico, surgem deformações permanentes no material. Além disso, verifica-se, normalmente, que a rigidez do material diminui após o trecho elástico ser superado. Conforme apresentado na Fig. (22.25), a tangente à curva  $\sigma \times \epsilon$  no ponto D é menor que a tangente a esta mesma curva observada no trecho elástico, a qual é denominada de módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ). A inclinação da curva  $\sigma \times \epsilon$  para os trechos inelásticos é denominada módulo tangente ( $E_t$ ).

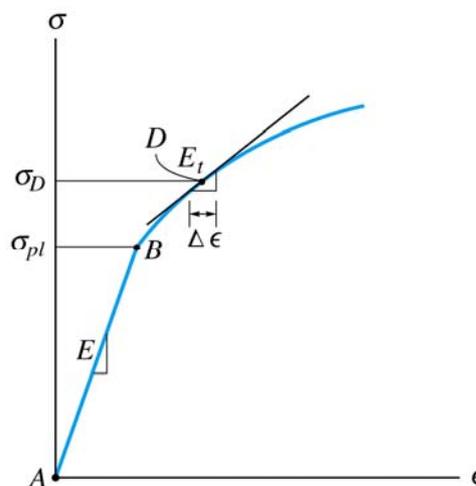


Figura 22.25 Identificação do módulo tangente.

Conforme previamente apresentado neste capítulo, verifica-se que na condição de instabilidade surgirão deflexões laterais na coluna. Então, assumindo que uma coluna biarticulada esteja submetida a um carregamento compressivo de intensidade  $P$ , aplicado no centro de gravidade de sua seção transversal, que origine tensões normais superiores à do regime elástico, pode-se escrever o equilíbrio de momentos dessa coluna, conforme o conteúdo apresentado no item 22.3 e considerando que as deformações normais no plano da seção transversal variem de forma linear, da seguinte forma:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow Pv(x) + M(x) = 0 \Rightarrow E_t I v'' + Pv(x) = 0 \quad (22.63)$$

A solução da Eq.(22.63) foi obtida no item 22.3. Porém, naquela oportunidade o material considerado era elástico linear e possuía módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E$ . Na Eq.(22.63) o material possui módulo tangente  $E_t$ . Portanto, a solução da Eq.(22.63), seguindo os procedimentos apresentados no item 22.3 é a seguinte:

$$P_{crítico}^{inelástico} = \frac{\pi^2 E_t I}{(KL)^2} \quad (22.64)$$

Consequentemente, a tensão crítica de flambagem, conforme apresentado no item 22.3, assume o seguinte valor:

$$\sigma_{crítico}^{inelástico} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (22.65)$$

Deve-se ressaltar que as expressões anteriores, Eq.(22.64) e Eq.(22.65), são muito semelhantes às obtidas considerando regime elástico. A modificação refere-se à substituição do módulo de elasticidade longitudinal pelo módulo tangente.

Na Fig. (22.26) é apresentado um diagrama qualitativo que ilustra a relação entre a tensão crítica de flambagem e o índice de esbeltez nos regimes elástico e inelástico. Devido à mudança de rigidez existente nestes regimes, observa-se que a tensão crítica de flambagem varia mais suavemente no trecho inelástico que no trecho elástico. Além disso, a utilização da equação do regime elástico superestima a resistência da estrutura no regime inelástico, como esperado devido a diferença de valores entre  $E$  e  $E_t$ .

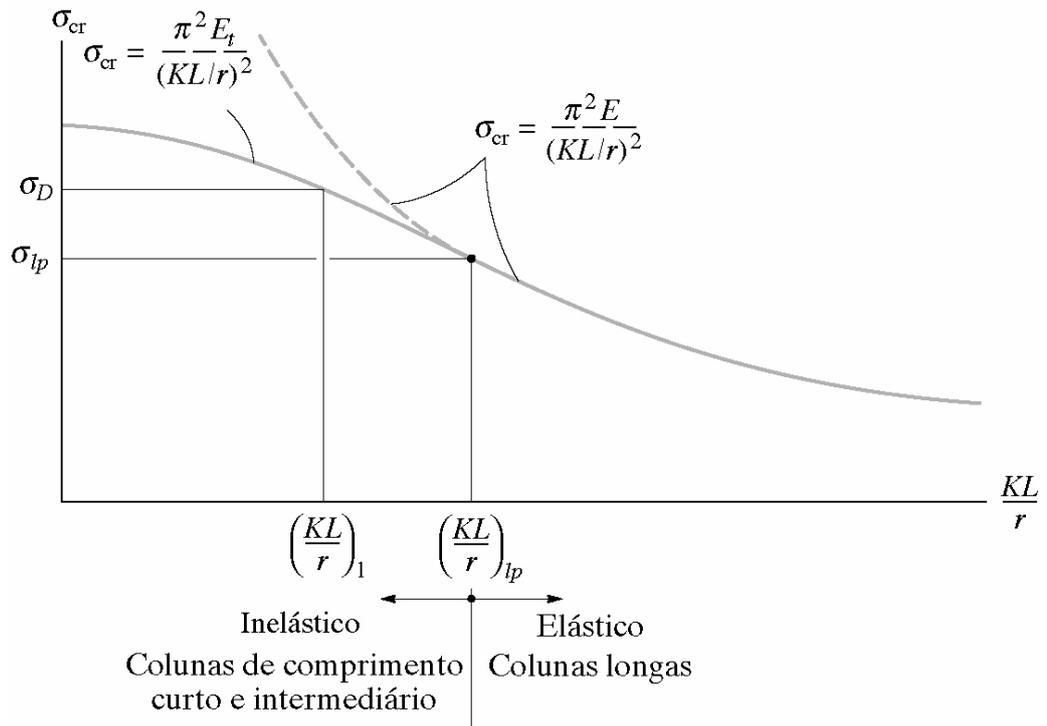


Figura 22.26 Tensão crítica de flambagem para regimes elástico e inelástico.

### 22.18.2 – Teoria do Módulo Reduzido

Quando a flambagem ocorre, deflexões laterais irão surgir na coluna. Como consequência deste deslocamento lateral, surge também um momento fletor que possuirá maior intensidade à medida que a deflexão lateral da coluna aumentar. Nessa situação, as tensões de compressão decorrentes do esforço normal serão somadas às tensões normais decorrentes da flexão. Portanto, no lado côncavo da coluna defletida tensões de compressão da flexo-compressão serão adicionadas, enquanto que no lado convexo da coluna defletida tensões de compressão devido ao esforço normal serão reduzidas pelas tensões de tração devidas à flexão.

Em uma situação como a descrita no parágrafo anterior, parte da seção transversal (porção mais comprimida) poderá estar em regime inelástico enquanto que a porção complementar da seção transversal poderá encontrar-se em regime elástico. De forma semelhante, toda a seção transversal poderá estar em regime inelástico, mas com módulos tangentes diferentes para cada porção da seção transversal, de acordo com a relação constitutiva do material e as intensidades das deformações normais observadas.

Portanto, na situação descrita anteriormente, a coluna comporta-se mecanicamente como se fosse composta por diferentes materiais, um do lado côncavo (com uma dada rigidez) e outro do lado convexo (com rigidez diferente). Assim, a análise da flexão desta coluna pode ser efetuada utilizando a teoria de materiais não homogêneos apresentada no capítulo 17. O resultado desta análise, que será omitido no presente capítulo por simplicidade, mostra que a coluna fletida comporta-se mecanicamente como se o material que a compõem possuísse um módulo de elasticidade cujo valor encontra-se entre  $E$  e  $E_t$ . Esse módulo de elasticidade longitudinal efetivo é denominado módulo reduzido  $E_R$ , e seu valor depende não apenas da magnitude da tensão normal atuante, mas também do formato da seção transversal da coluna. Portanto,  $E_R$  é consideravelmente de maior complexidade de obtenção que  $E_t$ . Para colunas de seção transversal retangular ou quadrada,  $E_R$  assume o seguinte valor:

$$E_R = \frac{4EE_t}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}\right)^2} \quad (22.66)$$

Já para seções transversais de abas largas (mesas largas)  $E_R$  é dado por:

$$E_R = \frac{2EE_t}{E + E_t} \quad (22.67)$$

Assim, a carga crítica de flambagem e a tensão crítica de flambagem para o regime inelástico são dados, por meio desta teoria, pelas seguintes equações:

$$P_{crítico}^{inelástico} = \frac{\pi^2 E_R I}{(KL)^2} \quad (22.68)$$

$$\sigma_{crítico}^{inelástico} = \frac{\pi^2 E_R}{\lambda^2} \quad (22.69)$$

### 22.18.3 – Limitações das Teorias Apresentadas

Neste texto, apenas dois modelos de análise inelástica foram apresentados. Ambas as abordagens consideram simplificações importantes que, contudo, não invalidam sua facilidade de aplicação. Na verdade, a determinação de expressões que descrevam com fidelidade a flambagem inelástica é uma tarefa de enorme complexidade. Existem diversos fatores que influenciam o problema tais como o fato do eixo da barra não ser perfeitamente reto, a carga externa não ser aplicada exatamente no

centro de gravidade da seção transversal, a existência de tensões residuais devido a conexão entre os componentes da seção transversal, entre outros.

Teorias mais complexas como a de Shanley, que não consideram o equilíbrio neutro da coluna e sim seu equilíbrio já na condição instável, podem ser também aplicadas. A apresentação da teoria de Shanley está além do escopo destas notas. Porém, para os objetivos de projeto de estruturas, as duas teorias anteriormente apresentadas são suficientemente precisas.

#### 22.18.4 – Exemplo 10

A coluna apresentada na Fig. (22.27) é solicitada por uma força compressiva  $P$  aplicada no centro de gravidade de sua seção transversal. Sabendo a seção transversal desta coluna possui as seguintes propriedades:  $A = 500 \text{ cm}^2$ ,  $I_x = 1,0416 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$  e  $I_y = 4,1667 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$ , determine os raios de giração da seção transversal bem como os índices de esbeltez da coluna. Além disso, determine as cargas críticas de flambagem no regime elástico e inelástico para a flambagem em torno dos eixos  $x$  e  $y$ . Considere que o material que compõe a coluna comporta-se mecanicamente segundo o diagrama  $\sigma \times \epsilon$  apresentado na Fig. (22.27). A coluna possui comprimento igual a 280 cm.

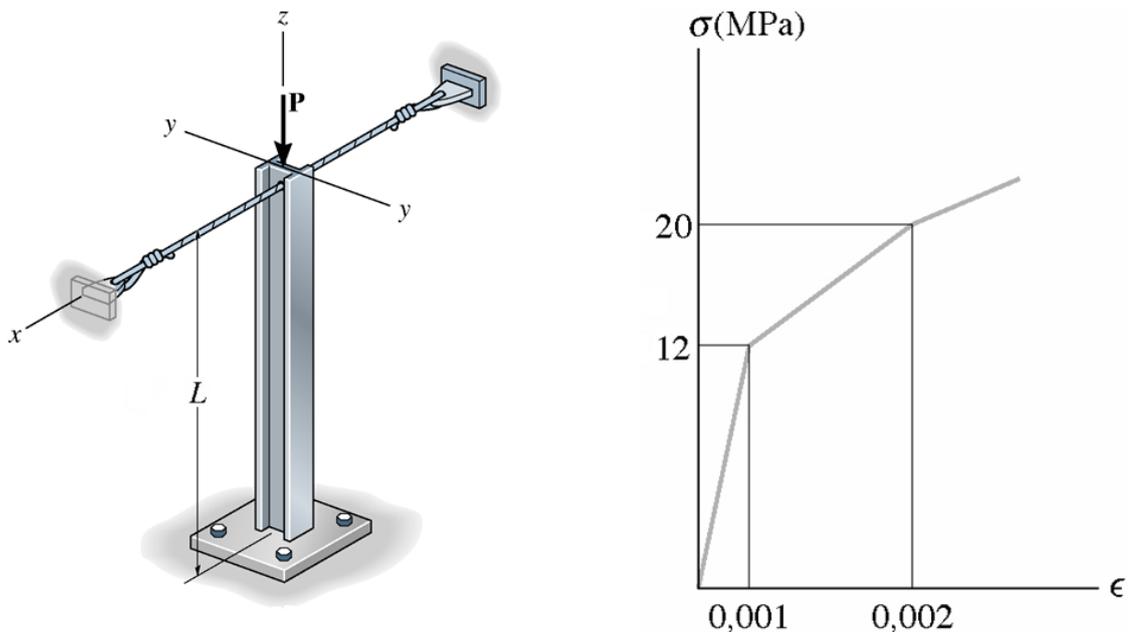


Figura 22.27 Estrutura a ser analisada.

Os raios de giração da seção transversal são determinados da seguinte forma:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow r_x = \sqrt{\frac{1,0416 \cdot 10^5}{500}} \Rightarrow r_x = 14,434 \text{ cm}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow r_y = \sqrt{\frac{4,1667 \cdot 10^3}{500}} \Rightarrow r_y = 2,887 \text{ cm}$$

Para que os índices de esbeltez da coluna sejam determinados deve-se, inicialmente, identificar as condições de vinculação atuantes nos extremos da coluna. Devido à presença de cabos, os quais atuam no topo da coluna e impedem seu deslocamento ao longo do eixo  $x$  mas não sua rotação, verifica-se que para a flambagem em torno do eixo  $x$  a coluna encontra-se na condição engastada-livre, enquanto que para a flambagem em torno do eixo  $y$  esta encontra-se na condição engastada-rotulada. Dessa forma, os índices de esbeltez da coluna possuem os seguintes valores:

$$\lambda_x = \sqrt{\frac{K_x L}{r_x}} \Rightarrow \lambda_x = \sqrt{\frac{2 \cdot 280}{14,434}} \Rightarrow \lambda_x = 38,80$$

$$\lambda_y = \sqrt{\frac{K_y L}{r_y}} \Rightarrow \lambda_y = \sqrt{\frac{0,7 \cdot 280}{2,887}} \Rightarrow \lambda_y = 67,89$$

O módulo de elasticidade longitudinal do material possui o seguinte valor:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ para o regime elástico}$$

$$E = \frac{12}{0,001} \Rightarrow E = 12 \text{ GPa}$$

Assim, as cargas críticas de flambagem considerando o regime elástico podem ser determinadas por meio da Eq.(22.28). Dessa forma:

$$P_{crítico}^{elástico x} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L)^2} \Rightarrow P_{crítico}^{elástico x} = \frac{\pi^2 12 \cdot 10^6 \cdot 1,0416 \cdot 10^{-3}}{(2 \cdot 2,80)^2} \Rightarrow$$

$$P_{crítico}^{elástico x} = 3933,51 \text{ kN}$$

$$P_{crítico}^{elástico y} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L)^2} \Rightarrow P_{crítico}^{elástico y} = \frac{\pi^2 12 \cdot 10^6 \cdot 4,1667 \cdot 10^{-5}}{(0,7 \cdot 2,80)^2} \Rightarrow$$

$$P_{crítico}^{elástico y} = 1284,50 \text{ kN}$$

Para a determinação das cargas críticas de flambagem em regime inelástico, deve-se, inicialmente, calcular o valor do módulo tangente. Considerando o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  apresentado na Fig. (22.27) este parâmetro é igual a:

$$E_t = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ no regime inelástico}$$

$$E_t = \frac{20 - 12}{0,002 - 0,001} \Rightarrow E_t = 8,0 \text{ GPa}$$

Por meio da abordagem via teoria do módulo tangente obtém-se:

$$P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } x} = \frac{\pi^2 E_t I_x}{(K_x L)^2} \Rightarrow P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } x} = \frac{\pi^2 8,0 \cdot 10^6 \cdot 1,0416 \cdot 10^{-3}}{(2 \cdot 2,80)^2} \Rightarrow$$

$$P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } x} = 2622,34 \text{ kN}$$

$$P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } y} = \frac{\pi^2 E_t I_y}{(K_y L)^2} \Rightarrow P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } y} = \frac{\pi^2 8,0 \cdot 10^6 \cdot 4,1667 \cdot 10^{-5}}{(0,7 \cdot 2,80)^2} \Rightarrow$$

$$P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } y} = 856,34 \text{ kN}$$

Por meio da teoria do módulo reduzido, a rigidez reduzida do material é calculada utilizando-se a Eq.(22.67). Assim:

$$E_R = \frac{2EE_t}{E + E_t} \Rightarrow E_R = \frac{2 \cdot 12 \cdot 8}{12 + 8} \Rightarrow E_R = 9,6 \text{ GPa}$$

Portanto, as cargas críticas de flambagem assumem os seguintes valores por meio desta teoria:

$$P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } x} = \frac{\pi^2 E_t I_x}{(K_x L)^2} \Rightarrow P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } x} = \frac{\pi^2 9,6 \cdot 10^6 \cdot 1,0416 \cdot 10^{-3}}{(2 \cdot 2,80)^2} \Rightarrow$$

$$P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } x} = 3146,81 \text{ kN}$$

$$P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } y} = \frac{\pi^2 E_t I_y}{(K_y L)^2} \Rightarrow P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } y} = \frac{\pi^2 9,6 \cdot 10^6 \cdot 4,1667 \cdot 10^{-5}}{(0,7 \cdot 2,80)^2} \Rightarrow$$

$$P_{\text{crítico}}^{\text{inelástico } y} = 1027,60 \text{ kN}$$

## **23. – Tensões**

---

### 23.1 – Componentes de Tensão em um Ponto

Durante o capítulo 12 foi introduzida a grandeza tensão, a qual foi aplicada ao estudo, principalmente, de problemas onde sua distribuição era considerada uniforme. O estudo da tensão e a introdução de seu conceito foram inicialmente efetuados em barras carregadas axialmente (elementos de barra simples), os quais estão submetidos apenas a esforços normais. Na sequência, foi estudado o comportamento das tensões normais e de cisalhamento em problemas envolvendo flexão e torção em elementos de barra geral. Com base no estudo desses problemas fundamentais, foi discutida a importância dessa grandeza na avaliação da segurança estrutural, uma vez que é com base na intensidade da tensão que verifica-se a condição de colapso mecânico de um corpo.

Os problemas estudados até o momento eram essencialmente unidimensionais, ou seja, devido às condições de contorno e às hipóteses de modelagem surgiam apenas uma tensão normal e uma tensão de cisalhamento na estrutura considerada. Porém, muitos dos problemas encontrados no cotidiano da engenharia de estruturas não podem ser classificados como unidimensionais. Assim, deve-se perguntar: qual o comportamento das tensões em problemas que devem ser analisados assumindo-se hipóteses bi e tridimensionais?

Nos problemas bi e tridimensionais, a distribuição das tensões no interior do corpo, normalmente, não é uniforme. Portanto, nesses problemas, o estado de tensão varia de ponto a ponto. Dessa forma, assumir que as tensões atuantes no corpo sejam uniformes, e portanto médias, é uma aproximação, para a maioria desses casos, grosseira. Para resolver este problema, ou seja, efetuar uma representação e descrição mais precisas do comportamento das tensões ao longo do corpo, deve-se determinar a distribuição dos esforços internos para cada ponto que compõe o corpo considerado.

Para tanto, deve-se considerar o corpo apresentado na Fig. (23.1), o qual está em equilíbrio quando submetido a um conjunto de forças externas. Para estudar os esforços internos atuantes nesse corpo, deve-se seccioná-lo por meio de um plano  $\alpha$ .

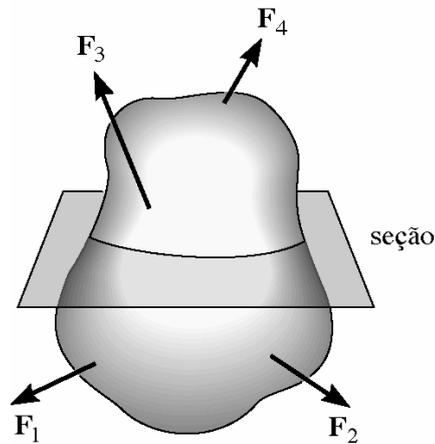


Figura 23.1 Corpo tridimensional em equilíbrio.

Assumindo que o corpo encontra-se inicialmente em equilíbrio, conclui-se que cada porção material que o compõe deverá estar também em equilíbrio. Portanto, separando o corpo ao longo do plano  $\alpha$ , verifica-se que as porções inferior e superior do corpo seccionado, que estavam inicialmente em equilíbrio, deverão permanecer em equilíbrio. Para que isso ocorra, esforços solicitantes surgem objetivando reestabelecer a condição de equilíbrio. Tais esforços solicitantes dão origem às *Tensões* ( $T$ ), as quais nada mais são do que respostas mecânicas do corpo às ações externas aplicadas, atuantes em cada um dos pontos que compõem o plano de secção.

Considerando que as tensões variem pontualmente, a condição de equilíbrio será reestabelecida pela somatória das respostas mecânicas de cada ponto material do corpo, como mostrado na Fig. (23.2).

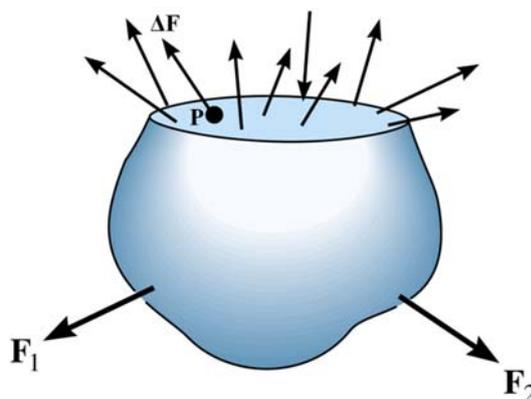


Figura 23.2 Surgimento das tensões.

Assim, tomando um ponto  $P$  localizado sob o plano  $\alpha$ , pode-se determinar sua contribuição, em termos de força  $\Delta F$ , para o equilíbrio por meio da Eq.(23.1).

$$\Delta F = T \Delta A \quad (23.1)$$

onde  $\Delta A$  é a área de atuação das tensões  $T$ .

Desta forma, pode-se definir a tensão atuando em um ponto como sendo “a intensidade da força, por unidade de área, atuante em uma dada área”. Matematicamente a tensão atuante em um ponto pode ser definida como:

$$T = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (23.2)$$

Deve-se observar que a tensão depende da intensidade da força  $\Delta F$  e também da orientação desta em relação à área  $\Delta A$  considerada. A tensão pode ser classificada como normal ou de cisalhamento se a força estiver orientada de maneira normal ou paralela a área considerada, respectivamente.

Como as tensões atuantes em um dado ponto material dependem de um plano de referência considerado, normal ou paralelo, não se pode dizer que as componentes de tensão descritas até agora definam o estado de tensão em um ponto. De forma a definir o estado de tensão em um ponto, deve-se considerar o corpo apresentado na Fig. (23.3), isolando desse corpo um ponto e atribuindo-lhe dimensões infinitesimais.

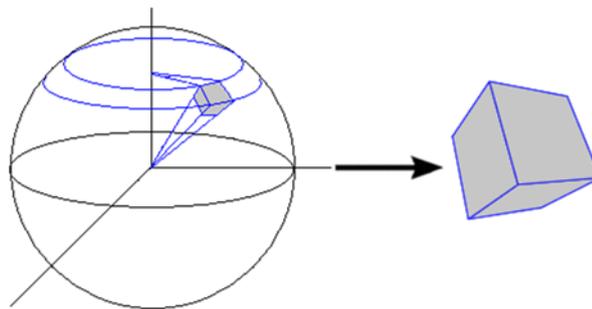


Figura 23.3 Corpo em equilíbrio. Análise da tensão em um ponto.

A partir deste elemento infinitesimal, que representa o ponto em análise, pode-se definir o estado de tensão escrevendo-se três componentes de tensão para cada uma de suas faces, como mostrado na Fig.(23.4). Sobre cada uma das faces do elemento atuam uma tensão normal e duas tensões de cisalhamento. As tensões normal e de cisalhamento são definidas pelas letras gregas  $\sigma$  e  $\tau$ , respectivamente.

Na nomenclatura das tensões são empregados dois índices. O primeiro deles refere-se ao vetor normal ao plano onde a tensão considerada atua. O segundo índice

indica o eixo no qual a tensão está orientada. Assim, a tensão  $\tau_{xy}$  indica uma tensão de cisalhamento que atua em um plano cujo vetor normal está orientado ao longo do eixo  $x$ . Além disso, esta tensão está orientada ao longo do eixo  $y$ .

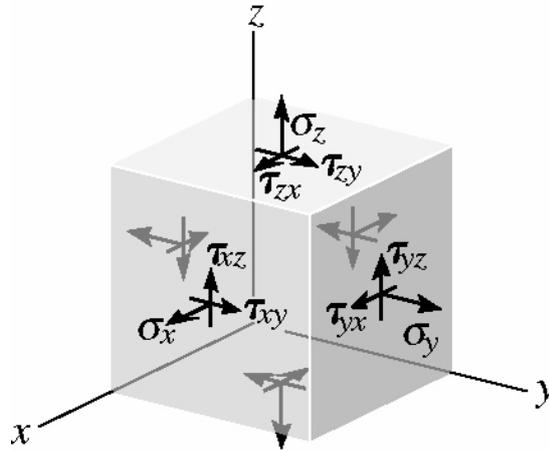


Figura 23.4 Estado de tensão em um ponto.

As tensões são consideradas positivas quando o sinal de seus índices forem ambos positivos ou negativos. Assim, se o vetor normal ao plano onde a tensão considerada atua estiver orientado no sentido positivo de um eixo coordenado e, além disso, a tensão estiver também orientada ao longo do sentido positivo de um eixo coordenado, a tensão será positiva. A tensão será também positiva se o vetor normal ao plano considerado e a tensão estiverem ambos orientados ao longo do sentido negativo dos referidos eixos coordenados. Para casos contrários aos já descritos neste parágrafo, a tensão será negativa. Como exemplo, todas as tensões ilustradas na Fig. (23.4) são positivas.

Ao longo de cada uma das faces do elemento infinitesimal que representa o ponto material em análise atuam três tensões. Assim, existem dezoito componentes de tensão que definem o estado de tensão no ponto. Porém, na ausência de forças de corpo, essas componentes devem estar relacionadas entre si para que a condição de equilíbrio seja verificada.

Para mostrar a relação entre as componentes de tensão, deve-se aplicar o princípio da superposição dos efeitos. Assim, o estado de tensão mostrado na Fig. (23.4) será decomposto em dois: no primeiro, apenas tensões normais atuam e no segundo deles apenas tensões de cisalhamento estão presentes. Para mostrar a relação existente entre as tensões normais, deve-se considerar o primeiro caso, onde apenas tensões

normais estão presentes no ponto material em análise. Nessa situação, o estado de tensão mostrado na Fig. (23.4) pode ser modificado como apresenta a Fig. (23.5). Para que esse elemento esteja em equilíbrio, a somatória de forças ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  deve ser nula.

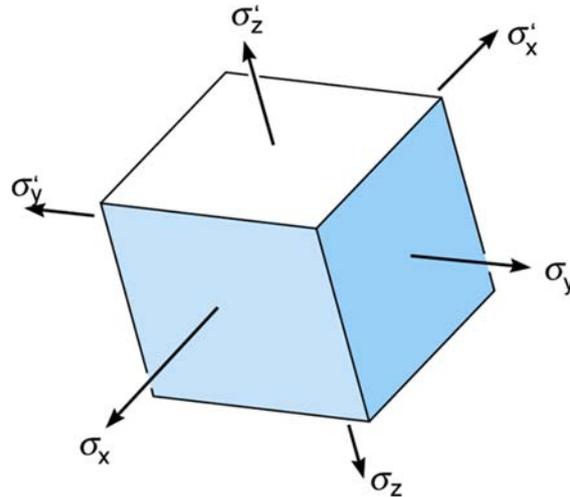


Figura 23.5 Elemento infinitesimal submetido a tensões normais.

Impondo esta condição, pode-se, primeiramente, efetuar a somatória das forças ao longo da direção  $x$ . Assim:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_x \Delta y \Delta z - \sigma'_x \Delta y \Delta z = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma'_x \quad (23.3)$$

Analogamente, pode-se efetuar o equilíbrio de forças ao longo das direções  $y$  e  $z$ . Por meio desses equilíbrios, os quais serão omitidos aqui por simplicidade, pode-se concluir que:

$$\sigma_y = \sigma'_y \quad ; \quad \sigma_z = \sigma'_z \quad (23.4)$$

Portanto, das seis tensões normais atuantes no ponto material em análise, verifica-se que conhecendo-se apenas três delas é possível definir o estado de tensão normal do ponto.

Para a análise da dependência entre as tensões de cisalhamento, o princípio da superposição dos efeitos será novamente aplicado. Assim, as tensões de cisalhamento atuantes nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  serão consideradas separadamente. Os elementos infinitesimais contendo as tensões de cisalhamento nos planos mencionados estão apresentados na Fig. (23.6). Considerando o primeiro elemento desta figura, o equilíbrio de forças ao longo do eixo  $x$  conduz a:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau_{yx} \Delta x \Delta z - \tau'_{yx} \Delta y \Delta z = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = \tau'_{yx} \quad (23.5)$$

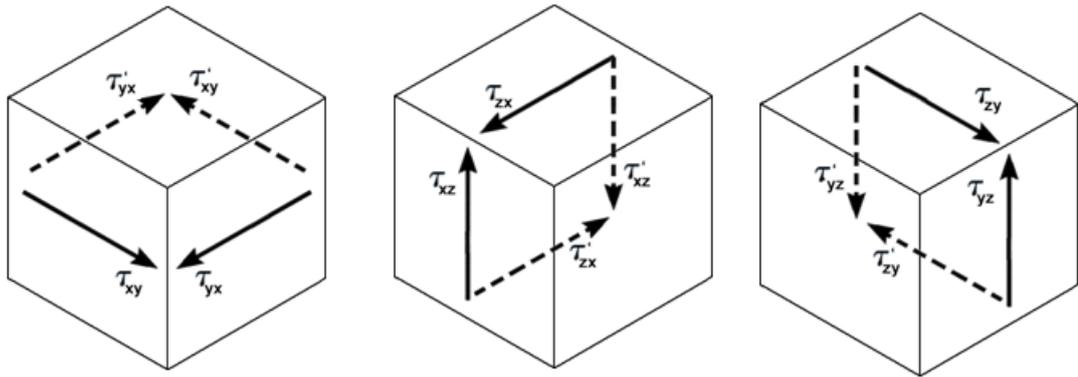


Figura 23.6 Elementos infinitesimais submetidos a tensões de cisalhamento.

Efetando equilíbrio semelhante para os demais elementos apresentados na Fig. (23.6), o qual será omitido por simplicidade, pode-se facilmente concluir que:

$$\tau_{xy} = \tau'_{xy} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau'_{xz} \quad ; \quad \tau_{zx} = \tau'_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau'_{yz} \quad ; \quad \tau_{zy} = \tau'_{zy} \quad (23.6)$$

Para que a condição de equilíbrio de um corpo seja verificada, além da somatória das forças, a somatória dos momentos, em relação a qualquer ponto do espaço, deve ser também nula. Assim, considerando o primeiro elemento infinitesimal apresentado na Fig. (23.6), a somatória dos momentos em torno do eixo  $z$  conduz a:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy} \Delta y \Delta z \frac{\Delta x}{2} + \tau'_{xy} \Delta y \Delta z \frac{\Delta x}{2} - \tau_{yx} \Delta x \Delta z \frac{\Delta y}{2} - \tau'_{yx} \Delta x \Delta z \frac{\Delta y}{2} = 0 \quad (23.7)$$

Simplificando a Eq.(23.7) obtém-se:

$$\tau_{xy} + \tau'_{xy} - \tau_{yx} - \tau'_{yx} = 0 \quad (23.8)$$

Utilizando os resultados obtidos nas Eq.(23.5) e Eq.(23.6) tem-se:

$$\tau_{xy} + \tau_{xy} - \tau_{yx} - \tau_{yx} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (23.9)$$

De forma análoga, impondo a condição de somatória nula de momentos para os demais elementos mostrados na Fig. (23.6), pode-se facilmente concluir que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (23.10)$$

Portanto, as componentes de tensão em um ponto, que dão origem ao estado de tensão, compõem um tensor, o qual pode ser representado como mostra a Eq.(23.11).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (23.11)$$

## 23.1.1 – Exemplo 1

Um dado ponto material de um corpo possui o estado de tensão mostrado a seguir. Determine as componentes de tensão representadas pelo ponto de interrogação.

$$\begin{bmatrix} 10 & ? & 9 \\ 3 & 2 & ? \\ ? & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Com base na Eq.(23.11), verifica-se que o tensor de tensões, para um corpo de propriedades mecânicas isotrópicas, é simétrico. Portanto, o tensor de tensões para o caso em questão é o mostrado abaixo.

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

## 23.1.2 – Exemplo 2

Neste exemplo, deve-se determinar o tensor de tensões para a estrutura mostrada na Fig. (23.7). Trata-se de uma barra simples, de seção transversal circular, submetida a um carregamento compressivo. Para essa análise, assuma que as tensões estão uniformemente distribuídas no plano da seção transversal da barra.

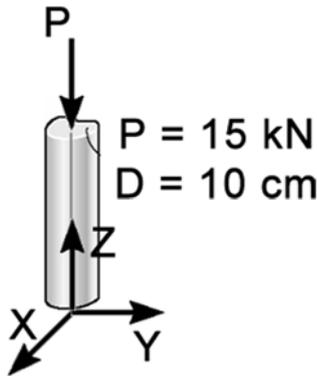


Figura 23.7 Barra submetida a um carregamento compressivo.

A estrutura em questão está submetida a um estado de compressão simples. Assim, utilizando os conceitos discutidos nos capítulos anteriores tem-se:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma_z = \frac{-15}{\pi(0,05)^2} \Rightarrow \sigma_z = -1909,859 \text{ kN/m}^2$$

Como esta é a única tensão não nula atuante, pode-se definir o tensor de tensões como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1909,859 \end{bmatrix}$$

### 23.1.3 – Exemplo 3

A Fig. (23.8) mostra um elemento de barra geral submetido à ação de esforço cortante e momento fletor. Determine o tensor de tensões para os pontos A, B e C ilustrados na figura. As dimensões da seção transversal estão apresentadas em cm.

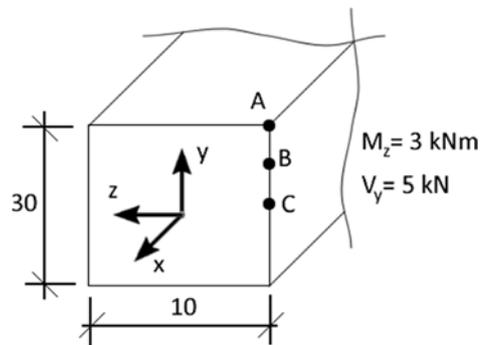


Figura 23.8 Barra geral submetida a esforços de flexão e cortante.

Sabe-se que esforços de flexão geram tensões normais ao plano da seção transversal. Além disso, essas tensões estão relacionadas aos momentos fletores atuantes por meio da seguinte relação:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Para o problema em questão, apenas o momento  $M_z$  é não nulo. Assim, as tensões normais devido a este esforço solicitante nos pontos de interesse podem ser calculadas como:

$$I_z = \frac{10 \cdot (30)^3}{12} \Rightarrow I_z = 22500 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_z = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Para o ponto A tem-se:

$$\sigma_x^A = -\frac{3 \cdot 0,15}{2,25 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \sigma_x^A = -2000 \text{ kN/m}^2$$

Para o ponto B tem-se:

$$\sigma_x^B = -\frac{3 \cdot 0,075}{2,25 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \sigma_x^B = -1000 \text{ kN/m}^2$$

Para o ponto C tem-se:

$$\sigma_x^C = -\frac{3 \cdot 0}{2,25 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \sigma_x^C = 0 \text{ kN/m}^2$$

As tensões de cisalhamento na flexão, conforme discutido no capítulo 19, são determinadas por meio da seguinte relação:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z t}$$

Assim, devem ser conhecidos os momentos estáticos das áreas,  $Q$ , referentes aos pontos de interesse. Para o problema em questão, esta grandeza apresenta os seguintes valores:

$$Q_A = 0 \text{ m}^3$$

$$Q_B = 10 \cdot 7,5 \cdot \left( \frac{7,5}{2} + 7,5 \right) \Rightarrow Q_B = 843,75 \text{ cm}^3 \Rightarrow Q_B = 8,4375 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$Q_C = 10 \cdot 15 \cdot \left( \frac{15}{2} \right) \Rightarrow Q_C = 1125,0 \text{ cm}^3 \Rightarrow Q_C = 1,125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Portanto, as tensões de cisalhamento, nos pontos de interesse, possuem os seguintes valores:

$$\tau_{xy}^A = \frac{5 \cdot 0}{2,25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,10} \Rightarrow \tau_{xy}^A = 0 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_{xy}^B = \frac{5 \cdot 8,4375 \cdot 10^{-4}}{2,25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,10} \Rightarrow \tau_{xy}^B = 187,5 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_{xy}^C = \frac{5 \cdot 1,125 \cdot 10^{-3}}{2,25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,10} \Rightarrow \tau_{xy}^C = 250 \text{ kN/m}^2$$

Dessa forma, o tensor de tensões, para o ponto A, pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} -2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para o ponto B, este tensor assume os seguintes valores:

$$\begin{bmatrix} -1000 & 187,5 & 0 \\ 187,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Enquanto para o ponto C tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 250 & 0 \\ 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nos resultados deste exemplo pode-se perguntar: Porque nos pontos onde a tensão normal é máxima a tensão de cisalhamento é nula? As respostas para esta e outras questões serão apresentadas nos tópicos seguintes.

### 23.2 – Estado Plano de Tensão

O equacionamento de problemas elásticos pode muitas vezes ser simplificado, sem perdas sensíveis de representatividade, dependendo da geometria do corpo a ser analisado bem como das condições de contorno aplicadas. A transformação de problemas tridimensionais em problemas bidimensionais dá origem aos problemas ditos planos, os quais podem ser divididos em planos de tensão e planos de deformação. Neste item será apresentado o problema plano de tensão, o qual é caracterizado pelo fato da distribuição de tensões no corpo ser essencialmente plana. Nesta classe de problemas podem ser citadas estruturas cuja geometria apresente uma de suas dimensões muito menor que as demais como observado em vigas-parede, chapas finas e paredes. Além disso, o carregamento é considerado como composto por forças aplicadas de forma paralela ao plano formado pelas duas maiores dimensões do corpo, sendo ainda distribuídas uniformemente ao longo da direção da menor dimensão (espessura).

Considerando que o plano formado pelas duas maiores dimensões do corpo seja o  $xy$ , o estado de tensão em todos os pontos deste corpo pode ser representado pelas seguintes componentes:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , sendo as demais componentes nulas. Nos problemas planos de tensão, o estado de tensão toma a forma apresentada na Fig. (23.9).

Portanto, “o estado plano de tensões em um ponto é único e representado por meio de três componentes de tensão atuantes em um elemento que tenha uma orientação específica no dado ponto”.

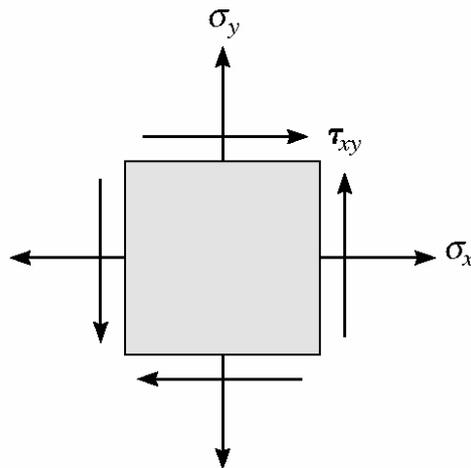


Figura 23.9 Tensões no estado plano de tensão.

Deve-se destacar que embora definido por seis componentes no caso tridimensional e três no caso plano, o estado de tensão depende da orientação e da inclinação do sistema de referência adotado para tal descrição. Isto pode ser facilmente verificado considerando o primeiro exemplo resolvido neste capítulo. No exemplo mencionado, o eixo coordenado posicionado ao longo do eixo da barra é o  $z$ . Assim, como a barra analisada estava axialmente solicitada, surgiu apenas uma tensão normal orientada ao longo do eixo  $z$ ,  $\sigma_z$ . Consequentemente, o único valor não nulo do tensor de tensões para este caso foi o  $\sigma_{3x3}$ .

No entanto, pode-se considerar o caso em que o sistema de coordenadas adotado seja rotacionado, de maneira que o eixo coordenado posicionado ao longo do eixo da barra seja  $x$  e não mais  $z$ . Nesse caso, surgirá também apenas uma tensão normal não nula no corpo, a qual será orientada ao longo do eixo  $x$ ,  $\sigma_x$ . Assim, nesse novo sistema de coordenadas, apenas a posição  $\sigma_{1x1}$  do tensor de tensões será não nula. Portanto, mostra-se claramente a dependência das componentes do tensor de tensões em relação ao sistema de coordenadas de referência.

Apesar da dependência existente entre as componentes do tensor de tensões e o sistema de referência no qual estas são determinadas, podem ser escritas equações que relacionam as componentes de tensão definidas inicialmente em relação a um sistema de referência para outro sistema de referência de interesse. Para determinar essas relações, assumindo o caso plano de tensão, deve-se considerar o elemento infinitesimal mostrado na Fig. (23.10). Deseja-se relacionar as componentes do estado de tensão

definidas no sistema  $xy$  às componentes de tensão em relação a um sistema de referência  $x'y'$ , rotacionado de um dado ângulo  $\theta$  em relação ao sistema inicial.

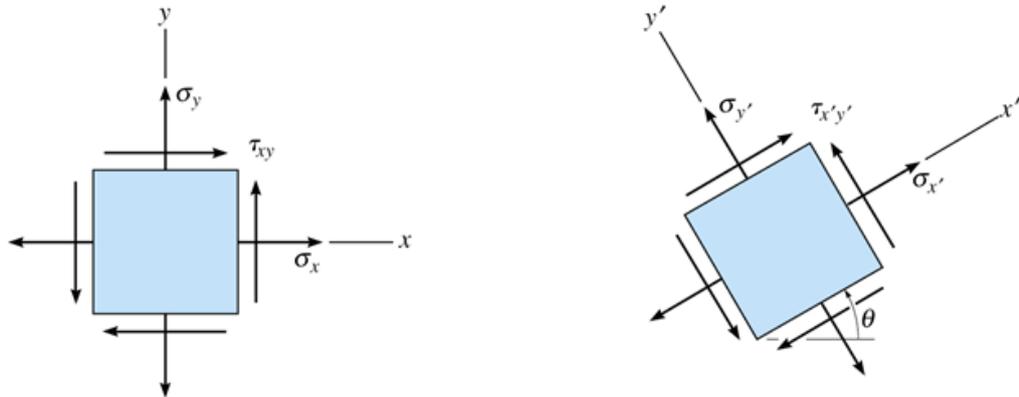


Figura 23.10 Tensões em uma orientação arbitrária.

Para tal finalidade, deve-se efetuar o equilíbrio do elemento considerando as forças decorrentes das tensões escritas em relação ao sistema inicial e ao sistema rotacionado. Assim, os valores das áreas do elemento infinitesimal, onde atuam as tensões, no sistema inicial podem ser escritos em função da área do plano inclinado. Além disso, as forças resultantes, decorrente das tensões atuantes, em cada uma das áreas (faces) do elemento podem ser calculadas e suas componentes decompostas em relação ao novo sistema coordenado  $x'y'$ . Essa decomposição é mostrada na Fig. (23.11).

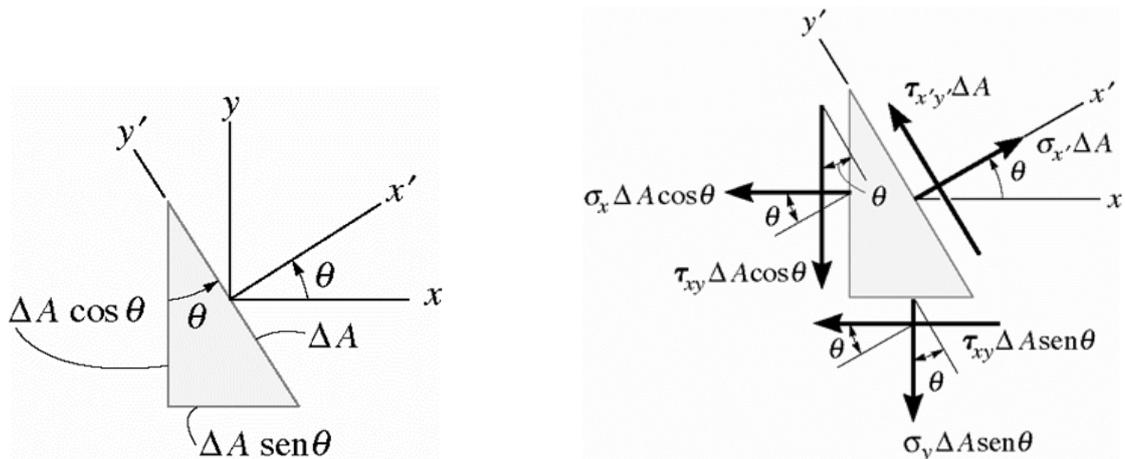


Figura 23.11 Forças resultantes no sistema rotacionado.

Efetuando o equilíbrio de forças em relação ao eixo  $x'$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma'_x \Delta A - \sigma_x \Delta A \cos(\theta) \cos(\theta) - \sigma_y \Delta A \sin(\theta) \sin(\theta) \\ - \tau_{xy} \Delta A \cos(\theta) \sin(\theta) - \tau_{xy} \Delta A \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (23.12)$$

Manipulando os termos trigonométricos da última equação tem-se:

$$\sigma'_x = \sigma_x [\cos(\theta)]^2 + \sigma_y [\text{sen}(\theta)]^2 + 2\tau_{xy} \cos(\theta) \text{sen}(\theta) \quad (23.13)$$

Da trigonometria, têm-se as seguintes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \quad (23.14)$$

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad (23.15)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad (23.16)$$

Substituindo as Eq.(23.14), Eq.(23.15) e Eq.(23.16) na Eq.(23.13) obtêm-se:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \text{sen}(2\theta) \quad (23.17)$$

Efetuada agora o equilíbrio de forças na direção  $y'$  tem-se:

$$\begin{aligned} \tau'_{xy} \Delta A + \sigma_x \Delta A \cos(\theta) \text{sen}(\theta) - \sigma_y \Delta A \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ - \tau_{xy} \Delta A \cos(\theta) \cos(\theta) + \tau_{xy} \Delta A \text{sen}(\theta) \text{sen}(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (23.18)$$

Simplificando os termos trigonométricos da última equação obtêm-se:

$$\tau'_{xy} = -\sigma_x \cos(\theta) \text{sen}(\theta) + \sigma_y \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \tau_{xy} [\cos(\theta)]^2 - \tau_{xy} [\text{sen}(\theta)]^2 \quad (23.19)$$

Utilizando as identidades trigonométricas apresentadas nas Eq.(23.14), Eq.(23.15) e Eq.(23.16), pode-se reescrever a Eq.(23.19) como:

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \text{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (23.20)$$

Para que o estado de tensão no sistema de coordenadas rotacionado seja definido resta a determinação de  $\sigma'_y$ . A relação desta tensão normal é facilmente obtida tomando a Eq.(23.17) e substituindo o ângulo de rotação por seu valor adicionado a  $90^\circ$ . Assim:

$$\sigma'_y(\theta + 90) = \sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos[2(\theta + 90)] + \tau_{xy} \text{sen}[2(\theta + 90)] \quad (23.21)$$

Sabendo da relação de senos e cossenos com seus respectivos quadrantes, pode-se reescrever a última equação como:

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \text{sen}(2\theta) \quad (23.22)$$

Portanto, com base nas Eq.(23.17), Eq.(23.20) e Eq.(23.22) têm-se relacionadas as componentes do tensor de tensões definidas em um sistema cartesiano particular com as componentes do mesmo tensor escritas em um sistema rotacionado. Deve-se destacar que a somatória das tensões normais do ponto em análise é independente do sistema

adotado. Essa somatória é conhecida, em cursos mais avançados, como *invariante*. Assim, independentemente da rotação do sistema considerado a seguinte relação deverá ser sempre atendida:

$$\sigma'_x + \sigma'_y = \sigma_x + \sigma_y \quad (23.23)$$

Assim, uma maneira de se verificar se a transformação das tensões foi corretamente efetuada é verificando se a relação acima é atendida. Fica como exercício para o leitor particularizar as Eq.(23.17), Eq.(23.20) e Eq.(23.22) para o caso unidimensional. O leitor pode comparar as equações resultantes dessa particularização com aquelas determinadas no capítulo 12.

### 23.2.1 – Exemplo 4

Um bloco de madeira, mostrado na Fig. (23.12), é composto por fibras inclinadas de  $58^\circ$  com a horizontal. Sabe-se que este corpo falhará se a tensão de cisalhamento atuante ao longo de suas fibras atingir o valor de  $550 \text{ MPa}$ . Considerando que uma tensão normal  $\sigma_x = 400 \text{ MPa}$  atua neste bloco, determine a tensão compressiva  $\sigma_y$  que causará a falha do corpo.

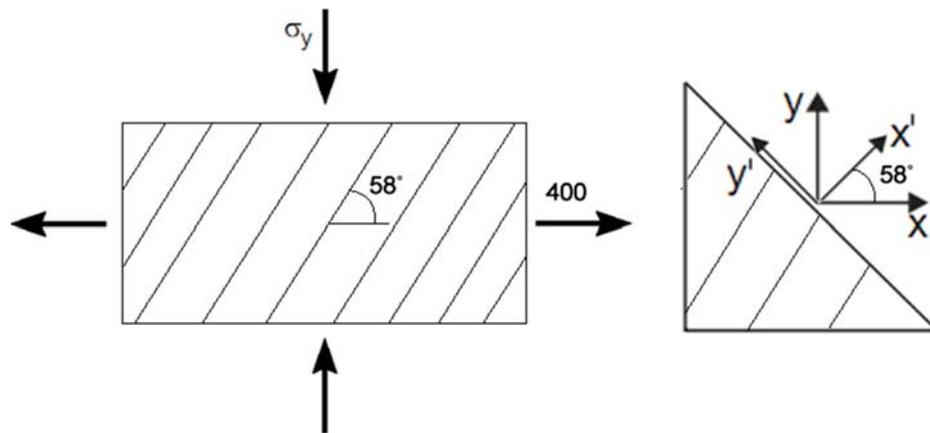


Figura 23.12 Elemento estrutural sollicitado.

Para solucionar este problema deve-se determinar o valor da tensão de cisalhamento atuante ao longo das fibras do material, ou seja, na direção paralela a essas. Essa tensão, a qual está rotacionada em relação ao sistema considerado, pode ser determinada por meio da Eq.(23.20). Como mostrado na Fig. (23.12), deve-se avaliar a equação mencionada considerando um ângulo  $\theta$  igual a:

$$\theta = 58^\circ + 90^\circ \Rightarrow \theta = 148^\circ$$

O plano definido pelo ângulo calculado acima resultará a tensão de cisalhamento paralela à orientação das fibras do material. Assim:

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \text{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \Rightarrow 550 = \frac{\sigma_y - 400}{2} \text{sen}(2 \cdot 148)$$

$$\sigma_y = -823,86 \text{ MPa}$$

Para esse valor de tensão  $\sigma_y$ , a tensão normal perpendicular às fibras pode ser determinada utilizando a Eq. (23.17). Assim:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \text{sen}(2\theta) \Rightarrow$$

$$\sigma'_x = \frac{400 - 823,86}{2} + \frac{400 + 823,86}{2} \cos(2 \cdot 148) \Rightarrow \sigma'_x = 56,32 \text{ MPa}$$

Para que a tensão de cisalhamento perpendicular às fibras e a tensão normal paralela às fibras sejam determinadas, basta repetir os cálculos anteriormente apresentados utilizando ângulo  $\theta = 58^\circ$ .

### 23.2.2 – Exemplo 5

A placa quadrada de aço mostrada na Fig. (23.13) tem espessura de 10mm sendo solicitada por carregamentos distribuídos ao longo de seus planos laterais. Determine a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média desenvolvidas no aço:

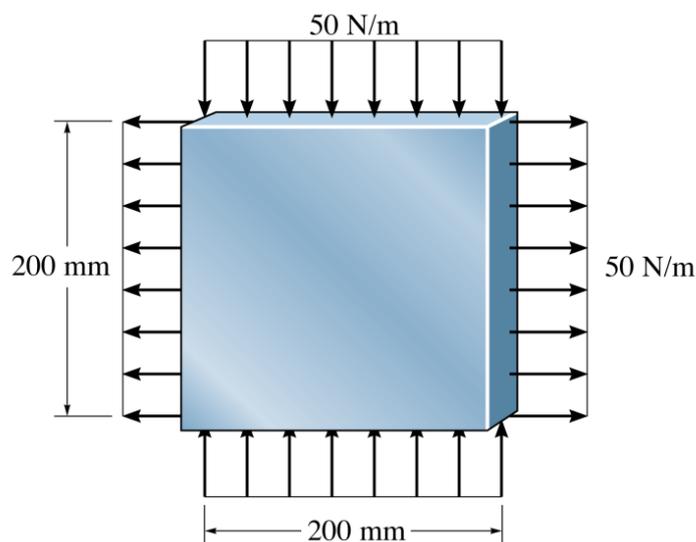


Figura 23.13 Placa quadrada solicitada por forças laterais.

Primeiramente, devem ser determinadas as tensões normais atuantes na placa de aço em decorrência do carregamento aplicado. Assim:

$$\sigma_x = \frac{50 \cdot 0,200}{0,200 \cdot 0,010} \Rightarrow \sigma_x = 5000 \text{ Pa}$$

$$\sigma_y = \frac{-50 \cdot 0,200}{0,200 \cdot 0,010} \Rightarrow \sigma_y = -5000 \text{ Pa}$$

Dessa forma, a tensão de cisalhamento máxima pode ser determinada por meio da Eq.(23.20). Portanto:

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \text{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \Rightarrow \tau'_{xy} = \frac{-5000 - 5000}{2} \text{sen}(2\theta)$$

Com base na última equação, verifica-se que a tensão de cisalhamento será máxima quando o valor  $\text{sen}(2\theta)$  for máximo. Com base nos conhecimentos de trigonometria, sabe-se que seu valor máximo é igual à unidade quando o ângulo considerado é igual a  $45^\circ$ . Consequentemente, quando  $\theta = 45^\circ$  tem-se:

$$\tau_{xy}^{MAX} = \frac{-5000 - 5000}{2} \text{sen}(2 \cdot 45) \Rightarrow \tau_{xy}^{MAX} = -5000 \text{ Pa}$$

A tensão normal média para o problema em análise será nula uma vez que  $\sigma_x + \sigma_y = 0$ .

### 23.3 – Tensões Principais e Tensão de Cisalhamento Máxima no Plano

Conforme apresentado no item anterior, foi demonstrado que os valores das tensões normal e de cisalhamento dependem do plano de referência em consideração, mais precisamente do ângulo de inclinação deste, como indicam as Eq.(23.17), Eq.(23.20) e Eq.(23.22). Em diversas aplicações de engenharia existe interesse particular na determinação dos valores extremos (máximo e mínimo) das tensões normal e de cisalhamento, bem como de suas orientações, para a avaliação da segurança e verificação da falha estrutural.

A partir da definição das componentes do tensor de tensões, referenciadas a um dado sistema de coordenadas, é possível determinar os valores extremos (máximo e mínimo) que as tensões normais podem apresentar. Os valores extremos das tensões normais são denominados de *Tensões Principais* e os planos onde estas atuam *Planos Principais*.

Para a determinação do ângulo de inclinação dos planos principais, devem ser empregados os conhecimentos básicos do cálculo diferencial. Assim, sabe-se que o

extremo de uma função (local ou global) ocorre quando sua primeira derivada é nula. Portanto, os valores extremos das tensões normais ocorrerão quando a primeira derivada da Eq.(23.17) for nula. Então:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \operatorname{sen}(2\theta) \quad (23.24)$$

$$\frac{d\sigma'_x}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2\operatorname{sen}(2\theta) + 2\tau_{xy} \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (23.25)$$

A solução da Eq.(23.25) envolve dois ângulos  $\theta_{p1}$  e  $\theta_{p2}$ , os quais são defasados de  $90^\circ$ , que definem os planos principais onde as tensões normais são máxima e mínima. O valor da tensão normal nestes planos pode ser facilmente determinado substituindo-se os ângulos calculados na Eq.(23.25) na expressão que relaciona a tensão normal a um plano qualquer, Eq.(23.17). Efetuando esta substituição, obtém-se:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (23.26)$$

sendo  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  as tensões principais máxima e mínima, respectivamente.

Os planos principais apresentam uma característica importante e que deve ser enfatizada. Nos planos principais, ou seja, nos planos onde as tensões normais são máxima ou mínima, a tensão de cisalhamento é nula. Essa conclusão, que será omitida aqui por simplicidade, pode ser facilmente obtida substituindo-se os ângulos determinados na Eq.(23.25) na expressão que relaciona a tensão de cisalhamento a um plano qualquer, Eq.(23.20). Essa informação será de grande importância para a identificação rápida de estados principais de tensão.

Com relação à tensão de cisalhamento, verifica-se, com base na Eq.(23.20), que esta tensão observará valores extremos à medida que o plano considerado é rotacionado. Isso ocorre uma vez que esta equação envolve seno e cosseno de  $2\theta$ . Os ângulos de rotação nos quais serão observadas as máximas tensões de cisalhamento podem ser obtidos derivando-se a Eq.(23.20) em relação à inclinação do plano,  $\theta$ , e em seguida igualando a expressão resultante à zero. Assim:

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (23.27)$$

$$\frac{d\tau'_{xy}}{d\theta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} 2\cos(2\theta) - 2\tau_{xy} \operatorname{sen}(2\theta) = 0 \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \quad (23.28)$$

A última expressão retorna dois valores de ângulo,  $\theta_{C1}$  e  $\theta_{C2}$ , defasados de  $90^\circ$ , que definem os planos onde as tensões de cisalhamento são máximas.

Comparando as inclinações onde as tensões de cisalhamento são máximas  $\theta_{C1}$  e  $\theta_{C2}$  com os ângulos onde as tensões principais atuam,  $\theta_{p1}$  e  $\theta_{p2}$ , constata-se que estes estão defasados de  $45^\circ$ , um em relação ao outro. Sugere-se que o leitor comprove esta constatação para um conjunto qualquer de valores de  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . Consequentemente, os planos em que atuam as tensões cisalhantes máximas podem ser rapidamente determinados orientando-se um elemento rotacionado de  $45^\circ$  em relação à posição do elemento que define os planos das tensões principais.

Os valores das tensões de cisalhamento máximas no plano podem ser facilmente determinados substituindo os ângulos calculados pela Eq.(23.28) na Eq.(23.20). Efetuando este procedimento obtém-se:

$$\tau_{xyMAX} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (23.29)$$

Substituindo os valores de  $\theta_{C1}$  e  $\theta_{C2}$  na Eq.(23.17), observa-se que a tensão normal pode assumir valores diferentes de zero no plano em que a tensão de cisalhamento é máxima. Substituindo  $\theta_{C1}$  e  $\theta_{C2}$  na Eq.(23.17), constata-se que as tensões normais nestes planos são dadas por:

$$\sigma_{MED} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (23.30)$$

### 23.3.1 – Exemplo 6

Em um dado ponto material de um corpo em equilíbrio solicitado por ações externas, o estado de tensão atuante é dado por  $[\sigma] = \begin{bmatrix} -20 & 60 \\ 60 & 90 \end{bmatrix} MPa$ . Considerando este estado de tensão determine: as tensões principais, o ângulo de inclinação dos planos principais, a máxima tensão de cisalhamento no plano, seu o ângulo de inclinação e o valor da tensão normal nesses planos.

Do estado de tensão fornecido sabe-se que:

$$\sigma_x = -20 ; \sigma_y = 90 \text{ e } \tau_{xy} = 60$$

As tensões principais podem ser determinadas pela Eq.(23.26). Portanto:

$$\sigma_{1,2} = \frac{-20+90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20-90}{2}\right)^2 + (60)^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = 35 \pm 81,394$$

$$\sigma_1 = 116,394 \text{ MPa} \quad e \quad \sigma_2 = -46,394 \text{ MPa}$$

O ângulo de inclinação dos planos principais pode ser facilmente determinado pela Eq.(23.25). Assim:

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \cdot 60}{-20-90} \Rightarrow 2\theta = -47,489^\circ \Rightarrow \theta_1 = -23,744^\circ$$

Existem dois planos principais, os quais estão defasados de  $90^\circ$  como discutido anteriormente. Assim, o ângulo de inclinação do outro plano principal é dado por:

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ \Rightarrow \theta_2 = -23,744^\circ + 90^\circ \Rightarrow \theta_2 = 66,255^\circ$$

A partir dos ângulos de inclinação dos planos principais e dos valores das tensões principais, deve-se agora determinar o plano de atuação de cada tensão principal. Para isso, os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  calculados anteriormente devem ser substituídos na Eq.(23.17). Substituindo-se o valor de  $\theta_1$  nesta expressão obtém-se:

$$\sigma'_x = \frac{-20+90}{2} + \frac{-20-90}{2} \cos(2 \cdot -23,744) + 60 \text{sen}(2 \cdot -23,744) \Rightarrow$$

$$\sigma'_x = -46,394 \text{ MPa}$$

Portanto, com a inclinação  $\theta_1$  verifica-se a atuação de  $\sigma_2$ . Dessa forma, pode-se escrever que,  $\theta_1 = \theta_{p_2}$  e  $\theta_2 = \theta_{p_1}$ . Assim, com base nas respostas obtidas neste exemplo, pode-se representar as tensões principais e os planos onde estas atuam. Esta ilustração é apresentada na Fig. (23.14).

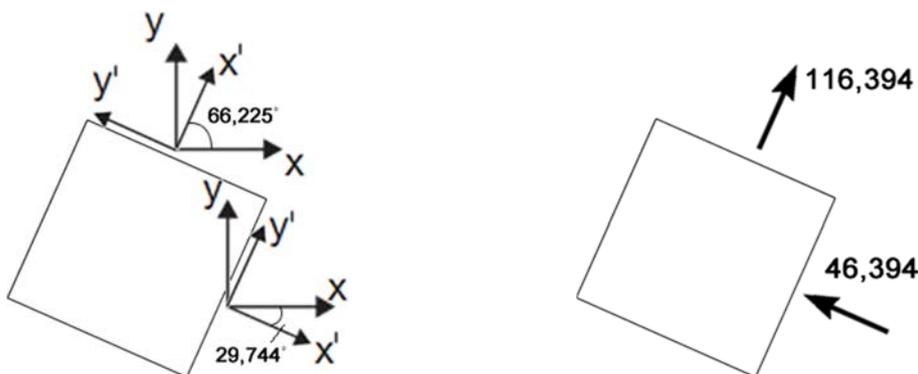


Figura 23.14 Tensões principais e planos principais.

Os ângulos de inclinação dos planos onde a tensão de cisalhamento é máxima podem ser calculados pela Eq.(23.28). Assim:

$$\tan(2\theta) = \frac{90 - (-20)}{2 \cdot 60} \Rightarrow 2\theta = 42,510^\circ \Rightarrow \theta_3 = 21,255^\circ$$

Existem dois planos onde as tensões de cisalhamento no plano são máximas, os quais estão defasados de  $90^\circ$ , como discutido anteriormente. Assim, o ângulo de inclinação do outro plano em questão é dado por:

$$\theta_4 = \theta_3 + 90^\circ \Rightarrow \theta_4 = 21,255^\circ + 90^\circ \Rightarrow \theta_4 = 111,255^\circ$$

Apenas para ilustração, se os ângulos  $\theta_1, \theta_3$  e  $\theta_2, \theta_4$  forem comparados, constata-se que estes estão defasados de  $45^\circ$ , como mencionado anteriormente. A máxima tensão de cisalhamento no plano é dada pela Eq.(23.29). Assim:

$$\tau_{xyMAX} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2} \Rightarrow \tau_{xyMAX} = 81,394 MPa$$

O sinal correto da tensão máxima de cisalhamento no plano é obtido avaliando a Eq.(23.20) com o ângulo  $\theta_3$ . Efetuando este procedimento tem-se:

$$\tau'_{xy} = \frac{90 - (-20)}{2} \text{sen}(2 \cdot 21,255) + 60 \cos(2 \cdot 21,255) \Rightarrow \tau'_{xy} = 81,394 MPa$$

Portanto, a orientação é positiva. Com base no sentido correto da tensão de cisalhamento máxima no plano, esta pode ser representada em um elemento infinitesimal, como mostrado na Fig. (23.15).

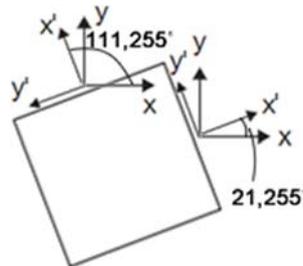


Figura 23.15 Tensões de cisalhamento máximas no plano e seus planos de atuação.

As tensões normais atuantes nos planos onde a tensão de cisalhamento é máxima podem ser determinadas pela Eq.(23.30). Assim:

$$\sigma_{MED} = \frac{-20 + 90}{2} \Rightarrow \sigma_{MED} = 35 MPa$$

Dessa forma, o estado de tensão nos planos onde a tensão de cisalhamento é máxima pode ser representado como mostrado na Fig. (23.16).

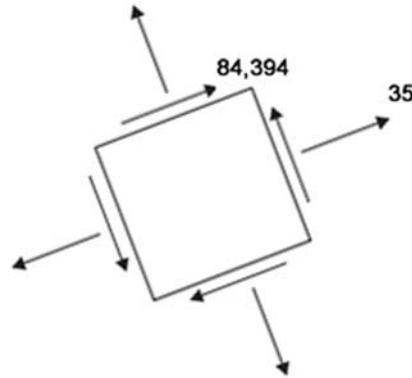


Figura 23.16 Estado de tensão nos planos de máxima tensão de cisalhamento.

### 23.4 – Círculo de Mohr. Estado Plano de Tensões

Atualmente, a realização de operações matemáticas envolvendo relações trigonométricas, divisão de números fracionários, entre outras, não é uma tarefa complexa. Isto ocorre pelo fato do acesso a equipamentos eletrônicos do tipo calculadoras, computadores, tablets e celulares ser fácil. Porém, isso nem sempre aconteceu. Nos séculos passados, e mesmo nas últimas décadas, essa tarefa, que hoje é simples, foi o empecilho para a utilização de modelos mais complexos e realistas. Para vencer essa dificuldade, era comum, no passado, o desenvolvimento de ferramentas gráficas para as análises dos problemas de engenharia. Com a análise da rotação de eixos e definição das componentes do tensor de tensões não foi diferente.

A representação gráfica de problemas envolvendo rotação de eixos e componentes de tensão, tensões principais, planos principais, máxima tensão de cisalhamento e seus planos de atuação deve-se ao engenheiro alemão Otto Mohr. Esse engenheiro propôs o conhecido *Círculo de Mohr*, por meio do qual é possível desenvolver uma interpretação gráfica do estado de tensão e estudar seu comportamento conforme o plano em estudo é rotacionado.

Para mostrar o equacionamento do círculo de Mohr, deve-se considerar o problema de estado plano de tensão. Para esse problema, as equações que relacionam as tensões normal e de cisalhamento para planos inclinados são as seguintes:

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \operatorname{sen}(2\theta) \\ \tau'_{xy} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (23.31)$$

Pode-se reescrever as Eq.(23.31) de uma maneira mais conveniente como:

$$\sigma'_x - \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \operatorname{sen}(2\theta)\quad (23.32)$$

$$\tau'_{xy} = - \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \operatorname{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

Elevando cada uma das equações da Eq.(23.32) ao quadrado e em seguida somando-as obtém-se:

$$\begin{aligned}\left[ \sigma'_x - \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + [\tau'_{xy}]^2 &= \\ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2(2\theta) + \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) + (\tau_{xy})^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) + \\ (\tau_{xy})^2 \cos^2(2\theta)\end{aligned}\quad (23.33)$$

Sabendo, que a seguinte identidade trigonométrica é válida  $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$  a Eq.(23.33) pode ser reescrita como:

$$\left[ \sigma'_x - \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + (\tau'_{xy})^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2\quad (23.34)$$

Se em um problema as componentes do tensor de tensões são definidas com relação a um dado sistema de coordenadas, ou seja, os termos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  são conhecidos, a Eq.(23.34) pode ser reescrita de uma maneira mais compacta como:

$$(\sigma'_x - \sigma_{MED})^2 + (\tau'_{xy})^2 = R^2\quad (23.35)$$

sendo  $\sigma_{MED}$  definido pela Eq.(23.30) e R dado por  $R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$ .

A Eq.(23.35), de acordo com os conhecimentos da geometria analítica, descreve um círculo com centro em  $(\sigma_{MED}, 0)$ . Para a construção do círculo de Mohr devem ser conhecidas as componentes do estado de tensão, as quais conduzirão à determinação de

seu centro,  $\sigma_{MED}$ , e de seu raio,  $R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$ .

Deve-se enfatizar que as equações envolvendo as tensões rotacionadas,  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  e  $\tau'_{xy}$  apresentadas nas Eq.(23.17), Eq.(23.20) e Eq.(23.22), são escritas empregando termos trigonométricos cossenos e senos dependentes de  $2\theta$ . Assim, para a determinação das tensões normais e de cisalhamento em um dado plano de interesse deve-se multiplicar, no desenho representativo do círculo de Mohr, o ângulo desejado por dois.

Para ilustrar a aplicação do círculo de Mohr, deve-se considerar que seja de interesse de um analista a determinação das tensões normal e de cisalhamento em um plano rotacionado de  $\theta = 90^\circ$ , a partir do estado de tensão A, mostrado na Fig. (23.17), onde atuam as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ . Essas duas tensões são obtidas percorrendo-se o círculo de Mohr, no sentido anti-horário,  $2\theta = 180^\circ$  resultando o ponto B. As coordenadas do ponto B podem ser facilmente determinadas por meio do uso de relações trigonométricas simples.

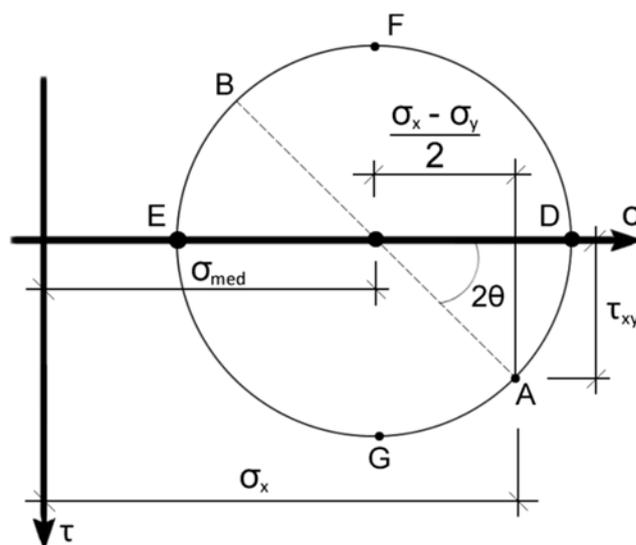


Figura 23.17 Círculo de Mohr.

Utilizando ainda o círculo apresentado na Fig. (23.17), verifica-se que as tensões principais são dadas pelos pontos D e E. Nesses pontos, a tensão de cisalhamento é nula e, conforme discutido anteriormente, isto define os planos principais. A inclinação dos planos principais, em relação ao estado de tensão conhecido, pode ser facilmente determinada por meio do ângulo  $2\theta$  indicado na Fig.(23.17). Segundo ilustrado no círculo de Mohr, a inclinação do plano principal pode ser obtida por  $\tan(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

o que concorda com a expressão anteriormente obtida. Além disso, o outro plano principal encontra-se defasado de  $90^\circ$  do plano determinado pela equação mencionada, o que também é consistentemente tratado pelo círculo de Mohr.

As tensões de cisalhamento máximas no plano são dadas pelos pontos F e G ilustrados na Fig.(23.17). Esses pontos têm coordenadas  $(\sigma_{MED}, R)$  e  $(\sigma_{MED}, -R)$  respectivamente, o que concorda com a Eq.(23.29) obtidas anteriormente. Além disso, o ângulo de inclinação entre o plano de atuação da tensão principal e o plano de atuação da máxima tensão de cisalhamento é  $45^\circ (2\theta = 90^\circ)$ , o que é consistente com o apresentado anteriormente.

#### 1.4.1 – Exemplo 7

Construa o círculo de Mohr e determine as tensões principais para o seguinte estado de tensão:  $[\sigma] = \begin{bmatrix} -20 & 60 \\ 60 & 90 \end{bmatrix} MPa$ .

A partir do estado de tensão fornecido, pode-se determinar o centro do círculo de Mohr como:

$$\sigma_{MED} = \frac{-20 + 90}{2} \Rightarrow \sigma_{MED} = 35 MPa$$

O raio do círculo de Mohr pode ser calculado como:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + 60^2} \Rightarrow R = 81,394 MPa$$

Assim, a tensão principal de maior valor pode ser calculada como:

$$\sigma_1 = \sigma_{MED} + R \Rightarrow \sigma_1 = 35 + 81,394 \Rightarrow \sigma_1 = 116,394 MPa$$

E a tensão principal de menor valor como:

$$\sigma_2 = \sigma_{MED} - R \Rightarrow \sigma_2 = 35 - 81,394 \Rightarrow \sigma_2 = -46,394 MPa$$

A tensão de cisalhamento máxima é dada por:

$$\tau_{xyMAX} = R \Rightarrow \tau_{xyMAX} = 81,394 MPa$$

Com base nos valores calculados anteriormente, pode-se traçar o círculo de Mohr para o problema em questão, o qual está apresentado na Fig. (23.18).

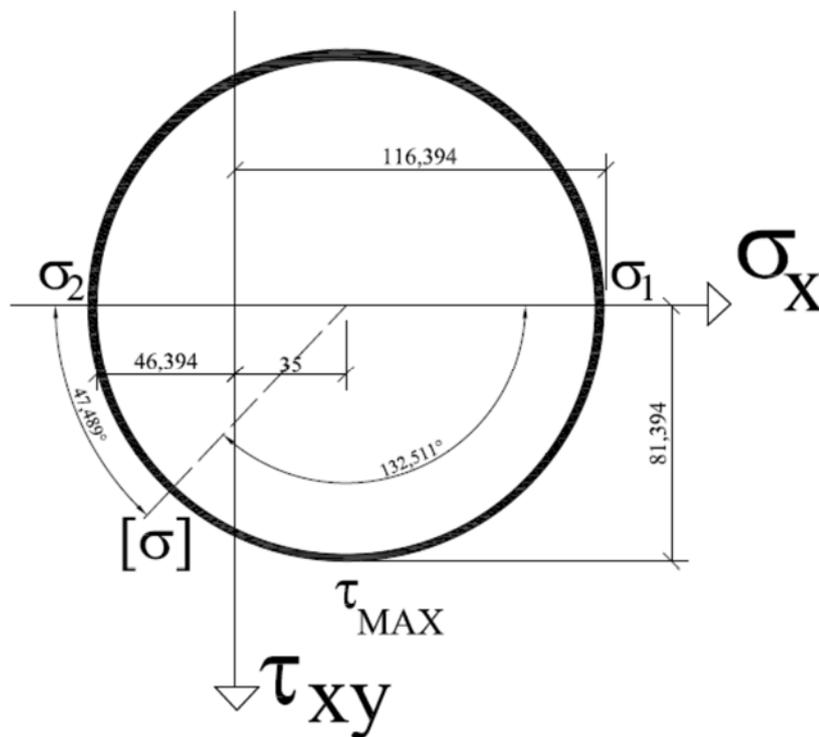


Figura 23.18 Círculo de Mohr para o problema em estudo.

### 23.5 – Rotação de Tensões para o Caso Tridimensional

Em problemas tridimensionais gerais têm-se a presença de três tensões normais e três tensões de cisalhamento não nulas no tensor de tensões. Se essas componentes de tensão forem expressas em relação a um sistema de referência particular, suas componentes em relação a outro sistema de referência poderão ser obtidas se os cossenos dos ângulos formados pelos eixos de referência atual e anterior forem determinados. Assim, utilizando álgebra tensorial, pode-se escrever que:

$$[\sigma'] = [R][\sigma][R]^T \quad (23.36)$$

sendo  $[R]$  dado por

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix}.$$

## 23.5.1 – Exemplo 8

Um estado de tensão é definido pelo seguinte tensor

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 800 & 100 \\ 800 & -600 & 60 \\ 100 & 60 & 400 \end{bmatrix} MPa. \text{ Sabendo que um sistema de referência}$$

auxiliar  $x'y'z'$  é definido, no qual  $z'$  coincide com  $z$  e  $x'$  está rotacionado de  $30^\circ$  no sentido anti-horário em relação ao eixo  $x$ , determine as componentes do tensor de tensões em relação a este novo sistema de referência.

De acordo com a rotação de eixos existente entre os sistemas de referência descrita anteriormente, pode-se escrever a matriz de rotação da seguinte maneira:

$$[R] \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30) & \cos(60) & \cos(90) \\ \cos(120) & \cos(30) & \cos(90) \\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, aplicando a Eq.(23.36) obtém-se:

$$\begin{aligned} [\sigma'] &= [R][\sigma][R]^T \Rightarrow \\ [\sigma'] &= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 800 & 100 \\ 800 & -600 & 60 \\ 100 & 60 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\sigma'] &= \begin{bmatrix} 1292,82 & -292,82 & 116,60 \\ -292,82 & -892,82 & 1,96 \\ 116,60 & 1,96 & 400 \end{bmatrix} MPa \end{aligned}$$

### 23.6 – Tensões Principais para o Caso Tridimensional

Apesar de simples, o processo de transformação do estado de tensão de um sistema de referência a outro é de grande interesse, em engenharia, para a determinação de planos particulares onde as tensões experimentam valores máximos e mínimos. Em especial, a obtenção do estado de tensão em direções particulares onde as tensões de cisalhamento sejam nulas é de grande interesse, o que define os planos principais. Em

um problema tridimensional existem três planos perpendiculares entre si onde essa condição é atendida, ou seja, as tensões de cisalhamento são nulas observando-se somente a presença de tensões normais.

O vetor de tensão  $\{\sigma^P\}$  é dito principal se a seguinte relação é verificada:

$$\{\sigma^P\} = \lambda \{\hat{\eta}\} \quad (23.37)$$

onde  $\lambda$  é um escalar denominado valor principal e  $\{\hat{\eta}\}$  é o versor da normal particular que define uma direção principal.

Podem-se escrever as tensões em relação a uma direção particular  $\hat{\eta}$  da seguinte forma:

$$[\sigma] \{\hat{\eta}\} = \lambda \{\hat{\eta}\} \quad (23.38)$$

Ou em termos de componentes:

$$\left( \sigma_{ij} \hat{\eta}_j \right) e_i = \left( \lambda \hat{\eta}_i \right) e_i \quad \therefore \quad \sigma_{ij} \hat{\eta}_j = \lambda \hat{\eta}_i \quad (23.39)$$

$$\sigma_{ij} \hat{\eta}_j = \lambda \hat{\eta}_i \delta_{ij} \quad \therefore \quad (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \hat{\eta}_j = 0 \quad (23.40)$$

A Eq.(23.40) pode ser também escrita na seguinte forma:

$$(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \hat{\eta}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} (\sigma_x - \lambda) & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & (\sigma_y - \lambda) & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & (\sigma_z - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23.41)$$

A condição para que o sistema homogêneo apresente solução diferente da trivial, ou seja,  $\{\hat{\eta}\} = \{0\}$ , é que o determinante da matriz de seus coeficientes se anule. Dessa imposição resulta o seguinte polinômio cúbico escrito em termos de  $\lambda$ :

$$\lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 = 0 \quad (23.42)$$

As raízes do polinômio da Eq. (23.42) são as tensões principais. Nessa equação,  $I_1, I_2$  e  $I_3$  são os invariantes do tensor de tensões, assim denominados, pois possuem o mesmo valor independente do referencial adotado. Os invariantes são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
 I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\
 I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2
 \end{aligned} \tag{23.43}$$

### 23.6.1 – Exemplo 9

Determine as tensões principais do seguinte estado de tensão:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 800 & 100 \\ 800 & -600 & 60 \\ 100 & 60 & 400 \end{bmatrix}.$$

Para a determinação das tensões principais neste caso, devem ser, inicialmente, determinados os valores dos invariantes de tensão. Assim:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \Rightarrow I_1 = 1000 - 600 + 400 \Rightarrow I_1 = 800 \text{ MPa}$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_2 = 1000 \cdot (-600) + (-600) \cdot 400 + 1000 \cdot 400 - (800)^2 - (60)^2 - (100)^2$$

$$I_2 = -1093600 \text{ MPa}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = 1000 \cdot (-600) \cdot 400 + 2 \cdot 800 \cdot 100 \cdot 60 - 1000 \cdot (60)^2 - (-600) \cdot (100)^2 - 400 \cdot (800)^2$$

$$I_3 = -484000000 \text{ MPa}^3$$

Assim, o polinômio a ser resolvido é o seguinte:

$$\lambda^3 - 800\lambda^2 - 1093600\lambda + 484000000 = 0$$

cujas raízes e consequentemente tensões principais são iguais a  $\sigma_1 = 1345,445 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 386,147 \text{ MPa}$  e  $\sigma_3 = -931,593 \text{ MPa}$ .

### 23.7 – Tensão de Cisalhamento Máxima Absoluta

Assumindo um estado de tensão tridimensional, têm-se definidas três tensões normais e três tensões de cisalhamento que darão origem, como anteriormente apresentado, a três tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , que por simplicidade de notação serão

denominadas neste item de  $\sigma_{MAX}$ ,  $\sigma_{INT}$  e  $\sigma_{MIN}$ , respectivamente. Se as tensões principais forem ilustradas segundo seus planos de atuação, obtém-se a representação mostrada na Fig. (23.19), segundo os planos  $y'z'$ ,  $x'z'$  e  $x'y'$ .

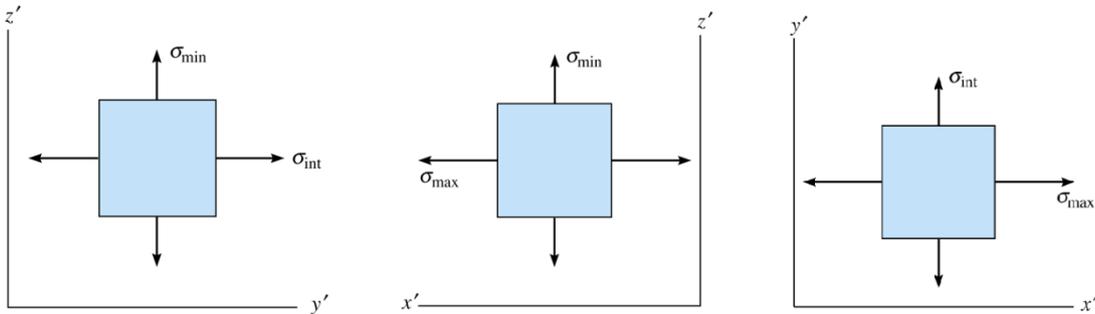


Figura 23.19 Representação das tensões principais em seus respectivos planos.

Com base na representação ilustrada na Fig. (23.19), pode-se utilizar o círculo de Mohr para a determinação da tensão de cisalhamento máxima atuante em cada um dos planos considerados. Conforme previamente apresentado neste capítulo, o diâmetro do círculo de Mohr é dado pela diferença das tensões principais atuantes no plano em análise. Além disso, a tensão de cisalhamento máxima no plano é dada pelo raio do círculo de Mohr.

Considerando as três representações de tensões consideradas na Fig. (23.19), podem ser construídos os círculos de Mohr apresentados na Fig. (23.20). Comparando os três círculos de Mohr da Fig. (23.20), constata-se que a tensão de cisalhamento máxima absoluta é definida pelo círculo de Mohr que possui o maior raio.

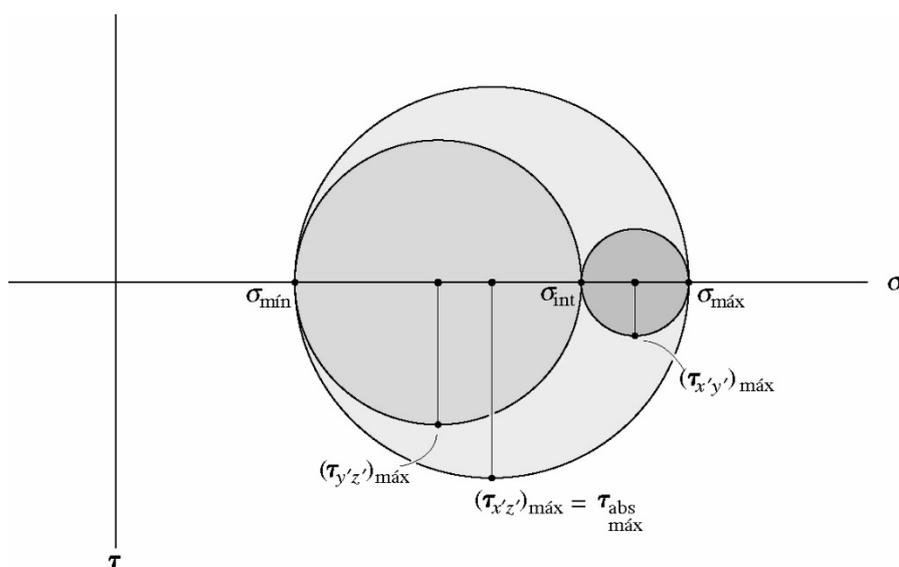


Figura 23.20 Círculo de Mohr para os casos considerados.

Assim, pode-se definir que a tensão de cisalhamento máxima absoluta é igual a:

$$\tau_{MAX}^{ABS} = \frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{ABS} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (23.44)$$

E a tensão normal média associada a este estado é dada por:

$$\sigma_{MED} = \frac{\sigma_{MAX} + \sigma_{MIN}}{2} \Rightarrow \sigma_{MED} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (23.45)$$

## 24. – Deformações

---

### 24.1 – Componentes de Deformação em um Ponto

A forma e as dimensões de um corpo deformável tendem a ser alteradas quando este é submetido a um conjunto de carregamentos externos. Essas mudanças, decorrentes do deslocamento relativo entre os pontos materiais que compõem o corpo, são chamadas de deformação e podem ser tanto visíveis a olho nu como praticamente imperceptíveis sem a utilização de equipamentos de alta precisão.

Para ilustrar a presença das deformações, deve-se considerar uma estrutura plana, em equilíbrio quando submetida a um conjunto de forças e restrições em deslocamento (condições de contorno). Após a ação das condições de contorno, o corpo tende a se deformar assumindo uma nova configuração geométrica, como ilustrado na Fig. (24.1). Nessa situação, os pontos que compõem o corpo ocupam uma nova posição, ou seja, estes pontos movimentam-se em relação à sua posição original. Portanto, percebe-se que o estado deformado decorre da variação do campo de deslocamentos presente no corpo, o qual foi provocado pelas condições de contorno atuantes.

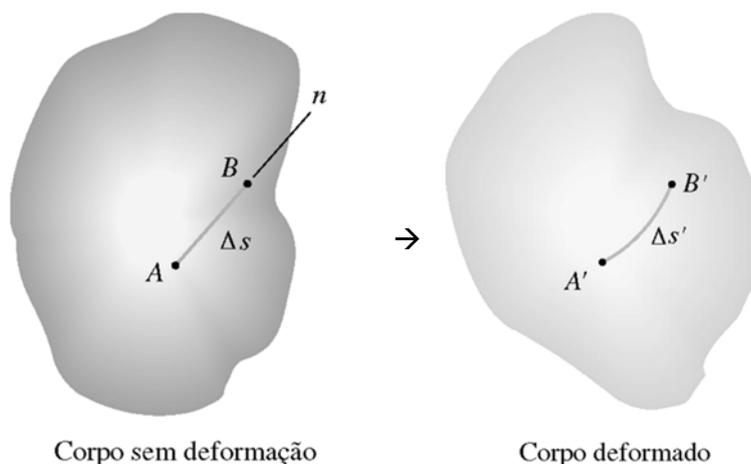


Figura 24.1 Configuração deformada de um corpo.

As equações que serão apresentadas neste capítulo têm como base a descrição lagrangeana (*Lagrange, 1788, Mecanique Analytique*), na qual o sistema de referência considerado permanece inalterado após a ocorrência da deformação. Assume-se ainda que os deslocamentos presentes no corpo obedecem ao regime de pequenos deslocamentos e que a geometria inicial (indeformada) seja semelhante o suficiente à geometria deformada, para que a imposição das condições de equilíbrio possa ser efetuada na condição indeformada. Além disso, admite-se que o estado de deslocamento não altera o estado de carregamento, ou seja, a configuração de equilíbrio não sofre alteração na mudança de forma da estrutura.

Conforme discutido no capítulo 23, as tensões no interior de corpos variam de ponto a ponto. Assim, como as tensões estão ligadas às deformações por meio de uma relação constitutiva, as deformações variarão também de ponto a ponto. As deformações podem classificadas como normais ou distorcionais, como apresentado no capítulo 12. As deformações normais estão associadas ao alongamento ou encurtamento do elemento considerado, enquanto que as deformações distorcionais estão ligadas às distorções dos elementos que compõem a estrutura. As Fig. (24.2) e Fig. (24.3) ilustram a atuação das deformações normal e distorcional respectivamente.

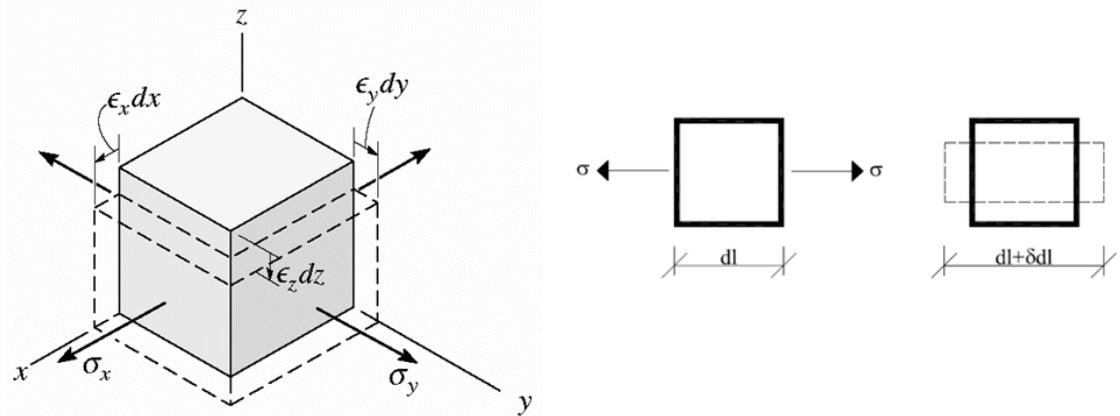


Figura 24.2 Deformação normal.

Matematicamente, as deformações normais podem ser determinadas com base na razão entre a variação do comprimento do elemento analisado e seu comprimento inicial. Assumindo que o deslocamento do corpo apresentado na Fig. (24.2) tenha ocorrido na direção  $x$ , sua deformação normal pode ser definida como:

$$\epsilon_x = \frac{dl + \delta dl - dl}{dl} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\delta dl}{dl} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\delta dx}{dx} \quad (24.1)$$

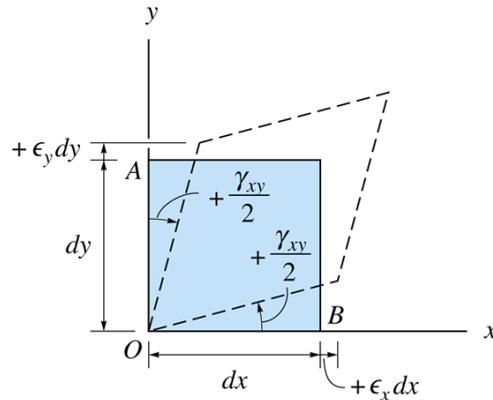


Figura 24.3 Deformação distorcional.

De forma semelhante, pode-se definir as componentes da deformação normal atuantes ao longo das direções  $y$  e  $z$  da seguinte maneira:

$$\varepsilon_y = \frac{\delta dy}{dy} \quad \varepsilon_z = \frac{\delta dz}{dz} \quad (24.2)$$

Com relação às deformações distorcionais, estas são determinadas com base na variação do ângulo formado por duas retas concorrentes em um dado ponto antes e depois da deformação, conforme apresentado no capítulo 12. Considerando que as arestas estejam inicialmente perpendiculares, como mostrado na Fig. (24.3), a deformação distorcional,  $\gamma$ , é definida como:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (24.3)$$

Considerando ainda que o plano que contém o elemento mostrado na Fig. (24.3) seja o  $xy$ , a deformação distorcional mostrada na Eq.(24.3) é a  $\gamma_{xy}$ . De maneira análoga, as deformações distorcionais atuantes nos planos  $xz$  e  $yz$  dão origem às  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , respectivamente. De forma a uniformizar a notação das deformações, pode-se definir as seguintes variáveis:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad (24.4)$$

As deformações podem ser representadas por meio de um tensor como mostra a equação a seguir:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \Rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (24.5)$$

Deve-se lembrar que, embora não demonstrado nessas notas, a relação  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  com  $i, j \rightarrow x, y, z$  é válida. Isso é consistente com o conteúdo já discutido e apresentado durante o estudo das tensões.

### 24.2 – Estado Plano de Deformação

Em diversas aplicações de engenharia problemas tridimensionais podem ser analisados, de maneira simplificada e sem perda significativa de representatividade, de forma plana. Esta simplificação dá origem aos problemas ditos planos, como citado no capítulo anterior, os quais são classificados em planos de tensão e deformação.

Um problema é classificado como plano de deformação quando os vetores de deslocamento dos pontos pertencentes ao corpo em questão são paralelos entre si. Assim, todos os pontos originalmente pertencentes a um plano, antes do corpo ser deformado, permanecem nesse mesmo plano após a atuação das ações externas. Nessa classe de problemas enquadram-se, normalmente, corpos cuja geometria apresenta uma de suas dimensões muito superior às demais como em barragens, tubulações e estruturas de contenção, como ilustra a Fig. (24.4). Nestes casos, o plano sob o qual estarão contidos os pontos (e os vetores deslocamento) é um plano normal a maior dimensão do corpo.

Portanto, as deformações não nulas ocorrerão no plano definido pelas menores dimensões do corpo e a deformação ao longo da maior dimensão do corpo será nula. Para o sistema de coordenadas mostrado na Fig. (24.4) tem-se que:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (24.6)$$

Conforme apresentado no capítulo anterior, as componentes do tensor de tensões dependem do sistema de referência no qual são definidas. De forma semelhante, as componentes do tensor de deformações também dependem do sistema de referência adotado na análise. Para ilustrar esta dependência basta considerar um sistema de

referência rotacionado em relação ao apresentado na Fig. (24.4). Nesse caso, o plano formado pelas menores dimensões do corpo poderá não ser o  $xy$ . Porém, de forma semelhante ao apresentado no capítulo 23, é possível relacionar as componentes do tensor de deformações, definidas em relação a um sistema de referência qualquer, a outro sistema de referência rotacionado em relação ao sistema no qual as componentes foram inicialmente determinadas.

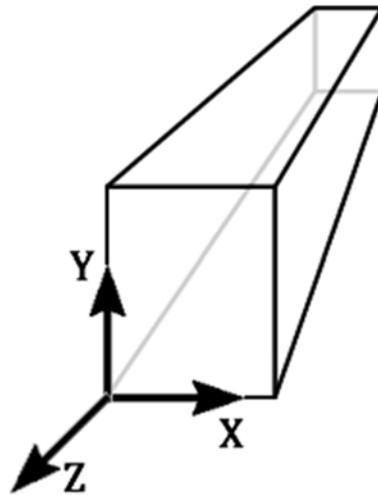


Figura 24.4 Elemento em estado plano de deformação.

Para a determinação das expressões que relacionam as componentes do tensor de deformações em um sistema rotacionado, com aquelas determinadas em um sistema de referência inicial, será aplicado o princípio da superposição dos efeitos. Assim, será considerada a ação de deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  atuando cada uma isoladamente e em seguida seus efeitos serão superpostos. Portanto, será considerado e mostrado o caso plano.

Para a determinação das expressões que relacionam as componentes de deformação normal em relação a dois planos perpendiculares,  $\varepsilon'_x$  e  $\varepsilon'_y$ , deve-se considerar o elemento de dimensões infinitesimais  $dx$  e  $dy$  apresentado na Fig.(24.5).

Quando este elemento é submetido a uma deformação uniaxial orientada ao longo do eixo  $x$ , essa deformação produzirá um alongamento do elemento na direção  $x$  igual a  $\varepsilon_x dx$ . Considerando um sistema de referência rotacionado  $x'y'$ , verifica-se que os alongamentos do elemento ao longo das direções  $x'$  e  $y'$  podem ser obtidos decompondo o alongamento inicialmente determinado por meio de relações

trigonométricas simples. Assim, os alongamentos ao longo das direções rotacionadas, conforme indicado na Fig. (24.5), são dados por:

$$\begin{aligned}\Delta_x^x &= \varepsilon_x dx \cos(\theta) \\ \Delta_y^x &= \varepsilon_x dx \operatorname{sen}(\theta)\end{aligned}\quad (24.7)$$

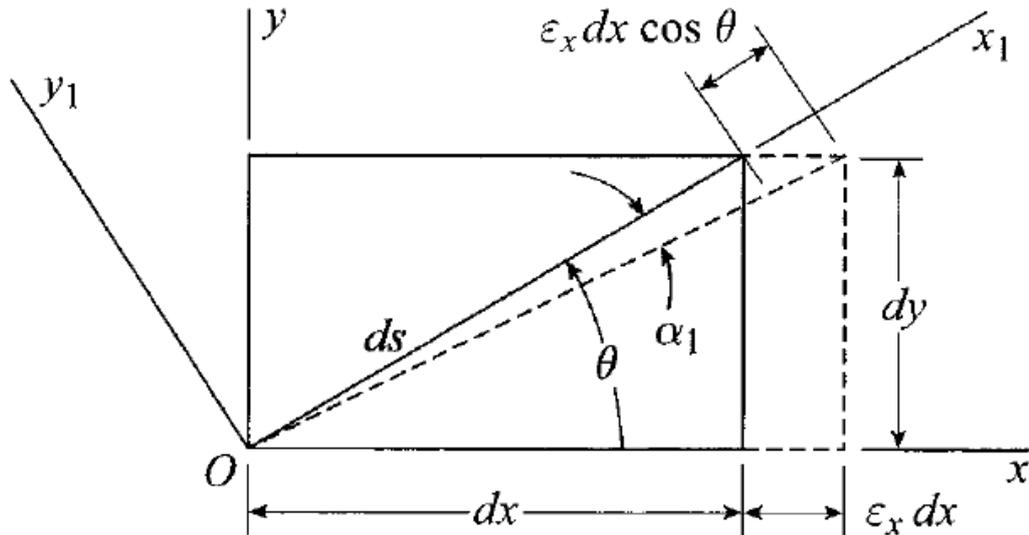


Figura 24.5 Elemento infinitesimal submetido a uma deformação  $\varepsilon_x$ .

Para levar em consideração a presença da deformação  $\varepsilon_y$ , deve-se assumir que o elemento infinitesimal em análise esteja submetido a apenas uma deformação uniaxial orientada ao longo do eixo  $y$ , como mostrado na Fig. (24.6).

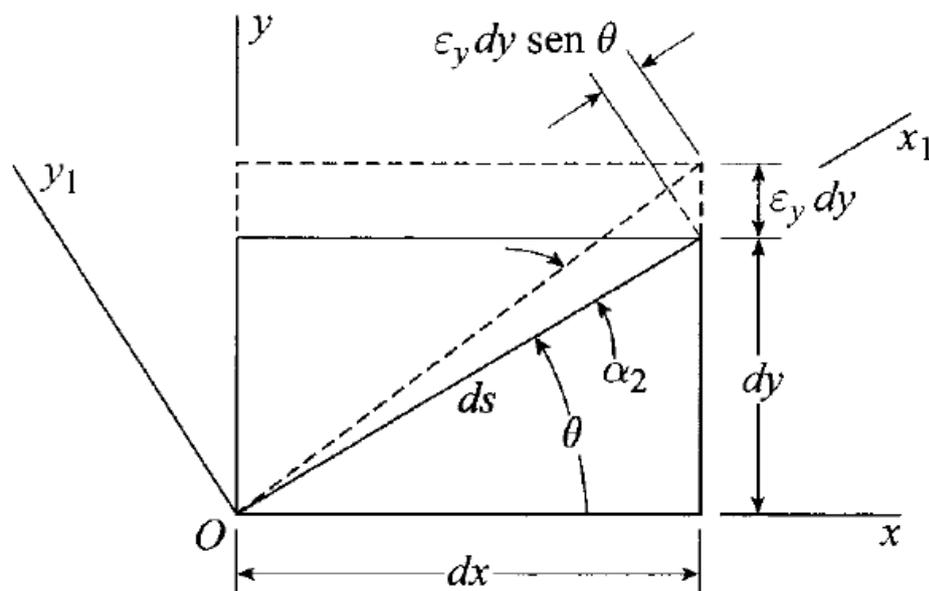


Figura 24.6 Elemento infinitesimal submetido a uma deformação  $\varepsilon_y$ .

Nessa situação, a deformação considerada induzirá alongamentos no elemento, cujas componentes orientadas ao longo das direções  $x'y'$  poderão ser facilmente determinadas por meio de relações trigonométricas. Os alongamentos ao longo dessas direções são dados por:

$$\begin{aligned}\Delta_x^y &= \varepsilon_y dy \operatorname{sen}(\theta) \\ \Delta_y^y &= \varepsilon_y dy \operatorname{cos}(\theta)\end{aligned}\quad (24.8)$$

Finalmente, deve-se assumir que o elemento infinitesimal analisado esteja submetido a apenas uma deformação distorcional  $\gamma_{xy}$ . Nessa situação, ilustrada na Fig. (24.7), observa-se que o elemento move-se  $\gamma_{xy} dy$  ao longo da direção  $x$ . Consequentemente, o incremento no comprimento, ou alongamento, ao longo dos eixos rotacionados será dado por:

$$\begin{aligned}\Delta_x^{xy} &= \gamma_{xy} dy \operatorname{cos}(\theta) \\ \Delta_y^{xy} &= \gamma_{xy} dy \operatorname{sen}(\theta)\end{aligned}\quad (24.9)$$

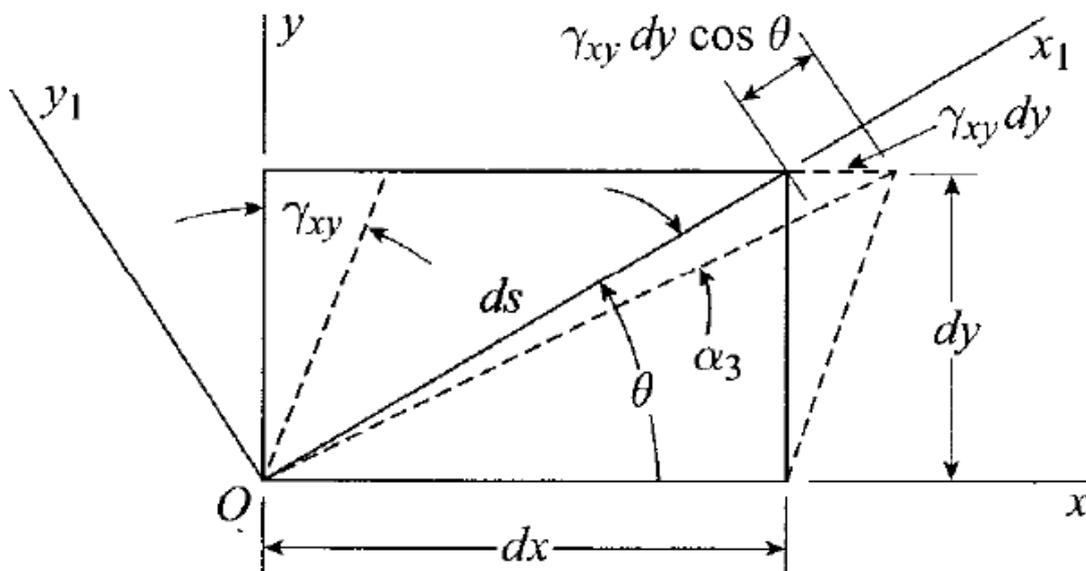


Figura 24.7 Elemento infinitesimal submetido a uma deformação  $\gamma_{xy}$ .

Com base no conteúdo apresentado anteriormente, verifica-se que a atuação conjunta das deformações  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  conduz a uma variação nas dimensões do elemento infinitesimal analisado. Consequentemente, a dimensão do elemento, orientada ao longo do eixo  $x'$ , apresentará também uma dada variação, a qual pode ser

facilmente determinada adicionando os resultados mostrados nas Eq.(24.7), Eq.(24.8) e Eq.(24.9). Assim, superpondo estes efeitos obtêm-se:

$$\Delta ds = \varepsilon_x dx \cos(\theta) + \varepsilon_y dy \operatorname{sen}(\theta) + \gamma_{xy} dy \cos(\theta) \quad (24.10)$$

Utilizando a definição de deformação normal, Eq.(24.1), verifica-se que a deformação normal orientada ao longo do eixo  $x'$  pode ser determinada dividindo-se os termos da Eq.(24.10) pelo comprimento indeformado do elemento considerado. Portanto:

$$\varepsilon'_x = \frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon_x \frac{dx}{ds} \cos(\theta) + \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \operatorname{sen}(\theta) + \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \cos(\theta) \quad (24.11)$$

Com base no apresentado nas três últimas figuras verifica-se facilmente que:

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\theta) \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}(\theta) \quad (24.12)$$

Substituindo os resultados da Eq.(24.12) na Eq.(24.11) obtêm-se:

$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x \cos^2(\theta) + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2(\theta) + \gamma_{xy} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \quad (24.13)$$

Sabendo que as seguintes identidades trigonométricas são válidas:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \quad (24.14)$$

$$\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad (24.15)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad (24.16)$$

A expressão para a determinação da deformação normal em relação a um eixo rotacionado qualquer pode ser, finalmente, escrita em sua forma final como:

$$\varepsilon'_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \quad (24.17)$$

A determinação da expressão que relaciona a deformação normal em relação ao eixo rotacionado  $y'$  pode ser feita de maneira análoga. A demonstração dessa equação utilizando o procedimento mostrado para a obtenção da Eq.(24.17) fica a cargo do leitor. Porém, uma maneira expedita de demonstrar essa equação pode ser utilizada. Basta lembrar que  $\varepsilon'_y$  atua em um plano rotacionado de  $90^\circ$  em relação à  $x'$ . Assim, esta relação é facilmente obtida tomando a Eq.(24.17) substituindo o ângulo de rotação por seu valor adicionado a  $90^\circ$ . Dessa forma:

$$\varepsilon'_y = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos[2(\theta + 90)] + \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen}[2(\theta + 90)] \quad (24.18)$$

Sabendo da relação de senos e cossenos com seus respectivos quadrantes, pode-se reescrever a última equação como:

$$\varepsilon'_y = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2} \cos(2\theta) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen}(2\theta) \quad (24.19)$$

Para a determinação das deformações distorcionais considerando um sistema de referência rotacionado, deve-se obter a diferença entre os ângulos que definem as arestas do elemento infinitesimal em análise, conforme a definição de deformação distorcional mencionada anteriormente. Dessa forma,  $\gamma'_{xy}$  é calculada como:

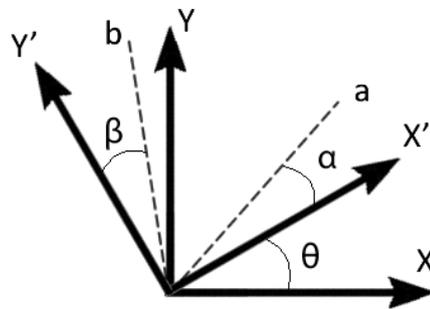


Figura 24.8 Rotação das arestas que definem o elemento infinitesimal.

$$\gamma'_{xy} = \alpha + \beta \quad (24.20)$$

Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  mostrados na Fig. (24.8) podem ser obtidos, para o caso geral, considerando o princípio da superposição dos efeitos. Portanto, assume-se que as deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  atuam isoladamente e em seguida seus efeitos são adicionados. Quando considera-se apenas a atuação de  $\varepsilon_x$ , como ilustrado na Fig. (24.5), o ângulo  $\alpha$ , resultado de uma rotação horária, é igual a razão entre a distância  $\varepsilon_x dx \text{sen}(\theta)$  e o comprimento inclinado  $ds$ . Assim:

$$\alpha_x = \varepsilon_x \frac{dx}{ds} \text{sen}(\theta) \quad (24.21)$$

De forma análoga, quando apenas a deformação  $\varepsilon_y$  está presente, conforme indicado na Fig. (24.6), existe uma rotação anti-horária igual a:

$$\alpha_y = \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \cos(\theta) \quad (24.22)$$

Finalmente, a deformação distorcional  $\gamma_{xy}$  gera uma rotação horária no elemento infinitesimal considerado, conforme mostrado na Fig. (24.7), igual a:

$$\alpha_{xy} = \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \text{sen}(\theta) \quad (24.23)$$

Assim, a variação final do ângulo  $\alpha$  é obtida somando-se os termos mostrados nas Eq.(24.21), Eq.(24.22) e Eq.(24.23). Deve-se enfatizar que pela convenção de sinais, uma rotação anti-horária da linha  $\overline{oa}$  apresentada na Fig. (24.8) é considerada positiva. Portanto:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\alpha_x + \alpha_y - \alpha_{xy} \\ \alpha &= -\varepsilon_x \frac{dx}{ds} \text{sen}(\theta) + \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \cos(\theta) - \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (24.24)$$

Lembrando que a Eq.(24.12) permanece válida, pode-se reescrever a Eq.(24.24) da seguinte maneira:

$$\alpha = -\varepsilon_x \cos(\theta) \text{sen}(\theta) + \varepsilon_y \cos(\theta) \text{sen}(\theta) - \gamma_{xy} \text{sen}^2(\theta) \quad (24.25)$$

Para terminar a dedução do termo  $\gamma'_{xy}$ , deve-se também determinar o ângulo  $\beta$  em função das deformações  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  aplicadas isoladamente. Esse ângulo é facilmente determinado adicionando-se  $90^\circ$  ao ângulo  $\theta$  mostrado nas equações utilizadas para a determinação dos ângulos  $\alpha$ . Efetuando essa adição de ângulos e levando em consideração a convenção de sinais adotada pode-se reescrever a Eq.(24.24) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_x - \beta_y + \beta_{xy} \\ \beta &= \varepsilon_x \frac{dx}{ds} \text{sen}(\theta + 90) - \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \cos(\theta + 90) + \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \text{sen}(\theta + 90) \end{aligned} \quad (24.26)$$

Sabendo da relação de senos e cossenos com seus respectivos quadrantes, pode-se reescrever a última equação como:

$$\beta = \varepsilon_x \cos(\theta) \text{sen}(\theta) - \varepsilon_y \text{sen}(\theta) \cos(\theta) - \gamma_{xy} \cos^2(\theta) \quad (24.27)$$

Somando-se os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  dados pelas Eq.(24.25) e Eq.(24.26) tem-se:

$$\gamma'_{xy} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) + \gamma_{xy} [\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)] \quad (24.28)$$

Aplicando as identidades trigonométricas apresentadas anteriormente, Eq.(24.14), Eq.(24.15) e Eq.(24.16), é possível reescrever a última equação da seguinte maneira:

$$\frac{\gamma'_{xy}}{2} = -\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\theta) \quad (24.29)$$

Portanto, com base nas Eq.(24.17), Eq.(24.19) e Eq.(24.29) é possível referenciar as componentes do tensor de deformação, inicialmente definidas em um sistema inicial, a qualquer sistema rotacionado. Nesse ponto do estudo é interessante comparar as expressões Eq.(23.17), Eq.(23.20) e Eq.(23.22), obtidas no capítulo anterior, com as Eq.(24.17), Eq.(24.19) e Eq.(24.29) determinadas neste capítulo. Cabe ao leitor responder: quais são suas semelhanças e diferenças?

### 24.2.1 – Exemplo 1

Mostre que a seguinte identidade é válida.

$$\varepsilon'_x + \varepsilon'_y = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Para mostrar que a relação mostrada acima é verdadeira, basta que as Eq.(24.17) e Eq.(24.19) sejam adicionadas. Assim:

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2} \cos(2\theta) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2\theta) = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Agrupando os termos semelhantes obtém-se:

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

Assim, comprova-se que a identidade considerada é verdadeira. Deve-se ressaltar que a utilização dessa identidade é útil para a análise da atuação das deformações em planos quaisquer. Pode-se verificar se o valor das deformações obtido nos planos desejados atende a identidade estudada neste exercício. Em caso afirmativo, tem-se um forte indicativo da correção das deformações calculadas.

### 24.3 – Deformações Principais

Com base nas Eq.(24.17), Eq.(24.19) e Eq.(24.29), observa-se que as componentes de deformação em relação a um plano qualquer dependem de funções trigonométricas. Devido ao caráter periódico dessas funções, pode-se inferir,

intuitivamente, que existirão planos em que as deformações normal e distorcional apresentarão valores extremos (máximos e mínimos). Esses planos podem ser determinados empregando os conceitos básicos do cálculo diferencial, os quais preveem que o valor extremo de uma função ocorre nos pontos em que sua primeira derivada é nula. Assim derivando a Eq.(24.17) em relação ao ângulo  $\theta$  obtêm-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen}(2\theta) \\ \frac{d\varepsilon'_x}{d\theta} &= -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} 2\text{sen}(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} 2\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \end{aligned} \quad (24.30)$$

A partir do resultado obtido com a Eq.(24.30), obtêm-se dois ângulos  $\theta_{\varepsilon_1}$  e  $\theta_{\varepsilon_2}$ , os quais são defasados entre si de  $90^\circ$ , que determinam os planos onde as deformações normais apresentam valores extremos. Nesses planos, os valores das deformações normais podem ser facilmente determinados substituindo as inclinações dos planos,  $\theta_{\varepsilon_1}$  e  $\theta_{\varepsilon_2}$ , na Eq.(24.17). Efetuando este procedimento obtêm-se:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (24.31)$$

As deformações apresentadas na Eq.(24.31) são denominadas deformações principais e os planos onde essas deformações atuam são conhecidos como planos principais.

Os ângulos que definem os planos principais podem ser também substituídos na Eq.(24.29) para a determinação das deformações distorcionais atuantes nesses planos. Efetuando este procedimento, o qual será omitido nessas notas por simplicidade, pode-se constatar que o valor da deformação distorcional nos planos principais é nulo. Portanto, nos planos principais, as deformações distorcionais serão sempre nulas. Deve-se salientar que comportamento semelhante foi observado para as tensões principais, conforme discutido no capítulo anterior. Se o material analisado apresentar comportamento mecânico isotrópico, os planos principais das tensões e das deformações coincidem.

Assim como verificado para as deformações normais, existirão também planos onde as deformações distorcionais atingirão valores extremos. Para a determinação destes planos, deve-se aplicar os conhecimentos do cálculo diferencial igualando a primeira derivada da Eq.(24.29) em relação ao ângulo  $\theta$  a zero. Assim:

$$\frac{\gamma'_{xy}}{2} = -\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\gamma'_{xy}}{2} = -\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} 2 \cos(2\theta) - \frac{\gamma_{xy}}{2} 2 \operatorname{sen}(2\theta) = 0 \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \quad (24.32)$$

Por meio da Eq.(24.32) determinam-se dois ângulos  $\theta_{\gamma_1}$  e  $\theta_{\gamma_2}$ , que definem os planos onde as deformações distorcionais apresentam valores extremos. Esses dois planos estão defasados entre si de  $90^\circ$  e são defasados de  $45^\circ$  em relação aos planos principais cujas inclinações são  $\theta_{\varepsilon_1}$  e  $\theta_{\varepsilon_2}$ .

Os valores extremos das deformações distorcionais podem ser facilmente determinados substituindo os ângulos  $\theta_{\gamma_1}$  e  $\theta_{\gamma_2}$  na Eq.(24.29). Efetuando este procedimento obtém-se:

$$\frac{\gamma_{xy}^{MAX}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (24.33)$$

Os ângulos que definem os planos de valor extremo da deformação distorcional podem também ser substituídos na Eq.(24.17) para a determinação das intensidades das deformações normais atuantes. Nos planos definidos por  $\theta_{\gamma_1}$  e  $\theta_{\gamma_2}$  as deformações normais são iguais à deformação normal média, a qual é definida por:

$$\varepsilon_{MED} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad (24.34)$$

Dessa forma, nos planos onde as deformações normais apresentam valores extremos as deformações distorcionais são nulas. Enquanto que nos planos onde as deformações distorcionais têm valores extremos as deformações normais são calculadas por meio da Eq.(24.34). Além disso, os planos principais estão defasados de  $90^\circ$  entre si e os planos onde atuam as deformações distorcionais extremas são defasados entre si de  $90^\circ$ . Finalmente, os planos principais e os de deformação distorcional extrema estão defasados  $45^\circ$  um em relação ao outro. Esse comportamento é semelhante ao observado na análise das tensões em problemas planos. Assim, sugere-se que o leitor efetue comparações entre os conhecimentos apresentados até aqui nessas notas para a melhor compreensão do conteúdo apresentado.

## 24.3.1 – Exemplo 2

Em um dado ponto material, o estado de deformação é definido pelas seguintes componentes  $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -350 & 80 \\ 80 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6}$ . Com base nessa informação determine: os planos principais, as deformações principais, a inclinação para a deformação distorcional extrema e o seu valor.

A partir do tensor de deformações dado, pode-se facilmente determinar as deformações principais por meio da Eq.(24.31). Assim:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-350 \cdot 10^{-6} + 200 \cdot 10^{-6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-350 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{80 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = -7,5 \cdot 10^{-5} \pm 2,7789 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_1 = 2,0289 \cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_2 = -3,5289 \cdot 10^{-4}$$

Para determinar em quais planos as deformações principais atuam, deve-se utilizar a Eq.(24.30). Assim:

$$\tan(2\theta) = \frac{80 \cdot 10^{-6}}{-350 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow 2\theta = -8,2759^\circ$$

$$\theta_1 = -4,1379^\circ$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ \Rightarrow \theta_2 = 85,8621^\circ$$

Para definir em qual dos planos  $\theta_1$  ou  $\theta_2$  atuam as deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  calculadas anteriormente, deve-se aplicar a Eq.(24.17). Calculando a equação mencionada com o ângulo  $\theta_1$  obtém-se:

$$\varepsilon'_x = \frac{-350 \cdot 10^{-6} + 200 \cdot 10^{-6}}{2} + \frac{-350 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-6}}{2} \cos(2 \cdot -4,1379^\circ) +$$

$$\frac{80 \cdot 10^{-6}}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot -4,1379^\circ) \Rightarrow \varepsilon'_x = -3,5289 \cdot 10^{-4}$$

Assim, com base no determinado anteriormente conclui-se que:

$$\theta_{\varepsilon_1} = 85,8621^\circ \quad ; \quad \theta_{\varepsilon_2} = -4,1379^\circ$$

Os valores extremos das deformações distorcionais podem ser calculados por meio da Eq.(24.33). Assim:

$$\frac{\gamma_{xy}^{MAX}}{2} = \sqrt{\left(\frac{-350 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{80 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2} \Rightarrow \gamma_{xy}^{MAX} = \pm 5,5579 \cdot 10^{-4}$$

Os valores extremos das deformações distorcionais ocorrem em planos defasados de  $45^\circ$  em relação à  $\theta_{\varepsilon_1}$  e  $\theta_{\varepsilon_2}$ . Portanto, os planos onde atuam as deformações distorcionais calculadas anteriormente são:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_{\varepsilon_1} + 45^\circ \Rightarrow \theta_1 = 85,8621^\circ + 45^\circ \Rightarrow \theta_1 = 130,8621^\circ \\ \theta_2 &= \theta_{\varepsilon_2} + 45^\circ \Rightarrow \theta_2 = -4,1379^\circ + 45^\circ \Rightarrow \theta_2 = 40,8621^\circ\end{aligned}$$

Para saber em qual dos planos calculados acima atuam os valores máximo e mínimo da deformação distorcional deve-se aplicar a Eq.(24.29). Utilizando esta equação com o ângulo  $\theta_1$  tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma'_{xy}}{2} &= -\frac{(-350 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-6})}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 130,8621^\circ) + \frac{80 \cdot 10^{-6}}{2} \cos(2 \cdot 130,8621^\circ) \\ \gamma'_{xy} &= -5,5579 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Dessa forma, com base no valor de deformação distorcional calculado na última equação tem-se:

$$\theta_{\gamma_1} = 40,8621^\circ \quad ; \quad \theta_{\gamma_2} = 130,8621^\circ$$

Nos planos onde atuam as deformações distorcionais máxima e mínima as deformações normais, em ambos os eixos rotacionados, são iguais a:

$$\varepsilon_{MED} = \frac{-350 \cdot 10^{-6} + 200 \cdot 10^{-6}}{2} \Rightarrow \varepsilon_{MED} = -75 \cdot 10^{-6}$$

#### 24.4 –Círculo de Mohr. Estado Plano de Deformações

Assim como apresentado no estudo das componentes de tensão em planos quaisquer é também possível obter uma representação gráfica para expressar as componentes de deformação atuantes em planos quaisquer. Esta representação gráfica é efetuada por meio de um círculo, o qual foi inicialmente proposto pelo engenheiro Otto Mohr e conhecido no domínio da engenharia como *círculo de Mohr*.

Para que o equacionamento do círculo de Mohr seja efetuado considerando problemas planos envolvendo componentes de deformação em planos quaisquer, deve-se inicialmente escrever as equações que relacionam as componentes de deformação normal e distorcional para planos inclinados. Assim:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_x &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \\ \frac{\gamma'_{xy}}{2} &= -\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (24.35)$$

As Eq.(24.35) podem ser reescritas de uma maneira mais conveniente como:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_x - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} &= \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \\ \frac{\gamma'_{xy}}{2} &= -\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \operatorname{sen}(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (24.36)$$

Elevando cada uma das equações da Eq.(24.36) ao quadrado e em seguida somando-as obtém-se:

$$\begin{aligned}\left[ \varepsilon'_x - \left( \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right) \right]^2 + \left( \frac{\gamma'_{xy}}{2} \right)^2 &= \\ \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 \cos^2(2\theta) + \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) + \\ \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \cos^2(2\theta)\end{aligned}\quad (24.37)$$

Sabendo, que a seguinte identidade trigonométrica é válida  $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ ,

a Eq.(24.37) pode ser reescrita como:

$$\left[ \varepsilon'_x - \left( \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right) \right]^2 + \left( \frac{\gamma'_{xy}}{2} \right)^2 = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \quad (24.38)$$

Se em um problema qualquer as componentes do tensor de deformações são definidas com relação a um dado sistema de coordenadas, ou seja, os termos  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  são conhecidos, a Eq.(24.38) pode ser reescrita de uma maneira mais compacta como:

$$\left( \varepsilon'_x - \varepsilon_{MED} \right)^2 + \left( \frac{\gamma'_{xy}}{2} \right)^2 = R^2 \quad (24.39)$$

sendo  $\varepsilon_{MED}$  definido pela Eq.(24.34) e  $R$  dado por  $R = \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2}$ .

A Eq.(24.39), de acordo com os conhecimentos da geometria analítica, descreve um círculo com centro em  $(\varepsilon_{MED}, 0)$ . Para a construção do círculo de Mohr devem ser

conhecidas as componentes do estado de deformação, as quais conduzirão a determinação de seu centro,  $\varepsilon_{MED}$ , e de seu raio,  $R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$ .

Deve-se enfatizar que as equações envolvendo as deformações rotacionadas,  $\varepsilon'_x$ ,  $\varepsilon'_y$  e  $\gamma'_{xy}$  apresentadas nas Eq.(24.17), Eq.(24.19) e Eq.(24.29), são escritas empregando funções trigonométricas cossenos e senos dependentes de  $2\theta$ . Assim, para a determinação das deformações normais e distorcionais em um dado plano de interesse deve-se multiplicar, na figura representativa do círculo de Mohr, o ângulo desejado por dois.

Por meio da utilização do círculo de Mohr é possível a análise e determinação das deformações principais e de seus planos de atuação. Utilizando o círculo mostrado na Fig. (24.9), verifica-se que as deformações principais são dadas pelos pontos A e B. Nesses pontos, a deformação distorcional é nula e, conforme discutido anteriormente, isto define os planos principais. A inclinação dos planos principais, em relação ao estado de deformação conhecido, pode ser facilmente determinada por meio do ângulo  $2\theta$  indicado na Fig.(24.9). Segundo ilustrado no círculo de Mohr, a inclinação do plano principal pode ser obtida por  $\tan(2\theta) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$  o que concorda com a expressão

previamente apresentada neste capítulo. Além disso, o outro plano principal encontra-se defasado de  $90^\circ$  em relação ao plano determinado pela equação mencionada, o que também é consistentemente tratado pelo círculo de Mohr.

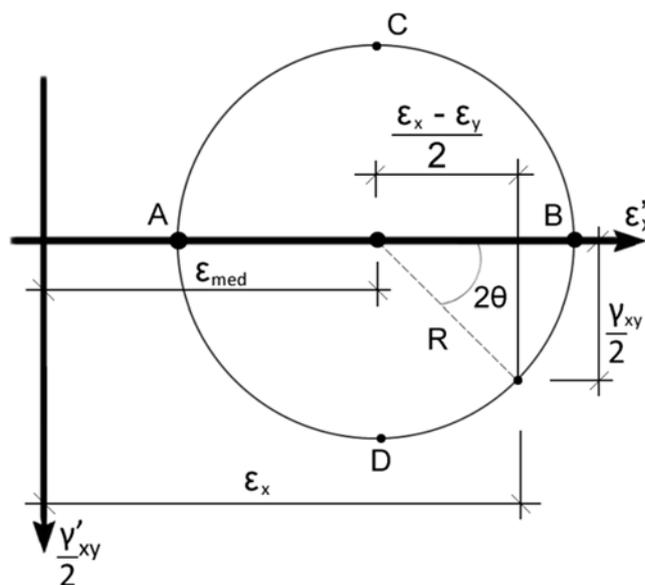


Figura 24.9 Círculo de Mohr para deformações.

Os valores extremos das deformações distorcionais são observados nos pontos C e D ilustrados na Fig.(24.9). Esses pontos têm coordenadas  $(\varepsilon_{MED}, R)$  e  $(\varepsilon_{MED}, -R)$  respectivamente, o que concorda com a Eq.(24.33) obtidas anteriormente. Além disso, o ângulo de inclinação entre o plano de atuação da deformação principal e o plano de atuação da máxima deformação distorcional é  $45^\circ (2\theta = 90^\circ)$ , o que é também consistente com o apresentado anteriormente.

#### 24.4.1 – Exemplo 3

Trace o círculo de Mohr para um ponto material submetido ao seguinte estado de

$$\text{deformação } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -350 & 80 \\ 80 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6}.$$

Primeiramente, devem ser determinadas as coordenadas do centro do círculo. Isso é facilmente efetuado determinando-se a deformação normal média. Assim:

$$(\varepsilon_{MED}; 0) = \left( \frac{-350 \cdot 10^{-6} + 200 \cdot 10^{-6}}{2}; 0 \right) \Rightarrow (\varepsilon_{MED}; 0) = (-75 \cdot 10^{-6}; 0)$$

O raio do círculo de Mohr é calculado utilizando as informações apresentadas na Eq.(24.39). Portanto:

$$R = \sqrt{\left( \frac{-350 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-6}}{2} \right)^2 + \left( \frac{80 \cdot 10^{-6}}{2} \right)^2} \Rightarrow R = 277,894 \cdot 10^{-6}$$

A deformação principal maior é calculada como:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{MED} + R \Rightarrow \varepsilon_1 = -75 \cdot 10^{-6} + 277,894 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \varepsilon_1 = 202,894 \cdot 10^{-6}$$

E a deformação principal menor pode ser determinada de forma semelhante:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{MED} - R \Rightarrow \varepsilon_2 = -75 \cdot 10^{-6} - 277,894 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \varepsilon_2 = -352,894 \cdot 10^{-6}$$

A metade dos valores extremos das deformações distorcionais são iguais ao valor do raio, portanto, iguais a:

$$\frac{\gamma_{xy}^{MAX}}{2} = R = 277,894 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \gamma_{xy}^{MAX} = 555,79 \cdot 10^{-6}$$

Com base nos valores calculados anteriormente, pode-se traçar o círculo de Mohr para o problema em questão, o qual está apresentado na Fig. (24.10).

Os resultados obtidos neste exemplo podem ser comparados com aqueles determinados no exemplo 2, para a verificação sobre sua correção.

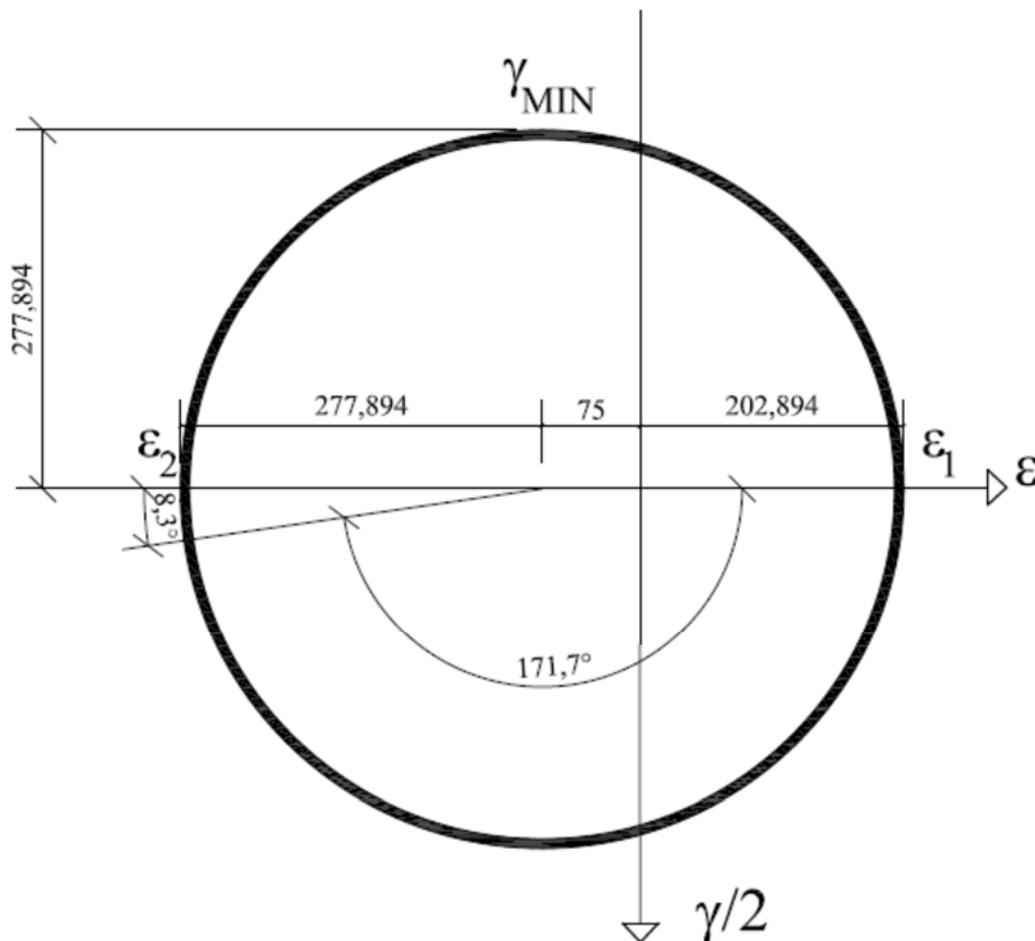


Figura 24.10 Círculo de Mohr para o problema em estudo.

### 24.5 – Medidas de Deformação. Aplicação em Extensômetros

Quando um dado corpo é submetido a um carregamento externo, sabe-se que surgirão tensões neste corpo que nada mais são do que sua resposta mecânica, a qual é necessária para que a condição de equilíbrio seja atendida. Embora seja conhecido que as tensões surgirão, estas não são determinadas diretamente nas aplicações práticas. Não existem equipamentos que mensuram diretamente, em forma experimental, a tensão em um corpo. Em aplicações práticas as grandezas mensuradas experimentalmente são deslocamentos e deformações. Neste item será apresentada uma forma simples e elegante para a determinação do estado de deformação em um ponto utilizando um equipamento simples.

As deformações podem ser medidas por meio de equipamentos especiais denominados *extensômetros*. Os extensômetros são formados por resistências elétricas, as quais distendem ou encurtam em função da ação do carregamento aplicado. A alteração do comprimento da resistência elétrica permite a determinação de um sinal que indica a deformação ocorrida no ponto de análise.

Normalmente, os extensômetros medem apenas a deformação normal orientada na direção paralela à de seus filamentos elétricos, conforme mostra a Fig. (24.11).

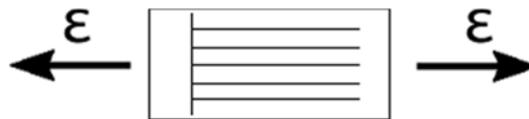


Figura 24.11 Deformação medida pelos extensômetros.

Quando analisada de forma isolada, a deformação normal medida por um extensômetro possui fins restritos. No entanto, os extensômetros podem ser posicionados em conjunto e em direções preferenciais para a determinação do estado completo de deformação em um ponto. O conjunto de extensômetros posicionados segundo um padrão particular é chamado de *Rosetas de Deformação*. As rosetas contêm, normalmente, três extensômetros posicionados de acordo com ângulos previamente definidos. Os tipos mais comuns são as rosetas de 45° e 60°, conforme mostrado na Fig. (24.12):

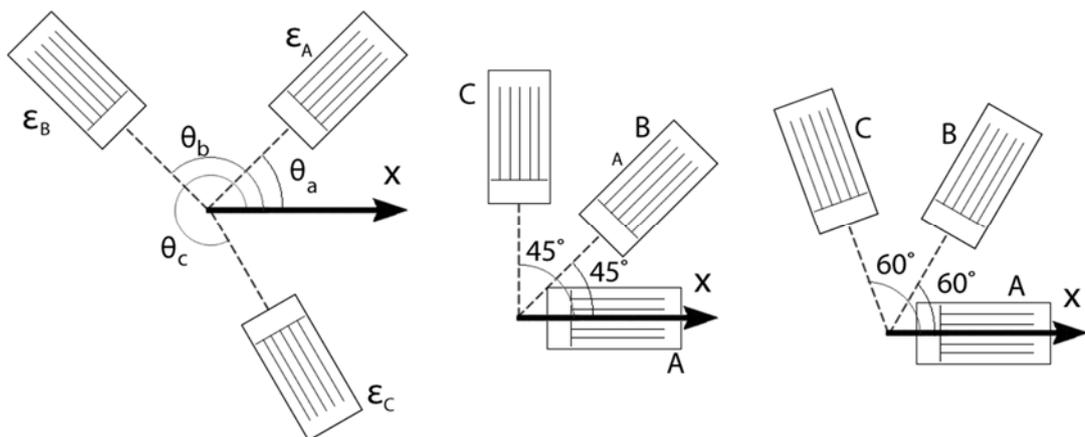


Figura 24.12 Rosetas de deformação.

Conhecendo-se as deformações normais ao longo das três direções pré-determinadas é possível calcular o estado de deformação em um dado ponto de interesse utilizando as equações de rotação de deformações apresentadas anteriormente neste

capítulo. Para tal fim, basta que a Eq.(24.17) seja avaliada para os três ângulos nos quais os extensômetros são posicionados. Portanto:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta_a) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2\theta_a) \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta_b) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2\theta_b) \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta_c) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2\theta_c)\end{aligned}\quad (24.40)$$

Para a roseta de 45° tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(0^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(0^\circ) \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \cdot 45^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 45^\circ) \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \cdot 90^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 90^\circ)\end{aligned}\quad (24.41)$$

Assim, resolvendo-se as três equações apresentadas na Eq.(24.41) para as componentes de deformação no plano obtêm-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_a \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_c\end{aligned}\quad (24.42)$$

Já para a roseta de 60° tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(0^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(0^\circ) \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \cdot 60^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 60^\circ) \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \cdot 120^\circ) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 120^\circ)\end{aligned}\quad (24.43)$$

Resolvendo as três equações apresentadas na Eq.(24.43) para as deformações no sistema de coordenadas padrão obtêm-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_a \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_b - \varepsilon_c) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3}(2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a)\end{aligned}\quad (24.44)$$

### 24.5.1 – Exemplo 4

Determine as deformações principais e as máximas deformações distorcionais em um dado ponto material a partir das medidas de uma roseta de  $60^\circ$  cujas leituras de seus extensômetros resultaram  $\varepsilon_a = 30 \cdot 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_b = 130 \cdot 10^{-6}$  e  $\varepsilon_c = 200 \cdot 10^{-6}$ .

A partir da leitura dos extensômetros pode-se determinar o estado de deformação de uma roseta de  $60^\circ$  utilizando o conjunto de expressões mostrado na Eq.(24.44).

Assim:

$$\varepsilon_x = 30 \cdot 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(130 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-6}) \Rightarrow \gamma_{xy} = -80,829 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}(2 \cdot 130 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 200 \cdot 10^{-6} - 30 \cdot 10^{-6}) \Rightarrow \varepsilon_y = 210 \cdot 10^{-6}$$

Dessa forma, as deformações principais são calculadas utilizando a Eq.(24.31).

Portanto:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{30 \cdot 10^{-6} + 210 \cdot 10^{-6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30 \cdot 10^{-6} - 210 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-80,829 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = 120 \cdot 10^{-6} \pm 98,658 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 = 218,658 \cdot 10^{-6} \qquad \varepsilon_2 = 21,342 \cdot 10^{-6}$$

Os valores extremos das deformações distorcionais são obtidos com a avaliação da Eq.(24.33). Dessa forma:

$$\frac{\gamma_{xy}^{MAX}}{2} = \sqrt{\left(\frac{30 \cdot 10^{-6} - 210 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-80,829 \cdot 10^{-6}}{2}\right)^2} \Rightarrow \gamma_{xy}^{MAX} = \pm 197,315 \cdot 10^{-6}$$

### 24.6 – Rotação de Deformações para o Caso Tridimensional

Em problemas tridimensionais gerais têm-se a presença de três deformações normais e três deformações distorcionais não nulas no tensor de deformações. Se essas componentes de deformação forem expressas em relação a um sistema de referência particular, suas componentes em relação a outro sistema de referência poderão ser obtidas se os cossenos dos ângulos formados pelos eixos de referência atual e anterior

forem conhecidos. Assim, aplicando os conceitos da álgebra tensorial, pode-se escrever que:

$$[\varepsilon'] = [R][\varepsilon][R]^T \quad (24.45)$$

sendo  $[R]$  dado por  $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) & \cos(x',z) \\ \cos(y',x) & \cos(y',y) & \cos(y',z) \\ \cos(z',x) & \cos(z',y) & \cos(z',z) \end{bmatrix}$ . O tensor  $[\varepsilon]$  é

o mesmo definido na Eq.(24.5).

### 24.6.1 – Exemplo 5

Um estado de deformação é definido pelo seguinte tensor

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}. \text{ Sabendo que um sistema de}$$

referência auxiliar  $x'y'z'$  é definido, no qual  $z'$  coincide com  $z$  e  $x'$  está rotacionado de  $50^\circ$  no sentido horário em relação ao eixo  $x$ , determine as componentes do tensor de deformações em relação a este novo sistema de referência.

De acordo com a rotação de eixos existente entre os sistemas de referência descrita anteriormente, pode-se escrever a matriz de rotação da seguinte maneira:

$$[R] \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(50) & \cos(140) & \cos(90) \\ \cos(40) & \cos(50) & \cos(90) \\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6428 & -0,766 & 0 \\ 0,766 & 0,6428 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, aplicando a Eq.(24.45) obtém-se:

$$\begin{aligned} [\varepsilon'] &= [R][\varepsilon][R]^T \Rightarrow \\ [\sigma'] &= \begin{bmatrix} 0,6428 & -0,766 & 0 \\ 0,766 & 0,6428 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 0,6428 & 0,766 & 0 \\ -0,766 & 0,6428 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\varepsilon'] &= \begin{bmatrix} -1,358 & 7,531 & -1,409 \\ 7,531 & 5,358 & -0,123 \\ -1,409 & -0,123 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

### 24.7 – Deformações Principais para o Caso Tridimensional

Comportamento análogo ao das tensões pode ser observado também nas deformações. Isto é, existem direções particulares para a descrição das intensidades das deformações onde as deformações distorcionais são nulas, ocorrendo somente deformações normais não nulas no corpo. Essas direções são denominadas principais e as deformações normais nessas direções são conhecidas como deformações principais.

Para se determinar as deformações principais deve-se, como efetuado na Eq. (23.41), considerar que:

$$\begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \lambda_\varepsilon) & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & (\varepsilon_y - \lambda_\varepsilon) & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & (\varepsilon_z - \lambda_\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24.46)$$

Para que a solução trivial não seja observada, o determinante da matriz anteriormente apresentada deve ser nulo. O cálculo do determinante resulta, portanto, a seguinte equação cúbica:

$$\lambda_\varepsilon^3 - I_1 \lambda_\varepsilon^2 + I_2 \lambda_\varepsilon - I_3 = 0 \quad (24.47)$$

As raízes do polinômio da Eq. (24.47) fornecem as deformações principais, onde os invariantes do estado de deformação são definidos como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ I_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2 \\ I_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2 \end{aligned} \quad (24.48)$$

#### 24.7.1 – Exemplo 6

Determine as deformações principais do seguinte estado de deformação:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Para a determinação das deformações principais neste caso, devem ser, inicialmente, determinados os valores dos invariantes de deformação. Portanto:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \Rightarrow I_1 = (10 - 6 + 4) \cdot 10^{-6} \Rightarrow I_1 = 8 \cdot 10^{-6}$$

$$I_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2$$

$$I_2 = 10 \cdot 10^{-6} \cdot (-6) \cdot 10^{-6} + (-6) \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} - (2 \cdot 10^{-6})^2 - (1 \cdot 10^{-6})^2 - (-1 \cdot 10^{-6})^2 \Rightarrow I_2 = -5 \cdot 10^{-11}$$

$$I_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2$$

$$I_3 = 10 \cdot 10^{-6} \cdot (-6 \cdot 10^{-6}) \cdot 4 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot (-1 \cdot 10^{-6}) \cdot 1 \cdot 10^{-6} - 10 \cdot 10^{-6} \cdot (1 \cdot 10^{-6})^2 - (-6 \cdot 10^{-6}) \cdot (-1 \cdot 10^{-6})^2 - 4 \cdot 10^{-6} \cdot (2 \cdot 10^{-6})^2$$

$$I_3 = -2,64 \cdot 10^{-16}$$

Assim, o polinômio cúbico a ser considerado é o seguinte:

$$\lambda^3 - 8 \cdot 10^{-6} \lambda^2 - 5 \cdot 10^{-11} \lambda + 2,64 \cdot 10^{-16} = 0$$

cujas raízes e conseqüentemente deformações principais são iguais a  $\varepsilon_1 = 1,037 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 4 \cdot 10^{-6}$  e  $\varepsilon_3 = -6,367 \cdot 10^{-6}$ .

### 24.8 – Deformação Distorcional Máxima Absoluta

De forma análoga ao apresentado no estudo das tensões, pode-se, a partir da definição das deformações principais, determinar a intensidade da deformação distorcional máxima absoluta no ponto material em análise.

Considerando um estado de deformação tridimensional, têm-se definidas três deformações normais e três deformações distorcionais que darão origem, como anteriormente apresentado, a três deformações principais  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , que por simplicidade de notação serão denominadas neste item de  $\varepsilon_{MAX}$ ,  $\varepsilon_{INT}$  e  $\varepsilon_{MIN}$ , respectivamente. Se as deformações principais forem ilustradas segundo seus planos de atuação, obtém-se a representação mostrada na Fig. (24.13), segundo os planos  $y'z'$ ,  $x'z'$  e  $x'y'$ .

Com base na representação ilustrada na Fig. (24.13), pode-se utilizar o círculo de Mohr para a determinação da deformação distorcional máxima no plano para cada um

dos casos. Conforme previamente apresentado neste capítulo, o diâmetro do círculo de Mohr é dado pela diferença das deformações principais atuantes no plano em análise. Além disso, a deformação distorcional máxima no plano é dada pelo diâmetro do círculo de Mohr.

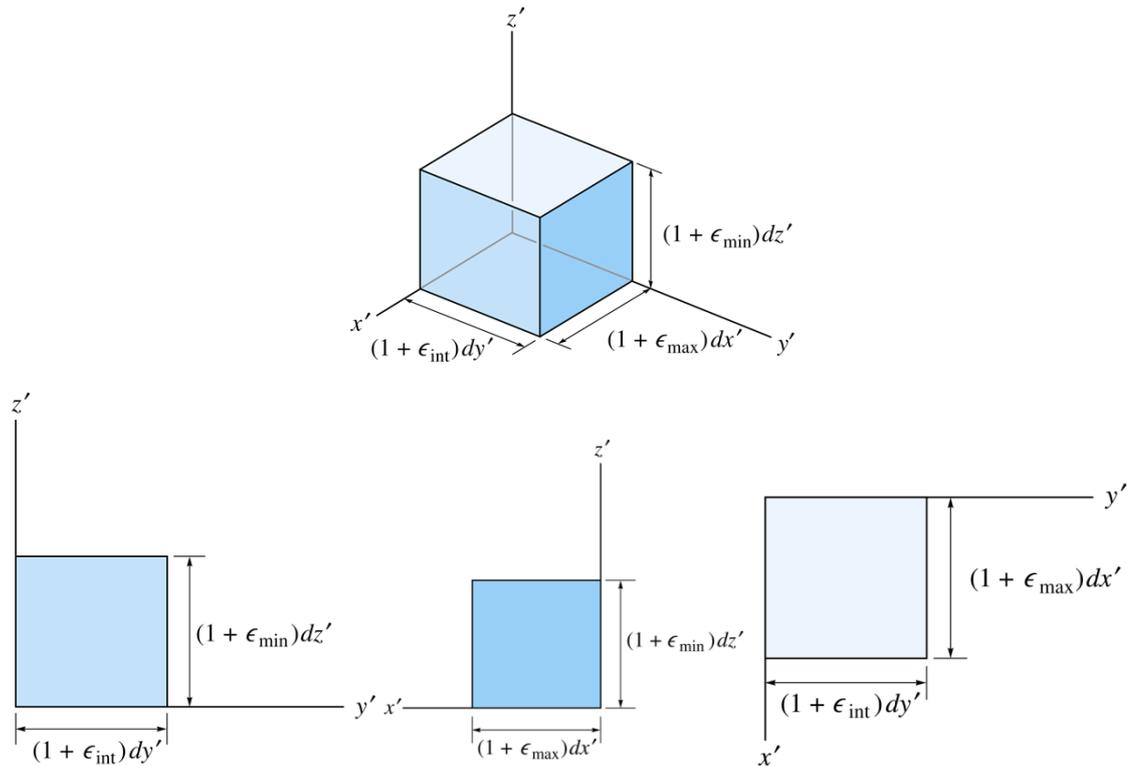


Figura 24.13 Representação das deformações principais em seus respectivos planos.

Considerando as três representações das deformações consideradas na Fig. (24.13), podem ser construídos os círculos de Mohr apresentados na Fig. (24.14). Comparando os três círculos de Mohr da Fig. (24.14), constata-se que a deformação distorcional máxima absoluta é definida pelo círculo de Mohr que possui o maior raio. Assim, pode-se definir que a deformação distorcional máxima absoluta é igual a:

$$\frac{\gamma_{MAX}^{ABS}}{2} = \frac{\epsilon_{MAX} - \epsilon_{MIN}}{2} \Rightarrow \gamma_{MAX}^{ABS} = \epsilon_1 - \epsilon_3 \quad (24.49)$$

No plano onde a deformação distorcional é máxima, a deformação normal é dada por:

$$\epsilon_{MED} = \frac{\epsilon_{MAX} + \epsilon_{MIN}}{2} \Rightarrow \epsilon_{MED} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} \quad (24.50)$$

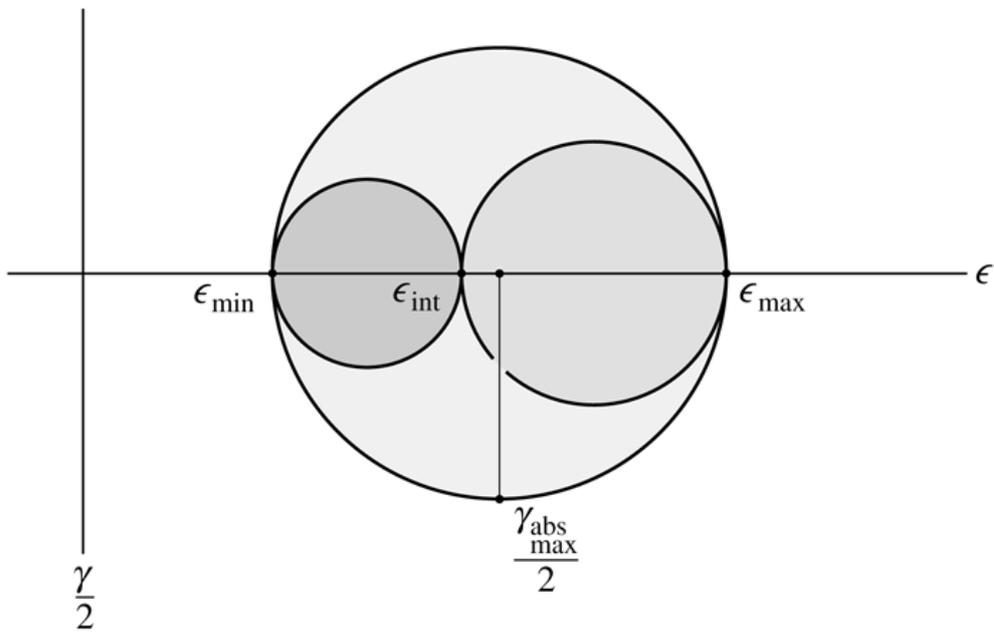


Figura 24.14 Círculo de Mohr para os casos considerados.

## 25. – Lei de Hooke Generalizada

---

### 25.1 – Tensor Constitutivo

Em elasticidade linear existe uma relação única entre as componentes de tensão e as componentes de deformação presentes em um dado ponto material. Durante o capítulo 13, foi apresentada uma lei para o relacionamento dessas grandezas, a qual foi denominada lei de Hooke. Naquela oportunidade, apenas aplicações envolvendo problemas unidimensionais foram apresentadas. Neste capítulo, porém, será discutida a aplicação da lei de Hooke a problemas em que o ponto em análise esteja submetido a estados planos e triaxiais de tensão e deformação. Nessa situação, a lei de Hooke passa a ser denominada *Lei de Hooke Generalizada*. A lei de Hooke generalizada pode ser expressa por meio da Eq.(25.1):

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (25.1)$$

O tensor constitutivo  $[D]$  é formado por elementos que são naturalmente constantes, os quais dependem do material em consideração e de seu grau de anisotropia. Como  $[D]$  possui ordem igual a 6x6, tem-se, a princípio, 36 constantes desconhecidas.

No entanto, é possível reduzir o número de constantes desconhecidas de 36 para 21. Para tal fim, deve-se utilizar o Teorema de Maxwell, o qual estabelece condições de conservação de energia que são observadas em corpos em equilíbrio (este teorema será

apresentado no capítulo 28). Por meio desse teorema verifica-se que o trabalho de  $\sigma_x$  sobre  $\varepsilon_x$  causado por  $\sigma_y$  é igual ao trabalho de  $\sigma_y$  sobre  $\varepsilon_y$  causado por  $\sigma_x$ , por exemplo. Quando essa hipótese é assumida,  $[D]$  torna-se simétrico com 21 coeficientes desconhecidos.

Quando os 21 coeficientes restantes são independentes, diz-se que o material apresenta o maior índice de anisotropia possível. Porém, o material pode apresentar simetria segundo três eixos ortogonais. Nessa situação, tem-se os conhecidos materiais ortótropos, cujo número de constantes elásticas independentes é igual a 9. Para esses tipos de material  $[D]$  assume a seguinte configuração:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (25.2)$$

sendo:  $D_{12} = D_{21}$ ,  $D_{13} = D_{31}$ ,  $D_{23} = D_{32}$ .

Deve-se enfatizar que, nesses materiais, as tensões de cisalhamento atuantes segundo um dos planos de simetria não promovem distorções em outros planos. Assim,  $\tau_{xy}$  gera apenas  $\gamma_{xy}$ . Esta tensão,  $\tau_{xy}$ , não gera  $\gamma_{xz}$  nem  $\gamma_{yz}$ .

Finalmente, deve-se ressaltar a relação constitutiva para os materiais isótropos. Nesses materiais, o comportamento mecânico (ou dependência entre  $[\sigma]$  e  $[\varepsilon]$ ) é o mesmo em relação a todas as direções. Nesse caso, o tensor constitutivo possui a mesma forma que apresentado na Eq.(25.2). Porém os componentes deste tensor podem ser escritos conhecendo-se apenas duas constantes.

### 25.2 – Relação Constitutiva para Materiais Isótropos

A relação constitutiva para materiais isótropos (materiais que possuem propriedades mecânicas idênticas ao longo de todas as direções do espaço), a qual efetua a ligação entre as tensões e as deformações nesses materiais, pode ser facilmente entendida a partir de um elemento infinitesimal submetido a um conjunto de tensões

normais  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\sigma_z$ . O elemento a ser estudado, assim como as deformações associadas, estão apresentados na Fig. (25.1). Com base nas ilustrações apresentadas nesta figura, verifica-se claramente que a aplicação de  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  gera também  $\varepsilon_x$ . Assim, torna-se intuitivo perceber que a lei de Hooke, na qual  $\varepsilon_x$  era produzida apenas por  $\sigma_x$ , deva incluir os efeitos de  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ .

Para ilustrar a dependência da deformação normal, ao longo de cada um dos eixos coordenados, com relação às tensões normais atuantes pode ser efetuada uma análise empregando-se o princípio da superposição dos efeitos. Por meio desse princípio é possível definir as deformações e as tensões observadas na ilustração A com base na soma dos efeitos das tensões e das deformações das ilustrações B, C e D.

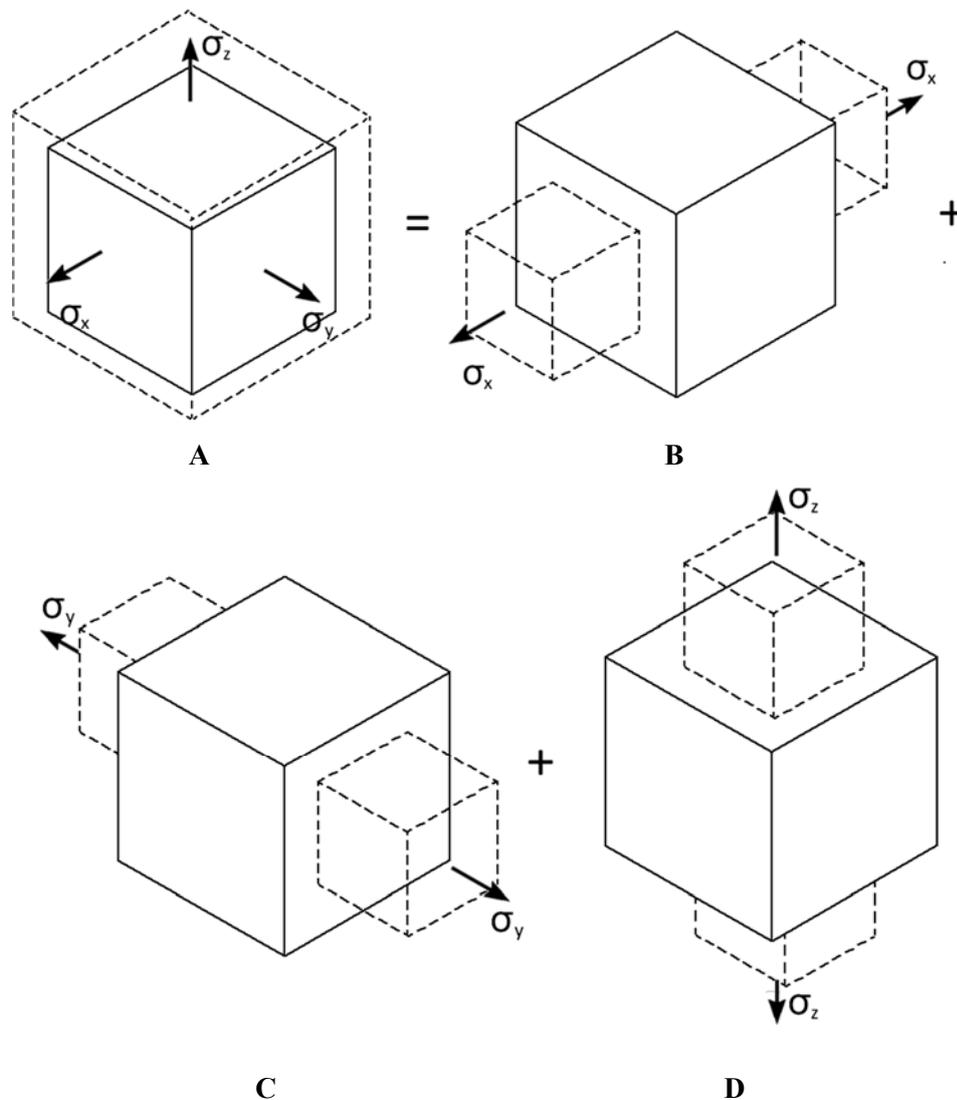


Figura 25.1 Análise de um elemento solicitado triaxialmente.

Conforme é do conhecimento do leitor, e apresentado no capítulo 13, sabe-se que a lei de Hooke, para o caso unidimensional, pode ser escrita como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (25.3)$$

Além disso, o coeficiente de Poisson, o qual foi também apresentado no capítulo 13, é calculado como base na razão entre as deformações normais orientadas nas direções transversal e longitudinal do elemento estrutural. Assim, este coeficiente pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{longitudinal}} \quad (25.4)$$

Portanto, com base nas Eq.(25.3) e Eq.(25.4), pode-se determinar a deformação normal orientada ao longo do eixo  $x$ ,  $\varepsilon_x$ , produzida pelas tensões normais  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ . Assumindo-se que o material que compõe o elemento em análise possua módulo de elasticidade longitudinal igual a  $E$  e coeficiente de Poisson igual a  $\nu$  tem-se:

$$\begin{aligned} de B &\Rightarrow \varepsilon_x^B = \frac{\sigma_x}{E} \\ de C &\Rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_x^C}{\varepsilon_y^C} \Rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_x^C}{\frac{\sigma_y}{E}} \Rightarrow \varepsilon_x^C = -\frac{\sigma_y}{E}\nu \\ de D &\Rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_x^D}{\varepsilon_z^D} \Rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_x^D}{\frac{\sigma_z}{E}} \Rightarrow \varepsilon_x^D = -\frac{\sigma_z}{E}\nu \end{aligned} \quad (25.5)$$

Consequentemente, a deformação normal  $\varepsilon_x$  será calculada superpondo-se as deformações normais calculadas nos três cenários mostrados na Eq.(25.5). Assim:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^B + \varepsilon_x^C + \varepsilon_x^D \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{E}\nu - \frac{\sigma_z}{E}\nu \Rightarrow \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \end{aligned} \quad (25.6)$$

Por indução, pode-se também definir que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (25.7)$$

Assumindo que as tensões de cisalhamento atuantes em um plano não provoquem distorções em outros planos ortogonais, pode-se escrever que:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (25.8)$$

Conforme apresentado nas Eq.(25.6), Eq.(25.7) e Eq.(25.8), constata-se que as deformações estão relacionadas às tensões por meio dos coeficientes  $E$ ,  $\nu$  e  $G$ . Porém, o módulo de elasticidade transversal,  $G$ , pode ser expresso em função do módulo de elasticidade longitudinal e do coeficiente de Poisson,  $E$  e  $\nu$ . Para demonstrar essa relação deve-se considerar o estado plano de tensões ilustrado na Fig.(25.2), o qual é composto por um estado de cisalhamento puro.

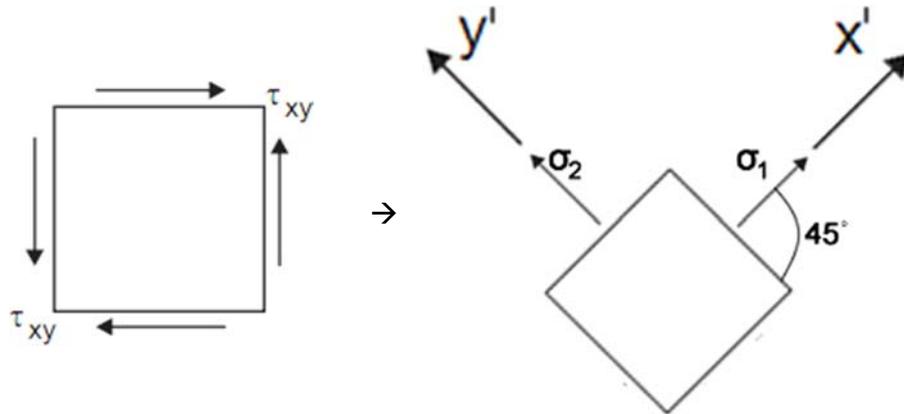


Figura 25.2 Estado de cisalhamento puro.

A partir do estado de cisalhamento puro mostrado na Fig.(25.2) é possível obter as tensões principais rotacionando o elemento considerado de um ângulo igual a  $45^\circ$ , conforme discutido no capítulo 23. Nessa situação, as tensões principais serão iguais a  $\sigma_1 = \tau_{xy}$  e  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$  (essa verificação fica como exercício para o leitor, o qual pode aplicar as equações apresentadas no capítulo 23). Quando  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  estão atuando, no elemento rotacionado de  $45^\circ$ , apenas tensões normais serão observadas. Conseqüentemente, a deformação normal ao longo do eixo  $x'$  será  $\varepsilon_1$  e a deformação normal ao longo do eixo  $y'$  será  $\varepsilon_2$ . Levando esse resultado até as Eq.(25.6) e Eq.(25.7) obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu \sigma_2] \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\tau_{xy} - \nu (-\tau_{xy})] \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\tau_{xy}}{E} [1 + \nu] \\ \varepsilon_y = \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu \sigma_1] \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [-\tau_{xy} - \nu \tau_{xy}] \Rightarrow \varepsilon_2 = -\frac{\tau_{xy}}{E} [1 + \nu] \end{aligned} \quad (25.9)$$

Utilizando os conceitos do círculo de Mohr, sabe-se que o raio deste círculo corresponde à metade da deformação distorcional máxima no plano. Como o diâmetro deste círculo é dado pela subtração de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  tem-se:

$$\frac{\gamma_{MAX}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \quad (25.10)$$

Substituindo, na Eq.(25.10), os termos mostrados na Eq.(25.9) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{MAX}}{2} &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Rightarrow \\ \frac{\gamma_{xy}^{MAX}}{2} &= \frac{\frac{\tau_{xy}}{E}[1+\nu] - \left(-\frac{\tau_{xy}}{E}[1+\nu]\right)}{2} \Rightarrow \\ \gamma_{xy}^{MAX} &= \frac{2\tau_{xy}}{E}[1+\nu] \end{aligned} \quad (25.11)$$

Sabendo da lei de Hooke que:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (25.12)$$

Concluí-se que:

$$\tau_{xy} = G \frac{2\tau_{xy}}{E}[1+\nu] \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (25.13)$$

Portanto, o tensor constitutivo  $[D]$  para materiais isótropos pode ser escrito utilizando apenas  $E$  e  $\nu$ . Assim, a lei de Hooke generalizada para estes materiais assume a seguinte configuração:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (25.14)$$

De forma explícita, pode-se escrever a Eq.(25.14) como:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right] \\
\sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{25.15}$$

A Eq.(25.14) pode ser também escrita em termos de deformações. Para isso, basta que o tensor constitutivo seja invertido. Dessa forma, pode-se também escrever que:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \tag{25.16}$$

Explicitamente, pode-se também escrever a Eq.(25.16) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \\
\gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}
\end{aligned} \tag{25.17}$$

### 25.3 – Módulo de Elasticidade Volumétrico

Pode-se definir um parâmetro que é de grande importância no estudo de teorias mais avançadas, como a teoria da plasticidade, por exemplo. Os estados de tensão e deformação podem ser decompostos segundo componentes denominadas esférica (ou hidrostática) e desviadora (ou anti-esférica). A primeira das duas componentes está relacionada com as mudanças volumétricas do corpo, enquanto a segunda com as mudanças em sua forma (distorções).

A variação do volume por unidade de volume é chamada de *deformação volumétrica* ou dilatação, podendo ser definida como:

$$e = \frac{\partial V}{\partial V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (25.18)$$

Utilizando os termos da lei de Hooke generalizada apresentados anteriormente, pode-se reescrever a Eq.(25.18) em função das tensões da seguinte forma:

$$e = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (25.19)$$

Admitindo-se que um estado hidrostático de tensões esteja atuando, ou seja,  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$  e  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , a Eq.(25.19) pode ser assim reescrita:

$$\frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{e} = \frac{E}{(1-2\nu)} \Rightarrow \frac{\bar{\sigma}}{e} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (25.20)$$

Como a expressão obtida na Eq.(25.20) assemelha-se à lei de Hooke unidimensional, o termo constante do segundo membro é conhecido como *módulo de Bulk*, ou *Módulo de Elasticidade Volumétrico*, já que relaciona uma tensão hidrostática a uma deformação volumétrica.

Por meio da Eq.(25.20) pode-se analisar o que ocorre em um corpo perfeitamente rígido. Nesse corpo, nenhuma deformação é observada, conseqüentemente a deformação volumétrica é nula. Assim, isso conduz a um valor infinito para o módulo de elasticidade volumétrico. Por outro lado, pode-se facilmente verificar, pela Eq.(25.20), que o valor máximo possível para o coeficiente de Poisson é 0,50. Deve-se ainda acrescentar que durante a condição de escoamento não é observada qualquer variação significativa no volume do material, logo  $\nu = 0,5$  no escoamento plástico.

### 25.4 –Aplicação da Lei de Hooke Generalizada à Problemas Planos

Para encerrar os assuntos discutidos neste capítulo, será agora apresentada a particularização da lei de Hooke generalizada a problemas planos. Sabe-se que problemas tridimensionais elásticos podem muitas vezes ser simplificados, dependendo da geometria do corpo em análise e das condições de contorno aplicadas, sem perda significativa de representatividade em problemas planos. A transformação de problemas tridimensionais em problemas bidimensionais dá origem aos problemas planos, os quais podem ser divididos em plano de tensão e plano de deformação.

Um problema é dito ser plano de deformação quando os vetores de deslocamento dos pontos pertencentes ao corpo em questão são paralelos entre si. Portanto, todos os pontos originalmente pertencentes a um plano, antes de o corpo ser deformado, permanecem nesse mesmo plano após a atuação das ações externas. Nesta classe, enquadram-se problemas cuja geometria apresenta uma de suas dimensões muito superior às demais, como em barragens, túneis e estruturas de contenção. Assumindo que o plano formado pelas duas menores dimensões do corpo seja o  $xy$ , apenas as deformações  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  serão não nulas. Apesar das deformações orientadas ao longo do eixo  $z$  serem nulas, verifica-se, por meio da lei de Hooke generalizada, que a tensão normal nesta direção não o será. Nos problemas planos de deformação, a tensão normal orientada na direção perpendicular ao plano onde atuam as deformações não nulas é determinada com base nas tensões normais atuantes neste plano. Para isso, considere a expressão para cálculo de  $\varepsilon_z$ , dada na Eq.(25.17).

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (25.21)$$

Dessa forma, nos problemas planos de deformação, os tensores de tensão e deformação são compostos por:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (25.22)$$

Já os problemas planos de tensão são caracterizados pela distribuição essencialmente plana das tensões no domínio do corpo em análise. Corpos cuja geometria apresente uma dimensão muito menor que as outras duas, como chapas e

paredes finas, e, além disso, o carregamento atue de forma paralela ao plano da estrutura, enquadram-se neste caso.

Nos problemas planos de tensão, apenas as componentes de tensão atuantes no plano da estrutura são não nulas. Assumindo que o plano formado pelas duas maiores dimensões do corpo seja o  $xy$ , as únicas componentes de tensão não nulas serão  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . No entanto, embora a tensão normal  $\sigma_z$  seja nula nesta classe de problema, constata-se que a deformação normal orientada na direção  $z$  será diferente de zero. Esse resultado pode ser obtido utilizando-se as expressões da lei de Hooke generalizada apresentadas na Eq.(25.17). Nos problemas de estado plano de tensão, a deformação normal orientada ao longo da direção perpendicular ao plano da estrutura pode ser obtida em função das tensões normais atuantes no plano da estrutura. Assim:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

*sabendo que  $\sigma_z = 0$*

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (25.23)$$

Deve-se salientar que nos estados planos, todas as relações já mostradas anteriormente permanecem válidas. Porém, essas são significativamente simplificadas pelo fato de algumas tensões e deformações serem nulas.

#### 25.4.1 – Exemplo 1

Uma dada estrutura está submetida a um estado plano de tensão. Nessa estrutura, um conjunto de extensômetros (roseta) foi posicionado com inclinação de  $45^\circ$ , conforme mostrado na Fig.(25.3). Sabendo que o material que compõe a estrutura tem as seguintes propriedades mecânicas  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,30$  e que as leituras dos extensômetros resultaram  $\varepsilon_a = 60 \cdot 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_b = 135 \cdot 10^{-6}$  e  $\varepsilon_c = 264 \cdot 10^{-6}$  determine os tensores *completos* de deformação e tensão do referido ponto material.

Para que este problema seja resolvido, deve-se, primeiramente, obter as componentes de deformação atuantes no plano da estrutura. Para isso deve-se utilizar as Eq.(24.42) apresentadas no capítulo 24. Assim:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_a & \Rightarrow \varepsilon_x &= 60 \cdot 10^{-6} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a - \varepsilon_c) & \Rightarrow \gamma_{xy} &= 2 \cdot 135 \cdot 10^{-6} - (60 \cdot 10^{-6} - 264 \cdot 10^{-6}) \Rightarrow \\ \gamma_{xy} &= 474 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_c & \Rightarrow \varepsilon_y &= 264 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

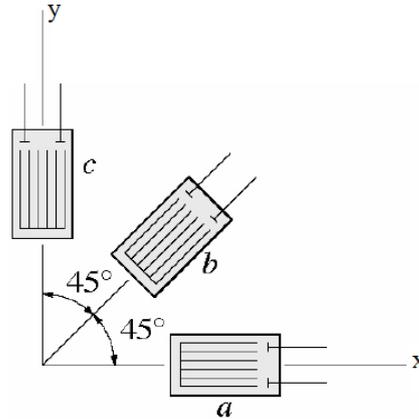


Figura 25.3 Roseta.

Como o problema em questão é plano de tensão, as componentes de tensão podem ser facilmente determinadas com base nas deformações atuantes no plano da estrutura. Assim, utilizando as Eq.(25.17) obtém-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \Rightarrow 60 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{200} (\sigma_x - 0,30\sigma_y) \Rightarrow \\ 0,012 &= \sigma_x - 0,30\sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \Rightarrow 264 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{200} (\sigma_y - 0,30\sigma_x) \Rightarrow \\ 0,0528 &= \sigma_y - 0,30\sigma_x\end{aligned}$$

Organizando as duas equações anteriores em um sistema matricial e resolvendo-o tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,3 \\ -0,3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,012 \\ 0,0528 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,030593 \\ 0,061978 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

A tensão de cisalhamento atuante é calculada facilmente, como mostrado na Eq.(25.17), ou seja:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \Rightarrow 474 \cdot 10^{-6} = \frac{2(1+0,30)}{200} \tau_{xy} \Rightarrow \tau_{xy} = 0,0364615 \text{ GPa}$$

Como o problema é plano de tensão, o tensor de tensões fica assim definido:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 0,030593 & 0,0364615 & 0 \\ 0,0364615 & 0,061978 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} GPa$$

A deformação orientada ao longo do eixo  $z$  é dada em função das deformações atuantes no plano  $xy$ . Utilizando os dados apresentados na Eq.(25.23) tem-se:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{0,30}{200}(0,030593 + 0,061978) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_z = -138,856 \cdot 10^{-6}$$

Portanto, o tensor das deformações pode ser escrito como:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \Rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 60 & 474 & 0 \\ 474 & 264 & 0 \\ 0 & 0 & -138,856 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

#### 25.4.2 – Exemplo 2

A Fig. (25.4) representa um estado de tensão principal formado pelas seguintes tensões  $\sigma_x = 70MPa$ ,  $\sigma_y = -105MPa$  e  $\sigma_z = -182MPa$ . Se o material possui  $E = 5,60 GPa$  e  $\nu = 0,23$ , determine as deformações principais.

Para que esse problema seja resolvido, deve-se, inicialmente, escrever o estado de tensão atuante no ponto em análise. Com base no apresentado na Fig. (25.4) obtém-se:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & -105 & 0 \\ 0 & 0 & -182 \end{bmatrix} MPa$$

Empregando as expressões apresentadas na Eq.(25.17), pode-se escrever que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{5600} [70 - 0,23(-105 - 182)] \Rightarrow \varepsilon_x = 0,0242875$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{5600} [-105 - 0,23(70 - 182)] \Rightarrow \varepsilon_y = -0,01415$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{5600} [-182 - 0,23(70 - 105)] \Rightarrow \varepsilon_z = -0,0310625$$

Com base no calculado anteriormente pode-se escrever que:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \quad ; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y \quad ; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z$$

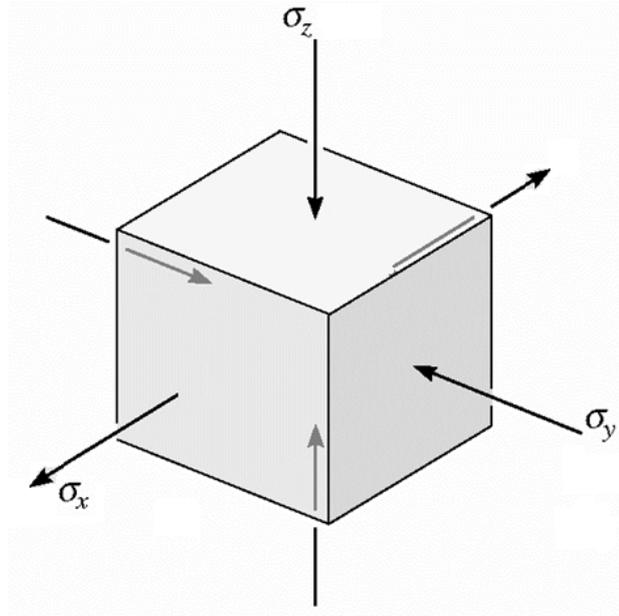


Figura 25.4 Estado de tensão atuante.

Deve-se enfatizar que as direções de atuação das deformações principais são as mesmas das tensões principais.

## **26. – Critérios de Falha**

---

---

### 26.1 – Introdução

Quando, em um dado projeto de engenharia, necessita-se especificar um material para a composição de uma estrutura ou sistema estrutural, deve-se levar em consideração a intensidade das tensões atuantes. Como cada material apresenta uma capacidade própria/particular para resistir a um dado estado de tensão, torna-se necessária a imposição de um limite superior ao estado de tensão no material de forma a definir, configurar e prevenir a falha do material.

Os materiais de uso corrente em engenharia podem ser, normalmente, classificados em dois grandes grupos segundo sua capacidade de absorção de deformação. O primeiro deles, denominado frágil, abrange os materiais que falham sob níveis de deformação consideravelmente pequenos. O outro grupo, que envolve materiais cujas deformações no instante da falha são significativamente maiores que nos materiais frágeis, é denominado dúctil. Existem alguns materiais, como o concreto, que apresentam características comuns dos dois grupos no instante da falha. Costuma-se referenciar materiais como o concreto e outros materiais cimentícios e cerâmicos, como quase frágeis.

Quando materiais dúcteis são considerados, a falha é usualmente caracterizada pelo início do escoamento do material, enquanto nos materiais frágeis, a falha é caracterizada pela fratura ou ruptura frágil do material (no concreto, esses defeitos são observados conjuntamente: ruptura frágil à tração e ruptura aproximadamente dúctil à compressão).

Esses tipos de falhas são prontamente detectados caso o elemento estrutural esteja sujeito a um estado uniaxial de tensões, como em uma barra tracionada ou comprimida. Porém, a avaliação sobre a falha do material torna-se mais complexa

quando estão envolvidos estados bi e triaxiais de tensões. Para ilustrar a complexidade dos problemas bi e tridimensionais, devem ser considerados os elementos estruturais apresentados na Fig. (26.1), os quais estão submetidos a diferentes sollicitações. A questão que pode ser colocada é a seguinte: qual elemento irá falhar primeiro?

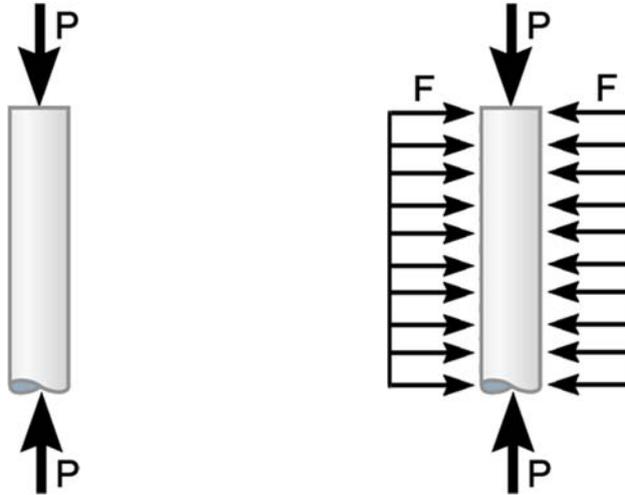


Figura 26.1 Elementos submetidos a estados unidimensionais e bidimensionais de tensão.

Analisando as ilustrações apresentadas na Fig. (26.1), observa-se que na estrutura onde atua a força confinante  $F$  a ruptura irá ocorrer sob carregamentos  $P$  mais elevados se comparado ao da outra estrutura ilustrada. Esse aumento na capacidade de resistência da estrutura deve-se à presença do confinamento gerado pela força  $F$ . Por esse motivo, em esportes como o levantamento de peso o atleta utiliza um cinto para não prejudicar sua coluna. Usando a mesma ideia, reforços estruturais podem ser concebidos. Dessa forma, pilares e vigas podem ser revestidos (“encamisados”) com fibra de carbono objetivando gerar o confinamento.

Deve-se salientar também que heterogeneidades e falhas iniciais podem fazer com que o material comporte-se de forma frágil ou dúctil, segundo o estado de tensão atuante. Assim, a capacidade resistente dos materiais é o resultado de uma combinação de efeitos, o que torna árdua a tarefa de formular matematicamente a previsão dos estados limites em situações mais complexas de sollicitação. No entanto, identificar estados de sollicitação que possam exceder a capacidade de resistência dos materiais é uma tarefa de grande importância para a realização de projetos seguros. Portanto, é preciso buscar bases ou critérios que permitam efetuar tal julgamento. Para tal, podem ser utilizados critérios de resistência, ou critérios de ruptura, ou ainda critérios de falha,

para avaliar se o estado de tensão em um ponto ultrapassa ou não a resistência do material.

O objetivo de um critério de resistência é permitir a identificação de situações de ruptura local considerando, inclusive, combinações mais complexas de solicitações (estados duplos e triplos de tensões). Baseando-se em hipóteses plausíveis sobre o fenômeno responsável pela ruptura, um dado critério pode ser expresso matematicamente na forma de uma função que relaciona componentes do tensor de tensões à resistência ou parâmetros de resistência do material. Tal função pode ainda ser escrita em termos das tensões principais, representada numa forma implícita como:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq 0 \quad (26.1)$$

sendo que a função  $f$  determina o limite entre as regiões de falha e segurança. Se a Eq.(26.1) for atendida tem-se o domínio de segurança.

Na sequência deste capítulo serão apresentados alguns critérios de resistência comumente utilizados em aplicações de engenharia. Deve-se destacar que estes critérios serão brevemente apresentados nestas notas. Para maiores detalhes sobre as formulações o leitor pode recorrer a livros que tratam da teoria da plasticidade.

### 26.2 – Critério de Ruptura de Tresca

Esse critério de resistência foi desenvolvido por *Henri Tresca* em 1868, sendo largamente utilizado nos dias atuais para a previsão da falha de pontos materiais pertencentes a materiais dúcteis. Nestes materiais, a falha é frequentemente observada quando a estrutura entra em regime de escoamento. Na fase de escoamento, o estado de tensão atuante supera o limite elástico do material causando assim deformações permanentes na estrutura, as quais não são desejadas.

Durante o escoamento ocorre o deslizamento dos cristais constituintes do material, os quais são ordenados aleatoriamente, ao longo de seus planos de contato. Esse deslizamento é provocado pelas tensões de cisalhamento atuantes no corpo, como indica a Fig. (26.2), e a deformação permanente decorre da acomodação dos cristais em sua nova posição.

Esse fenômeno é facilmente observado em ensaios experimentais de tração uniaxial em barras de aço, onde a falha ocorre em um plano inclinado de 45° com o

plano de atuação de carga, como mostrado na Fig. (26.3). Consequentemente, parece intuitivo que esse critério de ruptura deva relacionar a condição de falha à tensão de cisalhamento resistente do material, uma vez que a falha ocorre nos planos onde as tensões de cisalhamento são máximas.

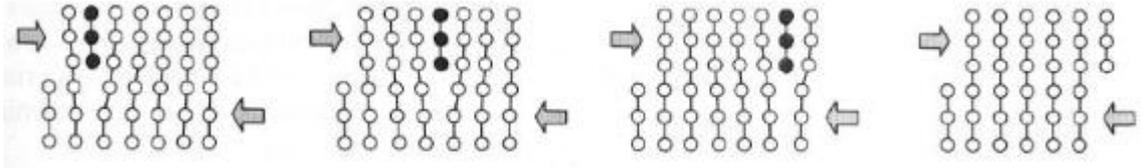


Figura 26.2 Deslizamento dos cristais do material.



Figura 26.3 Planos de falha em materiais dúcteis.

Segundo Tresca, a *teoria da máxima tensão cisalhante* ou *critério de Tresca*, estabelece que o escoamento do material inicia-se quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta atuante no material atinge a tensão de cisalhamento que causa o escoamento, no mesmo material, ao ser submetido apenas a uma tração axial. Dessa forma, esse critério pode ser expresso como:

$$\tau_{MAX}^{ABS} \leq \tau_{RESISTENTE}$$

$$MAX \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} \leq \frac{\sigma_E}{2} \quad (26.2)$$

onde  $\sigma_E$  é a tensão de escoamento do material quando submetido a um ensaio de tração uniaxial. Quando a Eq.(26.2) é atendida observa-se a condição de segurança. Se o problema analisado é do tipo plano de tensão, as expressões apresentadas na Eq.(26.2)

possuem uma representação gráfica. Considerando que o sistema de coordenadas seja definido pelas tensões principais no plano, a Eq.(26.2) assume a representação gráfica mostrada na Fig. (26.4).

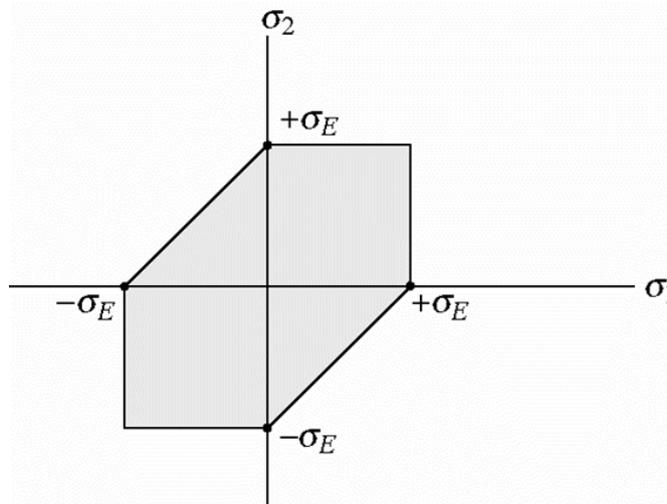


Figura 26.4 Representação gráfica do critério de Tresca para o caso plano de tensão.

Por meio da ilustração apresentada na Fig.(26.4), constata-se que os pontos representativos do estado de tensão atuante que encontram-se dentro do polígono hexagonal estão em condição de segurança. Já os pontos que estão posicionados fora do polígono representam estados de tensão impossíveis de serem observados, já que a falha estrutural ocorrerá antes do ponto sair da superfície de falha.

Se problemas tridimensionais forem considerados, a representação gráfica da Eq.(26.2) assume a forma de uma superfície hexagonal no espaço, caso esta seja representada considerando um sistema de coordenadas definido pelas tensões principais, como indica a Fig. (26.5).

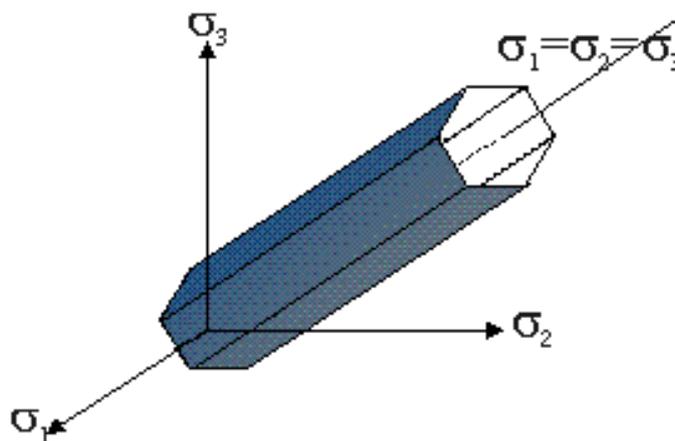


Figura 26.5 Representação gráfica do critério de Tresca para o caso tridimensional

O eixo no qual  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  é conhecido como eixo hidrostático, sendo que o centro de gravidade da seção transversal desta superfície hexagonal localiza-se ao longo deste eixo. Se o ponto representativo do estado de tensão em análise localiza-se de forma interna a superfície mostrada na Fig. (26.5) tem-se condição de segurança. Do contrário observa-se a condição de falha.

### 26.3 – Critério de Ruptura de Von Mises

Esse critério de ruptura, também conhecido na literatura como *teoria da máxima energia de distorção*, foi proposto independentemente por Von Mises e Hencry. Embora existam dois pesquisadores envolvidos em seu desenvolvimento, esse critério carrega apenas o nome do primeiro deles. Esse critério de ruptura, o qual foi concebido com base em evidências experimentais, é largamente utilizado na previsão da falha de materiais dúcteis.

Segundo ensaios experimentais realizados em laboratórios, observou-se que alguns materiais não atingiam o escoamento quando submetidos a estados hidrostáticos de tensão. Nessa condição, as tensões normais atuantes nas faces do elemento são idênticas e dadas por  $\sigma_{MED} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ . Como nesse caso o escoamento não é observado, conclui-se que a energia de deformação produzida pelo estado hidrostático de tensões deve ser desconsiderada para a caracterização da falha.

Consequentemente, segundo as premissas deste critério, o escoamento de um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume do material for igual ou superior à energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando ele atinge o escoamento em um ensaio de tração. Sabe-se que a energia de deformação total é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (26.3)$$

A Eq.(26.3) representa a área sob a curva  $\sigma \times \varepsilon$  para um material de comportamento mecânico elástico linear. Considerando o estado de tensão escrito com base nas tensões principais, a energia de deformação total, Eq.(26.3), pode ser reescrita como:

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 \quad (26.4)$$

Usando as expressões da lei de Hooke generalizada, a Eq.(26.4) assume a seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right] \quad (26.5)$$

Como a Eq.(26.5) representa a energia de deformação total, deve-se subtrair a contribuição referente ao estado hidrostático de tensões, a qual, segundo observações experimentais, não contribui para a falha. Para tal fim, deve-se subtrair  $\sigma_{MED} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  de cada tensão principal atuante no problema. Efetuando este procedimento, obtém-se a energia de distorção por unidade de volume, a qual pode ser escrita como:

$$U_{DISTORÇÃO} = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (26.6)$$

Na condição de falha, a energia de distorção  $u_{DISTORÇÃO}$  dada pela Eq.(26.6) deve ser igual à energia de distorção da falha de um corpo uniaxialmente carregado. Quando o corpo encontra-se uniaxialmente carregado tem-se que  $\sigma_1 = \sigma_E$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Assim, a Eq.(26.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U_{DISTORÇÃO}^{UNIAXIAL} = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_E - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_E)^2 \right] \Rightarrow \quad (26.7)$$

$$U_{DISTORÇÃO}^{UNIAXIAL} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_E^2$$

Considerando a condição de falha, pode-se escrever que:

$$\frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_E^2 \quad (26.8)$$

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sqrt{2}\sigma_E$$

A última equação apresentada na Eq.(26.8) representa a expressão geral do critério de Von Mises. Para problemas planos de tensão, ou seja,  $\sigma_3 = 0$ , a equação do critério de Von Mises pode ser particularizada da seguinte forma:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_E^2 \quad (26.9)$$

Com base nos conhecimentos da geometria analítica, constata-se que a expressão apresentada na Eq.(26.9) representa uma elipse no sistema de coordenadas das tensões

principais, como mostra a Fig.(26.6). O domínio de segurança é representado pelo conjunto de pontos pertencentes ao interior do contorno da elipse. Já os pontos exteriores à elipse representam estados de tensão não possíveis, já que a falha do corpo ocorrerá antes destes estados de tensão serem atingidos.

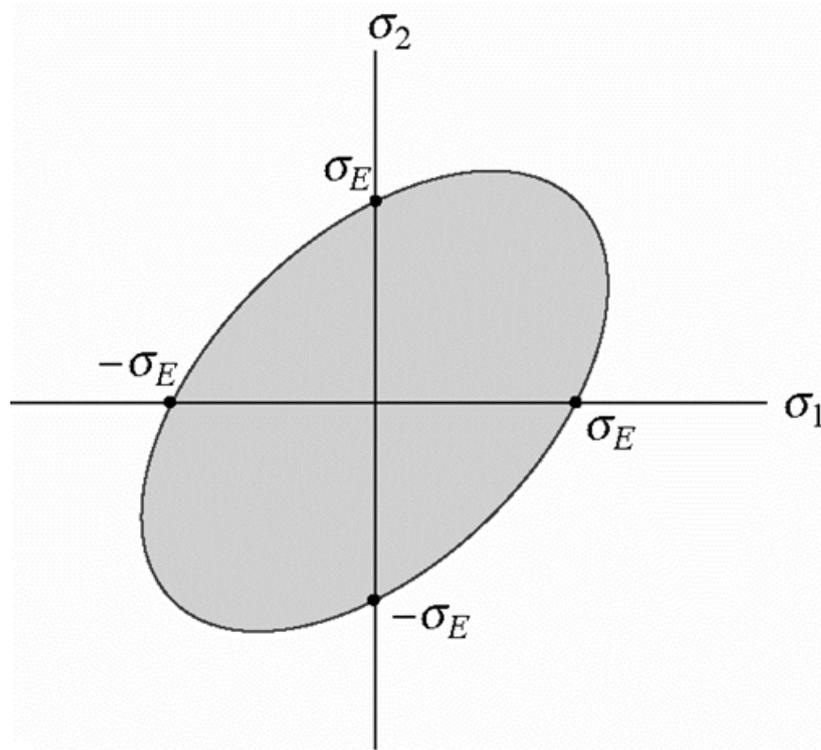


Figura 26.6 Representação gráfica do critério de Von Mises para o caso plano de tensão.

Para problemas tridimensionais, a representação gráfica da Eq.(26.8), conforme os conhecimentos da geometria analítica, resulta um cilindro, se representado no sistema de referência definido pelas tensões principais, cujo centro de gravidade de sua seção transversal está localizado ao longo do eixo hidrostático, como mostra a Fig. (26.7). Os pontos localizados de forma interna ao cilindro indicam estados de tensão em segurança, enquanto que pontos externos ao cilindro indicam estados de tensão que induzem a falha do material. Deve-se salientar que o critério de Von Mises considera a influência da tensão principal intermediária,  $\sigma_2$ , o que não é feito pelo critério de Tresca.



Observa-se, por meio da ilustração apresentada na Fig. (26.8), que os critérios concordam entre si sobre a previsão da falha quando uma das tensões principais no plano é nula. Porém, para os demais pontos existem pequenas diferenças. Em especial, é interessante discutir a diferença na previsão do cenário de falha entre os critérios quando um estado de cisalhamento puro atua sobre o corpo em análise. Nessa condição, constata-se que o critério de Von Mises admite um estado de tensão aproximadamente 15% mais elevado que o previsto pelo critério de Tresca. Resultados experimentais em corpos de prova submetidos à torção pura (situação em que tem-se um estado de cisalhamento puro) indicam que o critério de Von Mises é mais preciso na previsão de falha.

Em análises tridimensionais, a representação conjunta das superfícies de falha dos critérios de Tresca e Von Mises resulta a ilustração apresentada na Fig. (26.9). Verifica-se que a superfície cilíndrica de Von Mises circunscreve a superfície hexagonal de Tresca, sendo que a diferença máxima entre elas ocorre na presença de estados de tensão relacionados ao cisalhamento puro. Além disso, observa-se que as superfícies são coincidentes nos pontos de derivadas não contínuas pertencentes à superfície de Tresca.

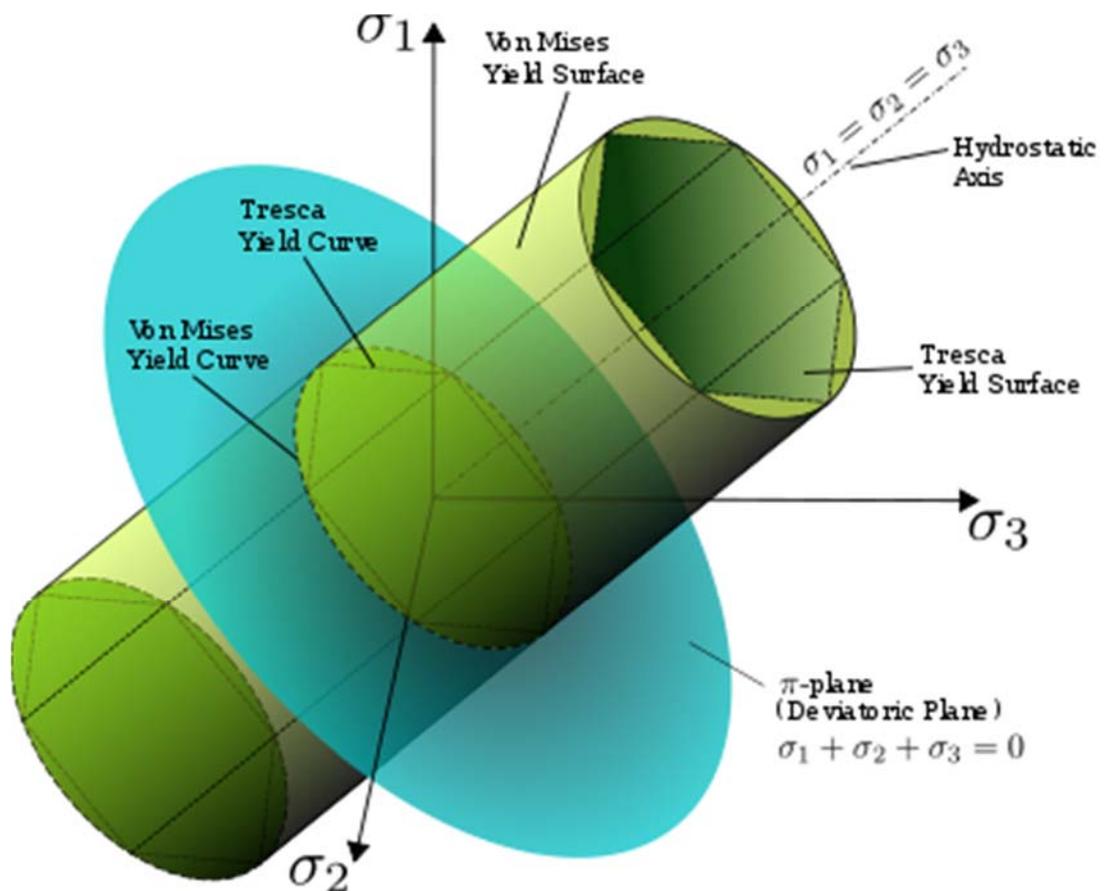


Figura 26.9 Representação gráfica dos critérios de Tresca e Von Mises para o caso tridimensional.

### 26.5 – Critério de Ruptura de Rankine

Este critério de ruptura foi proposto por Rankine, em meados do século XIX, objetivando a previsão da falha de corpos formados por materiais frágeis. Os materiais frágeis são aqueles em que, na iminência da ruptura, observa-se a ausência de deformações plásticas e baixos níveis de deformação. A ruptura desses materiais quase sempre ocorre de forma brusca, ou seja, após um determinado nível de sollicitação, ocorre a fratura do corpo. Materiais como vidros, ferro fundido e fibras são considerados frágeis.

Nos materiais frágeis, a ruptura ocorre quando a máxima tensão principal alcança a resistência última do material. Assim, em materiais frágeis submetidos a um ensaio de tração uniaxial, a falha ocorrerá quando a tração aplicada,  $\sigma_1$ , ultrapassar a tensão de ruptura do material,  $\sigma_r$ . No caso de uma barra sollicitada por uma torção pura, por exemplo, a falha ocorrerá em um plano inclinado de  $45^\circ$  com o eixo da barra. A falha ocorrerá nessa posição uma vez que é nessa inclinação que atuam as tensões principais  $\sigma_1$ , como indica a ilustração apresentada na Fig. (26.10).

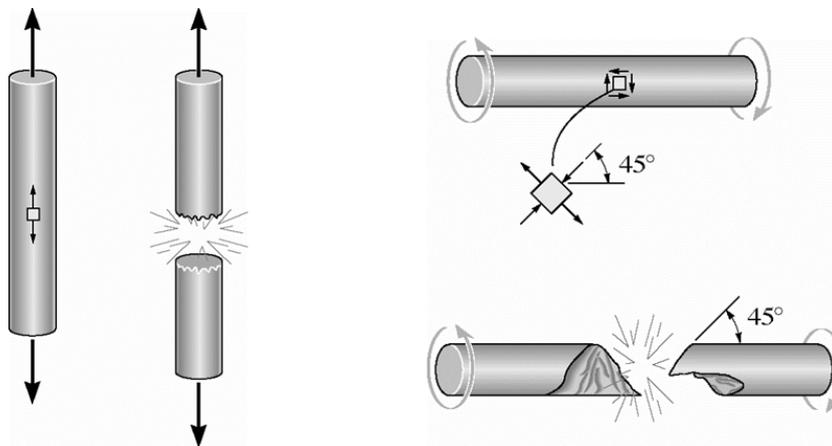


Figura 26.10 Ruptura de materiais frágeis a dois diferentes tipos de sollicitação.

Esse critério, também conhecido como *teoria da máxima tensão normal*, estabelece que um material frágil falhará quando uma das tensões principais atuantes no material atingir um valor limite igual à tensão normal última que o material resiste quando sujeito a uma tração simples. Matematicamente esse critério pode ser expresso por:

$$\sigma_1 \leq \sigma_r ; \sigma_2 \leq \sigma_r ; \sigma_3 \leq \sigma_r \quad (26.10)$$

Quando problemas planos de tensão são considerados, o critério de Rankine possui uma representação gráfica, a qual está mostrada na Fig.(26.11).

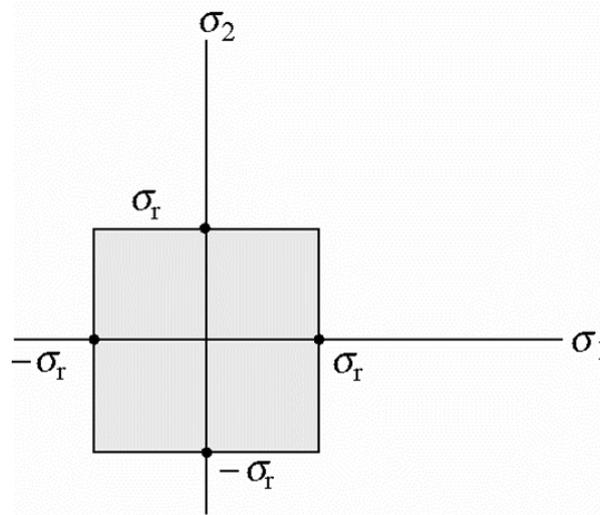


Figura 26.11 Representação gráfica do critério Rankine para o caso plano de tensão.

Os pontos representativos do estado de tensão no corpo que se encontram internamente posicionados no quadrado apresentado na Fig. (26.11) estarão em condição de segurança. Do contrário tem-se configurada a falha.

No contexto tridimensional, a representação gráfica do critério de Rankine resulta um cubo, se ilustrado no espaço das tensões principais, com centro no ponto onde as tensões principais são nulas tendo comprimento de aresta igual a  $2\sigma_r$ . A condição de segurança é observada se o ponto representativo do estado de tensão localiza-se internamente a este cubo.

### 26.6 – Critério de Ruptura de Mohr

Este critério de ruptura foi proposto em 1900 para a previsão da falha de materiais frágeis que possuem tensões resistentes últimas diferentes quando solicitados à tração e à compressão. Alguns materiais frágeis rompem diferentemente quando submetidos a estados de tensão trativos e compressivos. Dentre estes materiais destaca-se o concreto, largamente utilizado em aplicações civis.

Para a utilização do critério de ruptura de Mohr, devem ser conhecidas as tensões resistentes do material quando este é submetido a:

- 1) um estado de tração uniaxial,  $(\sigma_r)_t$ .
- 2) um estado de compressão uniaxial,  $(\sigma_r)_c$ .
- 3) um estado de cisalhamento puro,  $\tau_r$ .

Os valores de  $(\sigma_r)_t$ ,  $(\sigma_r)_c$  e  $\tau_r$  podem ser obtidos por meio de ensaios experimentais que representem as condições 1 a 3 apresentadas anteriormente. Em seguida, traçam-se os círculos de Mohr para cada uma das condições de carregamento apresentadas nos itens 1 a 3. A representação dos círculos de Mohr para estas condições pode ser visualizada na Fig. (26.12). Os círculos A, B, C representam estados de tensão na ruptura de 2, 1, 3, respectivamente.

Os três círculos de Mohr apresentados na Fig. (26.12) delimitam uma envoltória de estados de tensão admissível. Essa envoltória é obtida tangenciando-se os círculos de Mohr para as condições 1 a 3. Se essa envoltória for delimitada por uma simples linha reta, este critério recebe o nome de critério de Mohr-Coulomb. Assim, se o estado de tensão atuante no corpo em análise gerar um círculo de Mohr completamente contido no interior da envoltória, o estado de tensão é admissível e, portanto o corpo encontra-se em segurança. Caso contrário, observar-se a falha.

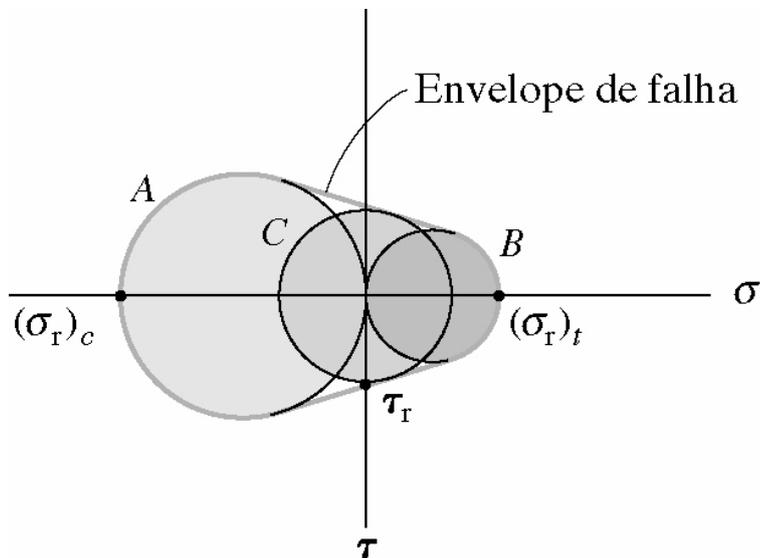


Figura 26.12 Círculos de Mohr para o traçado do critério de ruptura de Mohr.

Para problemas de estado plano de tensão, ou seja  $\sigma_3 = 0$ , o critério de Mohr possui a representação gráfica mostrada na Fig. (26.13). Verifica-se que este critério leva em consideração as diferentes resistências do material quando solicitado à tensões

de tração e de compressão. Para o caso plano de tensão, o critério pode ser expresso matematicamente como:

$$\begin{aligned}
 1) \text{ se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 < 0 & \Rightarrow \sigma_1 > -(\sigma_r)_c \text{ e } \sigma_2 > -(\sigma_r)_c \\
 2) \text{ se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 > 0 & \Rightarrow \sigma_1 < (\sigma_r)_t \text{ e } \sigma_2 < (\sigma_r)_t \\
 3) \text{ se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0 & \Rightarrow \sigma_2 < \frac{(\sigma_r)_t}{(\sigma_r)_c} \sigma_1 + (\sigma_r)_t \\
 4) \text{ se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0 & \Rightarrow \sigma_2 > \frac{(\sigma_r)_c}{(\sigma_r)_t} \sigma_1 - (\sigma_r)_c
 \end{aligned} \tag{26.11}$$

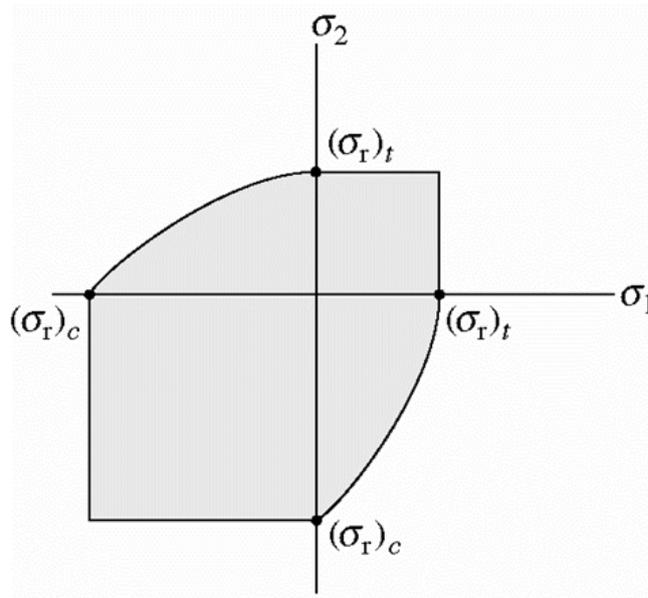


Figura 26.13 Representação gráfica do critério de Mohr para o caso plano de tensão.

De uma maneira geral, o critério de Mohr-Coulomb pode ser escrito na seguinte forma:

$$|\tau| = c - \sigma \tan(\phi) \tag{26.12}$$

onde  $c$  representa a coesão do material e  $\phi$  o ângulo de atrito. Ambos os parâmetros podem ser determinados experimentalmente.

Reescrevendo a Eq.(26.12) utilizando as tensões principais obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos(\phi) = c - \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(\phi) \right] \tan(\phi) & \Rightarrow \\
 \sigma_1 [1 + \sin(\phi)] - \sigma_3 [1 - \sin(\phi)] = 2c \cos(\phi)
 \end{aligned} \tag{26.13}$$

Assim, para o caso geral pode-se escrever o critério de Mohr Coulomb como:

$$\sigma_1 [1 + \sin(\phi)] - \sigma_3 [1 - \sin(\phi)] \leq 2c \cos(\phi) \tag{26.14}$$

Se a Eq.(26.14) for atendida observa-se a condição de segurança. O critério de Mohr-Coulomb, Eq.(26.14), possui uma representação tridimensional interessante. Esta representação é mostrada na Fig. (26.14) sendo a figura resultante um hexágono irregular definido no espaço das tensões principais. Observa-se a condição de segurança se o ponto representativo do estado de tensão em estudo encontrar-se internamente posicionado ao hexágono.

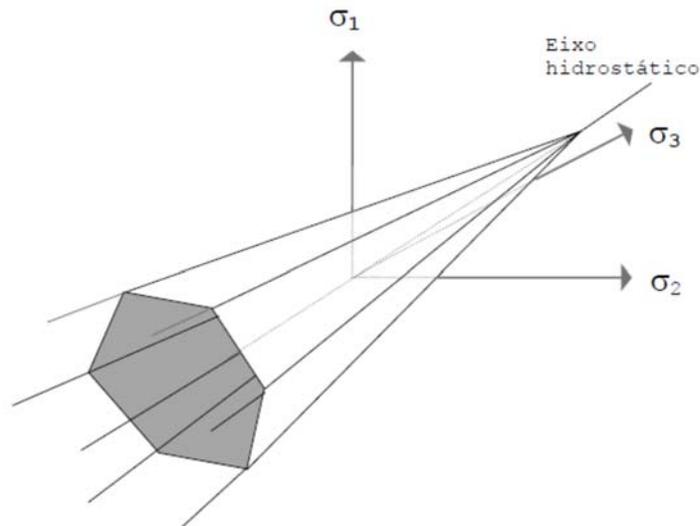


Figura 26.14 Representação gráfica do critério de Mohr para o caso tridimensional.

### 26.7 – Exemplo 1

Em um corpo submetido a um estado plano de tensão atua o estado de tensão mostrado na Fig. (26.15). Verifique se a falha ocorrerá utilizando os critérios de ruptura de Von Mises e Tresca. Sabe-se que  $\sigma_E = 36 \text{ MPa}$ .

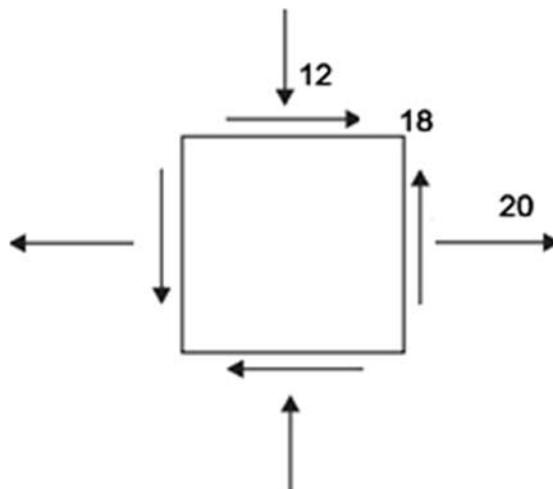


Figura 26.15 Estado de tensão considerado. Tensões dadas em MPa.

Com base na ilustração apresentada na Fig. (26.15) verifica-se que o estado de tensão atuante pode ser assim definido:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 18 \\ 18 & -12 \end{bmatrix} MPa$$

Para este estado de tensão, as tensões principais são dadas por:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{20 - 12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20 + 12}{2}\right)^2 + (18)^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 4 \pm 24,0832$$

$$\sigma_1 = 28,0832 MPa$$

$$\sigma_2 = -20,0832 MPa$$

Por meio da Eq.(26.8) verifica-se o critério de Von Mises. Assim:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sqrt{2}\sigma_E \Rightarrow$$

$$\sqrt{(28,0832 + 20,0832)^2 + (-20,0832 - 0)^2 + (0 - 28,0832)^2} \leq 36\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$59,2622 \leq 50,91$$

Portanto, o estado de tensão atuante não atende ao critério de Von Mises. Dessa forma, a falha ocorrerá de acordo com a previsão do critério de Von Mises.

Quanto ao critério de Tresca, deve-se verificar se a Eq.(26.2) é atendida.

Portanto:

$$MAX \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} \leq \frac{\sigma_E}{2} \Rightarrow$$

$$MAX \left\{ \frac{|28,0832 + 20,0832|}{2}, \frac{|28,0832 - 0|}{2}, \frac{|-20,0832 - 0|}{2} \right\} \leq \frac{36}{2} \Rightarrow$$

$$24,0832 \leq 18$$

Como a Eq.(26.2) não é atendida, constata-se que a falha também ocorrerá com base na previsão realizada por meio do critério de Tresca.

### 26.8 – Exemplo 2

Sabendo que o estado de tensão em um ponto submetido a um estado plano de tensão é o apresentado na Fig. (26.16), determine o valor mínimo da tensão de escoamento do material utilizando o critério de Tresca.

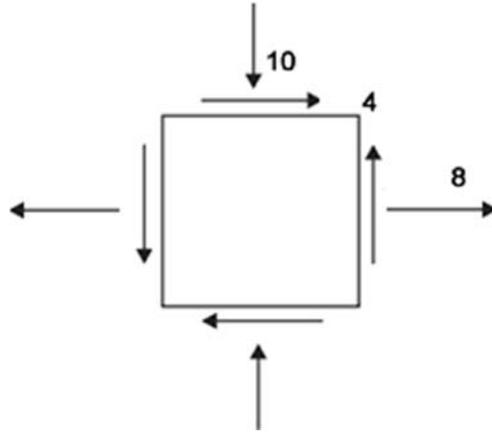


Figura 26.16 Estado de tensão considerado. Tensões dadas em MPa.

Com base na ilustração apresentada na Fig. (26.16) verifica-se que o estado de tensão atuante pode ser assim escrito:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

Para este estado de tensão, as tensões principais são dadas por:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{8 - 10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8 + 10}{2}\right)^2 + (4)^2}$$

$$\sigma_{1,2} = -1 \pm 9,8489$$

$$\sigma_1 = 8,8489 MPa$$

$$\sigma_2 = -10,8489 MPa$$

O critério de Tresca é dado pela Eq.(26.2). Assim:

$$MAX \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} \leq \frac{\sigma_E}{2} \Rightarrow$$

$$MAX \left\{ \frac{|8,8489 + 10,8489|}{2}, \frac{|8,8489 - 0|}{2}, \frac{|-10,8489 - 0|}{2} \right\} \leq \frac{\sigma_E}{2} \Rightarrow$$

$$9,8489 \leq \frac{\sigma_E}{2} \Rightarrow \sigma_E = 19,6978 MPa$$

### 26.9 – Exemplo 3

A Fig. (26.17) mostra o estado de tensão crítico para uma estrutura de concreto em condição plana de tensão. Considerando que a resistência à tração do concreto é 10% de sua resistência à compressão, segundo o critério de Mohr-Coulomb, determine qual deve ser a resistência à compressão mínima para o concreto dessa estrutura.

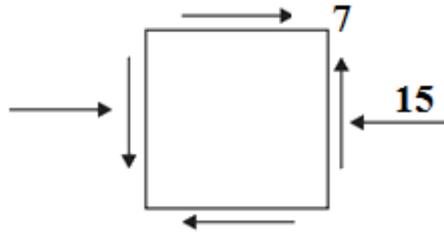


Figura 26.17 Estado de tensão crítica. Tensões dadas em MPa.

Considerando o estado de tensão crítica, verifica-se que este é caracterizado pelo seguinte tensor:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Portanto, as tensões principais apresentam os seguintes valores:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{-15 - 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15 + 0}{2}\right)^2 + (7)^2}$$

$$\sigma_{1,2} = -7,5 \pm 10,259$$

$$\sigma_1 = 2,759 MPa \qquad \sigma_2 = -17,759 MPa$$

O par de valores  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  determinado anteriormente pode ser inserido na representação gráfica plana do critério de Mohr-Coulomb, Fig. (26.13). Efetuando esta representação, obtém-se a ilustração apresentada na Fig. (26.18).

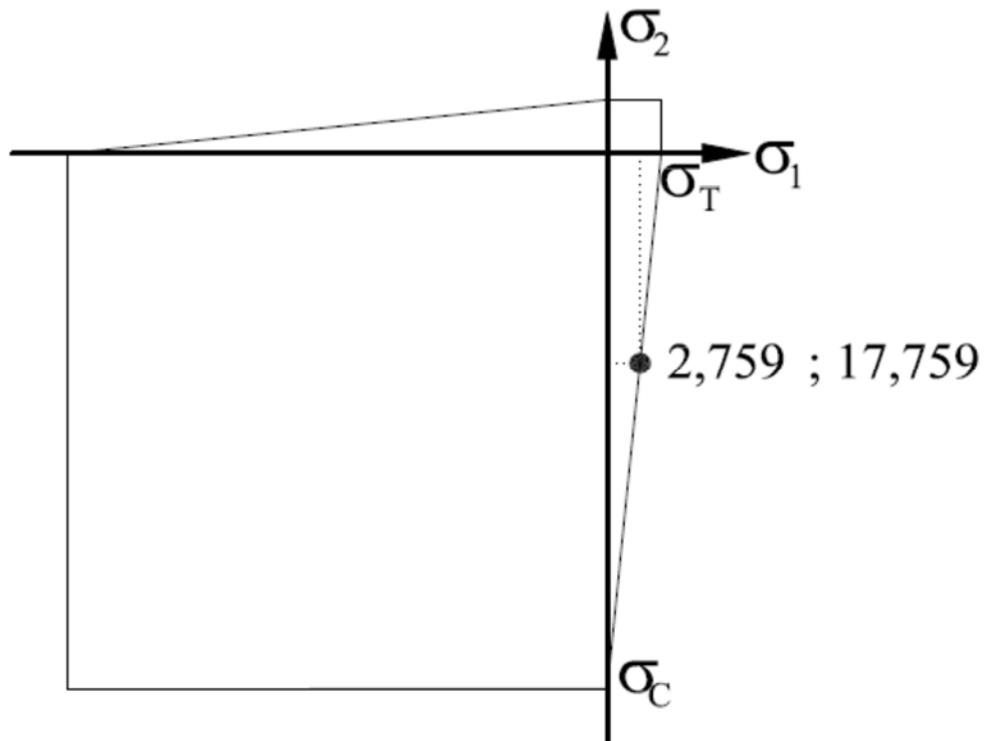


Figura 26.18 Representação do critério de Mohr-Coulomb e o estado crítico de tensão.

Dada a linearidade da representação gráfica apresentada na Fig. (26.18), pode-se efetuar uma semelhança de triângulos para a determinação da resistência a compressão do concreto. Assim, pode-se escrever que:

$$\sigma_c \Leftrightarrow \sigma_T$$
$$(\sigma_c - 17,759) \Leftrightarrow 2,759 \Rightarrow$$

$$2,759\sigma_c = \sigma_c\sigma_T - 17,759\sigma_T$$

Sabendo que  $\sigma_c = 0,10\sigma_T$  tem-se:

$$2,759\sigma_c = \sigma_c 0,10\sigma_c - 17,759 \cdot 0,10\sigma_c \Rightarrow 0,10\sigma_c = 4,5349 \Rightarrow$$

$$\sigma_c = 45,349 \text{ MPa}$$

## **27. – Vasos de Pressão de Paredes Finas**

---

### 27.1 – Introdução

Em diversas aplicações industriais, estruturas são utilizadas para o armazenamento de produtos em estados líquido e gasoso. Estas estruturas são conhecidas como vasos de pressão e assumem, normalmente, as formas geométricas cilíndrica e esférica, como mostrado na Fig. (27.1). Quando a estrutura encontra-se em serviço, esta é submetida a uma pressão hidrostática interna exercida pelo fluido armazenado.

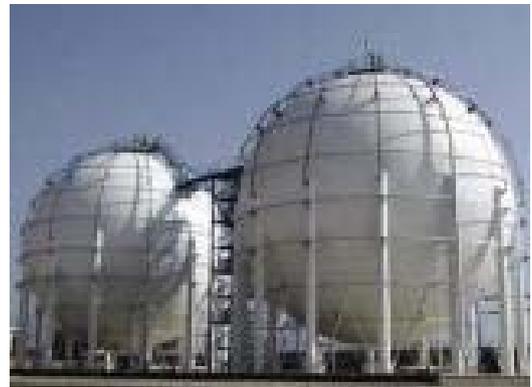


Figura 27.1 Vasos de pressão cilíndricos e esféricos.

Embora aparentemente complexo, um vaso de pressão pode ser analisado de forma simplificada, porém sem perda significativa de representatividade, se possuir paredes finas. Em aplicações práticas, um vaso de pressão é considerado de “paredes finas” se a relação entre seu raio interno e a espessura de sua parede for maior ou igual a 10, ou seja,  $r/t \geq 10$ . Especialmente, quando esta razão é igual a 10, os resultados de uma análise considerando essa estrutura como sendo de paredes finas conduzem a tensões que são aproximadamente 4% menores do que as tensões reais atuantes na

estrutura. Deve-se enfatizar que para relações  $r/t$  maiores que 10 esse erro reduz-se consideravelmente.

Quando o vaso de pressão é de paredes finas, a distribuição das tensões orientadas ao longo da espessura da parede pode ser desprezada. Esta hipótese pode ser assumida uma vez que, em sua parte interna, esta tensão será igual a  $p$ , enquanto na parte externa a tensão será igual a zero. Portanto, a tensão reduz-se a zero muito rapidamente, devido a pequena espessura da parede. Considerando essa hipótese, serão analisados, neste texto, os estados de tensão atuantes em vasos de pressão cuja geometria seja cilíndrica ou esférica.

### 27.2 – Vasos de Pressão Cilíndricos

Para a determinação dos campos de tensão em vasos de pressão de geometria cilíndrica, deve-se considerar a estrutura mostrada na Fig. (27.2). Trata-se de um vaso de pressão cilíndrico com espessura de parede  $t$ , raio interno  $r$  sendo submetido a uma pressão interna  $p$ .

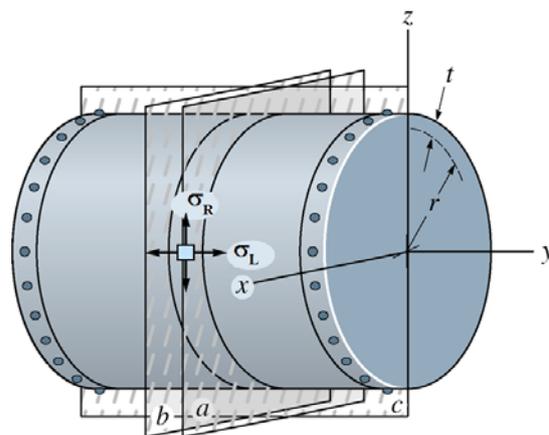


Figura 27.2 Vaso de pressão cilíndrico.

Devido à uniformidade do carregamento atuante, as condições de equilíbrio devem ser analisadas considerando um elemento suficientemente afastado das bordas do cilindro (devido ao princípio de Saint-Venant). Como apresentado na Fig. (27.2), o vaso de pressão cilíndrico estará submetido a uma pressão interna positiva. Assim, este observará a atuação de duas tensões normais,  $\sigma_R$  e  $\sigma_L$ , as quais estarão orientadas ao

longo das direções radial (ou circunferencial) e longitudinal, respectivamente. Deve-se ressaltar que ambas as tensões atuantes serão trativas.

Para a determinação das expressões de  $\sigma_R$  e  $\sigma_L$  em função da pressão positiva interna aplicada, deve-se tomar um elemento representativo deste vaso de pressão e impor sobre ele as condições de equilíbrio. O elemento considerado para tal fim é o formado pela intersecção entre os planos  $a$ ,  $b$  e  $c$  ilustrados na Fig. (27.3). Neste elemento atuam somente a pressão interna  $p$  e a tensão  $\sigma_R$ .

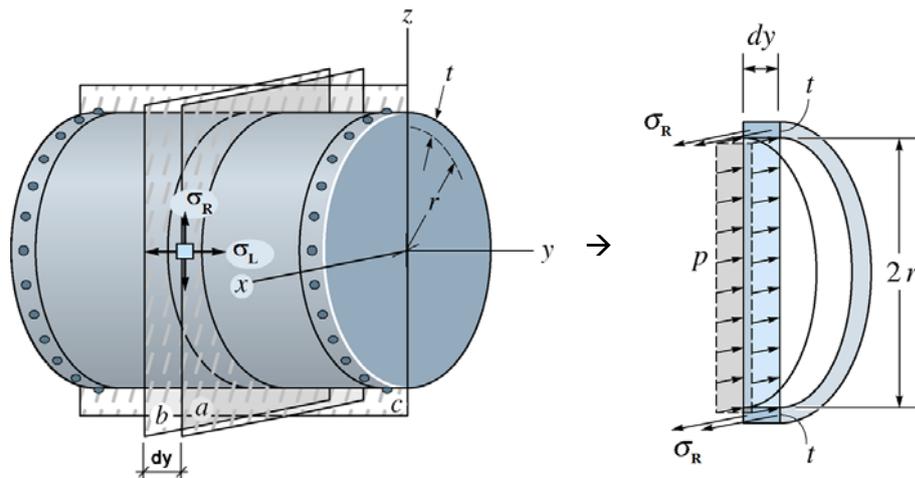


Figura 27.3 Elemento do vaso de pressão cilíndrico na condição de equilíbrio.

Impondo-se a condição de equilíbrio de forças ao longo da direção  $x$  obtém-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2(\sigma_R dyt) - p2r dy = 0 \Rightarrow \sigma_R = \frac{pr}{t} \quad (27.1)$$

Para a obtenção da expressão que relaciona  $\sigma_L$  à pressão positiva interna e às dimensões do vaso de pressão deve-se novamente tomar um elemento representativo do corpo e impor sobre ele as condições de equilíbrio. Nesse caso, o elemento a ser analisado é o originado pela secção do corpo por meio do plano  $a$ , como mostrado na Fig. (27.4). Nesse elemento atuam apenas a tensão  $\sigma_L$  e a pressão interna  $p$ .

Impondo-se a condição de equilíbrio de forças ao longo da direção  $y$  obtém-se:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_L 2\pi r t - p\pi r^2 = 0 \Rightarrow \sigma_L = \frac{pr}{2t} \quad (27.2)$$

Deve-se enfatizar que as expressões obtidas nas Eq.(27.1) e Eq.(27.2) são válidas se o vaso de pressão analisado apresentar-se fechado em ambas suas extremidades. Porém, existem casos em que vasos de pressão cilíndricos encontram-se abertos em uma ou em ambas as extremidades, como em tubulações de condução de

líquidos, por exemplo. Nesses casos, a estrutura estará submetida à pressão interna do líquido armazenado, porém, devido à ausência de um mecanismo de fechamento em suas extremidades, o vaso de pressão não observará a atuação da tensão  $\sigma_L$ . Esta tensão será nula, uma vez que a pressão interna não produzirá esforço ao longo da direção do eixo do vaso de pressão. Em vasos de pressão cilíndricos abertos, a única tensão não nula atuante é determinada pela Eq.(27.1) e atuará ao longo de sua direção radial (circunferencial).

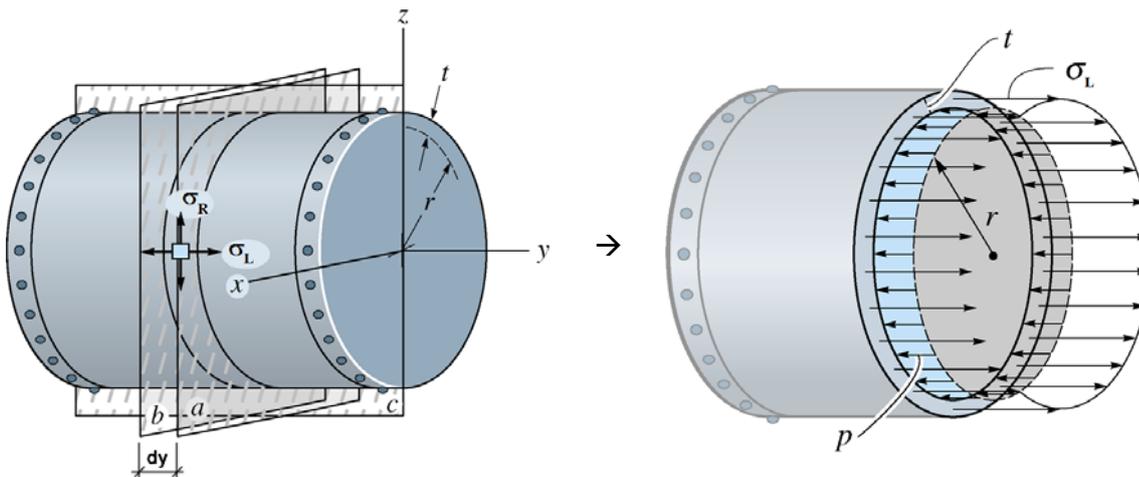


Figura 27.4 Elemento do vaso de pressão cilíndrico na condição de equilíbrio.

Deve-se também mencionar que as tensões  $\sigma_R$  e  $\sigma_L$  são tensões principais se no vaso de pressão atuar apenas a pressão interna  $p$ . Neste caso, não se observa a presença de tensões de cisalhamento para o carregamento atuante e o sistema de coordenadas adotado. Portanto em situações como a descrita tem-se:  $\sigma_R = \sigma_1$  e  $\sigma_L = \sigma_2$ .

### 27.3 – Vasos de Pressão Esféricos

As expressões que relacionam o estado de tensão atuante com a pressão interna e as dimensões da estrutura em vasos de pressão de geometria esférica podem ser obtidas de maneira semelhante ao efetuado anteriormente para os vasos de pressão cilíndricos. Assim, inicialmente, deve-se considerar um vaso esférico de raio interno  $r$  e espessura da parede  $t$  sendo submetido a uma pressão interna  $p$ . Em seguida, devem ser verificadas as condições de equilíbrio atuantes sobre um elemento representativo pertencente a este corpo.

Conforme apresenta a Fig. (27.5), o vaso de pressão esférico observará a atuação de duas tensões normais, as quais estarão orientadas ao longo de suas direções circunferenciais. Essas tensões podem ser mensuradas seccionando o corpo por meio do plano  $a$ , como mostra a Fig. (27.5). Impondo, sobre o corpo seccionado, as condições de equilíbrio obtêm-se:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_L 2\pi r t - p \pi r^2 = 0 \Rightarrow \sigma_L = \frac{pr}{2t} \quad (27.3)$$

Deve-se destacar que esse resultado é idêntico independente do plano seccionado. Assim, para qualquer orientação do hemisfério de vaso de pressão, este estará sujeito a um estado biaxial de tensões de intensidade igual a  $\sigma_L, \sigma_L$ .

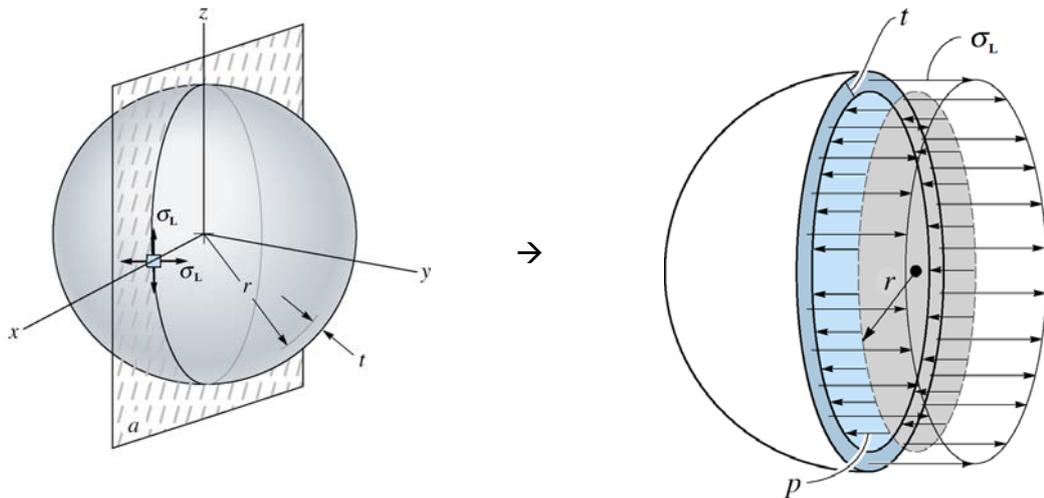


Figura 27.5 Elemento do vaso de pressão esférico na condição de equilíbrio.

Nos vasos de pressão esféricos a tensão de cisalhamento atuante é nula. Portanto, as tensões  $\sigma_L$  atuantes são, conseqüentemente, tensões principais.

### 27.4 – Exemplo 1

Uma dada indústria deve armazenar um gás a uma pressão de  $6,0MPa$ . Sabendo que a indústria possui dois reservatórios, um cilíndrico e outro esférico, ambos com raio interno igual a  $5,0$  m e espessura da chapa de composição igual a  $10$  cm, informe em qual deles o gás deve ser armazenado. A tensão de escoamento do material que compõe os tanques é igual a  $250MPa$ . Utilize o critério de Tresca para esta verificação.

Para a solução deste problema deve-se, primeiramente, determinar as componentes de tensão que atuarão em cada um dos tanques. Assim, para o vaso de pressão cilíndrico tem-se:

$$\sigma_R = \frac{pr}{t} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{6 \cdot 5}{0,10} \Rightarrow \sigma_R = 300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 0,10} \Rightarrow \sigma_L = 150 \text{ MPa}$$

Como atua sobre o vaso de pressão cilíndrico apenas a pressão interna  $p$ , observa-se a ausência de tensões de cisalhamento no corpo para o sistema de coordenadas adotado. Assim, pode-se dizer que:

$$\sigma_R = \sigma_1 = 300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = \sigma_2 = 150 \text{ MPa}$$

Já para o caso esférico obtém-se:

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 0,10} \Rightarrow \sigma_L = 150 \text{ MPa}$$

Analogamente ao observado para o vaso de pressão cilíndrico, as tensões  $\sigma_L$  atuantes no vaso de pressão esférico são tensões principais.

Em seguida, deve-se verificar a condição de segurança por meio do critério de ruptura de Tresca. Efetuando esta verificação para o vaso cilíndrico obtém-se:

$$\text{MAX} \left[ \frac{|300-150|}{2} \quad \frac{|300-0|}{2} \quad \frac{|150-0|}{2} \right] \leq \frac{250}{2} \Rightarrow 300 \leq 250$$

Portanto, o vaso de pressão cilíndrico conduz a uma condição de falha e não deve armazenar o gás. Considerando o vaso de pressão esférico, a verificação do critério de Tresca conduz a:

$$\text{MAX} \left[ \frac{|150-150|}{2} \quad \frac{|150-0|}{2} \quad \frac{|150-0|}{2} \right] \leq \frac{250}{2} \Rightarrow 150 \leq 250$$

O vaso de pressão esférico conduz a uma condição de segurança e deve, portanto, ser utilizado para o armazenamento do gás. Com base nos resultados obtidos neste exemplo ilustra-se o motivo pelo qual tanques de grandes dimensões, como os utilizados pela Petrobras, são construídos utilizando a geometria cilíndrica.

### 27.5 – Exemplo 2

Um tanque cilíndrico, construído para o armazenamento de ar comprimido, é fabricado com uma placa de espessura igual a 8,0 mm soldada ao longo de uma hélice formando um ângulo 30° com a horizontal, como apresenta a Fig.(27.6). Sabendo que a tensão normal admissível para a solda é de 75MPa, determine a maior pressão manométrica que pode ser aplicada ao tanque.

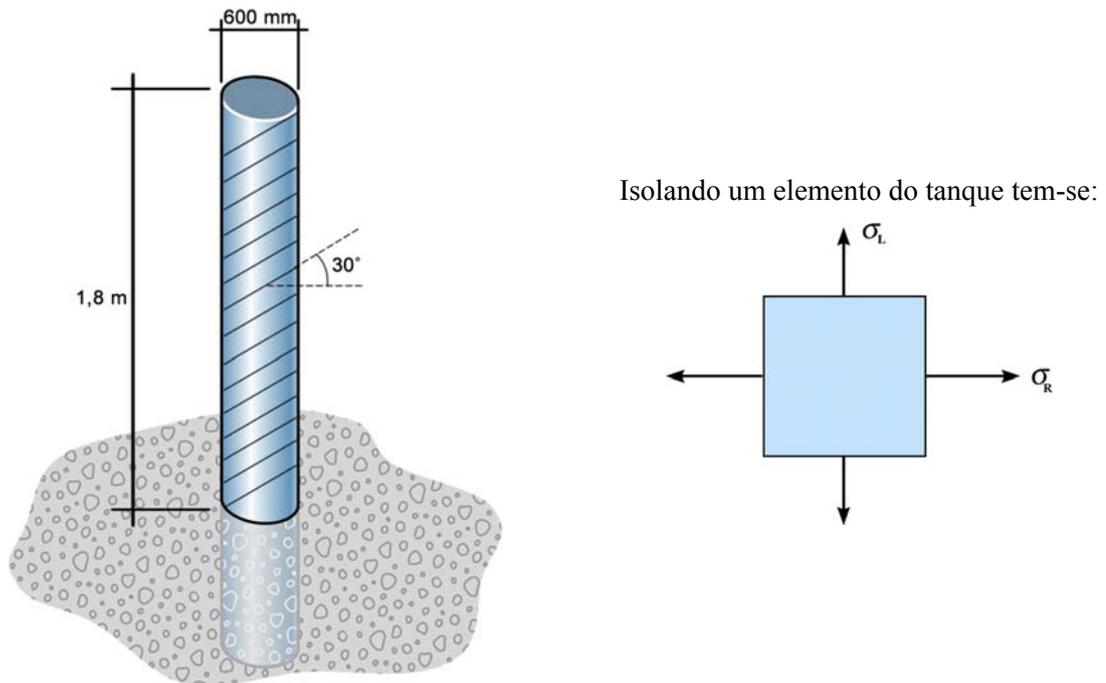


Figura 27.6 Elemento do vaso de pressão esférico na condição de equilíbrio.

Como o tanque apresenta a forma cilíndrica, o estado de tensão atuante é o apresentado na Fig. (27.6). Essas tensões podem ser avaliadas por meio das Eq.(27.1) e Eq.(27.2). Assim:

$$\sigma_R = \frac{pr}{t} \Rightarrow \sigma_R = \frac{p \cdot (300 - 8)}{8} \Rightarrow \sigma_R = 36,5p$$

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{p \cdot (300 - 8)}{2 \cdot 8} \Rightarrow \sigma_L = 18,25p$$

A tensão normal ao plano da solda é obtida considerando um ângulo igual a  $\theta = 30^\circ + 90^\circ \Rightarrow \theta = 120^\circ$ . Portanto:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\sigma'_x = \frac{36,5p + 18,25p}{2} + \frac{36,5p - 18,25p}{2} \cos(2 \cdot 120) + 0 \operatorname{sen}(2 \cdot 120) \Rightarrow$$

$$\sigma'_x = 22,8125p$$

A tensão normal calculada anteriormente deve, no máximo, ser igual a tensão normal resistente da solda. Dessa forma:

$$\sigma'_x = 22,8125p = 75 \Rightarrow p = 3,288MPa$$

### 27.6 – Exemplo 3

Para o problema apresentado no item 27.5, determine a máxima pressão manométrica que pode ser aplicada ao tanque se a tensão de cisalhamento resistente da solda for igual a  $30MPa$ .

Neste caso deve-se determinar a tensão de cisalhamento atuante paralelamente ao sentido da solda. Assim:

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen}(2\theta) - \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{36,5p - 18,25p}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 120) - 0 \cos(2 \cdot 120) \Rightarrow \tau'_{xy} = 7,9025p$$

A tensão de cisalhamento calculada anteriormente deve ser, no máximo, igual a tensão de cisalhamento resistente da solda. Portanto:

$$\tau'_{xy} = 7,9025p = 30 \Rightarrow p = 3,796MPa$$

### 27.7 – Exemplo 4

Dimensione a espessura da chapa que irá compor a parede de um reservatório esférico de raio interno igual a  $8,0m$ , o qual, em serviço, será submetido a uma pressão interna de  $18MPa$ . Utilize o critério de Von Mises para este cálculo, sabendo que a tensão de escoamento do material é igual a  $\sigma_E = 400MPa$ .

Como o vaso de pressão é esférico, o estado de tensão atuante é determinado pela Eq.(5.3). Assim:

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{18 \cdot 8}{2 \cdot t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{72}{t}$$

Nos vasos de pressão esféricos o estado de tensão atuante é principal devido a ausência de tensões de cisalhamento. Assim, pode-se escrever que:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{72}{t}$$

Aplicando o critério de Von Mises obtém-se:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{2}\sigma_E$$

$$\sqrt{\left(\frac{72}{t} - \frac{72}{t}\right)^2 + \left(\frac{72}{t} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{72}{t}\right)^2} = 400\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{10368}{t^2}} = 565,685$$

$$t = 0,18 m = 180 mm$$

O resultado obtido utilizando o critério de Von Mises é o mesmo que poderia ter sido obtido igualando-se a tensão  $\sigma_L$  à tensão de escoamento do material. Fica a seguinte pergunta ao leitor: Porque esse fato ocorre?

### 27.8 – Exemplo 5

O reservatório apresentado na Fig. (27.7) é composto por uma parte cilíndrica (corpo) e duas partes esféricas (tampas). Sabendo que este reservatório estará submetido a uma pressão interna igual  $1,0 MPa$  e que o diâmetro interno da parte cilíndrica é igual a  $4,2 m$ , dimensione a espessura das chapas que comporão as paredes deste reservatório sendo a tensão de escoamento igual a  $\sigma_E = 500 MPa$ . Utilize o critério de Tresca para este dimensionamento.

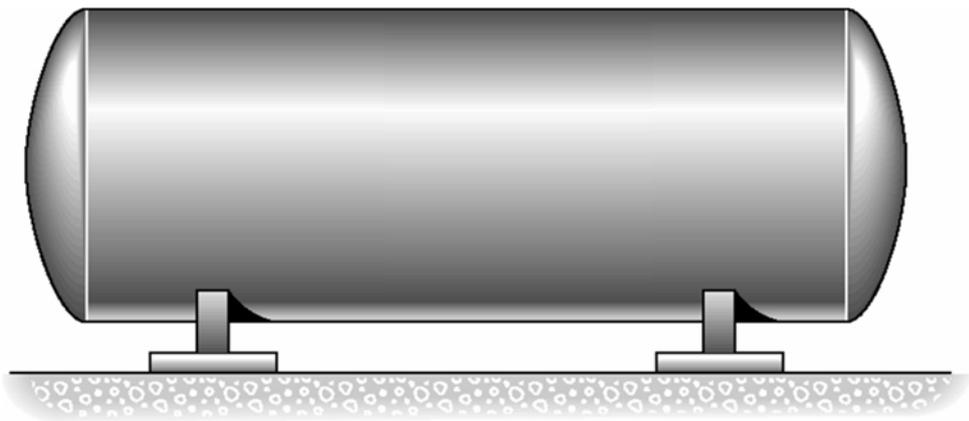


Figura 27.7 Reservatório com partes cilíndrica e esféricas.

Para a realização deste dimensionamento, deverão ser determinados os estados de tensão atuantes nas partes cilíndrica e esférica do reservatório. Iniciando o dimensionamento pela parte cilíndrica, sabe-se que as tensões normais atuantes nessa região do vaso de pressão são calculadas pelas Eq.(27.1) e Eq.(27.2). Assim:

$$\sigma_R = \frac{pr}{t} \Rightarrow \sigma_R = \frac{1 \cdot 2,1}{t} \Rightarrow \sigma_R = \frac{2,1}{t}$$

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{1 \cdot 2,1}{2 \cdot t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{1,05}{t}$$

Neste vaso de pressão atua apenas a pressão interna  $p$ . Portanto, as tensões determinadas anteriormente são também tensões principais. Dessa forma:

$$\sigma_R = \sigma_1 = \frac{2,1}{t}$$

$$\sigma_L = \sigma_2 = \frac{1,05}{t}$$

Levando as tensões principais calculadas anteriormente na expressão do critério de Tresca obtém-se:

$$MAX \left[ \frac{|2,1-1,05|}{2 \cdot t} \quad \frac{|2,1-0|}{2 \cdot t} \quad \frac{|1,05-0|}{2 \cdot t} \right] \leq \frac{500}{2} \Rightarrow \frac{1,05}{t} = 250 \Rightarrow$$

$$t = 0,0042m \Rightarrow t = 4,2mm$$

Para a região esférica do reservatório sabe-se que o estado de tensão pode ser obtido utilizando a Eq.(27.3). Lembrando que este estado de tensão é também principal tem-se:

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{1 \cdot 2,1}{2 \cdot t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{1,05}{t}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_L = \frac{1,05}{t}$$

Levando o estado de tensão determinado anteriormente na expressão do critério de Tresca tem-se:

$$MAX \left[ \frac{|1,05-1,05|}{2 \cdot t} \quad \frac{|1,05-0|}{2 \cdot t} \quad \frac{|1,05-0|}{2 \cdot t} \right] \leq \frac{500}{2} \Rightarrow \frac{0,525}{t} = 250 \Rightarrow$$

$$t = 0,0021m \Rightarrow t = 2,1mm$$

Como era de se esperar, a espessura das chapas que comporão as regiões esféricas do reservatório poderão ser menores que a das chapas que comporão a parte cilíndrica.

### 27.9 – Tensões de Cisalhamento em Vasos de Pressão

Com base nas análises até o momento efetuadas foi possível relacionar parâmetros geométricos de vasos de pressão cilíndricos e esféricos à pressão interna e às tensões normais atuantes em suas paredes. Para o sistema de referência considerado para a dedução do equacionamento, as tensões de cisalhamento eram nulas, o que levava as tensões normais obtidas a serem classificadas como principais.

Embora nulas neste sistema de referência, as tensões de cisalhamento, no plano, em vasos de pressão cilíndricos apresentam seu valor máximo em um plano inclinado de  $45^\circ$  em relação ao sistema de referência no qual as tensões principais foram definidas. Para os vasos de pressão cilíndricos com extremidades fechadas, a tensão de cisalhamento máxima no plano pode ser obtida com o auxílio do círculo de Mohr. Como nesses vasos de pressão as tensões principais são dadas pelas Eq.(27.1) e Eq.(27.2), constata-se que  $\sigma_R = 2\sigma_L \Rightarrow \sigma_1 = 2\sigma_2$ . Com base nesta informação, traça-se o círculo de Mohr apresentado na Fig. (27.8).

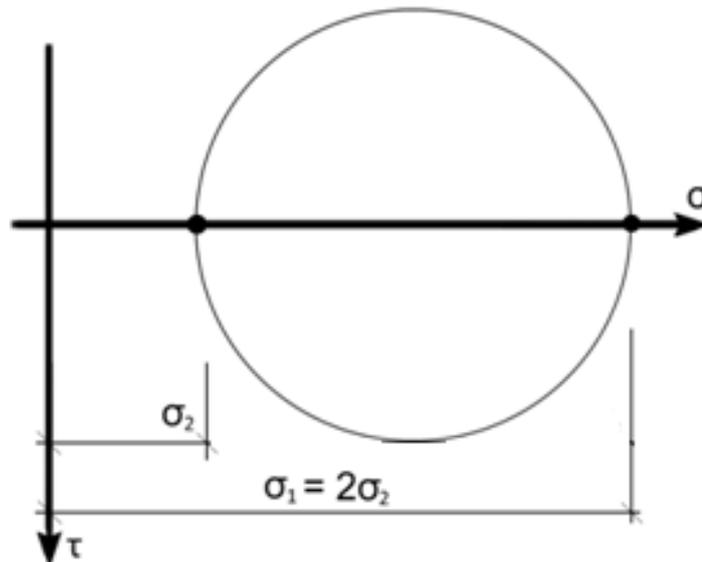


Figura 27.8 Círculo de Mohr para vasos de pressão cilíndricos.

Como a tensão de cisalhamento máxima no plano é igual ao raio do círculo de Mohr, tem-se que a tensão de cisalhamento máxima no plano, para os vasos de pressão cilíndricos fechados, é dada por:

$$\tau_{MAX}^{Plano} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Plano} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_2}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Plano} = \frac{\sigma_2}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Plano} = \frac{pr}{4t} \quad (27.4)$$

Caso o vaso de pressão cilíndrico seja de extremidades abertas, constata-se que  $\sigma_L = \sigma_2 = 0$ . Nessa situação, a tensão de cisalhamento máxima no plano é determinada com base na Eq.(27.5).

$$\tau_{MAX}^{Plano} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Plano} = \frac{\sigma_1 - 0}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Plano} = \frac{pr}{2t} \quad (27.5)$$

Quanto aos vasos de pressão esféricos, constata-se que a tensão de cisalhamento atuante no plano será sempre nula independentemente do sistema de referência adotado. Isso ocorre pelo fato das tensões principais atuantes nestas estruturas serem iguais. Além disso, por meio das equações apresentadas no capítulo 23, constata-se que as tensões normais definidas em relação a qualquer plano rotacionado em relação ao plano de referência inicial serão iguais a  $\sigma_L$ .

A partir do apresentado anteriormente, pode-se também obter expressões que permitem a determinação da tensão de cisalhamento máxima absoluta para os três casos discutidos. Como os problemas tratados enquadram-se na categoria estado plano de tensão, conclui-se que a tensão principal menor será nula. Assim, nesses problemas, tem-se  $\sigma_3 = 0$ . Portanto, considerando a discussão efetuada no capítulo 23 sobre tensão de cisalhamento máxima absoluta, pode-se obter a tensão de cisalhamento máxima absoluta para o caso do vaso de pressão cilíndrico de extremidades fechadas da seguinte forma:

$$\tau_{MAX}^{Abs} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Abs} = \frac{\sigma_1 - 0}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Abs} = \frac{pr}{2t} \quad (27.6)$$

Já para o vaso de pressão cilíndrico com extremidades abertas tem-se:

$$\tau_{MAX}^{Abs} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Abs} = \frac{\sigma_1 - 0}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Abs} = \frac{pr}{2t} \quad (27.7)$$

Finalmente, para o vaso de pressão esférico, a tensão de cisalhamento máxima absoluta é determinada por meio da seguinte relação:

$$\tau_{MAX}^{Abs} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Abs} = \frac{\sigma_2 - 0}{2} \Rightarrow \tau_{MAX}^{Abs} = \frac{pr}{4t} \quad (27.8)$$

Deve-se enfatizar que embora a tensão de cisalhamento máxima no plano seja nula nos vasos de pressão esféricos, a tensão de cisalhamento máxima absoluta não o é, sendo esta igual ao apresentado na Eq.(27.8).

## **28. – Métodos de Energia**

---

### 28.1 – Introdução

Sabe-se que todo corpo deformável, quando submetido à ação de carregamentos externos, tem sua configuração geométrica alterada. Isso ocorre uma vez que o carregamento induz deslocamentos nos pontos materiais que compõem o corpo. Devido ao fato da taxa de deslocamento nem sempre ser constante ao longo do corpo, surgem as deformações.

Como o corpo se deforma, e conseqüentemente se desloca sob a ação de carregamentos externos, constata-se que o(s) ponto(s) de aplicação deste(s) também se desloca(m). Com base nos conhecimentos da física e da mecânica, sabe-se que uma força realiza *trabalho* quando seu ponto de aplicação sofre um deslocamento cuja orientação é a mesma da força. Além disso, sabe-se também, dos conhecimentos da física e da mecânica, que a variação de trabalho resulta em *energia*. A utilização do conceito de energia será de grande importância para a solução de diversos problemas de engenharia, como será apresentado na sequência desse capítulo.

### 28.2 – Trabalho Decorrente das Ações Externas

Neste item serão apresentadas expressões que relacionam o trabalho externo aos carregamentos externos atuantes em estruturas solicitadas por tração/compressão e flexão. Considerando, barras solicitadas axialmente, deve-se analisar a barra apresentada na Fig. (28.1).

Para que o trabalho decorrente da força externa seja calculado, deve-se considerar que a força externa atuante,  $F$ , seja aplicada gradualmente de 0 até sua

intensidade máxima, igual a  $P$ . Assumindo que o material que compõe a barra possua comportamento mecânico elástico linear, o deslocamento final,  $\Delta$ , observado quando a força externa atua em sua intensidade máxima, é diretamente proporcional a todo o deslocamento  $\delta$  atuante para cargas intermediárias  $F$ . Assim, pode-se escrever que:

$$\frac{P}{\Delta} = \frac{F}{\delta} \Rightarrow F = \left(\frac{P}{\Delta}\right)\delta \quad (28.1)$$

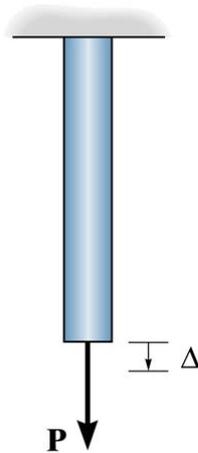


Figura 28.1 Barra axialmente carregada.

Somando-se o trabalho de todas as forças intermediárias  $F$  sobre todos os deslocamentos intermediários  $\delta$  tem-se:

$$U_e = \int_0^{\Delta} F d\delta \Rightarrow U_e = \int_0^{\Delta} \left(\frac{P}{\Delta}\delta\right) d\delta \Rightarrow U_e = \frac{P\Delta}{2} \quad (28.2)$$

Portanto, considerando o aumento gradual da força de  $F$  até seu valor final  $P$ , o trabalho realizado pela força externa é igual à metade do produto entre o deslocamento final,  $\Delta$ , e a força total  $P$ .

Como o trabalho envolve força e deslocamento, pode-se perguntar: o que ocorreria se a força  $P$  fosse mantida constante e um deslocamento adicional fosse imposto na extremidade da barra, levando o deslocamento de  $\Delta$  para  $\Delta'$ ? Nessa situação, a qual é ilustrada na Fig. (28.2), o trabalho da força  $P$ , que é constante, sobre o deslocamento adicional é dado por:

$$U_e = \int_{\Delta}^{\Delta'} P d\delta \Rightarrow U_e = [P\delta]_{\Delta}^{\Delta'} \Rightarrow U_e = P(\Delta' - \Delta) \quad (28.3)$$

Graficamente, as parcelas de energia expressas nas Eq.(28.2) e Eq.(28.3) podem ser visualizadas por meio das regiões 1 e 2, respectivamente, apresentadas na Fig. (28.3).

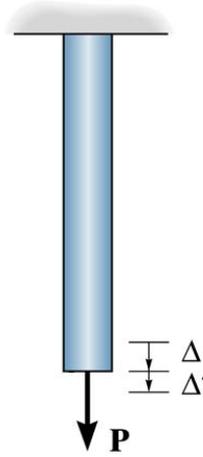


Figura 28.2 Barra axialmente carregada. Deslocamento adicional.

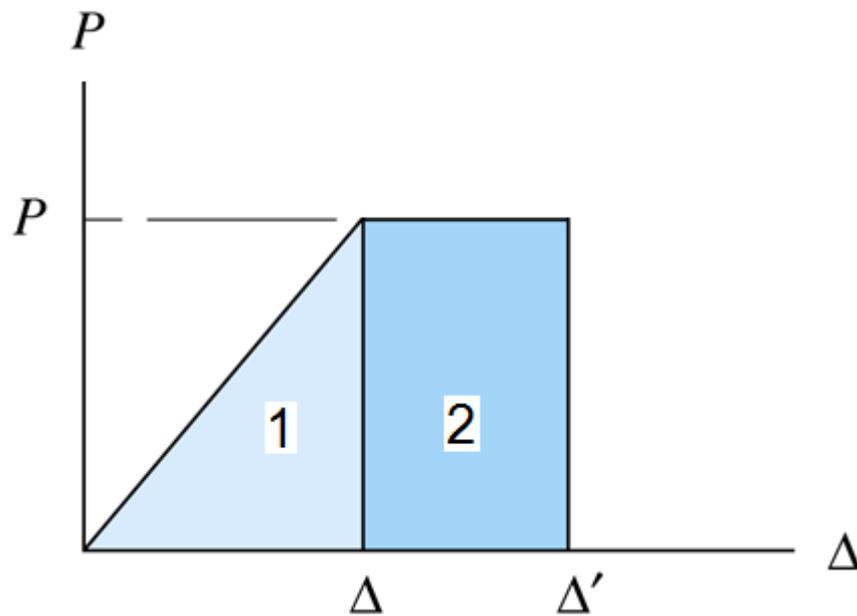


Figura 28.3 Parcelas de energia.

De forma análoga ao efetuado para o par força-deslocamento, pode-se também determinar o trabalho realizado por momentos e rotações. Um momento realiza trabalho quando seu ponto de aplicação sofre um deslocamento rotacional,  $d\theta$ , ao longo de sua linha de ação. Assumindo que a intensidade do momento aplicado aumenta gradualmente até seu valor final  $M$ , o trabalho realizado por essa ação, de forma semelhante ao conjunto força-deslocamento, é dado por:

$$U_e = \int_0^{\theta} m d\theta \Rightarrow U_e = \int_0^{\theta} \left( \frac{M}{\Theta} \theta \right) d\theta \Rightarrow U_e = \frac{M\theta}{2} \quad (28.4)$$

Se uma rotação adicional,  $\theta' - \theta$ , for imposta ao ponto de aplicação do momento, mantendo-se constante a intensidade do momento aplicado, pode-se determinar o trabalho realizado pela rotação sobre o momento por meio da seguinte relação:

$$U_e = \int_{\theta}^{\theta'} M d\delta \Rightarrow U_e = [M\theta]_{\theta}^{\theta'} \Rightarrow U_e = M(\theta' - \theta) \quad (28.5)$$

### 28.3 – Energia Interna. Energia de Deformação

Quando carregamentos externos são aplicados em corpos deformáveis ocorrerão mudanças na configuração geométrica do corpo e conseqüentemente deformações. Assumindo que não haja dissipações de energia decorrentes de trocas de calor, efeitos cinéticos (o carregamento é aplicado em regime quase-estático) e processos de degradação mecânica, toda a energia associada ao trabalho dos carregamentos externos será convertida em *energia de deformação* ou *energia interna*. Essa última energia será armazenada no corpo em função do surgimento de tensões normais e de cisalhamento.

A energia de deformação associada às tensões normal e de cisalhamento pode ser expressa utilizando-se as deformações normal e distorcional, respectivamente. Considerando, um elemento de dimensões infinitesimais submetido à ação de uma tensão normal  $\sigma_z$ , como apresenta a Fig. (28.4), constata-se que a força resultante da tensão atuante é dada por:

$$dF_z = \sigma_z dA \Rightarrow dF_z = \sigma_z dx dy \quad (28.6)$$

O deslocamento associado à direção de atuação da força resultante é dado por:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta\Delta_z}{dz} \Rightarrow \delta\Delta_z = \varepsilon_z dz \quad (28.7)$$

Assumindo que a tensão normal ao longo do eixo  $z$  tenha sua intensidade aumentada gradualmente de 0 até seu valor final  $\sigma_z$ , pode-se determinar a energia resultante, conforme apresentado na Eq.(28.2), da seguinte maneira:

$$dU_i = \frac{F_z \delta \Delta_z}{2} \Rightarrow dU_i = \frac{\sigma_z dx dy \varepsilon_z dz}{2} \Rightarrow dU_i = \frac{\sigma_z \varepsilon_z dV}{2} \quad (28.8)$$

sendo  $dV = dx dy dz$ .

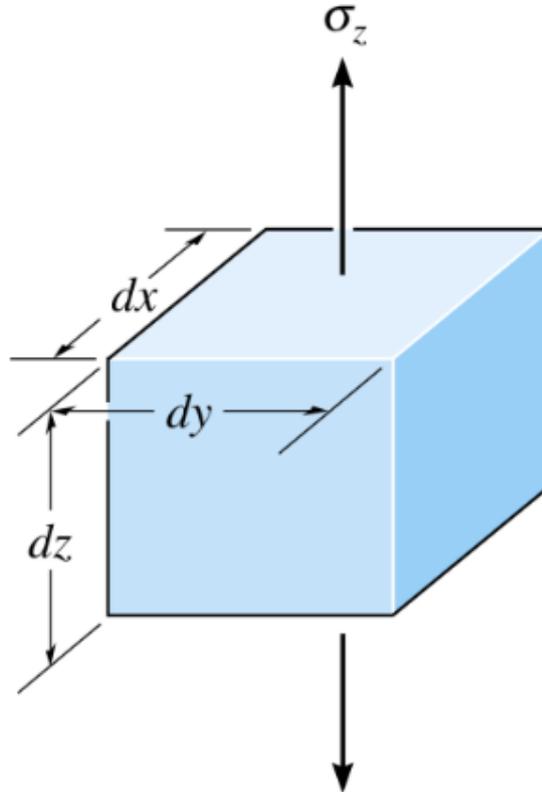


Figura 28.4 Elemento infinitesimal sollicitado por tensão normal.

Deve-se destacar que a energia resultante da Eq.(28.8) é sempre positiva, uma vez que  $\sigma$  e  $\varepsilon$  possuem sinais algébricos iguais. Portanto, se o corpo considerado estiver submetido à ação de apenas uma tensão normal, em uma direção arbitrária, a energia de deformação associada pode ser assim obtida:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma \varepsilon}{2} dV \quad (28.9)$$

Por meio da lei de Hooke, pode-se reescrever a Eq.(28.9) na seguinte forma:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV \quad (28.10)$$

De forma análoga, pode-se determinar a energia de deformação associada às tensões de cisalhamento. Para tal finalidade, deve-se considerar o elemento de dimensões infinitesimais apresentado na Fig. (28.5), o qual está sujeito a um estado de cisalhamento puro.

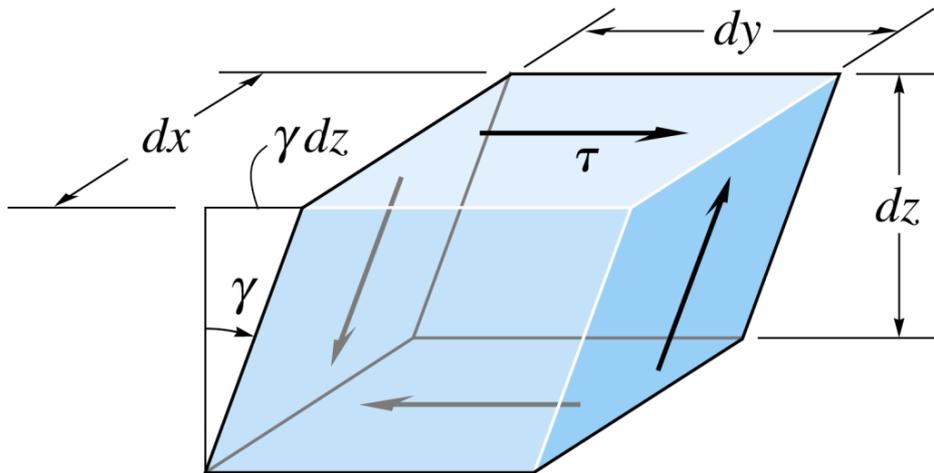


Figura 28.5 Elemento infinitesimal sollicitado ao cisalhamento.

A tensão de cisalhamento atuante provoca a deformação (distorção) do elemento de tal modo que somente a força cisalhante que age sobre a face superior do elemento desloca-se  $\gamma dz$  em relação a face inferior. Assume-se que as faces verticais apenas giram. Portanto, as forças cisalhantes nessas faces não realizam nenhum trabalho, já que, nessas faces, força e deslocamento estão em direções perpendiculares. Assim, a energia de deformação contida no elemento é dada por:

$$dU_i = \frac{F_y \Delta_y}{2} \Rightarrow dU_i = \frac{\tau_{xy} dx dy \gamma_{xy} dz}{2} \Rightarrow dU_i = \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} dV \quad (28.11)$$

sendo  $dV = dx dy dz$ .

Assim, integrando a energia descrita na Eq.(28.11) ao longo do volume do corpo obtém-se:

$$U_i = \int_V \frac{\tau \gamma}{2} dV \quad (28.12)$$

Por meio da lei de Hooke, pode-se reescrever a equação anterior da seguinte maneira:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (28.13)$$

As Eq.(28.10) e Eq.(28.13) foram obtidas assumindo-se que o corpo em análise estava submetido a estados uniaxiais de tensão. Quando estados bidimensionais e tridimensionais de tensão estão presentes, a energia de deformação do corpo é obtida somando-se as parcelas de energia devido às tensões normal e de cisalhamento em

relação aos três eixos cartesianos. Assim, para o caso geral, pode-se escrever a energia de deformação do corpo da seguinte forma:

$$U_i = \int_V \left( \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} + \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} + \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2} + \frac{\tau_{xz} \gamma_{xz}}{2} \right) dV \quad (28.14)$$

Utilizando a lei de Hooke generalizada, pode-se substituir as deformações apresentadas na Eq.(28.14) por tensões. Por meio dessa substituição, esta equação pode ser assim reescrita:

$$U_i = \int_V \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right] dV \quad (28.15)$$

Com base na Eq.(28.15), a energia de deformação, para qualquer estrutura, pode ser obtida desde que as componentes de tensão sejam determinadas.

#### 28.4 – Energia de Deformação em Problemas Mecânicos Unidimensionais. Tração/Compressão, Cisalhamento Transversal, Torção e Flexão

Quando elementos de barra simples (treliças) estão submetidos à ação de carregamentos externos surgem esforços normais, os quais atuam no plano de sua seção transversal. Assumindo que a tensão normal mobilizada pelo esforço normal seja uniformemente distribuída no plano da seção transversal do elemento, pode-se escrever que  $\sigma = N/A$ , onde  $N$  é o esforço normal e  $A$  a área da seção transversal do elemento de barra simples. Portanto, com base na Eq.(28.15), pode-se obter a energia de deformação do elemento de barra simples por meio da seguinte relação:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV \Rightarrow U_i = \int_L \int_A \frac{N^2}{2EA^2} dA dL \Rightarrow U_i = \int_L \frac{N^2}{2EA} dL \quad (28.16)$$

Se  $N$ ,  $E$  e  $A$  forem constantes ao longo do comprimento da barra, como usualmente observado neste tipo de elemento, a expressão anterior simplifica-se como:

$$U_i = \frac{N^2 L}{2EA} \quad (28.17)$$

Conforme apresentado anteriormente neste curso (capítulos 17 e 18), esforços de flexão introduzem tensões normais no plano da seção transversal de um elemento de barra geral. Assim, a energia de deformação na flexão pode ser determinada utilizando a

Eq.(28.15). Sabendo que  $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$ , sendo  $y$  e  $z$  os eixos que definem o

plano da seção transversal do elemento e  $I$  o momento de inércia da seção, pode-se obter a energia de deformação de um elemento de barra geral fletido por meio da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 U_i &= \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV \Rightarrow U_i = \int_L \int_A \frac{1}{2E} \left( -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z \right)^2 dAdL \Rightarrow \\
 U_i &= \int_L \int_A \frac{1}{2E} \left( \frac{M_z^2}{I_z^2}y^2 - \frac{2M_zM_y}{I_zI_y}zy + \frac{M_y^2}{I_y^2}z^2 \right) dAdL \Rightarrow (28.18) \\
 U_i &= \int_L \int_A \frac{1}{2E} \frac{M_z^2}{I_z^2}y^2 dAdL + \int_L \int_A \frac{1}{2E} \frac{-2M_zM_y}{I_zI_y}zy dAdL + \int_L \int_A \frac{1}{2E} \frac{M_y^2}{I_y^2}z^2 dAdL
 \end{aligned}$$

Lembrando que:  $I_z = \int_A y^2 dA$ ,  $I_y = \int_A z^2 dA$  e  $I_{zy} = \int_A zy dA$ , pode-se reescrever a

Eq.(28.18) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 U_i &= \int_L \frac{1}{2E} \frac{M_z^2}{I_z^2} I_z dL + \int_L \frac{-1}{E} \frac{M_zM_y}{I_zI_y} I_{zy} dL + \int_L \frac{1}{2E} \frac{M_y^2}{I_y^2} I_y dL \Rightarrow \\
 U_i &= \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dL - \int_L \frac{1}{E} \frac{M_zM_y}{I_zI_y} I_{zy} dL + \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dL
 \end{aligned} \quad (28.19)$$

Deve-se enfatizar que se  $y$  e  $z$  forem eixos principais de inércia, o produto de inércia,  $I_{zy}$ , torna-se nulo e a energia de deformação fica determinada calculando-se apenas o primeiro e terceiro termos da Eq.(28.19).

A parcela, não nula, de energia de deformação associada à tensão de cisalhamento está presente em problemas de torção e de cisalhamento transversal. A determinação da intensidade da energia de deformação nestes problemas pode ser efetuada utilizando-se a Eq.(28.15). Para problemas envolvendo a torção de barras de seção transversal circular, sabe-se que a tensão de cisalhamento é obtida, conhecendo-se o momento de torção, por meio da relação:  $\tau = \frac{M_t}{I_t} \rho$ , onde  $I_t$  é o momento polar de

inércia e  $\rho$  a coordenada radial. Assim, para este problema, a energia de deformação pode ser determinada pela seguinte relação:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \Rightarrow U_i = \int_L \int_A \frac{1}{2G} \frac{M_t^2}{I_t^2} \rho^2 dAdL \quad (28.20)$$

Lembrando que:  $I_t = \int_A \rho^2 dA$ , para barras de seção transversal circular, pode-se reescrever a Eq.(28.20) da seguinte maneira:

$$U_i = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t^2} I_t dL \Rightarrow U_i = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t} dL \quad (28.21)$$

Já para barras de seções transversais vazadas de paredes finas, solicitadas à torção, pode-se empregar o equacionamento proposto por Bredt, conforme apresentado no capítulo 15. Nessa abordagem, as tensões de cisalhamento são calculadas utilizando-se a seguinte relação:  $\tau = \frac{M_t}{2tA_m}$ . Consequentemente, a energia de deformação associada

pode ser assim determinada:

$$U_i = \int \frac{\tau^2}{2G} dV \Rightarrow U_i = \int \int \frac{1}{2G} \frac{M_t^2}{4t^2 A_m^2} dA dL \Rightarrow U_i = \int_L \frac{M_t^2}{8GA_m^2} \left( \int_A \frac{1}{t^2} dA \right) dL \quad (28.22)$$

A Eq.(28.22) simplifica-se consideravelmente se a seção transversal vazada de paredes finas possuir espessura de parede constante. Nessa situação tem-se:

$$U_i = \int_L \frac{M_t^2}{8GA_m^2} \left( \int_A \frac{1}{t^2} dA \right) dL \Rightarrow U_i = \int_L \frac{M_t^2}{8GA_m^2 t^2} A dL \quad (28.23)$$

sendo  $A$  a área da seção transversal da barra.

Já no cisalhamento transversal, a tensão de cisalhamento e o esforço cortante estão relacionados por meio das seguintes expressões:  $\tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{I_z t_z}$ ,  $\tau_{xz} = \frac{V_z Q_y}{I_y t_y}$ , conforme apresentado no capítulo 19. Assim, com o auxílio da Eq.(28.15), a energia de deformação para elementos de barra geral submetidos à cisalhamento transversal pode ser assim obtida:

$$U_i = \int \frac{\tau^2}{2G} dV \Rightarrow U_i = \int \int \frac{V_y^2 Q_z^2}{2GI_z^2 t_z^2} dA dL + \int \int \frac{V_z^2 Q_y^2}{2GI_y^2 t_y^2} dA dL \Rightarrow \quad (28.24)$$

$$U_i = \int_L \frac{V_y^2}{2GI_z^2} \left( \int_A \frac{Q_z^2}{t_z^2} dA \right) dL + \int_L \frac{V_z^2}{2GI_y^2} \left( \int_A \frac{Q_y^2}{t_y^2} dA \right) dL$$

As integrais entre parêntesis mostradas na Eq.(28.24) devem ser avaliadas de acordo com a geometria da seção transversal considerada. Objetivando simplificar esta equação, pode-se introduzir uma grandeza denominada “fator de forma ao cisalhamento”, cuja intensidade é dada por:

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{t^2} dA \Rightarrow \int_A \frac{Q^2}{t^2} dA = \frac{I^2}{A} f_s \quad (28.25)$$

Substituindo o resultado apresentado na Eq.(28.25) na Eq.(28.24) obtém-se:

$$U_i = \int_L \frac{f_s^y V_y^2}{2GA} dL + \int_L \frac{f_s^z V_z^2}{2GA} dL \quad (28.26)$$

O fator de forma ao cisalhamento,  $f_s$ , depende unicamente da geometria da seção transversal da barra em análise. Para as seções transversais comumente utilizadas, este fator pode ser obtido com o uso de tabelas como a apresentada a seguir.

Tabela 28.1 Fator de forma ao cisalhamento.

Geometria da Seção Transversal	$f_s$
Retangular	$\frac{6}{5}$
Circular Maciça	$\frac{10}{9}$
Circular Vazada de Paredes Finas	2
Perfil I ou Retangular Vazado de Paredes Finas	$\frac{A_{seção}}{A_{alma}}$

### 28.5 – Exemplo 1

Determine a energia de deformação da estrutura apresentada na Fig.(28.6). Trata-se de um pórtico tridimensional solicitado por ações concentradas, em seu nó C, e uma distribuída ao longo da barra BC, sendo engastado em seu nó A. O material que compõem esta estrutura possui  $E = 210GPa$  e  $G = 80,7GPa$ . Além disso, este pórtico possui seção transversal circular maciça de diâmetro igual a 30 cm.

Para que os diagramas de esforços solicitantes da estrutura sejam traçados, deve-se isolar cada uma das barras que compõem o pórtico tridimensional e em seguida determinar os valores das ações em suas extremidades. Com base nessa informação, nos carregamentos atuantes nas barras e nas relações diferenciais, estes diagramas podem ser construídos.

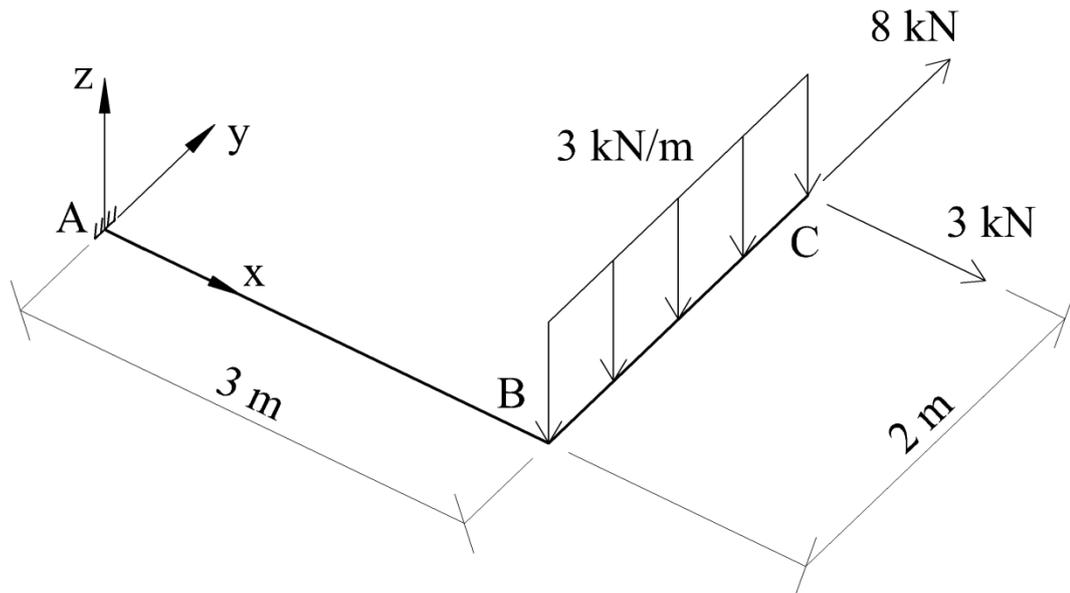


Figura 28.6 Estrutura a ser analisada.

Para a estrutura considerada, esse procedimento será iniciado pela barra BC. Esta barra, assim como os carregamentos sobre ela atuantes, está apresentada na Fig. (28.7). Impondo-se a condição de equilíbrio de corpo rígido a esta barra, obtêm-se os valores das ações em seus extremos, os quais são iguais a:

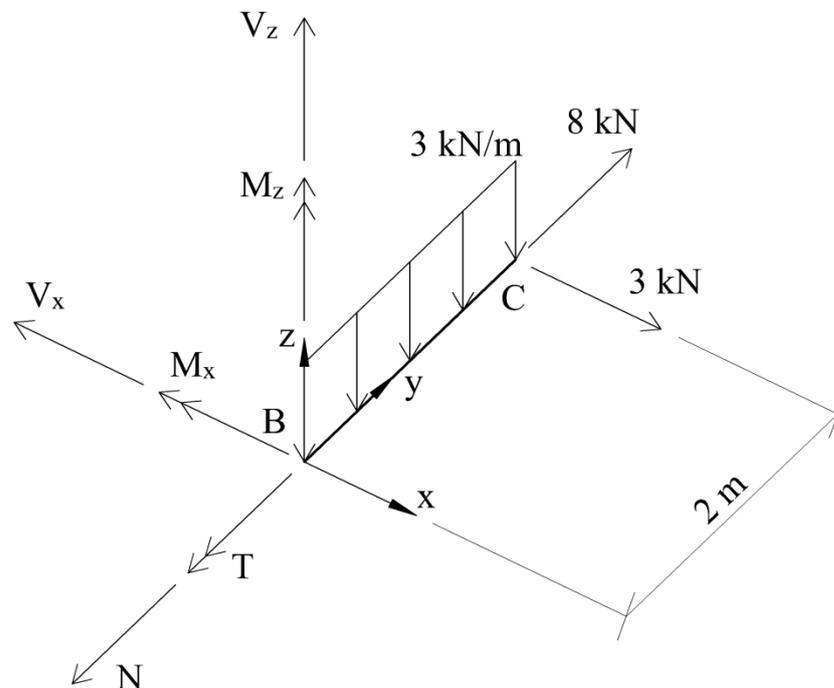


Figura 28.7 Barra BC.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -V_x + 3 = 0 &\Rightarrow V_x = 3kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N + 8 = 0 &\Rightarrow N = 8kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow V_z - 3 \cdot 2 = 0 &\Rightarrow V_z = 6kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow -M_x - 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 0 &\Rightarrow M_x = -6kNm \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow T = 0 \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z - 3 \cdot 2 = 0 &\Rightarrow M_z = 6kNm \end{aligned}$$

Com base nas ações atuantes nos extremos dessa barra, nos carregamentos atuantes e nas relações diferenciais, observa-se que os esforços cortantes, nas direções  $x$  e  $z$ , possuem variação constante e linear, respectivamente. Esse tipo de variação se deve à ausência e a presença, respectivamente, de carregamentos distribuídos nestas direções. Consequentemente, os momentos fletores atuantes em torno dos eixos  $x$  e  $z$  possuem variação quadrática e linear, respectivamente. O esforço normal será trativo e constante, enquanto que os esforços de torção na barra são nulos. Com base nestes comentários, os diagramas de esforços solicitantes para a barra analisada podem ser construídos, os quais estão apresentados na Fig. (28.8).

A partir dos diagramas de esforços solicitantes apresentados na Fig. (28.8) pode-se determinar a energia de deformação da barra BC da seguinte forma:

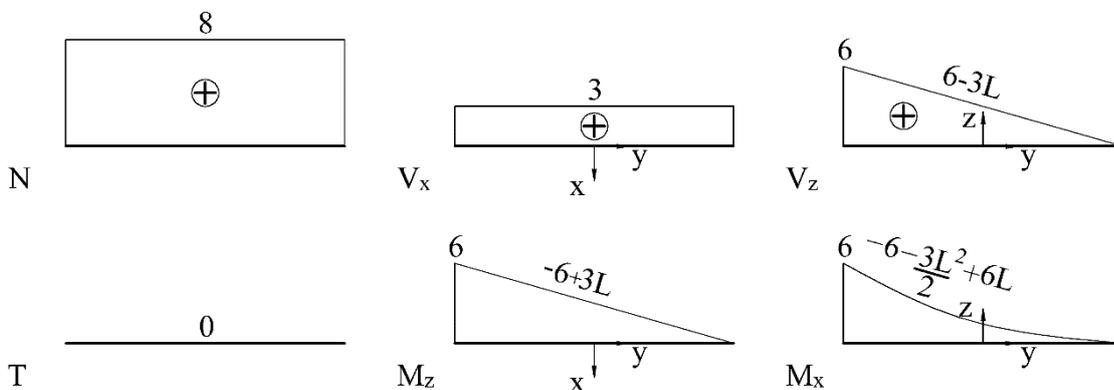


Figura 28.8 Diagramas de esforços solicitantes para a barra BC.

$$\begin{aligned}
U_i &= \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dL + \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dL + \int_0^L \frac{M_x^2}{2EI_x} dL + \int_0^L \frac{M_t^2}{2GI_t} dL + \int_0^L \frac{f_s^z V_z^2}{2GA} dL + \int_0^L \frac{f_s^x V_x^2}{2GA} dL \Rightarrow \\
U_i &= \int_0^2 \frac{(8)^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (0,15)^2} dL + \int_0^2 \frac{(-6+3L)^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0,15)^4} dL + \\
&\int_0^2 \frac{\left(-6+6L-\frac{3}{2}L^2\right)^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0,15)^4} dL + 0 + \int_0^2 \frac{\frac{10}{9}(6-3L)^2}{2 \cdot 80,7 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (0,15)^2} dL + \\
&\int_0^2 \frac{\frac{10}{9}(3)^2}{2 \cdot 80,7 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (0,15)^2} dL \Rightarrow \\
U_i &= \int_0^2 2,1558 \cdot 10^{-6} dL + \int_0^2 \frac{36-36L+9L^2}{166990,3594} dL + \\
&\int_0^2 \frac{36-72L+54L^2-18L^3+\frac{9}{4}L^4}{166990,3594} dL + \int_0^2 \frac{\frac{10}{9}(36-36L+9L^2)}{11408357,25} dL + \\
&\int_0^2 \frac{10}{11408357,25} dL \Rightarrow \\
U_i &= \left[ 2,1558 \cdot 10^{-6} L \right]_0^2 + \left[ \frac{36L-18L^2+3L^3}{166990,3594} \right]_0^2 + \\
&\left[ \frac{36L-36L^2+18L^3-\frac{9}{2}L^4+\frac{9}{20}L^5}{166990,3594} \right]_0^2 + \left[ \frac{\frac{10}{9}(36L-18L^2+3L^3)}{11408357,25} dL \right]_0^2 + \\
&\left[ \frac{10L}{11408357,25} \right]_0^2 \Rightarrow \\
U_i &= 4,3116 \cdot 10^{-6} + 1,4372 \cdot 10^{-4} + 8,6233 \cdot 10^{-5} + 2,3375 \cdot 10^{-6} + 1,7531 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \\
U_i &= 2,3836 \cdot 10^{-4} \text{ kNm}
\end{aligned}$$

Com base na energia de deformação calculada anteriormente, verifica-se que os esforços de flexão contribuem com 96,48% da energia de deformação total. Já os esforços cortantes correspondem a 1,72% da energia de deformação da barra analisada, enquanto que o esforço normal responde por 1,80%. Portanto, para essa barra, constata-se que a energia de deformação associada aos esforços de flexão representa a parcela de maior importância em relação à energia de deformação total da barra.

Depois de finalizado o processo de determinação da energia de deformação da barra BC, pode-se determinar a energia de deformação associada à barra AB. Para tal

finalidade, deve-se considerar o diagrama de corpo livre dessa barra, o qual considera as ações determinadas no extremo B da barra BC reaplicadas com sentidos opostos no extremo B da barra AB, como ilustrado na Fig. (28.9). Impondo sobre as ações apresentadas nessa figura as condições de equilíbrio de corpo rígido obtém-se:

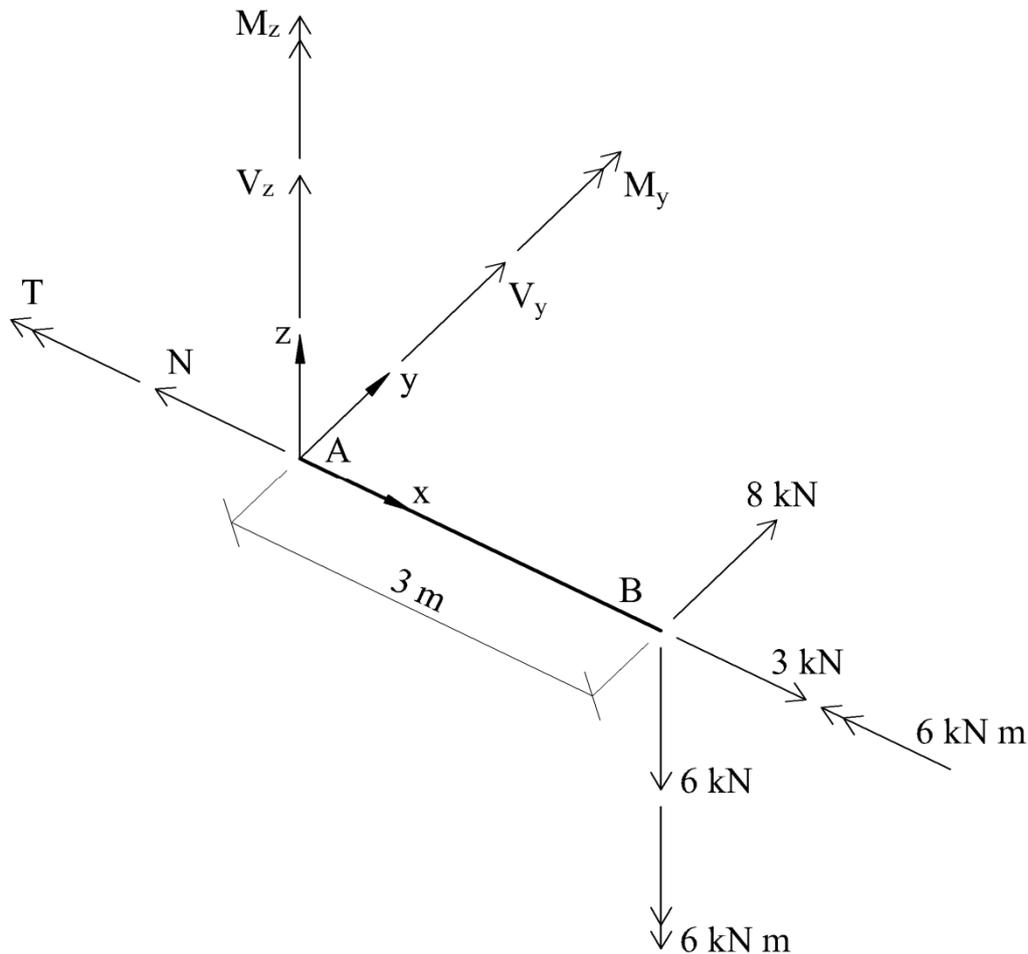


Figura 28.9 Barra AB.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N + 3 = 0 &\Rightarrow N = 3kN \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_y + 8 = 0 &\Rightarrow V_y = -8kN \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow V_z - 6 = 0 &\Rightarrow V_z = 6kN \\ \sum M_x = 0 &\Rightarrow -T - 6 = 0 &\Rightarrow T = -6kNm \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow M_y + 6 \cdot 3 = 0 &\Rightarrow M_y = -18kNm \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow M_z + 8 \cdot 3 - 6 = 0 &\Rightarrow M_z = -18kNm \end{aligned}$$

A partir dos valores das ações determinados anteriormente, pode-se construir os diagramas de esforços solicitantes da barra AB. Constata-se que os esforços cortantes nessa barra apresentarão variação constante ao longo do comprimento da barra,

enquanto os momentos fletores possuirão variação linear. Esse tipo de comportamento, segundo as relações diferenciais, deve-se à ausência de carregamentos distribuídos ao longo do comprimento da barra. Já o esforço normal e momento torçor apresentarão variação constante ao longo do comprimento da barra sendo iguais a 3 kN e -6 kNm, respectivamente. Com base nessas informações, os diagramas de esforços solicitantes podem ser traçados, sendo os mesmos apresentados na Fig. (28.10).

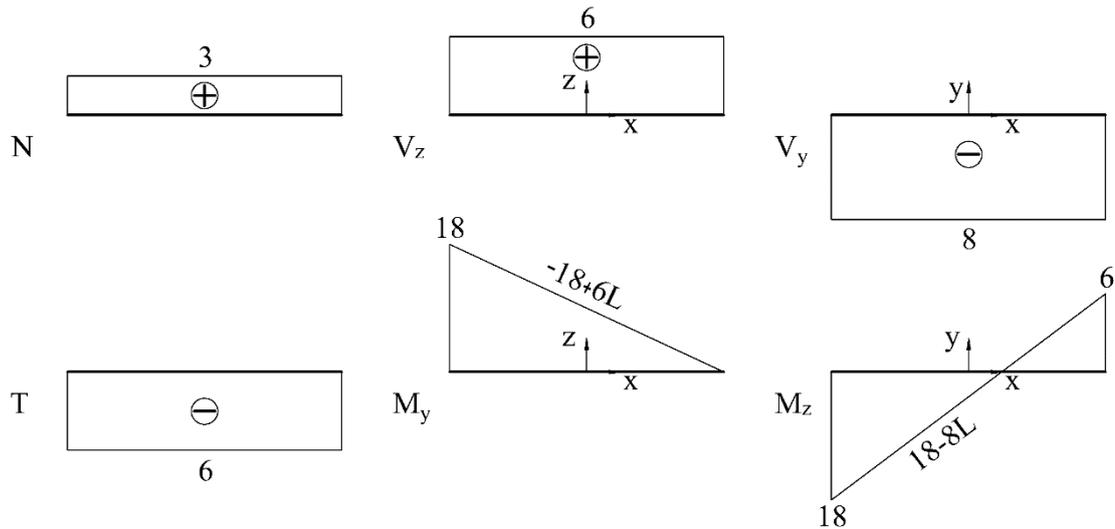


Figura 28.10 Diagramas de esforços solicitantes para a barra AB.

Considerando os diagramas de esforços solicitantes mostrados na Fig. (28.10), pode-se determinar a energia de deformação associada à barra AB por meio das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 U_i &= \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dL + \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dL + \int_0^L \frac{M_y^2}{2EI_y} dL + \int_0^L \frac{M_t^2}{2GI_t} dL + \int_0^L \frac{f_s^z V_z^2}{2GA} dL + \int_0^L \frac{f_s^y V_y^2}{2GA} dL \Rightarrow \\
 U_i &= \int_0^3 \frac{(3)^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (0,15)^2} dL + \int_0^3 \frac{(18-8L)^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0,15)^4} dL + \\
 &\int_0^3 \frac{(-18+6L)^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0,15)^4} dL + \int_0^3 \frac{(-6)^2}{2 \cdot 80,7 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (0,15)^4} dL + \\
 &\int_0^3 \frac{\frac{10}{9}(6)^2}{2 \cdot 80,7 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (0,15)^2} dL + \int_0^3 \frac{\frac{10}{9}(-8)^2}{2 \cdot 80,7 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot (0,15)^2} dL \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_i &= \int_0^3 3,0316 \cdot 10^{-7} dL + \int_0^3 \frac{324 - 288L + 64L^2}{166990,3594} dL + \int_0^3 \frac{324 - 216L + 36L^2}{166990,3594} dL + \\
&\int_0^3 2,8050 \cdot 10^{-4} dL + \int_0^3 3,5062 \cdot 10^{-6} dL + \int_0^3 6,2332 \cdot 10^{-6} dL \quad \Rightarrow \\
U_i &= \left[ 3,0316 \cdot 10^{-7} L \right]_0^3 + \left[ \frac{324L - 144L^2 + \frac{64}{3} L^3}{166990,3594} \right]_0^3 + \left[ \frac{324L - 108L^2 + 12L^3}{166990,3594} \right]_0^3 + \\
&\left[ 2,8050 \cdot 10^{-4} L \right]_0^3 + \left[ 3,5062 \cdot 10^{-6} L \right]_0^3 + \left[ 6,2332 \cdot 10^{-6} L \right]_0^3 \quad \Rightarrow \\
U_i &= 9,0948 \cdot 10^{-7} + 1,5091 \cdot 10^{-3} + 1,9402 \cdot 10^{-3} + 8,415 \cdot 10^{-4} + 1,0519 \cdot 10^{-5} + \\
&1,8700 \cdot 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad U_i = 4,3209 \cdot 10^{-3} \text{ kNm}
\end{aligned}$$

A partir da energia de deformação determinada anteriormente para a barra AB, constata-se que a energia de deformação associada à flexão corresponde a 79,83% da energia de deformação total da barra, enquanto as parcelas de energia associadas aos esforços normal, cortante e torção são, respectivamente, iguais a 0,02%, 0,68% e 19,47%.

Dessa forma, a energia de deformação total da estrutura é igual a:

$$\begin{aligned}
U_i &= U_i^{AB} + U_i^{BC} \quad \Rightarrow \quad U_i = 4,3209 \cdot 10^{-3} + 2,3836 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \\
U_i &= 4,5593 \cdot 10^{-3} \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad U_i = 4,5593 \cdot 10^{-3} \text{ kJ} \quad \Rightarrow \quad U_i = 4,5593 \text{ J}
\end{aligned}$$

## 28.6 – Conservação de Energia

Em um sistema formado por carregamentos externos e elementos estruturais tem-se a presença de parcelas de energia externa, devidas ao carregamento externo, e parcelas de energia de deformação (interna), devidas às deformações no corpo. Portanto, um balanço de energia deve ser efetuado de forma que a transformação entre as energias envolvidas seja consistentemente formulada. Assumindo que o carregamento externo seja aplicado em regime quase-estático, parcelas de energia cinética (externa e interna) podem ser desprezadas. Além disso, se parcelas de energia associadas a reações químicas, calor, entre outras, forem também desprezadas, toda a energia decorrente do trabalho de forças externas será armazenada na estrutura por meio da energia de deformação.

Dessa forma, pode-se definir a conservação de energia por meio da seguinte relação:

$$U_e = U_i \quad (28.27)$$

A Eq.(28.27) pode ser aplicada à análise da determinação do deslocamento de estruturas. Tomando, por exemplo, a treliça plana apresentada na Fig. (28.11), a qual é bi apoiada e submetida a uma força concentrada  $\mathbf{P}$ , pode-se determinar o deslocamento do ponto de aplicação da força  $\mathbf{P}$  na direção de atuação desta força, com base na conservação de energia, da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} P \Delta = \sum_{i=1}^{Nel} \frac{N^2 L}{2EA} \quad (28.28)$$

sendo  $Nel$  o número de barras da treliça.

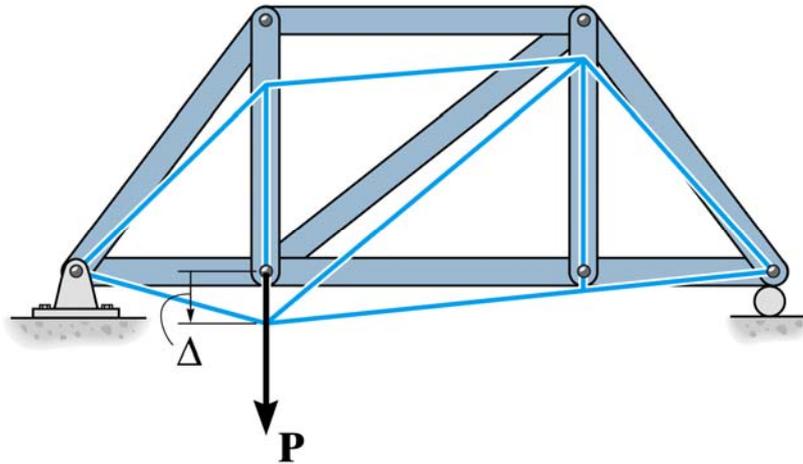


Figura 28.11 Treliça plana. Princípio da conservação de energia.

Se uma viga engastada solicitada por um momento  $M_0$  for considerada, como apresentado na Fig. (28.12), a conservação de energia permite a determinação da rotação no ponto de aplicação do momento da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} M_0 \theta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dL \quad (28.29)$$

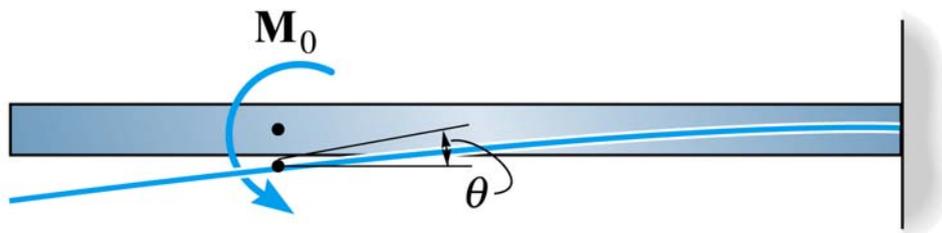


Figura 28.12 Viga. Princípio da conservação de energia.

Deve-se destacar que a aplicação da Eq.(28.27), e conseqüentemente Eq.(28.28) e Eq.(28.29), é bastante limitada, uma vez que o deslocamento só pode ser calculado no ponto e na direção de atuação da força externa ou do momento externo aplicado. Se mais de uma força externa ou momento externo forem aplicados, o trabalho externo de cada carregamento envolveria seu deslocamento/rotação desconhecido associado. Assim, todos os deslocamentos associados não poderiam ser determinados já que apenas uma equação, Eq.(28.27), é disponível. Porém, apesar de limitado, esse princípio é a base para métodos mais robustos de determinação de deslocamentos em estruturas complexas.

### 28.7 – Exemplo 2

Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga **P** da viga engastada apresentada na Fig. (28.13).

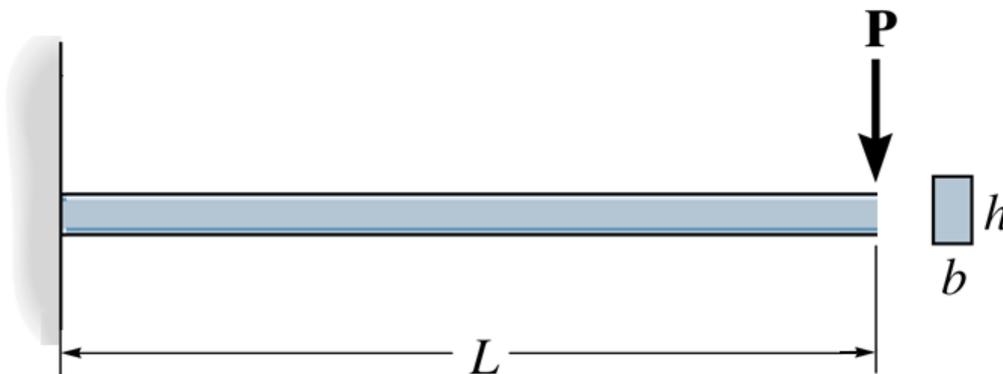


Figura 28.13 Viga engastada.

Com base em uma análise estática, a qual será omitida nesse exemplo por simplicidade, pode-se determinar as seguintes equações para o momento fletor e o esforço cortante atuantes na viga considerada:

$$M = Px - PL$$

$$V = P$$

Portanto, aplicando o princípio da conservação de energia tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P\Delta &= \int_0^L \frac{f_s V^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \Rightarrow \frac{1}{2} P\Delta = \int_0^L \frac{6}{5} \frac{P^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{(Px - PL)^2}{2EI} dx \Rightarrow \\ \frac{1}{2} P\Delta &= \int_0^L \frac{3P^2}{5GA} dx + \int_0^L \frac{(P^2 L^2 - 2P^2 Lx + P^2 x^2)}{2EI} dx \Rightarrow \\ \frac{1}{2} P\Delta &= \left[ \frac{3P^2 x}{5GA} \right]_0^L + \left[ \frac{(P^2 L^2 x - P^2 Lx^2 + \frac{P^2 x^3}{3})}{2EI} \right]_0^L \Rightarrow \Delta = \frac{6PL}{5GA} + \frac{PL^3}{3EI} \end{aligned}$$

O deslocamento vertical para o ponto de aplicação da carga **P** dado pela solução da linha elástica é igual a  $\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$ . Verifica-se que, por meio da abordagem de energia, esse deslocamento é ligeiramente maior, já que, via energia, a contribuição ao deslocamento vertical devido ao esforço cortante é levada em consideração. Porém, como mostrado no exemplo anterior desse capítulo, a contribuição de energia referente ao esforço cortante é pequena, podendo, em grande parte dos problemas de engenharia, ser desprezada.

### 28.8 – Cargas Decorrentes de Impacto

Até o presente momento, assumiu-se que os carregamentos aplicados às estruturas comportavam-se em regime quase estático. Assim, assumiu-se que a intensidade destes carregamentos era gradualmente aumentada até seu valor máximo, a partir do qual permaneciam constantes. Apesar de diversos tipos de carregamentos enquadrarem-se nesta categoria, outros não o são. Entre as exceções, podem ser citados os carregamentos decorrentes de impacto. Neste tipo de carregamento, um objeto atinge outro de modo que forças de grande intensidade são desenvolvidas em um espaço muito curto de tempo.

Problemas mecânicos envolvendo cargas de impacto podem ser resolvidos utilizando o princípio da conservação de energia, desde que parcelas de energia não sejam dissipadas durante o processo de impacto. Assumir esta hipótese significa realizar uma análise conservadora, já que toda a energia externa decorrente do carregamento de impacto será transferida para o corpo em forma de energia de deformação ou interna. As

dissipações de energia tais como produção de calor e som reduzem a intensidade da energia a ser absorvida pelo corpo.

Nos problemas mecânicos envolvendo impacto, a energia externa devida à carga de impacto deve ser consistentemente descrita. Quando um objeto, de peso igual a  $W$ , é solto de sua posição de repouso e cai uma distância  $h$  atingindo um elemento estrutural, o qual desloca-se  $\Delta_{imp}$  no ponto de contato entre o elemento estrutura e o objeto, pode-se descrever a energia externa, conforme os conhecimentos da física, por meio da seguinte relação:

$$U_e = W(h + \Delta_{imp}) \quad (28.30)$$

Alternativamente, se o objeto não estiver em repouso, sua energia cinética será igual a energia externa. Assim, assumindo que o objeto esteja a uma velocidade  $v$  antes da colisão, pode-se escrever a energia externa, com base nos conhecimentos da física, da seguinte forma:

$$U_e = \frac{1}{2} \left( \frac{W}{g} \right) v^2 \quad (28.31)$$

onde  $g$  representa a aceleração da gravidade, a qual pode ser tomada igual a  $9,8 \frac{m}{s^2}$ .

$\frac{W}{g}$  indica a massa do objeto.

### 28.9 – Exemplo 3

Um tubo de alumínio é utilizado para suportar uma carga de 600 kN. Determine o deslocamento máximo no topo do tubo se a carga for aplicada gradualmente, de forma quase estática, ou se for aplicada repentinamente, sob a forma de impacto, sendo solta do topo do tubo, ou seja,  $h=0$ . O tubo bem como suas dimensões estão apresentados na Fig. (28.14). Considere que  $E=70$  GPa.

Assumindo, primeiramente, que o carregamento seja aplicado em regime quase estático, pode-se utilizar o princípio da conservação de energia, o qual permite escrever que:

$$U_e = U_i \Rightarrow \frac{1}{2} P \Delta_{MAX} = \frac{N^2 L}{2EA} \Rightarrow \frac{1}{2} 600 \Delta_{MAX} = \frac{600^2 \cdot 0,240}{2 \cdot 70 \cdot 10^6 \cdot \pi (0,06^2 - 0,05^2)} \Rightarrow$$

$$\Delta_{MAX} = 5,953 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

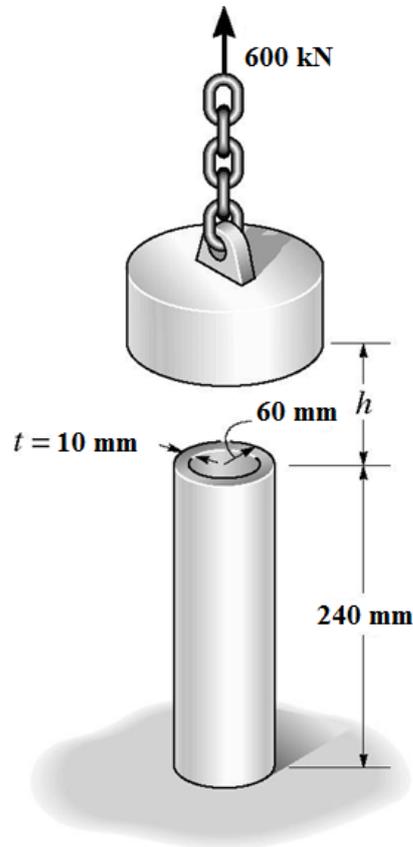


Figura 28.14 Tubo a ser analisado.

Para que os efeitos de impacto sejam considerados, a energia externa deve ser descrita pela Eq.(28.30). Portanto, pode-se determinar o deslocamento no topo do tubo considerando a aplicação repentina do carregamento por meio das seguintes relações:

$$U_e = U_i \Rightarrow P(h + \Delta_{MAX}) = \int_0^L \int_0^A \frac{\sigma \varepsilon}{2} da dL \Rightarrow P(h + \Delta_{MAX}) = \int_0^L \frac{\sigma \varepsilon A}{2} dL \Rightarrow$$

Aplicando a lei de Hooke e a definição de deformação normal tem-se:

$$P(h + \Delta_{MAX}) = \int_0^L \frac{EA \varepsilon^2}{2} dL \Rightarrow P(h + \Delta_{MAX}) = \frac{EA}{2} \left( \frac{\Delta_{MAX}}{L} \right)^2 L \Rightarrow$$

$$P(h + \Delta_{MAX}) = \frac{EA}{2L} \Delta_{MAX}^2$$

O primeiro termo apresentado na última expressão refere-se a energia externa devida ao carregamento de impacto, a qual será integralmente transferida à estrutura. Como  $h=0$  tem-se:

$$\frac{EA}{2L} \Delta_{MAX}^2 - P \Delta_{MAX} = 0 \Rightarrow \Delta_{MAX} = \frac{2 \cdot 600 \cdot 0,240}{70 \cdot 10^6 \cdot \pi (0,06^2 - 0,05^2)} \Rightarrow$$

$$\Delta_{MAX} = 1,1906 \cdot 10^{-3} m$$

Deve-se enfatizar que o deslocamento obtido considerando os efeitos de impacto resultou o dobro do obtido assumindo o carregamento aplicado em regime quase estático. Portanto, os efeitos de impacto devem ser cuidadosamente avaliados em situações reais.

### 28.10 – Exemplo 4

A viga apresentada na Fig. (28.15) é submetida a um carregamento de intensidade igual a  $W=6,0$  kN, o qual é aplicado no centro de seu vão. Determine o deslocamento máximo da viga e sua tensão normal máxima desprezando e considerando os efeitos de impacto. Considere que o peso é solto de uma altura igual a  $h=50$  mm. Além disso, o material que compõem a viga possui  $E=210$  GPa. A viga possui comprimento igual a 5 m e sua seção transversal, a qual é duplamente simétrica, tem momento de inércia igual a  $I=87,3 \cdot 10^6$  mm<sup>4</sup> e altura de 252 mm.

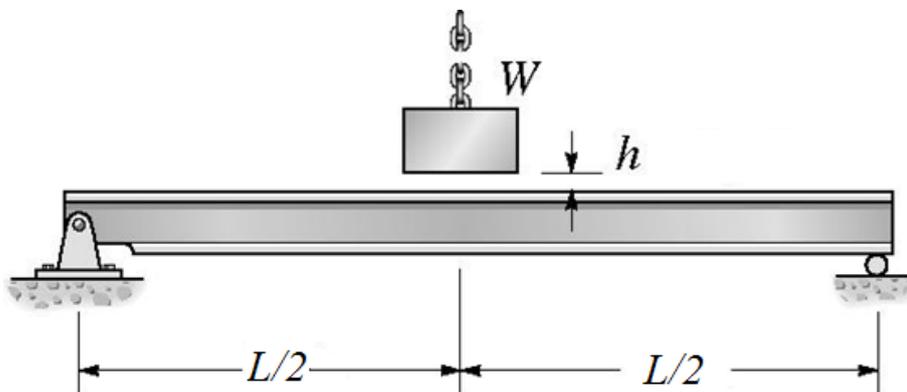


Figura 28.15 Viga a ser analisada.

Considerando, inicialmente, que o carregamento seja aplicado em regime quase estático, pode-se escrever a equação de conservação de energia da seguinte forma:

$$U_e = U_i \Rightarrow \frac{1}{2} P \Delta_{MAX} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dL$$

Devido a simetria da estrutura e das condições de contorno, verifica-se que suas reações de apoio são iguais a 3,0 kN orientadas no sentido vertical para cima. Assim, as

equações que descrevem a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga podem ser facilmente escritas, as quais são iguais a:

$$\begin{aligned} M(x) &= 3,0x & \text{kNm} & & \text{para } 0 \leq x \leq L/2 \\ M(x) &= 3,0x - 6,0(x - 2,5) & & & \text{para } L/2 \leq x \leq L \\ M(x) &= -3,0x + 15 & \text{kNm} & & \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P \Delta_{MAX} &= \int_0^{2,5} \frac{(3,0x)^2}{2EI} dL + \int_{2,5}^{5,0} \frac{(-3,0x + 15)^2}{2EI} dL & \Rightarrow \\ \frac{1}{2} P \Delta_{MAX} &= \frac{93,75}{2EI} \Rightarrow \Delta_{MAX} = \frac{2}{6,0} \frac{93,75}{2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 87,3 \cdot 10^{-6}} & \Rightarrow \\ \Delta_{MAX} &= 8,523 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

Com base nas equações que descrevem a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga, verifica-se que o momento máximo ocorre no centro do vão, sendo igual a  $M = 7,5 \text{ kNm}$ . Assim, a tensão normal máxima considerando o carregamento aplicado em condição quase estática é igual a:

$$\sigma_{MAX} = -\frac{M}{I} y \Rightarrow \sigma_{MAX} = -\frac{7,5}{87,3 \cdot 10^{-6}} \left( -\frac{0,252}{2} \right) \Rightarrow \sigma_{MAX} = 10824,74 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Para que os efeitos mecânicos decorrentes do impacto sejam considerados, deve-se avaliar consistentemente a parcela de energia decorrente do carregamento externo. Assim, com base na Eq.(28.30), pode-se escrever que:

$$U_e = U_i \Rightarrow P(h + \Delta_{MAX}) = \int_0^L \int_0^A \frac{\sigma \varepsilon}{2} da dL \Rightarrow P(h + \Delta_{MAX}) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dL \quad (28.32)$$

Com base nos conceitos de linha elástica, apresentados no capítulo 21, pode-se obter uma expressão que descreva o deslocamento dos pontos materiais que compõem a viga em análise em função do momento fletor atuante. Aplicando estes conceitos, os quais serão aqui omitidos com o objetivo de evitar a introdução de conteúdo repetitivo, obtém-se a expressão que governa o deslocamento dos pontos da viga em análise, a qual é igual a:

$$v(x) = \frac{-Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq L/2 \quad (28.33)$$

Deve-se ressaltar que o sinal negativo que surgiu na última equação indica apenas que o referido deslocamento ocorre na direção vertical com sentido para baixo. Considerando a equação que descreve o deslocamento da viga, Eq.(28.33), podem ser

obtidas as expressões que descrevem a rotação  $v'(x)$  e a curvatura  $v''(x)$  dos pontos materiais que compõem a viga em análise. Estas expressões são as seguintes:

$$v'(x) = \frac{-3PL^2}{48EI} + \frac{12Px^2}{48EI} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$v''(x) = \frac{24Px}{48EI} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

O deslocamento máximo na viga ocorre no centro de seu vão. Assim, com base na Eq.(28.33), este deslocamento possui a seguinte intensidade:

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \Delta_{MAX} = \frac{-P \frac{L}{2}}{48EI} \left[ 3L^2 - 4\left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] \Rightarrow \Delta_{MAX} = \frac{-PL^3}{48EI} \quad (28.34)$$

Utilizando a última equação, pode-se expressar o deslocamento máximo em função da carga  $P$ . Assim:

$$\Delta_{MAX} = \frac{-PL^3}{48EI} \Rightarrow P = -\frac{\Delta_{MAX} 48EI}{L^3}$$

Dessa forma, a curvatura da viga  $v''(x)$  pode ser reescrita na seguinte forma:

$$v''(x) = \frac{24Px}{48EI} \Rightarrow v''(x) = \frac{24x}{48EI} \left( -\frac{\Delta_{MAX} 48EI}{L^3} \right) \Rightarrow$$

$$v''(x) = -\frac{24x}{L^3} \Delta_{MAX} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

Com base nos conceitos de linha elástica apresentados no capítulo 21, verifica-se que o momento fletor está ligado à curvatura de vigas fletidas por meio da relação  $v'' = \frac{M}{EI}$ . Portanto, pode-se expressar o momento fletor atuante na viga em função de seu deslocamento máximo da seguinte maneira:

$$v'' = \frac{M}{EI} \Rightarrow -\frac{24x}{L^3} \Delta_{MAX} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M = -\frac{24EIx}{L^3} \Delta_{MAX} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

Portanto, considerando a última equação, a Eq.(28.32) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$P(h + \Delta_{MAX}) = 2 \int_0^{L/2} \frac{M^2}{2EI} dL \Rightarrow P(h + \Delta_{MAX}) = 2 \int_0^{L/2} \frac{\left( -\frac{24EIx}{L^3} \Delta_{MAX} \right)^2}{2EI} dL \Rightarrow$$

$$P(h + \Delta_{MAX}) = 2 \int_0^{2,5} \frac{576EI\Delta_{MAX}^2 x^2}{2L^6} dL \Rightarrow 6(0,050 + \Delta_{MAX}) = 3519,936\Delta_{MAX}^2 \Rightarrow$$

$$3519,936\Delta_{MAX}^2 - 6\Delta_{MAX} - 0,3 = 0$$

As raízes que atendem a última equação podem ser determinadas como:

$$\Delta_{MAX1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3519,936 \cdot (-0,3)}}{2 \cdot 3519,936} \Rightarrow \Delta_{MAX1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4259,923}}{7039,872}$$

$$\Delta_{MAX1} = \frac{6 + \sqrt{4259,923}}{7039,872} \Rightarrow \Delta_{MAX1} = 1,012 \cdot 10^{-2} m$$

$$\Delta_{MAX2} = \frac{6 - \sqrt{4259,923}}{7039,872} \Rightarrow \Delta_{MAX2} = -8,419 \cdot 10^{-3} m$$

Com base nas considerações efetuadas neste capítulo relacionadas à conservação de energia, verifica-se que o deslocamento  $\Delta_{MAX1}$  ocorre na direção vertical com o mesmo sentido de aplicação do carregamento, ou seja, para baixo. Essa conclusão pode ser obtida devido ao sinal associado ao valor de  $\Delta_{MAX1}$ , o qual é positivo. Já o deslocamento  $\Delta_{MAX2}$ , que apresenta sinal negativo, ocorre também na direção vertical, mas com sentido oposto ao da aplicação do carregamento, ou seja, para cima. Portanto, para que o deslocamento calculado tenha consistência com o problema tratado, o deslocamento solução do problema é  $\Delta_{MAX1}$ . Dessa forma, o deslocamento máximo devido a ação do impacto é  $\Delta_{MAX1} = \Delta_{MAX} = 1,012 \cdot 10^{-2} m$ .

Com base em uma análise estática simples, verifica-se que o momento fletor atuante no centro do vão é igual a  $M = \frac{PL}{4}$ . Assim, utilizando a Eq.(28.34), pode-se determinar o valor do momento fletor equivalente, o qual considera a influência do carregamento de impacto, em função do deslocamento máximo. Assim:

$$\Delta_{MAX} = \frac{-PL^3}{48EI} \Rightarrow \Delta_{MAX} = \frac{-L^2}{12EI} \frac{PL}{4} \Rightarrow \Delta_{MAX} = \frac{-L^2}{12EI} M \Rightarrow M = \frac{-12EI}{L^2} \Delta_{MAX}$$

Deve-se lembrar que, pelo sistema de coordenadas convencionado para o desenvolvimento do equacionamento da linha elástica, os deslocamentos na direção vertical com sentido para baixo recebem sinal negativo. O leitor pode consultar o capítulo 21 para maiores informações. Portanto, para a determinação da intensidade do momento fletor atuante, conforme apresentado na última equação,  $\Delta_{MAX}$  deve receber um sinal negativo. Dessa forma:

$$M = \frac{-12EI}{L^2} \Delta_{MAX} \Rightarrow M = \frac{-12 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 87,3 \cdot 10^{-6}}{5^2} (-1,012 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow$$

$$M = 89,054 \text{ kNm}$$

Portanto, a tensão normal máxima, considerando os efeitos de impacto, pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\sigma_{MAX} = -\frac{M}{I} y \Rightarrow \sigma_{MAX} = -\frac{89,054}{87,3 \cdot 10^{-6}} \left( -\frac{0,252}{2} \right) \Rightarrow \sigma_{MAX} = 128532,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Deve-se ressaltar que a tensão normal e o deslocamento máximos são consideravelmente maiores quando os efeitos de impacto são considerados. Portanto, tal efeito mecânico deve ser cuidadosamente avaliado em aplicações práticas.

### 28.11 – Exemplo 5

Um vagão ferroviário tem massa de 80 toneladas e move-se a uma velocidade  $v = 0,2 \text{ m/s}$  quando atinge um poste de aço, cuja seção transversal é quadrada de lado igual a 200 mm, conforme apresenta a Fig.(28.16). Determine o deslocamento horizontal no ponto de impacto do poste devido ao impacto. Considere que o material que compõe o poste possua  $E=200 \text{ GPa}$ .

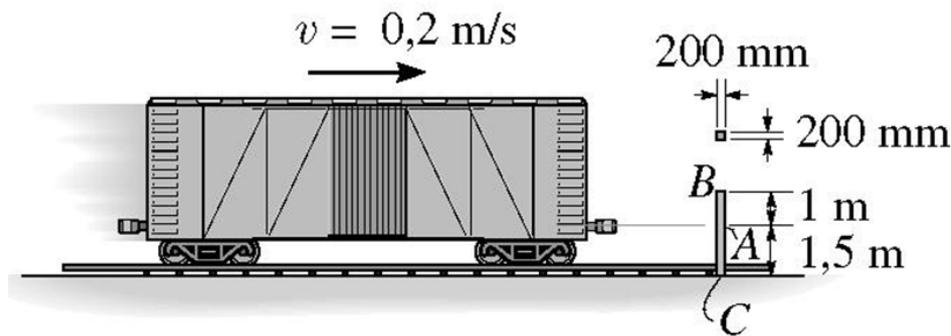


Figura 28.16 Sistema considerado.

Neste problema será assumida a conservação de energia, sendo a energia cinética do vagão totalmente absorvida pelo poste. A transformação da energia cinética em energia estática equivalente conduz, conforme apresentado na Eq.(28.31), a:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P\Delta_A \quad (28.35)$$

O poste pode ser representado por meio de uma viga engastada em um extremo, ponto C, e livre no extremo oposto, ponto B. Além disso, o carregamento devido ao impacto do vagão pode ser representado considerando uma força pontual, a qual é aplicada no ponto A conforme mostrado na Fig. (28.16).

Com base nos conceitos da linha elástica, os quais foram apresentados no capítulo 21, pode-se determinar uma expressão que relacione a intensidade da força pontual aplicada à intensidade do deslocamento perpendicular ao eixo da viga em seu ponto de aplicação. Utilizando esta teoria, a qual não será desenvolvida durante a resolução deste exercício para evitar conteúdo repetitivo, obtém-se o valor do deslocamento do ponto A em função da intensidade da força de impacto. Dessa forma, pode-se relacionar  $P$  a  $\Delta_A$  por meio da seguinte equação:

$$\Delta_A = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow P = \frac{3EI}{L^3} \Delta_A$$

sendo  $P$  a intensidade da força externa no ponto de aplicação.

Assim, a Eq.(28.35) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P\Delta_A \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3EI}{L^3}\Delta_A\right)\Delta_A \Rightarrow \Delta_A = \sqrt{\frac{mv^2L^3}{3EI}} \Rightarrow$$

$$\Delta_A = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^3 (0,2)^2 1,5^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{0,2 \cdot 0,2^3}{12}\right)}} \Rightarrow \Delta_A = 1,1619 \cdot 10^{-2} m$$

A força equivalente decorrente do impacto apresenta a seguinte intensidade:

$$\Delta_A = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow P = \frac{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{0,2 \cdot 0,2^3}{12}\right)}{1,5^3} 1,1619 \cdot 10^{-2} \Rightarrow P = 275,41 kN$$

### 28.12 – Teorema de Castigliano

O teorema de Castigliano define que o deslocamento em um dado ponto de um elemento estrutural é igual à derivada parcial de primeira ordem da energia de deformação do corpo, energia interna, em relação a uma força que age no ponto e na direção do deslocamento desejado. Analogamente, o giro (rotação) em um ponto de um elemento estrutural pode ser determinado por meio da derivada parcial de primeira

ordem da energia de deformação no corpo, energia interna, em relação a um momento que age no ponto e na direção da rotação desejada.

Considerando um corpo em equilíbrio quando este é submetido a um conjunto de forças externas  $P(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , constata-se que se uma dada força pertencente a este conjunto tem sua intensidade aumentada de um diferencial  $dP_j$ , o trabalho das forças externas aumentará. Assumindo a conservação de energia, ou seja  $U_e = U_i$ , o aumento diferencial da força externa gerará um aumento da energia de deformação (energia interna). Assim, pode-se escrever que:

$$U_e + dU_e = U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_j} dP_j \quad (28.36)$$

Deve-se ressaltar que a ordem, ou sequência, de aplicação das forças externas não deve alterar a intensidade da energia de deformação. Assim, se fosse, inicialmente, aplicado o diferencial de força  $dP_j$  e em seguida o conjunto de forças  $P(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , a energia final (externa e interna) resultante deve ser a mesma. Considerando esta sequência de aplicação de carregamentos, ou seja,  $dP_j$  e em seguida as demais, constata-se que o trabalho externo devido à  $dP_j$  é dado por:

$$U_e(dP_j) = \frac{1}{2} dP_j d\Delta_i \quad (28.37)$$

sendo  $d\Delta_i$  o deslocamento ocorrido na direção  $dP_j$ .

Como  $dP_j$  e  $d\Delta_i$  são grandezas diferenciais, o produto resultante das duas grandezas diferenciais pode ser desprezado por ser muito pequeno. A aplicação do conjunto de forças  $P(P_1, P_2, \dots, P_n)$  faz com que a  $dP_j$  desloque-se de  $\Delta_j$ , de modo que a energia de deformação resultante seja:

$$U_i + dU_j = U_i + dP_j \Delta_j \quad (28.38)$$

sendo  $U_i$  a energia de deformação devido ao conjunto de forças  $P(P_1, P_2, \dots, P_n)$  e  $dP_j \Delta_j$  a energia de deformação devido a  $dP_j$  causada pelo deslocamento posterior, devido a  $P(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ,  $\Delta_j$ .

Como a ordem de aplicação das forças não deve resultar diferenças na energia final, constata-se que as energias apresentadas na Eq.(28.36) e Eq.(28.38) devem ser iguais. Portanto:

$$U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_j} dP_j = U_i + dP_j d\Delta_j \Rightarrow \Delta_j = \frac{\partial U_i}{\partial P_j} \quad (28.39)$$

o que prova o teorema de Castigliano.

Para barras axialmente carregadas, a derivada parcial da energia de deformação em relação à força aplicada pode ser assim expressa:

$$U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dL \Rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{2N_k}{2EA} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (N_k(P)) \right) dL \Rightarrow \quad (28.40)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{N_k}{EA} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (N_k(P)) \right) dL$$

Já para barras solicitadas à flexão, a variação de energia de deformação é dada por:

$$U_i = \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dL - \int_0^L \frac{1}{E} \frac{M_z M_y}{I_z I_y} I_{yz} dL + \int_0^L \frac{M_y^2}{2EI_y} dL \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{2M_z^k}{2EI_z} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_z^k(P)) \right) dL + \int_0^L \frac{2M_y^k}{2EI_y} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_y^k(P)) \right) dL -$$

$$\int_0^L \left[ \frac{1}{E} \frac{M_z^k}{I_z I_y} I_{yz} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_y^k(P)) \right) + \frac{1}{E} \frac{M_y^k}{I_z I_y} I_{yz} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_z^k(P)) \right) \right] dL \Rightarrow \quad (28.41)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M_z^k}{EI_z} \frac{\partial}{\partial P_j} (M_z^k(P)) dL + \int_0^L \frac{M_y^k}{EI_y} \frac{\partial}{\partial P_j} (M_y^k(P)) dL$$

$$- \int_0^L \frac{1}{E} \frac{I_{yz}}{I_z I_y} \left( M_z^k \frac{\partial}{\partial P_j} (M_y^k(P)) + M_y^k \frac{\partial}{\partial P_j} (M_z^k(P)) \right) dL$$

Deve-se destacar que se  $y$  e  $z$  forem eixos principais de inércia  $I_{yz}$  será nulo.

Assim, neste caso, o termo integral final da última equação apresentada na Eq.(28.41) torna-se nulo.

Para barras de seção transversal circular submetidas à torção, a variação de energia de deformação fica determinada pela seguinte relação:

$$U_i = \int_0^L \frac{M_t^2}{2GI_t} dL \Rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{2M_t^k}{2GI_t} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_t^k(P)) \right) dL \Rightarrow \quad (28.42)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M_t^k}{GI_t} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_t^k(P)) \right) dL$$

Finalmente, para barras solicitadas ao esforço cortante, a variação da energia de deformação pode ser avaliada pela seguinte equação:

$$U_i = \int_0^L \frac{f_s^y V_y^2}{2GA} dL + \int_0^L \frac{f_s^z V_z^2}{2GA} dL \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{f_s^y 2V_y^k}{2GA} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (V_y^k(P)) \right) dL + \int_0^L \frac{f_s^z 2V_z^k}{2GA} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (V_z^k(P)) \right) dL \Rightarrow \quad (28.43)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{f_s^y V_y^k}{GA} \frac{\partial}{\partial P_j} (V_y^k(P)) dL + \int_0^L \frac{f_s^z V_z^k}{GA} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (V_z^k(P)) \right) dL$$

### 28.13 – Exemplo 6

Determine o deslocamento vertical da articulação A e horizontal da articulação B da estrutura formada por elementos de barra simples apresentada na Fig. (28.17). Trata-se de uma treliça plana, vinculada em dois pontos, submetida à ação de uma força atuante em sua articulação A. Utilize o teorema de Castigliano sabendo que todas as barras da treliça possuem as seguintes propriedades  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $A = 600 \text{ mm}^2$ .

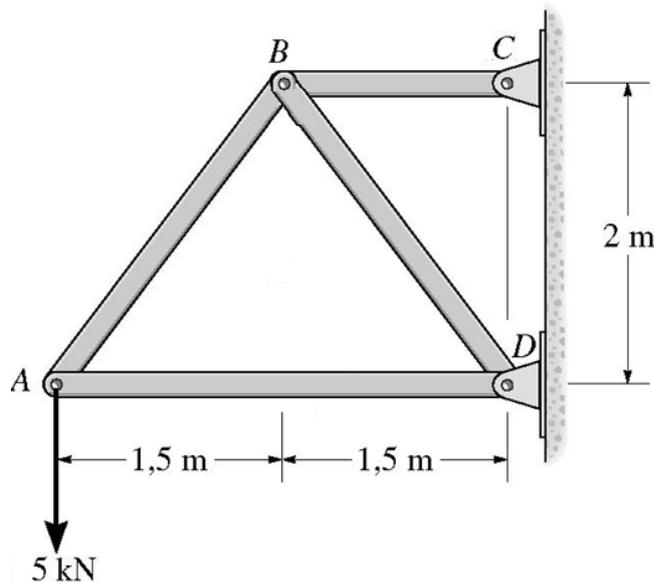


Figura 28.17 Treliça plana a ser analisada.

A determinação da intensidade dos esforços normais atuantes nas barras da treliça plana mostrada na Fig. (28.17) pode ser facilmente efetuada por meio do método dos nós, o qual foi apresentado no capítulo 3. Aplicando este método obtêm-se os seguintes valores para os esforços normais atuantes nas barras da treliça plana analisada:

$$N_{AB} = 6,25 \text{ kN}$$

$$N_{AD} = -3,75 \text{ kN}$$

$$N_{BD} = -6,25 \text{ kN}$$

$$N_{BC} = 7,5 \text{ kN}$$

O sinal negativo indica que o esforço normal determinado é compressivo, enquanto que o sinal positivo indica esforço normal trativo.

Para a determinação do deslocamento vertical no ponto A, deve-se aplicar uma força vertical **P** neste ponto e em seguida obter expressões que relacionem o esforço normal nas barras da treliça analisada à intensidade da força **P**. Portanto, deve-se analisar a treliça plana apresentada na Fig. (28.18). Aplicando o método dos nós, obtêm-se os valores dos esforços normais nas barras dessa treliça, os quais são iguais a:

$$N_{AB} = 1,25 P$$

$$N_{AD} = -0,75 P$$

$$N_{BD} = -1,25 P$$

$$N_{BC} = 1,5 P$$

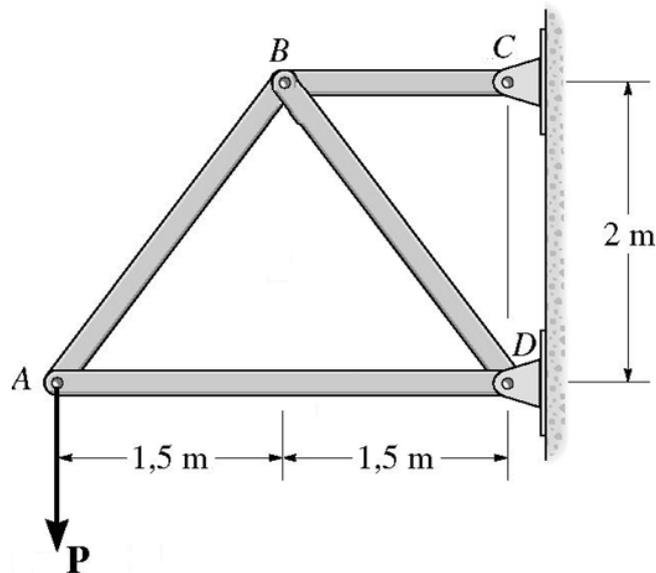


Figura 28.18 Treliça plana a ser analisada considerando carga **P**.

Aplicando o teorema de Castigliano para barras axialmente carregadas, Eq.(28.40), obtêm-se:

Tabela 28.2 Cálculo do deslocamento via teorema de Castigliano.

Barra	N (kN)	N(P)	$\frac{\partial N}{\partial P}$	L(m)	A(m <sup>2</sup> )	$\frac{NL}{EA} \frac{\partial N}{\partial P}$
AB	6,25	1,25 P	1,25	2,5	$600 \times 10^{-6}$	$1,6276 \times 10^{-4}$
AD	-3,75	-0,75 P	-0,75	3,0	$600 \times 10^{-6}$	$7,0313 \times 10^{-5}$
BD	-6,25	-1,25 P	-1,25	2,5	$600 \times 10^{-6}$	$1,6276 \times 10^{-4}$
BC	7,5	1,5 P	1,5	1,5	$600 \times 10^{-6}$	$1,4063 \times 10^{-4}$

Assim, o deslocamento vertical do ponto A é obtido somando-se as contribuições de cada uma das barras. Assim:

$$\Delta_A = 1,6276 \cdot 10^{-4} + 7,0313 \cdot 10^{-5} + 1,6276 \cdot 10^{-4} + 1,4063 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta_A = 5,365 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,5365 \text{ mm}$$

Como o deslocamento obtido resultou positivo, isso indica que o mesmo encontra-se na direção de atuação da força **P** aplicada, ou seja, vertical para baixo.

Para a determinação do deslocamento horizontal no ponto B, deve-se aplicar uma força horizontal **P** nesse ponto e em seguida expressar os esforços normais nas barras da treliça em função da intensidade da força externa **P** aplicada. Portanto, a estrutura a ser analisada é a apresentada na Fig. (28.19).

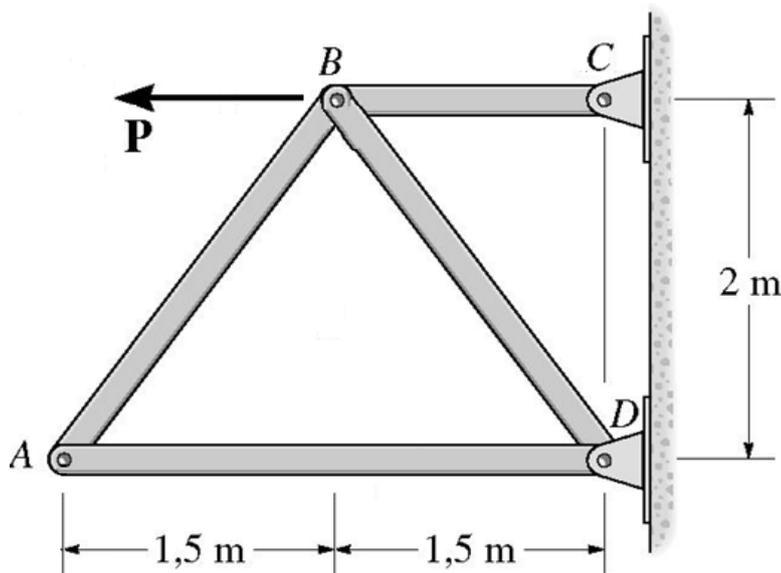


Figura 28.19 Treliça plana a ser analisada considerando carga P.

Aplicando o método dos nós, as intensidades dos esforços normais nas barras da treliça podem ser facilmente determinadas, os quais são iguais a:

$$N_{AB} = 0$$

$$N_{AD} = 0$$

$$N_{BD} = 0$$

$$N_{BC} = P$$

Aplicando o teorema de Castigliano para barras axialmente carregadas, Eq.(28.40), obtêm-se:

Tabela 28.3 Cálculo do deslocamento via teorema de Castigliano.

Barra	N (kN)	N(P)	$\frac{\partial N}{\partial P}$	L(m)	A(m <sup>2</sup> )	$\frac{NL}{EA} \frac{\partial N}{\partial P}$
AB	6,25	0	0	2,5	$600 \times 10^{-6}$	0
AD	-3,75	0	0	3,0	$600 \times 10^{-6}$	0
BD	-6,25	0	0	2,5	$600 \times 10^{-6}$	0
BC	7,5	P	1	1,5	$600 \times 10^{-6}$	$9,375 \times 10^{-5}$

Assim, o deslocamento horizontal do ponto B é obtido somando-se as contribuições de cada uma das barras. Dessa forma:

$$\Delta_B = 0 + 0 + 0 + 9,375 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \Delta_B = 9,375 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,09375 \text{ mm}$$

Como o deslocamento obtido resultou positivo, isso indica que o mesmo encontra-se na direção de atuação da força **P** aplicada, ou seja, horizontal para a esquerda.

### 28.14 – Exemplo 7

Determine o deslocamento vertical do ponto localizado no extremo direito de uma viga em balanço submetida a um carregamento uniformemente distribuído e a um momento concentrado, a qual é apresentada na Fig. (28.20). Em seguida, determine a rotação do ponto localizado no centro do vão dessa viga. Em ambos os casos, considere apenas a contribuição de energia correspondente ao momento fletor.

Aplicando os conceitos de equilíbrio em elementos de barras isostáticos, pode-se determinar a equação que governa a variação do momento fletor ao longo do

comprimento da viga apresentada na Fig. (28.20). Considerando como origem do sistema de coordenadas o engaste tem-se:

$$M = -\frac{wL^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2} - M_0$$

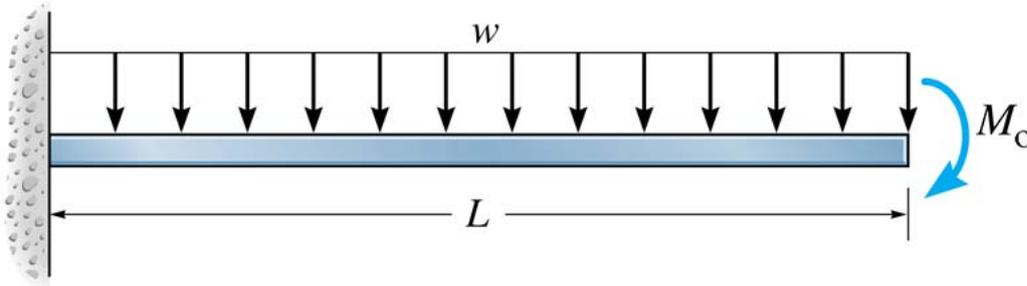


Figura 28.20 Viga a ser analisada.

Para que o deslocamento vertical desejado seja calculado, deve-se determinar a equação do momento fletor mobilizado por uma força **P** aplicada no extremo direito da viga. Esta condição está ilustrada na Fig. (28.21). Para a viga apresentada nesta figura, a equação que descreve a variação do momento fletor ao longo da viga, assumindo que a origem encontra-se no engaste, é igual a:

$$M = PL - Px$$

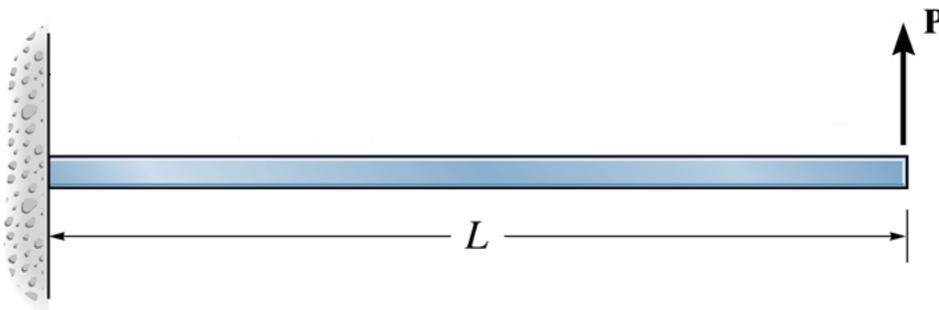


Figura 28.21 Viga com força **P** aplicada.

Aplicando a relação que permite a determinação do deslocamento vertical em elementos fletidos, Eq.(28.41) tem-se:

$$\Delta = \int_0^L \frac{M_z^k}{EI_z} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_z^k(P)) \right) dL \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{\left( -\frac{wL^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2} - M_0 \right)}{EI_z} \left( \frac{\partial}{\partial P} (PL - Px) \right) dx \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = \int_0^L \left( \frac{-\frac{wL^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2} - M_0}{EI_z} \right) (L-x) dx \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = \left[ \frac{-wL^3x}{2} + \frac{wL^2x^2}{4} + \frac{wL^2x^2}{2} - \frac{wLx^3}{3} - \frac{wLx^3}{6} + \frac{wx^4}{8} - M_0Lx + \frac{M_0x^2}{2} \right]_0^L \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = \frac{-wL^4}{8} - \frac{M_0L^2}{2} \frac{1}{EI_z}$$

O sinal negativo que surgiu no resultado obtido indica que o deslocamento no ponto ocorre no sentido contrário ao da força  $\mathbf{P}$  aplicada. Portanto, no ponto localizado no extremo direito da viga apresentada na Fig. (28.20), o deslocamento observado será vertical para baixo.

Para a determinação da rotação no ponto localizado no centro do vão, deve-se aplicar um momento externo de intensidade  $\mathbf{P}$  neste ponto. Em seguida, deve-se determinar a equação do momento fletor atuante na viga. Assim, para a situação descrita, a viga a ser considerada é a apresentada na Fig. (28.22). Com base nos conceitos de equilíbrio, verifica-se facilmente que a equação que descreve o momento fletor nessa viga é a seguinte:

$$M = P \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$M = 0 \quad L/2 < x \leq L$$

Deve-se ressaltar que esta equação é válida a partir da origem, considerada no engaste, até o ponto de aplicação do momento  $\mathbf{P}$ , ou seja, o centro do vão da viga. Portanto, a rotação no ponto desejado será determinada utilizando-se a Eq.(28.41). Assim:

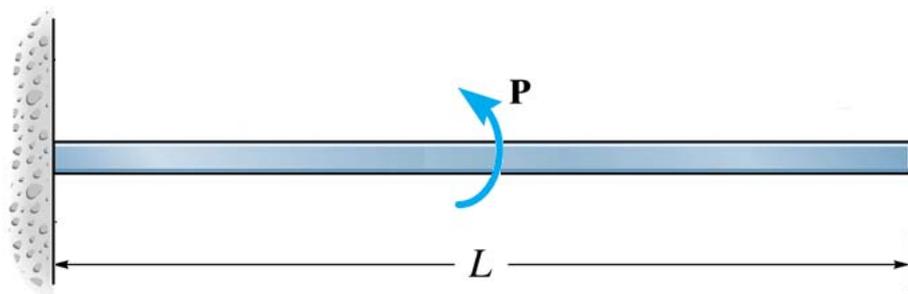


Figura 28.22 Viga com momento  $\mathbf{P}$  aplicado.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int_0^L \frac{M_z^k}{EI_z} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_z^k(P)) \right) dL \quad \Rightarrow \\
\Delta &= \int_0^{L/2} \frac{M_z^k}{EI_z} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_z^k(P)) \right) dL + \int_{L/2}^L \frac{M_z^k}{EI_z} \left( \frac{\partial}{\partial P_j} (M_z^k(P)) \right) dL \quad \Rightarrow \\
\Delta &= \int_0^{L/2} \left( \frac{-\frac{wL^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2} - M_0}{EI_z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial P} (P) \right) dx + \\
&\int_{L/2}^L \left( \frac{-\frac{wL^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2} - M_0}{EI_z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial P} (0) \right) dx \quad \Rightarrow \\
\Delta &= \left[ \frac{\left( -\frac{wL^2x}{2} + \frac{wLx^2}{2} - \frac{wx^3}{6} - M_0x \right)}{EI_z} \right]_0^{L/2} \Rightarrow \Delta = \frac{-\frac{7wL^3}{48} - \frac{M_0L}{2}}{EI_z}
\end{aligned}$$

O sinal negativo que surgiu no resultado obtido indica que a rotação atuante na barra em análise ocorre no sentido contrário ao do momento fletor  $\mathbf{P}$  aplicado. Portanto, a rotação atuante é orientada no sentido horário.

### 28.15 – O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

A palavra virtual indica algo que existe potencialmente, não de fato. Assim, simplificada, pode-se compreender a palavra virtual como algo imaginário, não real. No tocante à análise mecânica de estruturas, um deslocamento virtual pode ser entendido como um deslocamento imaginário arbitrariamente imposto sobre um dado sistema estrutural. Analogamente, por força virtual, entende-se uma força imaginária imposta sobre um dado sistema estrutural.

Como o conceito de trabalho, conforme anteriormente apresentado, envolve o produto entre força e deslocamento, pode-se definir uma grandeza relacionada à força e ao deslocamento virtuais, a qual é denominada trabalho virtual. No contexto dos conceitos apresentados neste texto, o trabalho virtual será considerado como sendo o trabalho realizado, em uma dada estrutura, por forças reais durante um deslocamento virtual ou o trabalho realizado por forças virtuais durante um deslocamento real.

De forma mais precisa, assumindo a existência de um sistema estrutural e de um conjunto de ações externas sobre ele atuante, pode-se considerar como deslocamento virtual um deslocamento provocado por uma ação que não pertença ao sistema de ações atuante na estrutura. Força virtual, igualmente, pode ser considerada como uma força qualquer que não provoque um deslocamento real. Portanto, na expressão do trabalho virtual, a força e o deslocamento envolvidos (virtual e real ou vice-versa) têm uma relação de correspondência, porém, nunca de causalidade.

Assumindo que a conservação de energia seja observada,  $U_e = U_i$ , o trabalho virtual pode ser utilizado para a determinação de deslocamentos e rotações em estruturas. Para entender como o trabalho virtual pode ser aplicado, deve-se considerar uma estrutura, com geometria qualquer, na condição de equilíbrio estático quando submetida a um conjunto de carregamentos externos,  $P_i$ , e condições de vinculação, como apresenta a Fig. (28.23). Admitindo que sobre esta estrutura seja aplicado um deslocamento virtual  $\Delta$  em um dado ponto de seu contorno, ponto A, por exemplo, este deslocamento irá provocar uma pequena mudança na forma (geometria) da estrutura em análise.

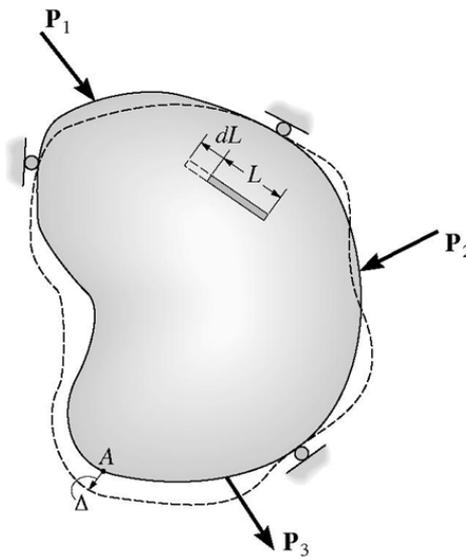


Figura 28.23 Corpo em equilíbrio submetido a carregamentos externos e condições de vinculação.

Durante o deslocamento virtual, mantendo-se constante o carregamento externo aplicado, cada ponto da estrutura será deslocado para uma nova posição, acarretando, conseqüentemente, a deformação da própria estrutura. Portanto, as tensões resultantes dos carregamentos externos nesses pontos realizarão trabalho virtual. O trabalho realizado pelos carregamentos externos durante o deslocamento virtual é denominado

$dW_e$ . Já o trabalho realizado pelas tensões durante o deslocamento virtual pode ser subdividido em:  $dW_r$  (trabalho causado pelo deslocamento do ponto como corpo rígido – translação e rotação) e  $dW_d$  (trabalho associado à deformação do ponto). Assim, considerando a conservação de energia, pode-se escrever que:

$$dW_e = dW_r + dW_d \quad (28.44)$$

Como a estrutura está em equilíbrio estático, todo ponto que compõe esta estrutura estará também em equilíbrio estático. Assim, o trabalho virtual realizado pelas forças externas e internas, em decorrência do movimento de corpo rígido, durante o deslocamento virtual do corpo é nulo ( $dW_r = 0$ ). Portanto  $dW_e = dW_d$ . Somando-se as contribuições de trabalho para todos os pontos que compõem a estrutura considerada tem-se:

$$\int_{\Omega} dW_e = \int_{\Omega} dW_d \Rightarrow W_e = W_d \quad (28.45)$$

A integral do primeiro membro da Eq.(28.45) é igual ao trabalho virtual das forças externas atuantes sobre a estrutura, sendo chamado de trabalho externo,  $W_{ext}$ . Já a integral do segundo membro desta equação corresponde ao trabalho virtual associado à deformação dos pontos que compõem a estrutura, ou seja, trabalho virtual interno,  $W_{int}$ . A Eq.(28.45) representa o princípio do trabalho virtual e pode ser definida da seguinte forma: *quando à uma estrutura deformável, em equilíbrio sob a ação de um sistema de carregamentos, é dada um deslocamento virtual, o trabalho realizado pelas forças externas é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas.*

Deve-se salientar que o deslocamento virtual aplicado deve ser compatível com as condições de vinculação da estrutura, de forma a manter válida as condições de continuidade e compatibilidade da estrutura. A mudança virtual na forma pode ser arbitrariamente imposta à estrutura e não deve ser confundida com deformações causadas por cargas reais. Além disso, deve-se mencionar que o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) aplica-se independentemente do material estrutural se comportar de maneira elástico linear ou elástico não linear.

Analogamente, pode-se utilizar o PTV assumindo a aplicação de uma força virtual e não deslocamento como apresentado anteriormente. Essa discussão será omitida aqui por simplicidade. Porém, a conclusão será a mesma que obtida

anteriormente, ou seja, o trabalho realizado pelas forças externas será igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas.

### 28.16 – O Método da Carga Unitária

A particularização do PTV na qual se considera a força virtual (ou forças virtuais) com valor unitário é conhecida como Método da Carga Unitária (MCU). Este método pode ser aplicado para a determinação de deslocamentos (devidos a deformações reais causadas pelo carregamento) em estruturas isostáticas. Como o MCU é uma sistematização do PTV, sua formulação geral pode ser utilizada em estruturas de comportamento elástico linear e elástico não linear.

Considere que seja de interesse, em uma análise estrutural, a determinação de um dado deslocamento  $\Delta$ , por exemplo o deslocamento vertical no ponto C, de uma estrutura isostática submetida a um sistema de carregamentos arbitrário, como apresenta a Fig. (28.24).

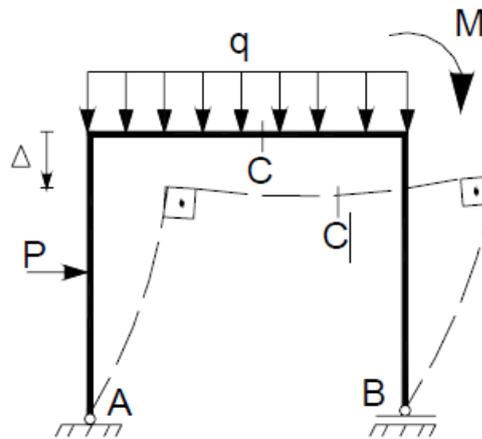


Figura 28.24 Estrutura com carregamentos prescritos. Determinação deslocamento ponto C.

Por meio do MCU, considera-se outro sistema de carregamento atuando sobre a mesma estrutura constituído de uma força virtual unitária  $P$ , correspondente ao deslocamento provocado  $\Delta$ , como indicado na Fig. (28.25).

Tem-se, pelo PTV, que  $dW_e = dW_d$ , ou seja  $F_{\text{virtual}}^{\text{externo}} \Delta_{\text{real}} = F_{\text{virtual}}^{\text{interno}} \delta_{\text{real}}$ . Então, o trabalho virtual neste caso é devido a forças virtuais e deslocamentos reais. O trabalho virtual externo é igual a:

$$dW_e = P\Delta \Rightarrow dW_e = 1\Delta \Rightarrow dW_e = \Delta \quad (28.46)$$

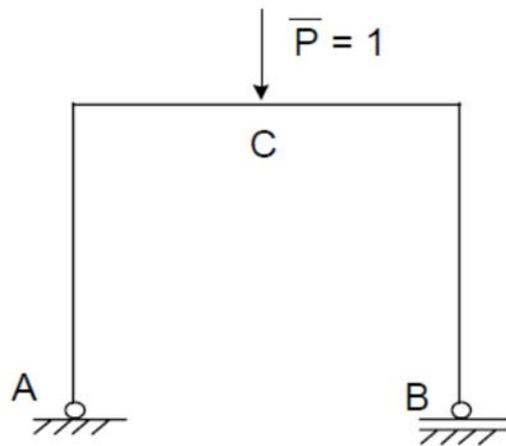


Figura 28.25 Atuação da carga unitária no ponto C.

Já o trabalho virtual interno será, como anteriormente apresentado neste capítulo, igual a:

$$dW_i = \int_{\Omega} n d\delta + \int_{\Omega} m d\theta + \int_{\Omega} v d\lambda + \int_{\Omega} t d\phi \quad (28.47)$$

onde  $n, m, v$  e  $t$  representam os esforços solicitantes normal, fletor cortante e torçor devido a presença da carga unitária  $P$  e  $\delta, \theta, \lambda$  e  $\phi$  são os deslocamentos generalizados associados a cada um dos esforços solicitantes.

Portanto, a equação geral do MCU pode ser assim escrita:

$$\Delta = \int_{\Omega} n d\delta + \int_{\Omega} m d\theta + \int_{\Omega} v d\lambda + \int_{\Omega} t d\phi \quad (28.48)$$

Os deslocamentos generalizados  $\delta, \theta, \lambda$  e  $\phi$  são provocados por ações reais (não virtuais) como carregamentos externos, variação de temperatura, recalques de apoio, modificações impostas na montagem, entre outras; isto é, qualquer tipo de solicitação externa real que produza deformações na estrutura. Esses deslocamentos generalizados, como são reais, podem ser relacionados aos esforços solicitantes reais atuantes na estrutura. Utilizando os conceitos anteriormente introduzidos nesse curso pode-se escrever que:

$$d\delta = \frac{N}{EA} dl \quad d\theta = \frac{M}{EI} dl \quad d\lambda = \frac{f_s V}{GA} dl \quad d\phi = \frac{M_t}{GI_t} dl \quad (28.49)$$

Substituindo os deslocamentos generalizados reais obtidos na Eq.(28.49) na Eq.(28.48) obtêm-se:

$$\Delta = \int_L \frac{nN}{EA} dl + \int_L \frac{mM}{EI} dl + \int_L \frac{f_s v V}{GA} dl + \int_L \frac{m_t M_t}{GI_t} dl \quad (28.50)$$

que é a expressão do MCU para estruturas de comportamento mecânico elástico linear sujeitas a sistemas gerais de carregamentos.

### 28.17 – Exemplo 8

Determine o deslocamento vertical do ponto C da estrutura composta por elementos de barra simples (treliça) apresentada na Fig. (28.26). Utilize o PTV sendo  $E = 210\text{ GPa}$  e  $A = 10\text{ cm}^2$ .

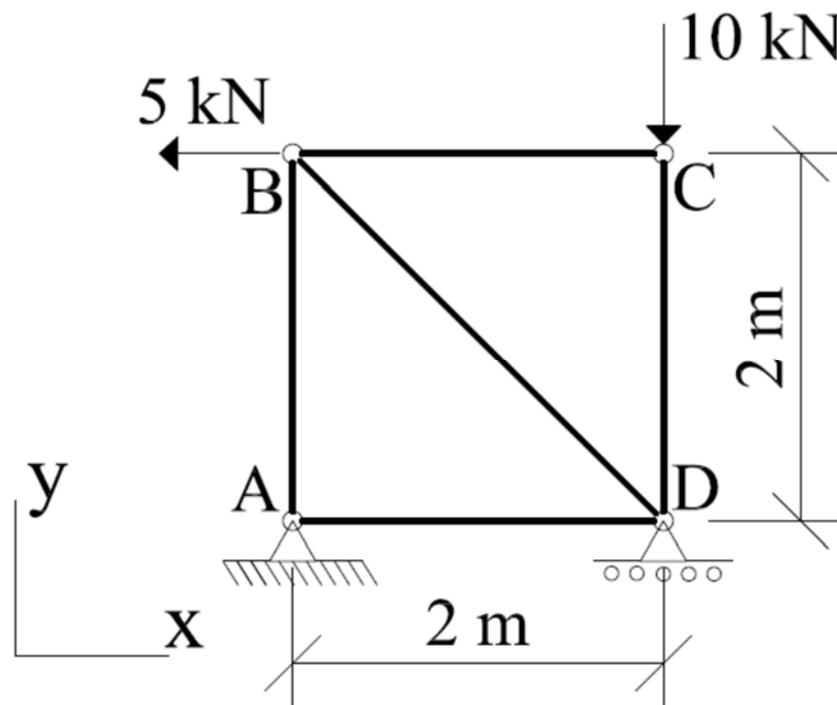


Figura 28.26 Estrutura a ser analisada.

Para a resolução desse exemplo deve-se, inicialmente, determinar os valores das reações de apoio. Considerando os sentidos das reações de apoio indicados no diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (28.27), pode-se aplicar as equações de equilíbrio de corpo rígido no plano, as quais conduzem às seguintes respostas.

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow V_D \cdot 2 - 10 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 0 &\Rightarrow V_D = 5\text{ kN} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A - 5 = 0 &\Rightarrow H_A = 5\text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + 5 - 10 = 0 &\Rightarrow V_A = 5\text{ kN} \end{aligned}$$

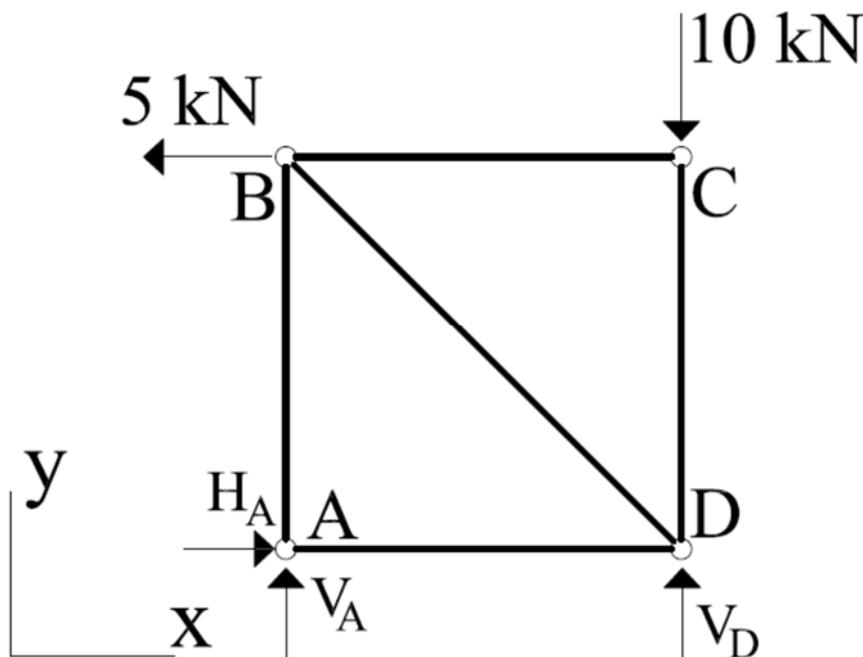


Figura 28.27 Diagrama de corpo livre problema real.

A determinação da intensidade dos esforços normais atuantes nas barras da treliça plana mostrada na Fig. (28.27) pode ser facilmente efetuada por meio do método dos nós. Aplicando este método obtêm-se os seguintes valores para os esforços normais atuantes nas barras da treliça plana analisada:

$$N_{CD} = -10 \text{ kN}$$

$$N_{BC} = 0$$

$$N_{BD} = 7,071 \text{ kN}$$

$$N_{AD} = -5,0 \text{ kN}$$

$$N_{AB} = -5,0 \text{ kN}$$

Para que a resolução desse exemplo seja efetuada via PTV, os esforços solicitantes na estrutura analisada devem ser determinados considerando uma carga unitária vertical atuando sobre o nó C. Nessa configuração, o diagrama de corpo livre da estrutura é o apresentado na Fig. (28.28). Aplicando, sobre o corpo livre mostrado nesta figura, as equações de equilíbrio de corpo rígido no plano obtêm-se os seguintes valores para as reações de apoio.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_A \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_D + 0 - 10 = 0 \Rightarrow V_D = 10 \text{ kN}$$

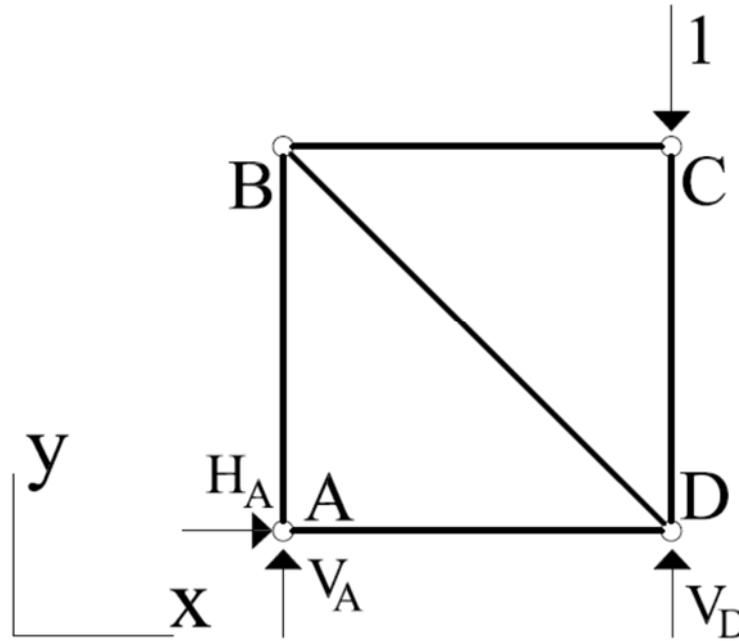


Figura 28.28 Diagrama de corpo livre problema virtual.

Os esforços normais do problema virtual podem ser obtidos utilizando-se o método dos nós. Por meio desse método obtêm-se os seguintes valores para os esforços normais:

$$N_{CD} = -1,0$$

$$N_{BC} = 0$$

$$N_{BD} = 0$$

$$N_{AD} = 0$$

$$N_{AB} = 0$$

Assim, o deslocamento vertical do nó C pode ser determinado utilizando-se o resultado apresentado na Eq.(28.50). Como nas treliças apenas os esforços normais são não nulos, no problema analisado esta equação simplifica-se como:

$$\Delta = \int_L \frac{nN}{EA} dl$$

Como os esforços normais são constantes, tanto no problema real quanto no problema virtual, os cálculos necessários à determinação do deslocamento desejado podem ser organizados de uma maneira simples como mostra a tabela a seguir:

Tabela 28.4 Cálculo do deslocamento via PTV.

Barra	n	N (kN)	L(m)	EA(kN)	$\frac{nN}{EA} L$
AB	0	-5,0	2,0	210000	0
AD	0	-5,0	2,0	210000	0
BC	0	0	2,0	210000	0
BD	0	7,071	$2\sqrt{3}$	210000	0
CD	-1,0	-10	2,0	210000	$9,5238 \times 10^{-5}$

Dessa forma, o deslocamento vertical do nó C é dado por:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n \text{ Barras}} \frac{n_i N_i}{(EA)_i} L_i \Rightarrow \Delta = 0 + 0 + 0 + 0 + 9,5238 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \Delta = 9,5238 \cdot 10^{-5} m$$

### 28.18 – Exemplo 9

Determine o deslocamento vertical e a rotação da extremidade direita da viga apresentada na Fig. (28.29) utilizando o PTV. Trata-se de uma viga engastada solicitada por um carregamento uniformemente distribuído. Considere EI constante e utilize apenas as componentes de energia decorrentes do momento fletor.

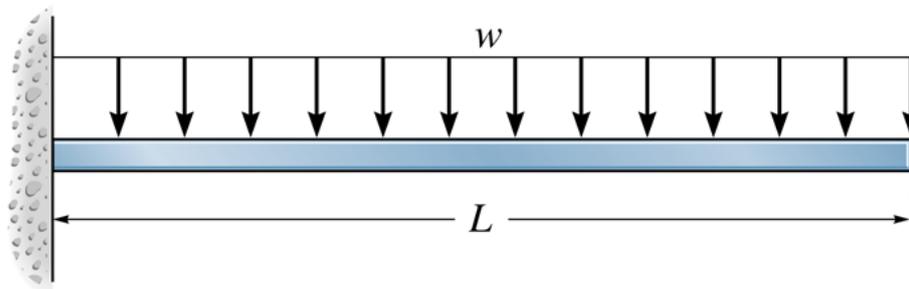


Figura 28.29 Viga engastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

A equação que governa a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga apresentada na Fig. (28.29) pode ser facilmente determinada utilizando os conceitos de equilíbrio em elementos de barras isostáticos. Considerando como origem do sistema de coordenadas o engaste tem-se:

$$M = -\frac{wL^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2}$$

Para que o deslocamento vertical desejado seja determinado, via PTV, deve-se expressar a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga considerando a aplicação de uma força unitária na extremidade direita da viga. Esta condição está apresentada na Fig. (28.30). Para a viga apresentada nesta figura, a equação que descreve a variação do momento fletor ao longo da viga, assumindo que a origem encontra-se no engaste, é a seguinte:

$$M = x - L$$

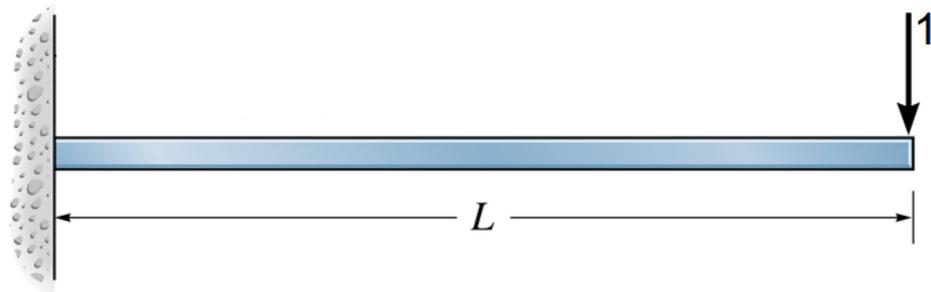


Figura 28.30 Viga engastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

O deslocamento vertical do extremo direito da viga analisada pode ser determinado utilizando-se o resultado apresentado na Eq.(28.50). Como apenas a contribuição devido ao momento fletor deve ser considerada, conforme o enunciado do problema, a Eq.(28.50) simplifica-se como:

$$\Delta = \int_L \frac{mM}{EI} dl$$

Portanto:

$$\Delta = \int_L \frac{mM}{EI} dl \Rightarrow \Delta = \int_0^L \frac{\left(-\frac{wL^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2}\right)(x-L)}{EI} dl \Rightarrow$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{\left(-\frac{wx^3}{2} + wLx^2 - \frac{wL^2x}{2} + \frac{wLx^2}{2} - wL^2x + \frac{wL^3}{2}\right)}{EI} dl \Rightarrow$$

$$\Delta = \frac{\left[-\frac{wx^4}{8} + \frac{wLx^3}{3} - \frac{wL^2x^2}{4} + \frac{wLx^3}{6} - \frac{wL^2x^2}{2} + \frac{wL^3x}{2}\right]_0^L}{EI} \Rightarrow \Delta = \frac{wL^4}{8EI}$$

O sinal positivo obtido para o deslocamento calculado indica que este é orientado no sentido de aplicação da carga unitária, ou seja, vertical para baixo.

Para a determinação da rotação na extremidade direita da viga analisada, deve-se aplicar um momento fletor unitário neste ponto e em seguida utilizar a Eq.(28.50). A

viga considerada e o momento fletor unitário estão apresentados na Fig. (28.31). Para a viga apresentada nesta figura, a equação que descreve a variação do momento fletor ao longo de seu comprimento, assumindo que a origem encontra-se no engaste, é a seguinte:

$$M = 1$$

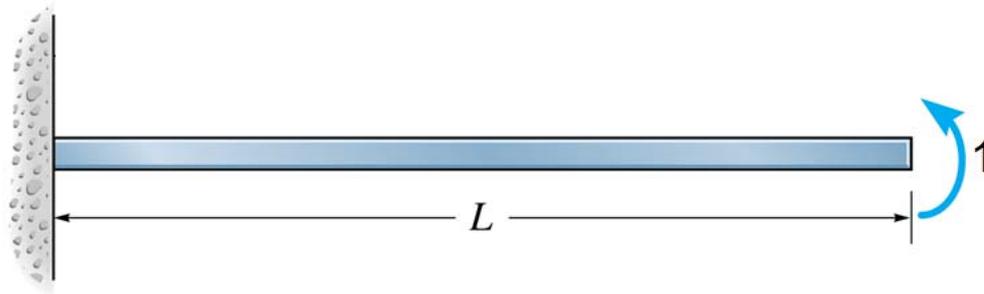


Figura 28.31 Viga engastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

Como apenas a contribuição devido ao momento fletor deve ser utilizada, a Eq.(28.50), aplicada a esta análise, pode ser reescrita como:

$$\Delta = \int_L \frac{mM}{EI} dl$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_L \frac{mM}{EI} dl \Rightarrow \theta = \int_0^L \frac{\left(-\frac{wL^2}{2} + wLx - \frac{wx^2}{2}\right)(1)}{EI} dl \Rightarrow \\ \theta &= \frac{\left[-\frac{wx^3}{6} + \frac{wLx^2}{2} - \frac{wL^2x}{2}\right]_0^L}{EI} \Rightarrow \theta = -\frac{wL^3}{6EI} \end{aligned}$$

O sinal negativo obtido como resultado nessa análise indica que a rotação no ponto desejado possui sentido contrário ao do momento unitário aplicado. Portanto, a rotação na extremidade direita da viga em balanço analisada ocorre no sentido horário.

### 28.19 – Aplicação da Tabela de Integrais de Produtos de Funções

A determinação das equações que descrevem as variações dos esforços solicitantes ao longo do comprimento de barras, tanto no problema real quanto no problema virtual, em análises correntes de engenharia pode nem sempre ser uma tarefa

fácil. Além disso, mesmo se tais equações forem conhecidas, existe ainda a tarefa relacionada à integração do produto de duas funções. Embora de simples execução, esta última tarefa pode demandar certo tempo, devido ao elevado número de termos que, normalmente, devem ser integrados. Com o objetivo de acelerar os procedimentos de análise e evitar erros decorrentes da execução de operações algébricas simples, pode-se aplicar a tabela de integrais de produtos de funções apresentada no final desse capítulo, item 28.26. Por meio dessa tabela, basta que as geometrias dos diagramas de esforços solicitantes sejam conhecidas, tanto no problema real quanto no virtual, assim como seus valores máximos. As geometrias dos diagramas de esforços solicitantes dos problemas real e virtual são relacionadas por meio dessa tabela, a qual fornece diretamente o resultado da integral do produto das funções.

### 28.20 – Exemplo 10

Determine os deslocamentos horizontal e vertical do nó B do pórtico plano apresentado na Fig. (28.32) por meio do PTV. Trata-se de um pórtico plano apoiado em dois nós, sendo um apoio fixo e o outro móvel, o qual é solicitado por dois carregamentos distribuídos e um concentrado. Considere que  $E = 210\text{GPa}$ ,  $I = 104 \cdot 10^{-6}\text{m}^4$ ,  $A = 8,56 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$ ,  $f_s = \frac{6}{5}$ , e  $G = 80,77\text{GPa}$ .

Para a resolução desse exemplo deve-se, inicialmente, construir os diagramas de esforços solicitantes do pórtico plano apresentado na Fig. (28.32). Com base no diagrama de corpo livre apresentado na Fig. (28.33) pode-se determinar as reações de apoio impondo-se as condições de equilíbrio de corpo rígido. Portanto:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 &\Rightarrow V_C \cdot 3,5 - 3 \cdot 3,5 \cdot \frac{3,5}{2} + 10 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_C = -3,32\text{kN} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -H_A - 10 = 0 \Rightarrow H_A = -10\text{kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3,5 - 3,32 = 0 \Rightarrow V_A = 19,82\text{kN}\end{aligned}$$

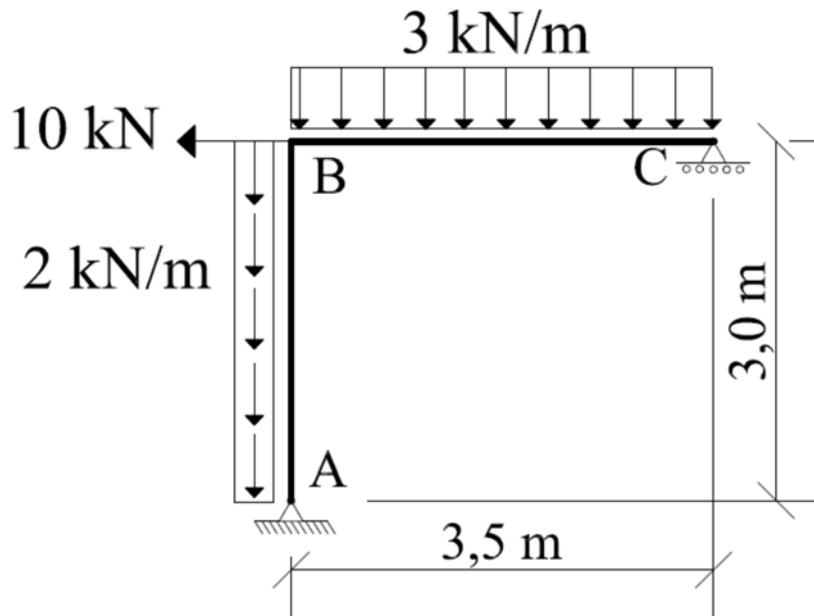


Figura 28.32 Estrutura a ser analisada.

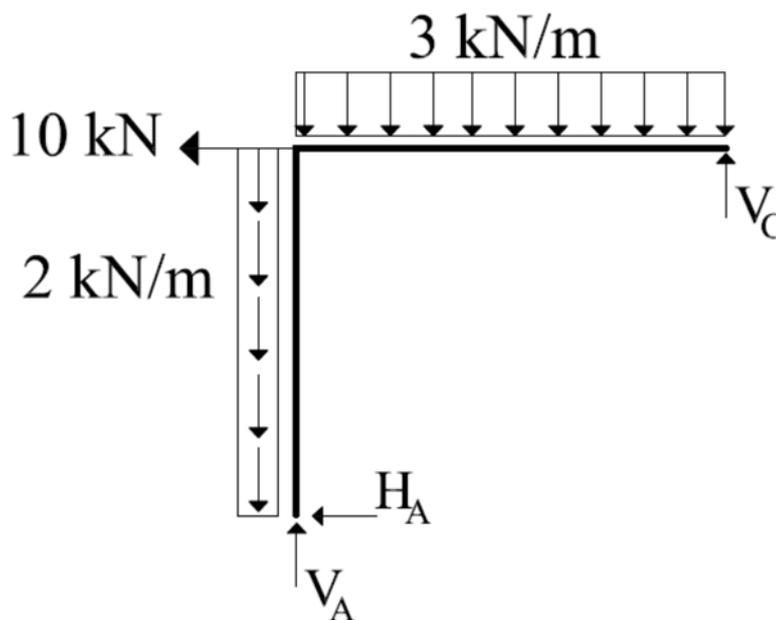


Figura 28.33 Diagrama de corpo livre.

Com base nos valores das reações de apoio e nas condições de carregamento, os diagramas de esforços solicitantes do problema real podem ser construídos. Tais diagramas estão apresentados na Fig. (28.34).

Em seguida, devem ser construídos os diagramas de esforços solicitantes para os problemas virtuais. Objetivando determinar, primeiramente, o deslocamento vertical do nó B, deve-se aplicar uma força unitária vertical neste nó. Para a estrutura solicitada

pela carga unitária, deve-se também construir os diagramas de esforços solicitantes para que estes possam ser combinados com os diagramas obtidos no problema real. Para esta condição tem-se a estrutura apresentada na Fig. (28.35) sendo nesta mesma figura apresentado seu diagrama de corpo livre.

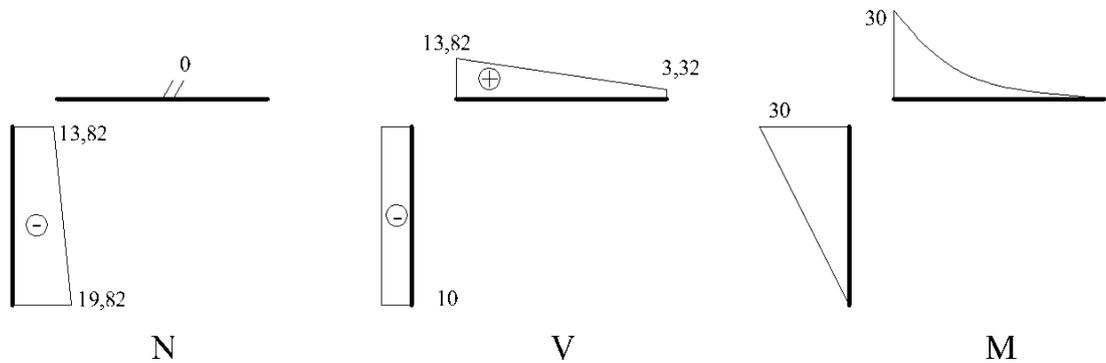


Figura 28.34 Diagramas de esforços solicitantes para o problema real.

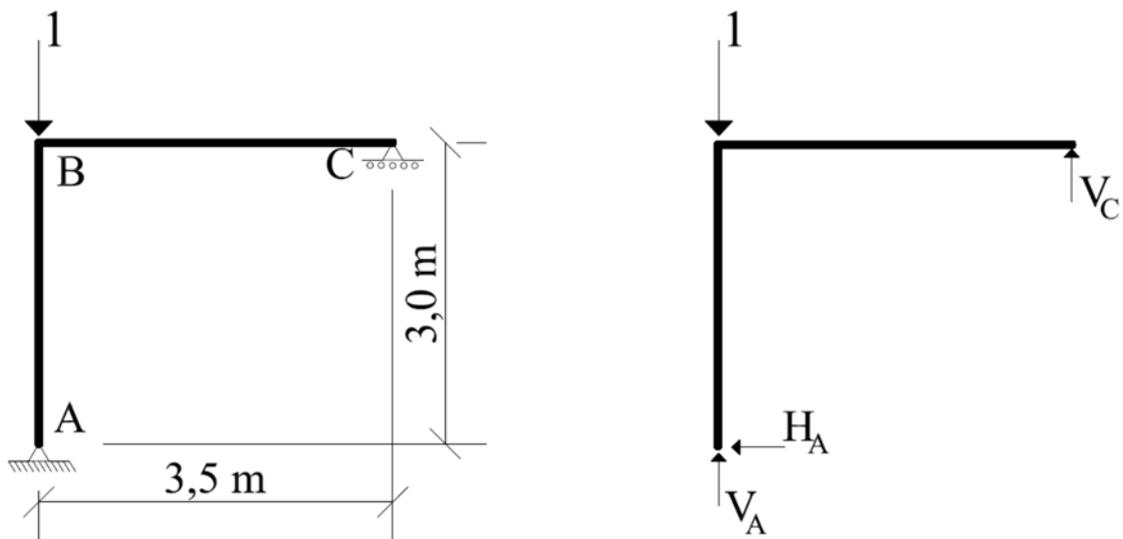


Figura 28.35 Problema virtual com força unitária vertical. Diagrama de corpo livre.

Impondo sobre a estrutura apresentada na Fig.(28.35) as condições de equilíbrio de corpo rígido obtêm-se suas reações de apoio. Assim:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 &\Rightarrow V_C = 0 \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A = 1\end{aligned}$$

Com base nas reações de apoio determinadas anteriormente e nas condições de carregamento e vinculação atuantes sobre o problema virtual considerado pode-se

construir seus diagramas de esforços solicitantes, os quais estão apresentados na Fig. (28.36).

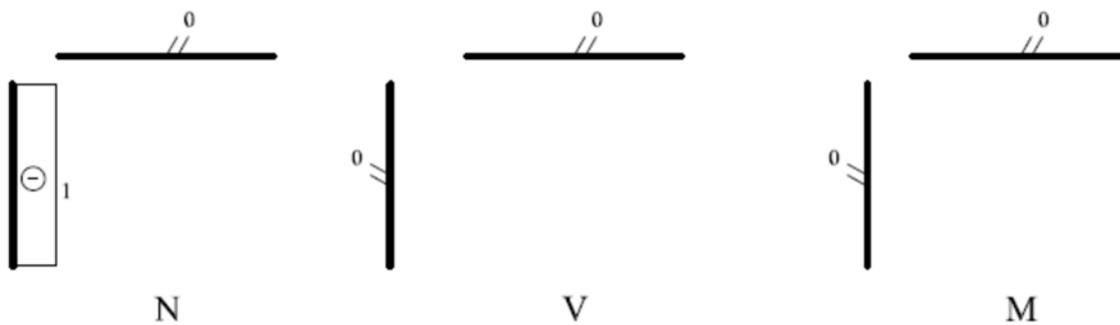


Figura 28.36 Diagramas de esforços solicitantes para o problema virtual.

O deslocamento vertical do nó B pode ser determinado com base na Eq.(28.50), a qual envolve os esforços solicitantes dos problemas real e virtual. Porém, neste exemplo, a integração dos núcleos envolvidos será efetuada por meio da tabela apresentada em anexo a este capítulo. Assim:

$$\Delta = \frac{1}{EA} \left[ \int \dots \right] \Rightarrow \Delta = \frac{1}{210 \cdot 10^6 \cdot 8,56 \cdot 10^{-3}} \left[ 3,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-19,82 - 13,82) \right]$$

$$\Delta = 2,8071 \cdot 10^{-5} m$$

O deslocamento calculado resultou sinal positivo, portanto, o deslocamento possui sentido igual ao da força unitária aplicada, ou seja, vertical para baixo.

Para a determinação do deslocamento horizontal do nó B, deve-se construir os diagramas de esforços solicitantes do problema virtual composto pela estrutura apresentada na Fig. (28.32) considerando, como carregamento externo aplicado, uma força unitária horizontal aplicada sobre o nó B. O problema virtual apresentado neste parágrafo, assim como seu diagrama de corpo livre, estão apresentados na Fig. (28.37).

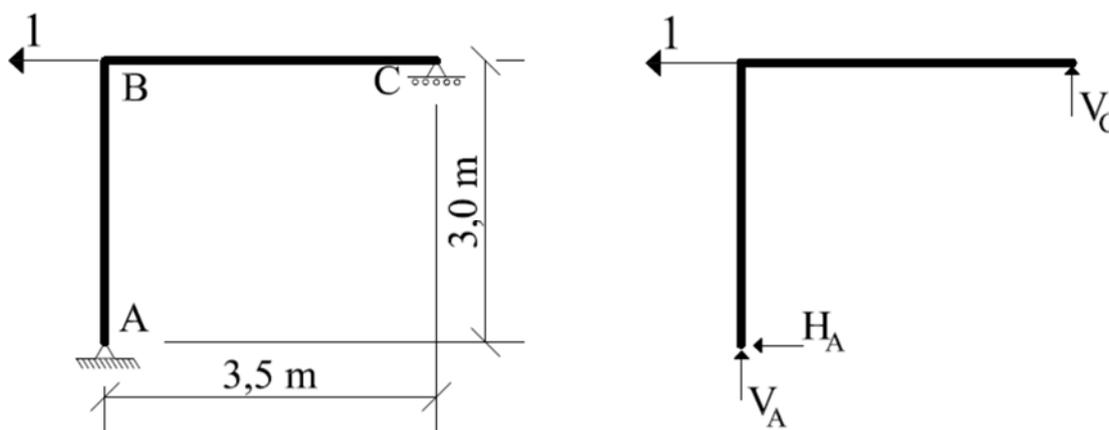


Figura 28.37 Problema virtual com força unitária horizontal. Diagrama de corpo livre.

As reações de apoio da estrutura apresentada na Fig. (28.37) podem ser determinadas impondo-se as equações de equilíbrio de corpo rígido. Dessa forma:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C \cdot 3,5 + 1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_C = -0,857$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -1 - H_A = 0 \Rightarrow H_A = -1$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 0,857 = 0 \Rightarrow V_A = 0,857$$

A partir das reações de apoio determinadas anteriormente e das condições de carregamento e vinculação atuantes sobre o problema virtual considerado, pode-se construir seus diagramas de esforços solicitantes, os quais estão apresentados na Fig. (28.38).

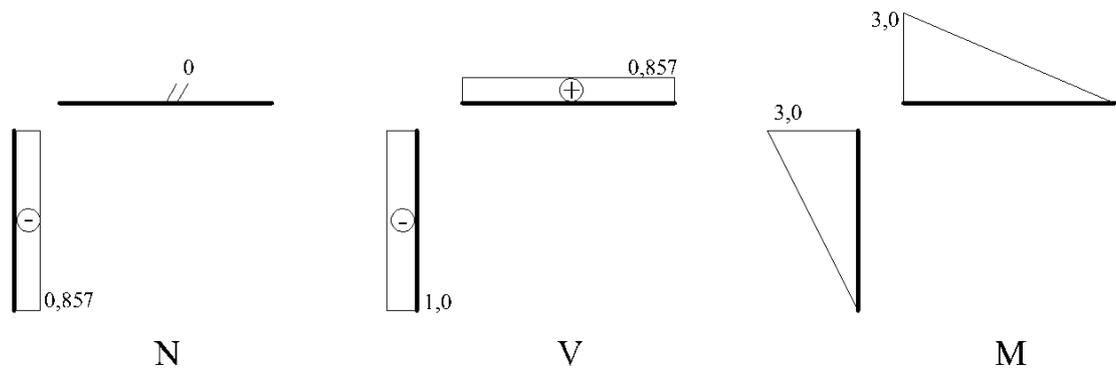


Figura 28.38 Diagramas de esforços solicitantes para o problema virtual.

O deslocamento desejado será determinado por meio da Eq.(28.50), cujos núcleos integrais serão avaliados utilizando a tabela apresentada em anexo a este capítulo. Dessa forma:

$$\Delta = \frac{1}{EA} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagrama N} \\ \hline \end{array} \right] + \frac{f_s}{GA} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagrama V} \\ \hline \end{array} \right] + \frac{f_s}{GA} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagrama V} \\ \hline \end{array} \right] + \frac{1}{EI} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagrama M} \\ \hline \end{array} \right] +$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagrama M} \\ \hline \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Delta = \frac{1}{210 \cdot 10^6 \cdot 8,56 \cdot 10^{-3}} \left[ 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,857) \cdot (-19,82 - 13,82) \right] +$$

$$\frac{6/5}{80,77 \cdot 10^6 \cdot 8,56 \cdot 10^{-3}} \left[ 3 \cdot -1 \cdot -10 \right] +$$

$$\frac{6/5}{80,77 \cdot 10^6 \cdot 8,56 \cdot 10^{-3}} \left[ 3,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,857) \cdot (13,82 + 3,32) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{210 \cdot 10^6 \cdot 104 \cdot 10^{-6}} \left[ 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 30 \right] + \\
& \frac{1}{210 \cdot 10^6 \cdot 104 \cdot 10^{-6}} \left[ 3,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 30 - 3,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left( \frac{3 \cdot 3,5^2}{8} \right) \right] \Rightarrow \Delta = 8,3131 \cdot 10^{-3} m
\end{aligned}$$

O deslocamento calculado resultou sinal positivo. Dessa forma, este deslocamento possui sentido igual ao da força unitária aplicada, ou seja, horizontal para a esquerda.

### 28.21 – Minimização do Funcional da Energia Total

A busca por soluções analíticas para a descrição do comportamento mecânico de estruturas é uma árdua tarefa, sendo factível se um conjunto de hipóteses simplificadoras for assumido. Além disso, tais soluções são aplicáveis a um conjunto restrito de problemas, o que torna este tipo de solução limitada e não robusta.

Uma abordagem mais geral envolve a proposição de soluções aproximadoras utilizando um funcional de energia. O funcional nada mais é que uma função global formada por um conjunto de funções. Pode-se definir um funcional de energia, no caso de problemas mecânicos elastostáticos, utilizando-se as parcelas de energia externa e interna da seguinte maneira:

$$\Pi(u, v) = U_i - U_e \quad (28.51)$$

sendo  $u$  e  $v$  os deslocamentos horizontal e vertical dos pontos que compõem o corpo.

Assumindo que a conservação de energia seja válida, constata-se que o funcional apresentado na Eq.(28.51) possui valor nulo. Considerando que a energia interna depende dos estados de tensão e deformação nos pontos que compõem o corpo e que a energia externa é dependente dos carregamentos externos aplicados e dos deslocamentos em seus pontos de atuação, pode-se reescrever a Eq.(28.51) na seguinte forma:

$$\Pi(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} d\Omega - \int_{\Omega} \{b\}^T \{\Delta\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{q(\Gamma)\} \{\Delta\} d\Gamma - \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i \quad (28.52)$$

onde  $\{\sigma\}$  e  $\{\varepsilon\}$  são vetores que contêm as componentes dos tensores de tensão e deformação, respectivamente,  $\{b\}$  é um vetor que representa as componentes de forças de domínio atuantes no domínio  $\Omega$  do corpo em análise,  $\{\Delta\}$  é o vetor que representa

os deslocamentos, nas direções  $x$  e  $y$ , dos pontos materiais que compõem o corpo em análise. Assim,  $\{\Delta\}$  contém os valores de  $u$  e  $v$ .  $\{q\}$  é o vetor que armazena as funções que descrevem os carregamentos distribuídos atuantes ao longo do contorno  $\Gamma$  do corpo, enquanto  $P$  são os valores dos carregamentos concentrados atuantes nos  $n$  pontos  $i$ .

Para elementos de barra simples, barras de treliças, o deslocamento axial da barra está associado à sua deformação normal por meio da seguinte relação:

$$u = \frac{NL}{EA} \Rightarrow du = \frac{Ndx}{EA} \Rightarrow \frac{N}{A} = \sigma = E \frac{du}{dx} \Rightarrow \sigma = Eu' \quad (28.53)$$

Comparando o resultado da Eq.(28.53) com a lei de Hooke, percebe-se que  $\frac{du}{dx} = \varepsilon$ . Portanto, a parcela de energia interna para esse tipo de barra pode ser assim escrita:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} d\Omega \Rightarrow U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (Eu'u') dA dx \Rightarrow \quad (28.54)$$

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L EA (u')^2 dx$$

Assim, verifica-se que a parcela de energia interna de elementos de barra simples depende de um núcleo integral que envolve a primeira derivada da função que descreve os deslocamentos axiais da barra.

Já para elementos estruturais fletidos, vigas por exemplo, o termo da energia interna pode ser descrito considerando a expressão da linha elástica, ou seja,  $EIv'' = M$ . Substituindo esta última expressão na equação da flexão obtém-se:

$$\sigma = -\frac{M}{I} y \Rightarrow \sigma = -\frac{EIv''}{I} y \Rightarrow \sigma = -Ev'' y \quad (28.55)$$

Reescrevendo a parcela de energia interna com o auxílio da lei de Hooke e da Eq.(28.55) obtém-se:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} d\Omega \Rightarrow U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{\sigma}{E} dA dx \Rightarrow \quad (28.56)$$

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{(-Ev'' y)^2}{E} dA dx \Rightarrow U_i = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx$$

Segundo a primeira lei da termodinâmica, a variação da energia interna deve ser igual ao trabalho realizado pelas forças externas. Em caso de ausência de formas de

dissipação de energia, isso implica que a energia potencial total deve permanecer inalterada durante o processo de deformação. Isso permite estabelecer que a variação de energia total deve ser nula. Então:

$$\Pi(u, v) = U_i - U_e \Rightarrow \delta\Pi(u, v) = \delta U_i - \delta U_e \quad (28.57)$$

A solução do problema variacional consiste em encontrar uma função deslocamento que torne o funcional  $\Pi(u, v)$  estacionário, obedecendo às condições de vinculação (condições de contorno essenciais). Assumindo que a função deslocamento possa ser expressa em função de parâmetros  $\alpha_i$ , a Eq.(28.57) pode ser assim reescrita:

$$\delta\Pi(u, v) = \nabla\Pi \cdot \alpha = \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_1} \delta\alpha_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_2} \delta\alpha_2 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_n} \delta\alpha_n = 0 \quad (28.58)$$

Como o valor de  $\delta\alpha_i$  pode ser arbitrado tem-se:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_i} = 0 \quad i = 1, n \quad (28.59)$$

O princípio da mínima energia total é uma ferramenta rápida e robusta para a solução de diversos problemas de engenharia envolvendo a mecânica dos sólidos/resistência dos materiais. O procedimento geral de solução envolve a determinação de uma função aproximadora dos deslocamentos, com  $i$  parâmetros  $\alpha$ . A solução aproximadora deve satisfazer as condições de vinculação do problema (condições de contorno essenciais). Em seguida, deve-se determinar os valores de  $\alpha_i$  que minimizem o funcional de energia, Eq.(28.59).

Pode ser demonstrado, e não será aqui efetuado por estar além dos objetivos desse curso, que o funcional  $\Pi(u, v)$  é quadrático para os problemas da mecânica dos sólidos/resistência dos materiais. Portanto, esse tipo problema apresenta um mínimo bem caracterizado. À medida que o número de parâmetros  $\alpha$  aumenta, espera-se melhor adequação da função aproximadora à solução exata do problema.

### 28.22 – Exemplo 11

Determine o deslocamento no centro do vão da viga mostrada na Fig. (28.39). Trata-se de uma viga bi apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Considere EI constante.

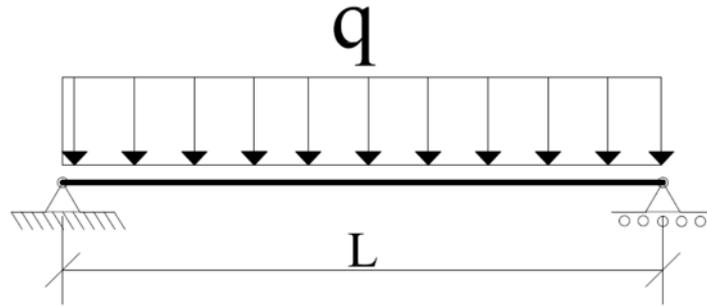


Figura 28.39 Viga a ser analisada.

Pode-se resolver esse problema utilizando-se uma função aproximadora do segundo grau. Assim:

$$\bar{v}(\alpha, x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$$

Impondo-se as condições de vinculação do problema tem-se:

$$\bar{v}(\alpha, 0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 0^2 + \alpha_2 0 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\bar{v}(\alpha, L) = 0 \Rightarrow \alpha_1 L^2 + \alpha_2 L = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1 L$$

Portanto, a função aproximadora para o problema em questão pode ser assim reescrita:

$$\bar{v}(\alpha, x) = \alpha_1 x^2 - \alpha_1 Lx$$

Consequentemente, as derivadas da função aproximadora podem ser assim expressas:

$$\bar{v}(\alpha, x)' = 2\alpha_1 x - \alpha_1 L$$

$$\bar{v}(\alpha, x)'' = 2\alpha_1$$

Assim, o funcional de energia assume a seguinte forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx - \int_0^L q v dx \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (2\alpha_1)^2 dx - \int_0^L q (\alpha_1 x^2 - \alpha_1 Lx) dx \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L 4EI \alpha_1^2 dx -$$

$$\int_0^L (q\alpha_1 x^2 - q\alpha_1 Lx) dx \Rightarrow$$

$$\Pi = \left[ \frac{1}{2} EI 4\alpha_1^2 x \right]_0^L - \left[ \frac{q\alpha_1 x^3}{3} - \frac{q\alpha_1 Lx^2}{2} \right]_0^L \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} EI 4\alpha_1^2 L - \frac{q\alpha_1 L^3}{3} + \frac{q\alpha_1 L^3}{2} \Rightarrow$$

$$\Pi = 2EI\alpha_1^2 L + \frac{q\alpha_1 L^3}{6}$$

Derivando o funcional de energia em relação ao parâmetro  $\alpha_1$  tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = 4EI\alpha_1 L + \frac{qL^3}{6} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{qL^2}{24EI}$$

Portanto, a solução aproximadora dos deslocamentos assume a seguinte forma:

$$\bar{v}(x) = -\frac{qL^2}{24EI}x^2 + \frac{qL^3}{24EI}x$$

Dessa forma, o deslocamento no centro do vão possui a seguinte intensidade:

$$\bar{v}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{qL^2}{24EI}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{qL^3}{24EI}\frac{L}{2} \Rightarrow \bar{v}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^4}{96EI}$$

A solução obtida ainda está distante da solução exata para o caso estudado, que é igual a:  $v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI}$ . Verifica-se que no problema estudado o momento fletor

possui variação quadrática ao longo do comprimento da viga. Assim, a solução exata do problema é do quarto grau, conforme a dependência entre o momento fletor e o deslocamento dado pela equação da linha elástica. Portanto, pode-se resolver novamente o problema utilizando-se um polinômio completo do quarto grau para a obtenção da solução exata. Assim:

$$\bar{v}(\alpha, x) = \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5$$

Impondo, sobre a função aproximadora, as condições de restrição ao deslocamento obtêm-se:

$$\bar{v}(\alpha, 0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 0^4 + \alpha_2 0^3 + \alpha_3 0^2 + \alpha_4 0 + \alpha_5 = 0 \Rightarrow \alpha_5 = 0$$

$$\bar{v}(\alpha, L) = 0 \Rightarrow \alpha_1 L^4 + \alpha_2 L^3 + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L = 0 \Rightarrow \alpha_4 = -\alpha_1 L^3 - \alpha_2 L^2 - \alpha_3 L$$

Assim, a função aproximadora passa a ser definida na seguinte forma:

$$\bar{v}(\alpha, x) = \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 - \alpha_1 L^3 x - \alpha_2 L^2 x - \alpha_3 L x$$

Portanto, as derivadas da função aproximadora podem ser assim escritas:

$$\bar{v}'(\alpha, x) = 4\alpha_1 x^3 + 3\alpha_2 x^2 + 2\alpha_3 x - \alpha_1 L^3 - \alpha_2 L^2 - \alpha_3 L$$

$$\bar{v}''(\alpha, x) = 12\alpha_1 x^2 + 6\alpha_2 x + 2\alpha_3$$

Dessa forma, o funcional de energia pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx - \int_0^L q v dx \Rightarrow \\ \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (12\alpha_1 x^2 + 6\alpha_2 x + 2\alpha_3)^2 dx - \\ &\int_0^L q (\alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 - \alpha_1 L^3 x - \alpha_2 L^2 x - \alpha_3 L x) dx \Rightarrow \\ \Pi &= \frac{EI}{2} \int_0^L (144\alpha_1^2 x^4 + 144\alpha_1 \alpha_2 x^3 + 36\alpha_2^2 x^2 + 48\alpha_1 \alpha_3 x^2 + 24\alpha_2 \alpha_3 x + 4\alpha_3^2) dx - \\ &- \int_0^L q (\alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 - \alpha_1 L^3 x - \alpha_2 L^2 x - \alpha_3 L x) dx \Rightarrow \\ \Pi &= \frac{EI}{2} \left[ \frac{144\alpha_1^2 x^5}{5} + \frac{144\alpha_1 \alpha_2 x^4}{4} + \frac{36\alpha_2^2 x^3}{3} + \frac{48\alpha_1 \alpha_3 x^3}{3} + \frac{24\alpha_2 \alpha_3 x^2}{2} + 4\alpha_3^2 x \right]_0^L - \\ &- q \left[ \frac{\alpha_1 x^5}{5} + \frac{\alpha_2 x^4}{4} + \frac{\alpha_3 x^3}{3} - \frac{\alpha_1 L^3 x^2}{2} - \frac{\alpha_2 L^2 x^2}{2} - \frac{\alpha_3 L x^2}{2} \right]_0^L \Rightarrow \\ \Pi &= \frac{EI}{2} \left( \frac{144\alpha_1^2 L^5}{5} + 36\alpha_1 \alpha_2 L^4 + 12\alpha_2^2 L^3 + 16\alpha_1 \alpha_3 L^3 + 12\alpha_2 \alpha_3 L^2 + 4\alpha_3^2 L \right) - \\ &- q \left( \frac{\alpha_1 L^5}{5} + \frac{\alpha_2 L^4}{4} + \frac{\alpha_3 L^3}{3} - \frac{\alpha_1 L^5}{2} - \frac{\alpha_2 L^4}{2} - \frac{\alpha_3 L^3}{2} \right) \end{aligned}$$

Derivando o funcional obtido em relação aos parâmetros  $\alpha$  obtêm-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = \frac{EI}{2} \left( \frac{288}{5} \alpha_1 L^5 + 36\alpha_2 L^4 + 16\alpha_3 L^3 \right) + q \left( \frac{3}{10} L^5 \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = \frac{EI}{2} (36\alpha_1 L^4 + 24\alpha_2 L^3 + 12\alpha_3 L^2) + q \left( \frac{1}{4} L^4 \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} = \frac{EI}{2} (16\alpha_1 L^3 + 12\alpha_2 L^2 + 8\alpha_3 L) + q \left( \frac{1}{6} L^3 \right) = 0$$

Organizando matricialmente o sistema de três equações e três incógnitas obtida acima tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{288}{5} L^2 & 36L & 16 \\ 36L^2 & 24L & 12 \\ 16L^2 & 12L & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \end{Bmatrix} \frac{2qL^2}{EI} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,041667 \\ -0,08335L \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{q}{EI}$$

Conseqüentemente:

$$\alpha_4 = -\alpha_1 L^3 - \alpha_2 L^2 - \alpha_3 L \Rightarrow \alpha_4 = -0,041667 \frac{qL^3}{EI} + 0,08335 \frac{qL^3}{EI} \Rightarrow$$

$$\alpha_4 = 0,041667 \frac{qL^3}{EI}$$

Dessa forma, a função aproximadora para o deslocamento pode ser assim escrita:

$$\bar{v}(x) = 0,041667 \frac{q}{EI} x^4 - 0,08335 \frac{qL}{EI} x^3 + 0,041683 \frac{qL^3}{EI} x$$

Assim, o deslocamento no centro do vão possui a seguinte intensidade:

$$\begin{aligned} \bar{v}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0,041667 \frac{q}{EI} \left(\frac{L}{2}\right)^4 - 0,08335 \frac{qL}{EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + 0,041683 \frac{qL^3}{EI} \left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \\ \bar{v}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0,013021 \frac{qL^4}{EI} \Rightarrow \bar{v}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI} \end{aligned}$$

A solução obtida corresponde à solução exata do problema. Com base na solução aproximadora adotada, polinômio do quarto grau completo, constata-se que tanto os deslocamentos quanto o momento fletor são representados de forma exata.

### 28.23 – Exemplo 12

Determine a expressão do deslocamento para a viga mostrada na Fig. (28.40) utilizando a conservação da energia total. Considere  $EI$  constante.

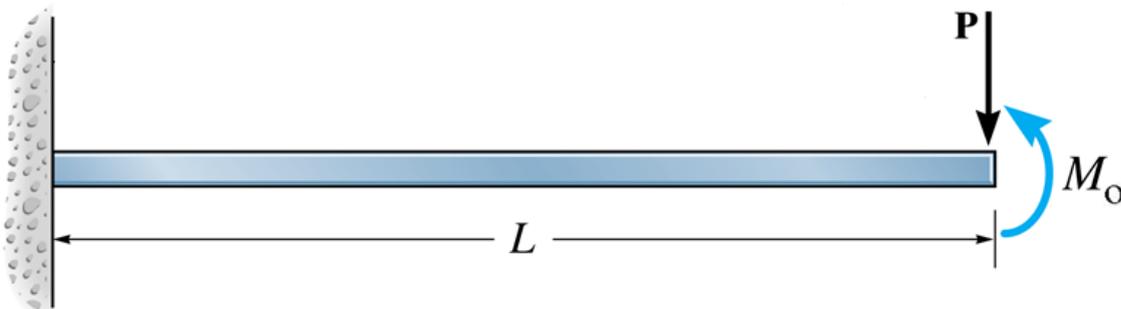


Figura 28.40 Viga a ser analisada.

Com base nos carregamentos atuantes na viga apresentada na Fig. (28.40), verifica-se que o momento fletor apresenta variação linear ao longo do comprimento da viga. Portanto, a solução exata para os deslocamentos envolve um polinômio completo do terceiro grau, conforme a dependência entre o momento fletor e o deslocamento dado pela equação da linha elástica. Assim, esse problema pode ser resolvido utilizando-se a seguinte solução aproximadora:

$$\bar{v}(\alpha, x) = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4$$

Impondo as condições de vinculação do problema sobre a solução aproximadora obtêm-se:

$$\bar{v}(\alpha, 0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 0^3 + \alpha_2 0^2 + \alpha_3 0 + \alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = 0$$

$$\bar{v}'(\alpha, 0) = 0 \Rightarrow 3\alpha_1 0^2 + 2\alpha_2 0 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

Portanto, a função aproximadora para o problema em questão pode ser assim reescrita:

$$\bar{v}(\alpha, x) = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2$$

Conseqüentemente, as derivadas da função aproximadora podem ser assim definidas:

$$\bar{v}'(\alpha, x) = 3\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 x$$

$$\bar{v}''(\alpha, x) = 6\alpha_1 x + 2\alpha_2$$

Dessa forma, o funcional de energia assume a seguinte forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx - Pv(L) - M_0 v'(L) \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (6\alpha_1 x + 2\alpha_2)^2 dx - P(\alpha_1 L^3 + \alpha_2 L^2) - M_0 (3\alpha_1 L^2 + 2\alpha_2 L) \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (36\alpha_1^2 x^2 + 24\alpha_1 \alpha_2 x + 4\alpha_2^2) dx - P(\alpha_1 L^3 + \alpha_2 L^2) -$$

$$M_0 (3\alpha_1 L^2 + 2\alpha_2 L) \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{EI}{2} [12\alpha_1^2 x^3 + 12\alpha_1 \alpha_2 x^2 + 4\alpha_2^2 x]_0^L - P(\alpha_1 L^3 + \alpha_2 L^2) - M_0 (3\alpha_1 L^2 + 2\alpha_2 L) \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{EI}{2} (12\alpha_1^2 L^3 + 12\alpha_1 \alpha_2 L^2 + 4\alpha_2^2 L) - P(\alpha_1 L^3 + \alpha_2 L^2) - M_0 (3\alpha_1 L^2 + 2\alpha_2 L)$$

Derivando o funcional de energia em relação aos parâmetros  $\alpha$  obtêm-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = \frac{EI}{2} (24\alpha_1 L^3 + 12\alpha_2 L^2) - PL^3 - 3M_0 L^2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = \frac{EI}{2} (12\alpha_1 L^2 + 8\alpha_2 L) - PL^2 - 2M_0 L$$

Organizando as duas equações anteriores na forma matricial têm-se:

$$\begin{bmatrix} 24L & 12 \\ 12L & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PL + 3M_0 \\ PL + 2M_0 \end{Bmatrix} \frac{2}{EI} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 3PL + 3M_0 \end{Bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

Portanto, a solução aproximadora dos deslocamentos assume a seguinte forma:

$$\bar{v}(x) = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 \Rightarrow \bar{v}(x) = -\frac{P}{6EI} x^3 + \frac{PL + M_0}{2EI} x^2$$

Que coincide com a solução exata do problema.

### 28.24 – Aplicação à Problemas Bidimensionais

Em problemas planos a relação entre tensões e deformações é efetuada por meio da lei de Hooke generalizada. Assim:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (28.60)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (28.61)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (28.62)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (28.63)$$

Assim, a parcela de energia interna fica expressa como:

$$U_i = \int_{\Omega} \left( \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} + \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} \right) d\Omega \quad (28.64)$$

Conforme anteriormente discutido, nos problemas planos de tensão e deformação,  $\sigma_z$  e  $\varepsilon_z$  são nulos, respectivamente. Portanto, a Eq.(28.64) simplifica-se como:

$$U_i = \int_{\Omega} \left( \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} \right) d\Omega \quad (28.65)$$

De forma semelhante, pode-se também explicitar as tensões em termos das deformações por meio do seguinte sistema matricial, que é obtido com base na lei de Hooke generalizada:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (28.66)$$

De forma condensada pode-se reescrever a Eq.(28.66) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= k_1 \varepsilon_x + k_2 \varepsilon_y \\ \sigma_y &= k_2 \varepsilon_x + k_1 \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= k_3 \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{28.67}$$

sendo  $k_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $k_2 = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $k_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Portanto, a parcela de energia interna passa a ser definida como:

$$\begin{aligned}U_i &= \int_{\Omega} \left( \frac{(k_1 \varepsilon_x + k_2 \varepsilon_y) \varepsilon_x}{2} + \frac{(k_2 \varepsilon_x + k_1 \varepsilon_y) \varepsilon_y}{2} + \frac{k_3 \gamma_{xy} \gamma_{xy}}{2} \right) d\Omega \\ U_i &= \int_{\Omega} \left( \frac{k_1 \varepsilon_x^2}{2} + \frac{k_2 \varepsilon_y^2}{2} + k_2 \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{k_3 \gamma_{xy}^2}{2} \right) d\Omega\end{aligned}\tag{28.68}$$

Além disso, nos problemas planos as deformações estão associadas aos deslocamentos por meio das seguintes equações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_x = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\tag{28.69}$$

Portanto, o procedimento anteriormente apresentado e aplicado à análise de vigas pode ser também empregado para a análise mecânica de problemas planos.

### 28.25 – Exemplo 13

Determine as expressões que descrevem os deslocamentos e as deformações na estrutura apresentada na Fig.(28.41), a qual enquadra-se na categoria de estado plano de tensão. Considere que  $u = \alpha_1 x^2 y + \alpha_2 y^2 x$  e  $v = \alpha_1 y^3 + \alpha_2 x^2 y$ .

Considerando as funções deslocamento assumidas, pode-se expressar as deformações utilizando a Eq.(28.69). Assim:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_y = 3\alpha_1 y^2 + \alpha_2 x^2 \\ \gamma_x &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \quad \gamma_x = \alpha_1 x^2 + 4\alpha_2 xy\end{aligned}$$

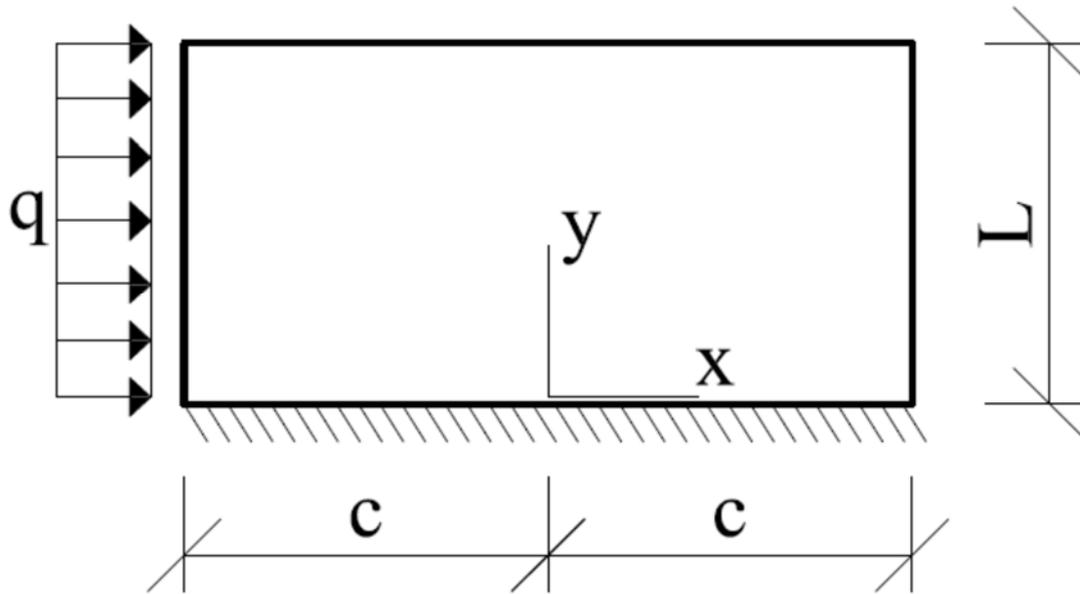


Figura 28.41 Estrutura a ser analisada.

Dessa forma, o funcional de energia pode ser assim escrito:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} \frac{k_1}{2} (2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2)^2 + \frac{k_2}{2} (3\alpha_1 y^2 + \alpha_2 x^2)^2 + k_2 (2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2) (3\alpha_1 y^2 + \alpha_2 x^2) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{k_3}{2} (\alpha_1 x^2 + 4\alpha_2 xy)^2 d\Omega - \int_{\Gamma} q (\alpha_1 x^2 y + \alpha_2 xy^2) d\Gamma \\ \Pi &= \int_0^L \int_{-c}^c \int_{-c}^c \left[ \frac{k_1}{2} (4\alpha_1^2 x^2 y^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 xy^3 + \alpha_2^2 y^4) + \frac{k_2}{2} (9\alpha_1^2 y^4 + 6\alpha_1 \alpha_2 x^2 y^2 + \alpha_2^2 x^4) \right] dx dy dz + \\ &\int_0^L \int_{-c}^c \left[ k_2 (6\alpha_1^2 xy^3 + 2\alpha_1 \alpha_2 x^3 y + 3\alpha_1 \alpha_2 y^4 + \alpha_2^2 x^2 y^2) \right] dx dy dz + \\ &\int_0^L \int_{-c}^c \left[ \frac{k_3}{2} (\alpha_1^2 x^4 + 8\alpha_1 \alpha_2 x^3 y + 16\alpha_2^2 x^2 y^2) \right] dx dy dz - \int_{\Gamma} q (\alpha_1 x^2 y + \alpha_2 xy^2) d\Gamma \\ \Pi &= \int_0^L \int_0^c \left[ \frac{k_1}{2} \left( \frac{8}{3} \alpha_1^2 c^3 y^2 + 2\alpha_2^2 y^4 c \right) + \frac{k_2}{2} \left( 18\alpha_1^2 y^4 c + \frac{12}{3} \alpha_1 \alpha_2 c^3 y^2 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 c^5 \right) \right] dy dz + \\ &\int_0^L \int_0^c \left[ k_2 \left( 6\alpha_1 \alpha_2 y^4 c + \frac{2}{3} \alpha_2^2 c^3 y^2 \right) + \frac{k_3}{2} \left( \frac{2}{5} \alpha_1^2 c^5 + \frac{32}{3} \alpha_2^2 c^3 y^2 \right) \right] dy dz - \int_{\Gamma} q (\alpha_1 x^2 y + \alpha_2 xy^2) d\Gamma \\ \Pi &= \int_0^L \left[ \frac{k_1}{2} \left( \frac{8}{9} \alpha_1^2 c^3 L^3 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 L^5 c \right) + \frac{k_2}{2} \left( \frac{18}{5} \alpha_1^2 L^5 c + \frac{12}{9} \alpha_1 \alpha_2 c^3 L^3 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 c^5 L \right) \right] dz + \\ &\int_0^L \left[ k_2 \left( \frac{6}{5} \alpha_1 \alpha_2 L^5 c + \frac{2}{9} \alpha_2^2 c^3 L^3 \right) + \frac{k_3}{2} \left( \frac{2}{5} \alpha_1^2 c^5 L + \frac{32}{9} \alpha_2^2 c^3 L^3 \right) \right] dz - \int_{\Gamma} q (\alpha_1 x^2 y + \alpha_2 xy^2) d\Gamma \end{aligned}$$

Assumindo que a espessura seja unitária, ou seja,  $t = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \Pi = & \left[ \frac{k_1}{2} \left( \frac{8}{9} \alpha_1^2 c^3 L^3 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 L^5 c \right) + \frac{k_2}{2} \left( \frac{18}{5} \alpha_1^2 L^5 c + \frac{12}{9} \alpha_1 \alpha_2 c^3 L^3 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 c^5 L \right) \right] + \\ & \left[ k_2 \left( \frac{6}{5} \alpha_1 \alpha_2 L^5 c + \frac{2}{9} \alpha_2^2 c^3 L^3 \right) + \frac{k_3}{2} \left( \frac{2}{5} \alpha_1^2 c^5 L + \frac{32}{9} \alpha_2^2 c^3 L^3 \right) \right] - \\ & \int_{\Gamma} q (\alpha_1 x^2 y + \alpha_2 x y^2) d\Gamma \end{aligned}$$

O termo integral que resta a ser avaliado, referente a energia do carregamento externo, assume a seguinte forma, considerando que  $d\Gamma = dy$ .

$$\int_{\Gamma} q (\alpha_1 x^2 y + \alpha_2 x y^2) d\Gamma = \int_0^L q (\alpha_1 (-c)^2 y + \alpha_2 (-c) y^2) dy = q \left( \frac{\alpha_1 c^2 L^2}{2} - \frac{\alpha_2 c L^3}{3} \right)$$

Dessa forma, o funcional de energia para o problema considerado passa a ser assim escrito:

$$\begin{aligned} \Pi = & \left[ \frac{k_1}{2} \left( \frac{8}{9} \alpha_1^2 c^3 L^3 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 L^5 c \right) + \frac{k_2}{2} \left( \frac{18}{5} \alpha_1^2 L^5 c + \frac{12}{9} \alpha_1 \alpha_2 c^3 L^3 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 c^5 L \right) \right] + \\ & \left[ k_2 \left( \frac{6}{5} \alpha_1 \alpha_2 L^5 c + \frac{2}{9} \alpha_2^2 c^3 L^3 \right) + \frac{k_3}{2} \left( \frac{2}{5} \alpha_1^2 c^5 L + \frac{32}{9} \alpha_2^2 c^3 L^3 \right) \right] - q \left( \frac{\alpha_1 c^2 L^2}{2} - \frac{\alpha_2 c L^3}{3} \right) \end{aligned}$$

Derivando o funcional em relação ao parâmetro  $\alpha_1$  obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = & \frac{k_1}{2} \left( \frac{16}{9} \alpha_1 c^3 L^3 \right) + \frac{k_2}{2} \left( \frac{36}{5} \alpha_1 L^5 c + \frac{12}{9} \alpha_2 c^3 L^3 \right) + k_2 \left( \frac{6}{5} \alpha_2 L^5 c \right) + \\ & \frac{k_3}{2} \left( \frac{4}{5} \alpha_1 c^5 L \right) - q \left( \frac{c^2 L^2}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a equação anterior por  $\frac{2}{L^6}$  e introduzindo a variável  $\beta = c/L$ , esta pode ser reescrita como:

$$\alpha_1 \left( \frac{16}{9} k_1 \beta^3 + \frac{36}{5} k_2 \beta + \frac{4}{5} k_3 \beta^5 \right) + \alpha_2 \left( \frac{12}{9} k_2 \beta^3 + \frac{12}{5} k_2 \beta \right) = q \frac{\beta^2}{L^2} \quad (28.70)$$

Derivando agora o funcional em relação ao parâmetro  $\alpha_2$  obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} = & \frac{k_1}{2} \left( \frac{4}{5} \alpha_2 L^5 c \right) + \frac{k_2}{2} \left( \frac{12}{9} \alpha_1 L^3 c^3 + \frac{4}{5} \alpha_2 c^5 L \right) + k_2 \left( \frac{6}{5} \alpha_1 L^5 c + \frac{4}{9} \alpha_2 c^3 L^3 \right) + \\ & \frac{k_3}{2} \left( \frac{64}{9} \alpha_2 c^3 L^3 \right) + q \left( \frac{c L^3}{3} \right) = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a equação anterior por  $\frac{2}{L^6}$  e introduzindo a variável  $\beta = c/L$ , esta pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \left( \frac{12}{9} k_2 \beta^3 + \frac{12}{5} k_2 \beta \right) + \\ & \alpha_2 \left( \frac{4}{5} k_1 \beta + \frac{4}{5} k_2 \beta^5 + \frac{8}{9} k_2 \beta^3 + \frac{64}{9} k_3 \beta^3 \right) = -\frac{2}{3} q \frac{\beta}{L^2} \end{aligned} \quad (28.71)$$

Matricialmente, as Eq.(28.70) e Eq.(28.71) podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{9} k_1 \beta^3 + \frac{36}{5} k_2 \beta + \frac{4}{5} k_3 \beta^5 & \frac{12}{9} k_2 \beta^3 + \frac{12}{5} k_2 \beta \\ \frac{12}{9} k_2 \beta^3 + \frac{12}{5} k_2 \beta & \frac{4}{5} k_1 \beta + \frac{4}{5} k_2 \beta^5 + \frac{8}{9} k_2 \beta^3 + \frac{64}{9} k_3 \beta^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{q}{L^2} \begin{Bmatrix} \beta^2 \\ -2\beta/3 \end{Bmatrix}$$

De forma a facilitar a resolução do sistema linear de equações apresentado acima, pode-se assumir que:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $q = 10 \text{ kN/m}$ ,  $L = 2 \text{ m}$  e  $\beta = 2$ .

Assim, os parâmetros de rigidez  $k$  assumem os seguintes valores:

$$k_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Rightarrow k_1 = \frac{210(1-0,3)}{(1+0,3)(1-2 \cdot 0,3)} \Rightarrow k_1 = 282,69 \text{ GPa}$$

$$k_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Rightarrow k_2 = \frac{210 \cdot 0,3}{(1+0,3)(1-2 \cdot 0,3)} \Rightarrow k_2 = 121,15 \text{ GPa}$$

$$k_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow k_3 = \frac{210}{2(1+0,3)} \Rightarrow k_3 = 80,77 \text{ GPa}$$

Com base nos valores assumidos, pode-se reescrever o sistema matricial apresentado anteriormente na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 7,83273 \cdot 10^9 & 1,87379 \cdot 10^9 \\ 1,87379 \cdot 10^9 & 9,01011 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -3,333 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,43667 \cdot 10^{-9} \\ -6,68732 \cdot 10^{-10} \end{Bmatrix}$$

Portanto, as funções aproximadoras para os deslocamentos e deformações no corpo em análise podem ser expressas como:

$$u = 1,43667 \cdot 10^{-9} x^2 y - 6,68732 \cdot 10^{-10} xy^2$$

$$v = 1,43667 \cdot 10^{-9} y^3 - 6,68732 \cdot 10^{-10} x^2 y$$

$$\varepsilon_x = 2,87334 \cdot 10^{-9} xy - 6,68732 \cdot 10^{-10} y^2$$

$$\varepsilon_y = 4,31001 \cdot 10^{-9} y^2 - 6,68732 \cdot 10^{-10} x^2$$

$$\gamma_{xy} = 1,43667 \cdot 10^{-9} x^2 - 2,67493 \cdot 10^{-9} xy$$

28.26 – Anexo. Tabela de Produtos de Integrais de Funções PTV

TABELA 1:  $I = \int_0^l f(s)g(s)ds$

	$f(s)$		$g(s)$		I	II	III	IV	V
1					$l\alpha a$	$l\frac{1}{2}a\alpha$	$l\frac{1}{2}a\beta$	$l\frac{1}{2}a(\alpha + \beta)$	$l\frac{2}{3}a\gamma$
2					$l\frac{1}{2}a\alpha$	$l\frac{1}{3}a\alpha$	$l\frac{1}{6}a\beta$	$l\frac{1}{6}a(2\alpha + \beta)$	$l\frac{1}{3}a\gamma$
3					$l\frac{1}{2}b\alpha$	$l\frac{1}{6}b\alpha$	$l\frac{1}{3}b\beta$	$l\frac{1}{6}b(\alpha + 2\beta)$	$l\frac{1}{3}b\gamma$
4			$l\frac{1}{2}(a+b)\alpha$	$l\frac{1}{6}(2a+b)\alpha$	$l\frac{1}{2}(a+b)\alpha$	$l\frac{1}{6}(2a+b)\alpha$	$l\frac{1}{6}(a+2b)\beta$	$l\frac{1}{6}[a(2\alpha + \beta) + b(\alpha + 2\beta)]$	$l\frac{1}{3}(a+b)\gamma$
5			$l\frac{1}{2}c\alpha$	$l\frac{1}{4}c\alpha$	$l\frac{1}{2}c\alpha$	$l\frac{1}{4}c\alpha$	$l\frac{1}{4}c\beta$	$l\frac{1}{4}c(\alpha + \beta)$	$l\frac{5}{12}c\gamma$
6			$l\frac{1}{2}c\alpha$	$l\frac{2-\xi}{6}c\alpha$	$l\frac{1}{2}c\alpha$	$l\frac{1+\xi}{6}c\beta$	$l\frac{1+\xi}{6}c\beta$	$l\frac{1}{6}c[(2-\xi)\alpha + (1+\xi)\beta]$	$l\frac{1+\xi-\xi^2}{3}c\gamma$
7			$l\frac{2}{3}c\alpha$	$l\frac{1}{3}c\alpha$	$l\frac{2}{3}c\alpha$	$l\frac{1}{3}c\alpha$	$l\frac{1}{3}c\beta$	$l\frac{1}{3}c(\alpha + \beta)$	$l\frac{8}{15}c\gamma$
8			$l\frac{3}{8}c\alpha$	$l\frac{1}{5}c\alpha$	$l\frac{3}{8}c\alpha$	$l\frac{7}{40}c\beta$	$l\frac{7}{40}c\beta$	$l\frac{1}{40}c(8\alpha + 7\beta)$	$l\frac{3}{10}c\gamma$
9			$l\frac{3}{8}c\alpha$	$l\frac{7}{40}c\alpha$	$l\frac{3}{8}c\alpha$	$l\frac{1}{5}c\beta$	$l\frac{1}{5}c\beta$	$l\frac{1}{40}c(7\alpha + 8\beta)$	$l\frac{3}{10}c\gamma$
10			$l\alpha^2$	$l\frac{1}{3}\alpha^2$	$l\alpha^2$	$l\frac{1}{3}\beta^2$	$l\frac{1}{3}\beta^2$	$l\frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$	$l\frac{8}{15}\gamma^2$