

**JOSÉ NIVALDO GARCIA**

**ESTADOS DE TENSÃO EM ÁRVORES E DE DEFORMAÇÃO  
EM PEÇAS DE MADEIRA SERRADA**

**Tese apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
título de Doutor em Engenharia.**

**Área de Concentração:  
Engenharia de Estruturas**

**Orientador:  
Péricles Brasiliense Fusco**

L. 3445

TESE-D

Garcia, José Nivaldo

Estados de tensão em árvores e de deformação em peças de madeira serrada. São Paulo, 1992.

243p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1. Tensão de crescimento I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II. t

À minha esposa Maria Estela, pelo  
constante incentivo e pela incansá-  
vel compreensão.

■

## AGRADECIMENTOS

Ao Departamento de Ciências Florestais da ESALQ/USP por me permitir e incentivar, irrestritamente, a busca da qualificação profissional.

Ao meu orientador Prof. Dr. Péricles Brasilienses Fusco pela confiança, pelo entusiasmo e pelo seguro discernimento científico com que me auxiliou na delimitação do campo de abrangência deste trabalho.

Aos Professores Paulo M. Pimenta, Henrique de Brito, Pedro A. O. Almeida e Soeli M. B. Almeida pelos grandes empenhos com que trabalharam na minha admissão como aluno de doutorado em Engenharia de Estrutura d. Escola Politécnica da USP.

Aos Professores Aluísio F. Margarido e V. de Souza Lima pelos incentivos e pelas excelentes contribuições apresentadas durante a serena avaliação que me fizeram no exame geral de qualificação.

Aos Professores Paulo Boulos e Carlos A. Soares pelas valiosas explicações que me possibilitaram resolver pontos importantes deste trabalho.

À CAPES pela bolsa que me concedeu através de seu programa PICD, mas principalmente, pelo que vem desenvolvendo em busca da mais completa formação profissional de recursos humanos brasileiros.

## SUMÁRIO

Lista de tabelas	
Lista de figuras	
Lista de símbolos	
Resumo	
"Abstract"	



1 - INTRODUÇÃO .....	1
2 - REVISÃO DE LITERATURA .....	3
2.1 Equações Básicas .....	3
2.1.1 Da teoria elementar da Resistência dos Materiais .....	3
2.1.2 Da teoria da Elasticidade .....	4
2.2 Tensão de Crescimento .....	10
2.2.1 Definições .....	10
2.2.2 Origem .....	10
2.2.3 Quantificação .....	11
2.2.3.1 No interior do tronco .....	11
2.2.3.2 Na periferia do tronco em árvores vivas .....	43
2.2.4 Redistribuição .....	66
2.2.4.1 Devida a cortes transversais .....	66
2.2.4.2 Devida a cortes longitudinais .....	68
2.2.4.2.1 Na conversão tora-prancha diametral .....	68
2.2.4.2.2 Na conversão prancha diametral-sarrafo .....	71
2.3 Anisotropia e Ortotropia da Madeira .....	74
3 - MATERIAL E MÉTODO .....	78
3.1 Determinação das constantes elásticas da madeira .....	78

3.2	Medição das deformações periféricas potenciais em árvores em pé .....	82
3.3	Verificação das flechas na madeira serrada .....	84
<b>4</b>	<b>- RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>86</b>
4.1	Constantes elásticas da madeira úmida de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	86
a)	Para a determinação do $G_{12} = G_{r\theta}$ .....	89
b)	Para a determinação do $G_{23} = G_{\theta z}$ .....	89
c)	Para a determinação do $G_{31} = G_{zr}$ .....	90
4.1.1	Influência do comprimento do corpo de prova na determinação do $E_z$ à compressão .....	91
4.1.2	Ensaio de compressão .....	92
4.1.3	Ensaio de tração .....	93
4.2	Aferição da ferramenta a ser utilizada no desconfinamento de um elemento da árvore em pé .....	96
4.3	Tensões e deformações de crescimento periféricas .....	97
4.4	Comparações entre os modelos teóricos de distribuição de tensões na tora .....	99
4.4.1	Radiais ( $\sigma_r$ ) .....	100
4.4.2	Tangenciais ( $\sigma_\theta$ ) .....	102
4.4.3	Longitudinais ( $\sigma_z$ ) .....	102
4.5	Novos modelos de distribuição de tensões na tora .....	112
4.5.1	Parabólico .....	113
4.5.2	Linear .....	114
4.6	Comparações dos modelos teóricos propostos com alguns modelos teóricos anteriores .....	115
4.6.1	Comprovação experimental .....	117
4.7	Distribuições de tensões na madeira serrada .....	118
4.7.1	Na prancha diametral .....	118
4.7.1.1	Para $\sigma_z$ dada pela distribuição de KUBLER .....	119

	iii
4.7.1.2 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição parabólica proposta .....	119
4.7.1.3 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição linear proposta .....	120
4.7.1.4 Comprovação experimental .....	121
4.7.2 No sarrafo .....	124
4.7.2.1 Obtido da prancha diametral .....	124
4.7.2.1.1 Para $\sigma_z^P$ obtida de uma distribuição de KUBLER na tora .....	126
4.7.2.1.2 Para $\sigma_z^P$ obtida de uma distribuição parabólica na tora ...	126
4.7.2.1.3 Para $\sigma_z^P$ obtida de uma distribuição linear na tora .....	126
4.7.2.2 Obtido diretamente da tora .....	127
4.7.2.2.1 Para $\sigma_z$ dada por KUBLER .....	128
4.7.2.2.2 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição parabólica proposta .....	128
4.7.2.2.3 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição linear proposta .....	128
4.7.2.3 Tensões residuais na madeira serrada .....	128
4.8 Equações de compatibilidade para materiais ortotrópicos .....	130
4.9 Desenvolvimento teórico das funções de deslocamentos no sarrafo .....	131
4.9.1 Pela Resistência dos Materiais .....	131
4.9.1.1 Para $\varepsilon_{zr}^S$ e $K$ obtidos de uma distribuição original de KUBLER na tora .....	132
4.9.1.2 Para $\varepsilon_{zr}^S$ e $K$ obtidos de uma distribuição original parabólica na tora .....	132
4.9.1.3 Para $\varepsilon_{zr}^S$ e $K$ obtidos de uma distribuição original linear na tora ..	132
4.9.2 Pela Teoria da Elasticidade .....	133
4.9.2.1 No plano $yz$ ou $rz$ num estado linear de tensão .....	133
4.9.2.2 Nos planos $xy$ ou $\theta r$ e $yz$ ou $rz$ num estado linear de tensão .....	137
4.9.2.3 Nos planos $xy$ ou $\theta r$ e $yz$ ou $rz$ num estado triplo de tensão .....	141
4.9.3 Comprovação experimental .....	149
4.9.3.1 Curvaturas dos sarrafos .....	151

4.9.3.2 Deformações específicas normais liberadas pelo desdobro .....	152
4.9.3.3 Deslocamentos transversais da linha neutra .....	160
4.10 Influência da conicidade da tora e da inclinação dos anéis de crescimento na seção transversal da peça, nos $E_r$ , $E_\theta$ e $E_z$ .....	172
<b>5 - CONCLUSÕES</b> .....	<b>176</b>
<b>Anexo I</b> .....	<b>178</b>
Anexo I <sub>A</sub> .....	179
Anexo I <sub>B</sub> .....	188
<b>Anexo II</b> .....	<b>220</b>
Anexo II <sub>A</sub> .....	221
Anexo II <sub>B</sub> .....	224
Anexo II <sub>C</sub> .....	227
Anexo II <sub>D</sub> .....	230
Anexo II <sub>E</sub> .....	233
Anexo II <sub>F</sub> .....	236
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>239</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Rachaduras devidas ao alto nível de tensão de crescimento .....	1
Figura 2.1 Prancha diametral de JACOBS com as extremidades confinadas (a) e com uma extremidade já desvinculada (b) .....	12
Figura 2.2 Comprimento dos sarrafos na prancha diametral (a), deformados por flexão (b) e deformados por tensões normais uniformes (c) .....	13
Figura 2.3 Seção transversal da árvore mostrando o raio R obtido por sucessivas adições da camada de crescimento $dr$ ao raio $r$ .....	15
Figura 2.4 Deformações observadas na conversão prancha-sarrafo de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	17
Figura 2.5 Prancha diametral engastada na tora (a) e distribuições das deformações liberadas quando esta prancha foi desvinculada e resserada (b) .....	19
Figura 2.6 Comportamento elasto-plástico da madeira .....	34
Figura 2.7 Deformações longitudinais periféricas no crescimento diametral da árvore .....	36
Figura 2.8 Determinação dos comprimentos iniciais de peças a serem serradas .....	40
Figura 2.9 Distribuição radial das deformações (a) e das tensões (b) liberadas na conversão tora-prancha diametral .....	40
Figura 2.10 Distribuições de deformações de crescimento assumidas (a) e dos módulos de elasticidade medidos (b) .....	41
Figura 2.11 Deformações (a) e tensões (b) liberadas na conversão tora-sarrafo .....	42
Figura 2.12 Procedimento utilizado para determinação da deformação longitudinal periférica potencial .....	45
Figura 2.13 Tensões longitudinais periféricas, em $Lb/pol^2$ , em árvores moderadamente inclinadas (a) e (b) e verticais (c) e (d) de <i>Eucalyptus regnans</i> .....	46
Figura 2.14 Determinação da deformação longitudinal periférica potencial com o auxílio da extensimetria .....	48

<b>Figura 2.15</b> Método simplificado para avaliação do gradiente de deformações ou de tensões longitudinais .....	51
<b>Figura 2.16</b> Transdutor reutilizável para medir deformações longitudinais periféricas potenciais .....	52
<b>Figura 2.17</b> Deformações manifestadas pelas supressões parciais de tensões pelos dois furos .....	52
<b>Figura 2.18</b> Variação das deformações periféricas intra árvore (a) e relação entre a direção da maior tensão de tração e a direção da inclinação da árvore (b) .....	53
<b>Figura 2.19</b> Influência do tipo de floresta nas deformações de crescimento individuais .....	54
<b>Figura 2.20</b> Método indireto para determinação das tensões de crescimento .....	56
<b>Figura 2.21</b> Locais de medidas das deformações periféricas e dos módulos de elasticidade à tração .....	57
<b>Figura 2.22</b> Variação de alguns parâmetros importantes ao longo da altura da árvore .....	58
<b>Figura 2.23</b> Diâmetro tangencial $\phi_t$ da bagueta retirada de corpos de prova descarregados .....	60
<b>Figura 2.24</b> Deformação longitudinal periférica ( $\alpha_z$ ) e diâmetro tangencial da bagueta ( $\phi_z$ ) com e sem madeira de tensão .....	62
<b>Figura 2.25</b> Transdutor reutilizável para medições de deformações longitudinais e tangenciais (a) e sua resposta em serviço (b) .....	62
<b>Figura 2.26</b> Método também utilizado para medir deslocamentos na periferia de árvores em pé .....	63
<b>Figura 2.27</b> Variabilidade (a) e amplitude dos deslocamentos medidos (b) em <i>E. falcata</i> sendo que os valores positivos indicam estado de tração .....	64
<b>Figura 2.28</b> Ângulo fibrilar $\theta$ (a) e camada gelatinosa g (b) .....	65
<b>Figura 2.29</b> Relações entre deslocamento vertical e comprimento de fibra (a) e entre deslocamento vertical e % de fibras gelatinosas (b) .....	65
<b>Figura 2.30</b> Deformações específicas e distorções liberadas no corte transversal .....	67
<b>Figura 2.31</b> Prancha diametral de pequena espessura e obtida de uma tora de raio R .....	68

Figura 2.32 Deformação longitudinal (a) e curvatura (b) teórica e experimental para $R = 1,27$ cm, determinado por tentativas .....	73
Figura 2.33 Rotação do plano transversal ( $12$ ou $r\theta$ ) em torno do eixo longitudinal da peça .....	76
Figura 3.1 Corpos de prova orientados segundo os três eixos principais de elasticidade para determinação dos $E_i$ e dos $\nu_{ij}$ .....	79
Figura 3.2 Corpos de prova com eixos principais de elasticidade convenientemente orientados para determinação dos $G_{ij}$ .....	80
Figura 3.3 Ensaio de tração mostrando o sistema de vinculação do corpo de prova e os extensômetros, colados em faces opostas, simulando uma roseta extensiométrica .....	81
Figura 3.4 Técnica utilizada para a determinação das deformações periféricas potenciais de crescimento em árvores em pé .....	83
Figura 3.5 Planos de cortes efetuados para produção de sarrafos orientados segundo os três eixos principais de elasticidade .....	85
Figura 4.1 Exemplos dos procedimentos desenvolvidos para a determinação do módulo de elasticidade (a) e do coeficiente de Poisson (b) .....	88
Figura 4.2 Relação entre o $E_z$ determinado na compressão e o comprimento do corpo de prova utilizado .....	92
Figura 4.3 Distribuições de tensões radiais em 4 árvores de <i>Eucalyptus grandis</i> (a) e singularidades centrais ampliada para a árvore de 40 cm de raio (b) .....	101
Figura 4.4 Distribuições de tensões tangenciais em 4 árvores de <i>Eucalyptus grandis</i> (a) e singularidades centrais ampliadas para a árvore de 40 cm de raio (b) .....	103
Figura 4.5 Distribuições de tensões longitudinais em 4 árvores de <i>Eucalyptus grandis</i> (a) e singularidades centrais ampliadas para a árvore de 40 cm de raio (b) .....	106
Figura 4.6 Distribuições de tensões longitudinais em 4 árvores de <i>Eucalyptus grandis</i> supostamente oriundas de um mesmo estado linear de tensões .....	110

<b>Figura 4.7</b> Distribuições das deformações específicas longitudinais (a) e dos módulos de elasticidade (b) determinados pelo modelo de POST para o <i>Eucalyptus grandis</i> .....	111
<b>Figura 4.8</b> Modelo parabólico proposto que depende de $\sigma_{zP}$ e $\sigma_c$ X modelo simplificado de KUBLER que depende de $\sigma_{zP}$ .....	115
<b>Figura 4.9</b> Modelo linear proposto X modelo simplificado de KUBLER, ambos dependentes de apenas $\sigma_{zP}$ .....	116
<b>Figura 4.10</b> Distribuição de tensões longitudinais em 4 árvores de <i>Eucalyptus grandis</i> supostamente oriundas de um estado linear de tensão .....	116
<b>Figura 4.11</b> Deformações específicas teóricas e experimentais determinadas para uma tora de <i>Frazinus americana</i> .....	117
<b>Figura 4.12</b> Acréscimos de deformações longitudinais que modificaram na prancha diametral as tensões originais da tora .....	122
<b>Figura 4.13</b> Distribuição teórica das deformações longitudinais ( $\epsilon_z^P$ ) na prancha diametral comparadas com dados experimentais de POST (1979) .....	123
<b>Figura 4.14</b> Sarrafo orientado segundo os três eixos principais de elasticidade .....	125
<b>Figura 4.15</b> Tensões longitudinais, originais na tora e residuais na prancha e no sarrafo .	129
<b>Figura 4.16</b> Tensões residuais num sarrafo de 6 cm de largura obtido de diferentes posições radiais de uma tora de 40 cm de raio .....	130
<b>Figura 4.17</b> Seção transversal e elástica de um sarrafo de <i>Eucalyptus grandis</i> , deformadas pela liberação das tensões de crescimento .....	150
<b>Figura 4.18</b> Variação da deformação periférica potencial $\alpha_z$ com o raio R da árvore de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	154
<b>Figura 4.19</b> Curvaturas do sarrafo 1 obtido de cada uma das quinze toras de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	155
<b>Figura 4.20</b> Curvaturas do sarrafo 2 obtido de cada uma das quinze toras de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	155
<b>Figura 4.21</b> Curvaturas do sarrafo 3 obtido de cada uma das quinze toras de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	156

Figura 4.22	Curvaturas do sarrafo 4 obtido de cada uma das quinze toras de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	156
Figura 4.23	Deformações específicas no sarrafo 1 obtido de cada uma das quinze toras de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	158
Figura 4.24	Deformações específicas no sarrafo 2 obtido de cada uma das quinze toras de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	158
Figura 4.25	Deformações específicas no sarrafo 3 obtido de cada uma das quinze toras de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	159
Figura 4.26	Deformações específicas no sarrafo 4 obtido de cada uma das quinze toras de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	159
Figura 4.27	Valores de deformações periféricas ( $\alpha_z$ ) em cinco árvores de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	162
Figura 4.28	Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 1 de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	163
Figura 4.29	Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 1 de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	164
Figura 4.30	Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 2 de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	165
Figura 4.31	Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 3 de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	166
Figura 4.32	Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 3 de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	167
Figura 4.33	Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 4 de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	168
Figura 4.34	Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 4 de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	169
Figura 4.35	Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 4 de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	170
Figura 4.36	Flechas apresentadas por várias espécies de <i>Eucalyptus</i> .....	171
Figura 4.37	Envoltórias que mostram a variação do $E_\theta$ com o ângulo existente entre a direção da carga e a direção dos anéis de crescimento (a) e a variação do $E_z$ com o ângulo entre a direção da carga aplicada e a direção das fibras (b) .....	173
Figura 4.38	Desvio da grã, introduzido pelo método convencional de desdobro em toras cônicas .....	175
Figura I <sub>Ai</sub>	Módulo de elasticidade longitudinal determinado na compressão X comprimento do corpo de prova de uma espécie desconhecida .....	180

<b>Figura I<sub>B</sub>i</b> Diagramas tensão-deformação ambos na direção radial (a) e deformação na direção longitudinal - deformação na direção radial (b) na madeira úmida de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	189
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Deformações medidas em uma prancha diametral sucessivamente serrada .....	13
Tabela 2.2	Deformações específicas sofridas pela prancha ( $\varepsilon_{z1}^P$ ) e a curva média ( $K_1$ ) do par de sarrafos retirados, de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> .....	18
Tabela 2.3	Deformações longitudinais de crescimento, em $\mu\varepsilon$ , liberadas no desdobro .....	41
Tabela 2.4	Deformações longitudinais periféricas potenciais medidas em folhosas .....	49
Tabela 2.5	Valores observados em 86 árvores .....	53
Tabela 2.6	Principais relações entre a tensão longitudinal periférica ( $\sigma_{zP}$ ) e a sua altura acima do nível do solo (h) .....	58
Tabela 2.7	Valores do coeficiente de correlação r .....	59
Tabela 2.8	Valores de r que mostram a influência de tensões impostas nos diâmetros axial e tangencial das baguetas .....	60
Tabela 2.9	Valores de r obtidos nas comparações entre alguns parâmetros coletados em condições naturais de uma população de Hêtre .....	61
Tabela 2.10	Constantes elásticas obtidas de KOLLMANN & COTÊ (1968) em MPa .....	76
Tabela 2.11	Constantes elásticas obtidas de SASAKI (1978) em GPa .....	76
Tabela 4.1	Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	87
Tabela 4.2	Deformações e tensões periféricas medidas em árvores em pé .....	97
Tabela 4.3	Relações $\frac{\sigma_{zP}^P}{\sigma_{zP}}$ .....	121
Tabela 4.4	Deformações específicas normais nos sarrafos de <i>Eucalyptus camaldulensis</i> da Fig. 2.4 .....	157
Tabela 4.5	Deslocamento, em cm, transversais ao eixo do sarrafo .....	161
Tabela I <sub>Ai</sub>	Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de uma espécie desconhecida ...	184
Tabela I <sub>Bi</sub>	Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de <i>Eucalyptus grandis</i> .....	205

## LISTA DE SÍMBOLOS

- A - raio da medula  
 B - raio do xilema diferenciado  
 b - lado da seção transversal de uma peça serrada, coincidente com a direção tangencial  
 C - índice indicativo de compressão  
 $C_{ijkl}$  - Coeficientes de rigidez  
 d - distância de uma peça serrada à medula ou menor diâmetro de uma tora  
 D - Diâmetro na extremidade mais grossa de uma tora  
 $D_e$  - diâmetro de um elemento desconfinado da árvore  
 $D_i$  - diâmetro interno do bocal da ferramenta  
 $D_{ijkl}$  - Coeficientes de deformabilidade  
 e - espessura da prancha diametral  
 E - módulo de elasticidade  
 $E_r$  - módulo de elasticidade na direção r ou 1  
 $E_\theta$  - módulo de elasticidade na direção  $\theta$  ou 2  
 $E_x$  - módulo de elasticidade na direção x ou 2  
 $E_y$  - módulo de elasticidade na direção y ou 1  
 $E_z$  - módulo de elasticidade na direção z ou 3  
 f - flecha  
 F - força  
 $G_{r\theta}$  - módulo de elasticidade transversal no plano  $r\theta$   
 $G_{\theta z}$  - módulo de elasticidade transversal no plano  $\theta z$   
 $G_{xz}$  - módulo de elasticidade transversal no plano xz  
 $G_{yx}$  - módulo de elasticidade transversal no plano yx  
 $G_{zr}$  - módulo de elasticidade transversal no plano zr  
 $G_{zy}$  - módulo de elasticidade transversal no plano zy  
 h - lado da seção transversal de uma peça serrada, coincidente com a direção radial  
 I - momento de inércia da seção transversal  
 K - curvatura de uma peça serrada  
 l - comprimento de uma peça serrada  
 M - momento fletor  
 r - eixo principal de elasticidade, na tora  
 R - raio de uma tora ou árvore  
 T - índice indicativo de tração  
 u - deslocamento na direção x  
 v - deslocamento na direção y  
 w - deslocamento na direção z  
 x - eixo principal de elasticidade na madeira serrada, coincidente com a direção tangencial  
 y - eixo principal de elasticidade na madeira serrada, coincidente com a direção radial  
 z - eixo principal de elasticidade na madeira serrada, coincidente com a direção longitudinal  
 $x_0$  - distância da medula até o centro de gravidade da seção transversal de uma peça serrada  
 $\alpha$  - ângulo formado entre a direção de uma ação e uma direção principal de elasticidade  
 $\alpha_r$  - deformação periférica potencial na direção r  
 $\alpha_\theta$  - deformação periférica potencial na direção  $\theta$   
 $\alpha_z$  - deformação periférica potencial na direção z  
 $\gamma_{r\theta}$  - distorção no plano  $r\theta$   
 $\gamma_{\theta z}$  - distorção no plano  $\theta z$   
 $\gamma_{xz}$  - distorção no plano xz

$\gamma_{yx}$  - distorção no plano yx

$\gamma_{zr}$  - distorção no plano zr

$\gamma_{zy}$  - distorção no plano zy

$\Delta l$  - alongamento ou encurtamento de uma peça serrada de comprimento l

$\Delta\sigma_Z^P$  - variação da tensão longitudinal que surge na conversão tora-prancha diametral

$\Delta\sigma_Z^S$  - variação da tensão longitudinal na obtenção de um sarrafo

$\varepsilon$  - deformação específica

$\varepsilon_r$  - deformação específica na direção r

$\varepsilon_\theta$  - deformação específica na direção  $\theta$

$\varepsilon_x$  - deformação específica na direção x

$\varepsilon_y$  - deformação específica na direção y

$\varepsilon_z$  - deformação específica na direção z

$\varepsilon_Z^P$  - deformação específica longitudinal na prancha diametral

$\varepsilon_{Zb_1}$  - deformação específica longitudinal na borda de um sarrafo, mais próxima da medula

$\varepsilon_{Zb_2}$  - deformação específica longitudinal na borda de um sarrafo, mais afastada da medula

$\varepsilon_{zr}^P$  - acréscimo de deformação específica longitudinal que surge na prancha diametral

$\varepsilon_{zr}^S$  - acréscimo de deformação específica longitudinal que surge num sarrafo

$\theta$  - ângulo fibrilar

$\lambda$  - índice de isotropia

$\nu_{r\theta}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção  $\theta$  devido ação na direção r

$\nu_{rz}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção z devido ação na direção r

$\nu_{r\theta}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção r devido ação na direção  $\theta$

$\nu_{\theta z}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção z devido ação na direção  $\theta$

$\nu_{xy}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção y devido ação na direção x

$\nu_{xz}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção z devido ação na direção x

$\nu_{yx}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção x devido ação na direção y

$\nu_{yz}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção z devido ação na direção y

$\nu_{zr}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção r devido ação na direção y

$\nu_{z\theta}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção  $\theta$  devido ação na direção z

$\nu_{zx}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção x devido ação na direção z

$\nu_{zy}$  - coeficiente de Poisson que exprime a deformação na direção y devido ação na direção z

$\rho$  - raio de curvatura

$\sigma$  - tensão normal

$\sigma_c$  - tensão no limite de resistência à compressão paralela

$\sigma_r$  - tensão normal na direção r, da tora

$\sigma_{rb_1}$  - tensão radial na borda de um sarrafo, mais próxima da medula

$\sigma_{rb_2}$  - tensão radial na borda de um sarrafo, mais afastada da medula

$\sigma_\theta$  - tensão normal na direção  $\theta$ , da tora

$\sigma_{\theta b_1}$  - tensão tangencial na borda de um sarrafo, mais próxima da medula

$\sigma_{\theta b_2}$  - tensão tangencial na borda de um sarrafo, mais afastada da medula

$\sigma_{\theta p}$  - tensão de crescimento na periferia da árvore, coincidente com a direção  $\theta$

$\sigma_x$  - tensão normal na direção x, da peça serrada

$\sigma_y$  - tensão normal na direção y, da peça serrada

$\sigma_z$  - tensão normal na direção z, da tora ou da peça serrada

$\sigma_{zb_1}$  - tensão normal longitudinal na borda de um sarrafo, mais próxima da medula

$\sigma_{zb_2}$  - tensão normal longitudinal na borda de um sarrafo, mais afastada da medula

$\sigma_{zp}$  - tensão de crescimento na periferia da árvore, coincidente com a direção z

$\sigma_Z^P$  - tensão longitudinal na prancha diametral

$\sigma_Z^S$  - tensão longitudinal no sarrafo

$\tau_{r\theta}$  - tensão de cisalhamento no plano  $r\theta$

$\tau_{\theta z}$  - tensão de cisalhamento no plano  $\theta z$

$\tau_{xz}$  - tensão de cisalhamento no plano  $xz$

$\tau_{yx}$  - tensão de cisalhamento no plano  $yx$

$\tau_{zr}$  - tensão de cisalhamento no plano  $zr$

$\tau_{zy}$  - tensão de cisalhamento no plano  $zy$

$\phi$  - diâmetro de uma bagueta

$\phi_t$  - diâmetro de uma bagueta, medido na direção tangencial

## RESUMO

A distribuição linear da componente longitudinal da deformação de crescimento no raio de uma árvore é utilizada neste trabalho para predições dos deslocamentos dos pontos das seções transversais, paralelas e perpendicularmente aos eixos indeformados das peças serradas obtidas no desdobro de uma tora proveniente desta árvore.

Esta distribuição depende unicamente da relação entre a deformação longitudinal periférica potencial e o raio da árvore, a qual pode ser considerada como um excelente indicador de seleção de árvores para serraria.

A determinação desta deformação, na floresta, através da técnica desenvolvida à base da extensimetria elétrica é de alta precisão mas é preciso ser simplificada para viabilizar, na prática, os programas de melhoramento que envolvem normalmente uma grande quantidade de medições.

## ABSTRACT

The linear distribution of the longitudinal growth strain component in the radius of a tree is used in order to predict the displacements of the points of the transversal sections, parallel and perpendicular in relation to the undeformed axis of lumber obtained by sawing a bole of this tree.

This distribution is dependent only on the relation between the potential peripheral longitudinal strain and the radius of the tree, which can be considered as an excellent tree indicator for sawmill.

The determination of this strain at the forest through the technique developed on the basis of electrical extensimetry shows high precision but it must be simplified in order to render the breeding programs viable in practice, since they usually involve a great quantity of measurements.

## 1 - INTRODUÇÃO

A Fig. 1.1 resume de forma clara a importância da tensão de crescimento e mostra a sua manifestação numa tora de *Eucalyptus* obtida de uma árvore que apresentava um alto nível de tração na sua periferia.

O desconfinamento da extremidade da tora provoca uma concentração de tensões que pode levar a madeira à ruptura quando ultrapassar o seu limite de resistência intrínseca. Ocorrendo a ruptura os deslocamentos são imediatos e provocam um grande prejuízo no desdobro desta tora.

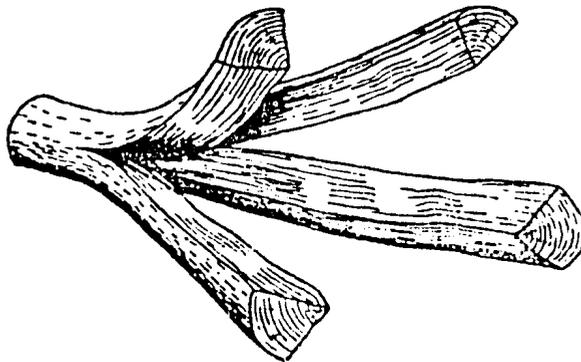


Figura 1.1 Rachaduras devidas ao alto nível de tensão de crescimento

Entretanto, o objetivo do presente trabalho é o de estimar o campo de deslocamentos que ocorre na madeira serrada, a uma suficiente distância da extremidade, a partir de um suposto estado de tensão na árvore. Dessa forma minimizou-se a grande complexidade matemática envolvida neste estudo.

Uma extensiva revisão bibliográfica possibilitou deduzir equações de distribuição de tensões ou deformações, na árvore e também equações teóricas de distribuição de tensões, ou de deformações, em peças serradas orientadas segundo os três eixos principais de elasti-

dade.

A partir destas distribuições de tensões, ou de deformações, obtiveram-se as equações de deslocamentos, inclusive no estado tridimensional.

Todas as equações deduzidas foram colocadas em função da tensão ou da deformação periférica, isto é, aquela medida na periferia da árvore. Dessa forma possibilitou-se definir a configuração deformada final de uma peça serrada a partir de um parâmetro de fácil obtenção no campo.

Projetou-se uma ferramenta que possibilitou a retirada de pequenos discos da superfície das árvores, os quais fornecem, pela variação de seus diâmetros, as deformações procuradas.

Esta ferramenta, denominada simplesmente vazador, apresentou excelente trabalho na retirada das amostras, mas como as medições das deformações se apresentaram um tanto inconsistente ela foi usada apenas para desconfinar os elementos de madeira portadores de "strain gage", os quais forneceram precisos valores de deformações periféricas potenciais em algumas espécies de *Eucalyptus*.

Foram determinadas todas as constantes elásticas da madeira de *Eucalyptus grandis*, tanto na tração como na compressão, as quais serviram para caracterizar esta espécie e para comparar os modelos teóricos de distribuição de tensões ou de deformações, em árvores vivas.

Por último, procedeu-se um ensaio de desdobro numa serraria industrial, onde foram medidos os deslocamentos que ocorreram na direção radial da madeira serrada com o intuito de comprovar as predições teóricas dos modelos propostos.

## 2 - REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Equações Básicas

Estão relacionadas abaixo somente aquelas que foram de fato utilizadas neste trabalho tão somente para facilitar o entendimento dos trabalhos encontrados na literatura e/ou servir às deduções próprias efetuadas neste mesmo ítem e também adiante.

Todas elas já podem ser consideradas de conhecimento geral pois são encontradas em quase todos os livros de Resistência dos Materiais e de Teoria da Elasticidade, mas no caso em questão foram utilizados com muita frequência TIMOSHENKO (1970, 1980), LEKHNITSKII (1981) e ARCHER (1986).

#### 2.1.1 Da teoria elementar da Resistência dos Materiais

Dentre as muitas importantes equações da Resistência dos Materiais, destaca-se a lei de HOOKE dada por

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.1)$$

donde

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \quad (2.2)$$

A Eq. (2.1) possibilita deduzir, no campo da flexão, a equação de distribuição de tensões ao longo da altura de uma viga

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (2.3)$$

e também a seguinte equação diferencial da linha elástica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.4)$$

No caso de momento fletor constante, a curvatura de uma viga é dada por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2.5)$$

e a flecha no meio do vão, dada como função dessa curvatura é

$$f = \frac{l^2}{8\rho} \quad (2.6)$$

Substituindo-se (2.1) em (2.3) e igualando-se a (2.5.) obtém-se o gradiente de deformações, no caso de distribuição linear de tensões ao longo da altura da viga.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{y} = \text{grad } \varepsilon \quad (2.7)$$

De (2.6) e (2.7), deduz-se

$$\text{grad } \varepsilon = \frac{8f}{l^2} \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Da teoria da Elasticidade

As relações deformações-tensões são obtidas por uma generalização da lei de HOOKE.

No caso de materiais ortotrópicos têm-se em coordenadas cilíndricas

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} & -\frac{\nu_{zr}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} & \frac{1}{E_\theta} & -\frac{\nu_{z\theta}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{rz}}{E_r} & -\frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde são válidas as seguintes igualdades

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \quad \frac{\nu_{rz}}{E_r} = \frac{\nu_{zr}}{E_z} \quad \frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} = \frac{\nu_{z\theta}}{E_z} \quad (2.10)$$

e em coordenadas retangulares, obtidas das anteriores, ou vice-versa apenas por uma conveniente mudança de índices

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde também são válidas as igualdades

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \quad \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}}{E_z} \quad (2.12)$$

As componentes de deformação também podem ser expressas em termos de deslocamento e são em coordenadas cilíndricas

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.13a)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2.13b)$$

e em coordenadas retangulares

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.14a)$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.14b)$$

As equações gerais de equilíbrio no caso de ausência de Força de Massa são em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.15a.)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0 \quad (2.15b.)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.15c)$$

e em coordenadas retangulares

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.16a.)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (2.16b.)$$

$$\frac{\partial \sigma_Z}{\partial Z} + \frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{ZY}}{\partial Y} = 0 \quad (2.16c)$$

Nos estudos da tensão de crescimento é conveniente adicionar às equações (2.9), como ocorre também nos estudos de tensões térmicas, componentes potenciais da deformação de crescimento, as quais são na verdade as manifestações do problema.

Dessa maneira as equações (2.9) se transformam, nas direções principais, em

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{zr}}{E_z} \sigma_z + \alpha_r \quad (2.17a)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{z\theta}}{E_z} \sigma_z + \alpha_\theta \quad (2.17b)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{rz}}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} \sigma_\theta + \frac{1}{E_z} \sigma_z + \alpha_z \quad (2.17c)$$

onde  $\alpha_r, \alpha_\theta$  e  $\alpha_z$  representam as deformações potenciais de crescimento nas direções  $r, \theta$  e  $z$  respectivamente.

Quando um segmento prismático de madeira é removido da periferia da árvore, as tensões  $\sigma_r, \sigma_\theta$  e  $\sigma_z$  desaparecem neste corpo ora desconfinado e as deformações  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  e  $\varepsilon_z$  se tornam exatamente iguais às respectivas deformações potenciais de crescimento.

No caso de tensão e deformação axissimétricas em um sólido de revolução as equações (2.13) se reduzem a

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.18a)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2.18b.)$$

de onde se pode obter com a eliminação de  $u$ , a seguinte condição de compatibilidade de deformações.

$$r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \quad (2.19)$$

Da mesma forma as equações (2.15) são reduzidas a

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.20a)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0 \quad (2.20b)$$

No caso em que o estado de tensão e deformação independe da variável  $z$ , pode-se fazer uma simplificação da axissimetria geral através da análise no estado plano de deformação.

O sistema (2.20) reduz-se então a

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0 \quad (2.21b)$$

Fazendo-se  $\varepsilon_z$  constante, obtém-se da terceira das equações (2.17).

$$\sigma_z = E_z(\varepsilon_z - \alpha_z) + \nu_{rz} \frac{E_z}{E_r} \sigma_r + \nu_{\theta z} \frac{E_z}{E_\theta} \sigma_\theta \quad (2.22)$$

que pode ser, pelas igualdades (2.10), simplificada a

$$\sigma_z = E_z(\varepsilon_z - \alpha_z) + \nu_{zr} \sigma_r + \nu_{z\theta} \sigma_\theta \quad (2.23)$$

Substituindo-se esta equação nas outras duas das equações (2.17), obtêm-se

$$\varepsilon_r = \left( \frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{zr}}{E_z} \nu_{zr} \right) \sigma_r - \left( \frac{\nu_{zr}}{E_z} \nu_{z\theta} + \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right) \sigma_\theta + \nu_{zr}(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_r$$

$$\varepsilon_\theta = - \left( \nu_{z\theta} \frac{\nu_{zr}}{E_z} + \frac{\nu_{r\theta}}{E_r} \right) \sigma_r + \left( \frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{z\theta}}{E_z} \nu_{z\theta} \right) \sigma_\theta + \nu_{z\theta}(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_\theta$$

Utilizando-se novamente as igualdades (2.10) estas duas equações podem ser escritas de uma forma mais condensada, como segue

$$\varepsilon_r = \frac{1 - \nu_{zr}\nu_{rz}}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\theta r} + \nu_{zr}\nu_{\theta z}}{E_\theta} \sigma_\theta + \nu_{zr}(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_r \quad (2.24a)$$

$$\varepsilon_\theta = - \frac{\nu_{r\theta} + \nu_{z\theta}\nu_{rz}}{E_r} \sigma_r + \frac{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}}{E_\theta} \sigma_\theta + \nu_{z\theta}(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_\theta \quad (2.24b)$$

Substituindo-se as equações (2.24) na equação (2.19), obtêm-se a seguinte equação de compatibilidade

$$\frac{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}}{E_\theta} \left( r \frac{d\sigma_\theta}{dr} + \sigma_\theta \right) - \frac{1 - \nu_{zr}\nu_{rz}}{E_r} \sigma_r = (\nu_{zr} - \nu_{z\theta})(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_r - \alpha_\theta \quad (2.25)$$

Nos estados, plano de tensão ou de deformação, os deslocamento das equações (2.14) impõem às suas dependentes componentes de deformações a seguinte condição de compatibilidade

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial y \partial z} \quad (2.26)$$

e no caso de materiais isotrópicos esta equação pode, através da lei de HOOKE e das equações de equilíbrio, ser transformada na seguinte condição de compatibilidade em termos de tensões

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.27)$$

Uma equação análoga a esta, será deduzida no capítulo 4 para materiais ortotrópicos.

## 2.2 Tensão de Crescimento

### 2.2.1 Definições

JACOBS (1945) adotou como definição da tensão de crescimento a proposta da SOCIETY OF AMERICAN FORESTER a qual recomenda o nome de tensões de crescimento, para as forças existentes em fustes lenhosos verdes.

DINWOODIE (1966) confirma esta definição lembrando que elas devem ser separadas daquelas tensões oriundas da secagem da madeira, e podem até serem usadas com vantagem por possibilitar produzirem-se peças retas a partir de toras tortas.

POST (1979) definiu as tensões de crescimento como as forças que se desenvolvem na madeira de plantas em crescimento.

KUBLER (1986) conclui que as tensões de crescimento são auto-geradas no crescimento da árvore e são uma espécie de tensões residuais internas, que caracteristicamente existem dentro de um corpo sólido mesmo que este não esteja sujeito a ações de tensões provocadas por forças externas atuantes. As tensões de crescimento não dependem do peso próprio da árvore e nem da variação diária ou sazonal do fluxo de seiva.

### 2.2.2 Origem

A maioria dos pesquisadores concordam que a tensão de crescimento surge como consequência de um encurtamento longitudinal, simultâneo a uma expansão transversal das fibras periféricas da árvore. Devido à vinculação destas fibras aos tecidos adjacentes, surge na camada periférica da árvore, comumente denominada camada de crescimento, um estado

triplo de tensão, onde se verificam uma tração auto-gerada na direção longitudinal e uma compressão auto-gerada na direção tangencial. Esta compressão tangencial provoca um deslocamento na direção radial maior do que o imposto pela própria tensão radial, introduzindo conseqüentemente uma tração nesta direção.

Existem, entretanto, divergências entre os pesquisadores com relação às causas destes deslocamentos que ocorrem nas fibras da camada de crescimento.

Uma das hipóteses sugere que a deposição de lignina entre as fibrilas de celulose provoca uma expansão transversal das fibras com conseqüentemente contração longitudinal. Esta hipótese explica a geração simultânea da tração longitudinal, compressão tangencial e da tração radial periféricas, através de um único processo fisiológico.

Outra hipótese indica que a contração longitudinal é devida ao processo de cristalização que ocorre na parede celular da fibra já diferenciada, e depois da lignificação.

### 2.2.3 Quantificação

#### 2.2.3.1 No Interior do Tronco

MARTLEY (1928) foi o primeiro pesquisador a observar que duas metades de uma tora fletiam de tal forma a deixar longitudinalmente convexa a face serrada.

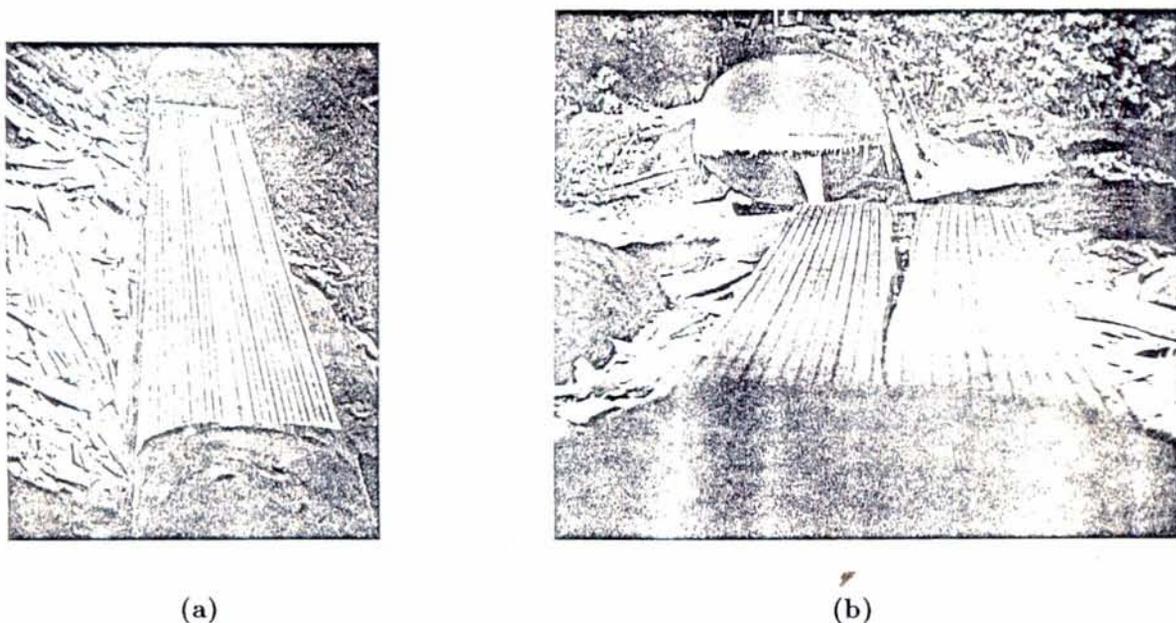
Considerando que o contínuo aumento do peso da árvore carregava os anéis de crescimento já formados e que o anel mais externo, em formação e ainda não lignificado, não é capaz de observar carga, ele supôs a existência de um gradiente de pressão que vai de um máximo no centro até o valor zero na periferia. Entretanto, cálculos de distribuição de pressões associadas a dados de pesos reais de diferentes espécies convenceram-no de que as tensões devidas ao peso próprio da árvore, não seriam suficientes para causar substancial influência nas dimensões longitudinais da madeira serrada.

Para a medida das deformações no interior do tronco ou da tora, há necessidade de se procederem aberturas que favoreçam o acesso ao ponto desejado. Entretanto, estas aberturas

devem ser tais que provoquem o menor distúrbio possível na distribuição real das tensões.

Portanto, na prática, as dificuldades encontradas para estas medições têm sido muito grandes e por esse motivo, mesmos os trabalhos mais significativos citados a seguir, não apresentam uma metodologia inteiramente satisfatória.

O primeiro estudo sistemático a respeito da distribuição de tensões no interior do tronco foi feita por JACOBS (1938, 1939 e 1945) quando tentou definir experimentalmente uma distribuição interna de tensões e deformações e para isto ele obteve uma tábua ou prancha diametral de 2,5 metros, confinada nas extremidades pelo remanescente de uma tora de 4,0 metros de comprimento, conforme mostra a Fig. 2.1.(a).



**Figura 2.1** Prancha diametral de JACOBS com as extremidades confinadas (a) e com uma extremidade já desvinculada (b)

Nesta tábua diametral ele traçou linhas guias e locou marcadores que definiram o comprimento inicial de cada uma destas faixas [Fig. 2.2(a)]. Em seguida, ele liberou as extremidades da tábua [Fig. 2.1(b)] e procedeu sucessivos cortes ao longo das linhas guias tomando o cuidado de liberar os sarrafos produzidos sempre equidistantemente da medula. A Fig. 2.2(b) mostra que os sarrafos obtidos se apresentavam aparentemente deformados apenas por flexão, mas ao ser retificados eles também se apresentavam deformados por tensões normais

conforme mostra a Fig. 2.2(c).

JACOBS calculou estas tensões normais através das deformações obtidas pela variação do comprimento dos sarrafos e pelo módulo de elasticidade da espécie estudada.

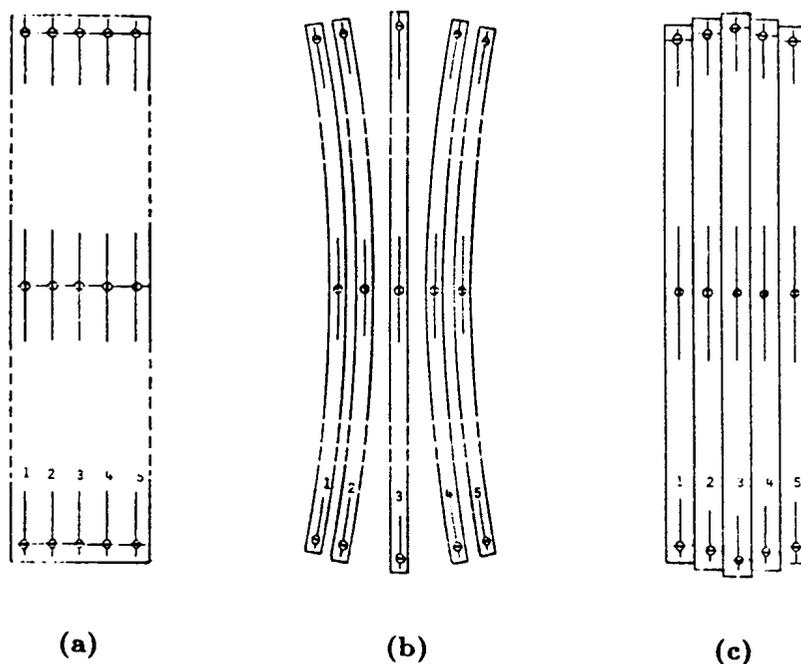


Figura 2.2 Comprimento dos sarrafos na prancha diametral (a), deformados por flexão (b) e deformados por tensões normais uniformes (c)

A Tabela 2.1 mostra um resultado típico da manifestação das tensões desenvolvidas em *Eucalyptus gigantea* de 7 anos de idade e com 7,7 cm de diâmetro obtidos por JACOBS (1939), onde concluiu que existe um gradiente de tensões ao longo de qualquer direção radial.

Tabela 2.1 Deformações medidas em uma prancha diametral sucessivamente serrada

sarrafo n <sup>o</sup>	$\mu\epsilon$ obtidas pela remoção dos sarrafos			Total
	1 e 6	2 e 5	3 e 4	
1	-1200			1200
2	800	-600		-200
3	1000	400	-200	-1200
4	600	1000	0	-1600
5	200	-400		200
6	-1200			800

Observa-se que as tensões residuais são quase permanentes embora se redistribuem a cada corte e que a magnitude das deformações residuais são surpreendentemente grandes quando

comparadas com as deformações da ordem de 2000 a 4000  $\mu\epsilon$  que a madeira apresenta no limite elástico.

JACOBS (1945) lista 34 espécies de folhosas que mostraram um gradiente de deformações similar àquele encontrado por extensivas medições em *Eucalyptus gigantea*.

BOYD (1950) posicionou medidores de deformação, a diferentes profundidades, na metade do comprimento de toras de *Eucalyptus regnans* com diâmetros variando entre 40 e 60 cm e mediu as variações de comprimentos a cada corte transversal que ele efetuou, começando pelas extremidades e indo em direção ao ponto de medida.

Próximo da periferia ele encontrou tensões de tração da ordem de 8 MPa e locou o ponto de transição entre tração e compressão a cerca de  $\frac{2}{3}$  do raio da tora.

Aproveitando um grande número de dados e uma distribuição de deformação experimental levantada por JACOBS (1945) ele tentou obter uma expressão matemática para esta distribuição de deformações ao longo do raio da tora e chegou à seguinte equação

$$\frac{\partial \epsilon_Z}{\partial r} = 0,001916r^{-0,925} \quad (2.28)$$

onde:

$\partial \epsilon_Z$  = incremento de deformação na direção longitudinal

$\partial r$  = incremento de crescimento do raio

$r$  = variável que vai de zero na medula, até R na periferia da tora

Integrando a expressão (2.28) para obter a deformação longitudinal acumulada  $\epsilon_Z$  ao longo do raio, ele obteve

$$\epsilon_Z = \alpha_Z - 0,02555(R^{0,075} - r^{0,075}) \quad (2.29)$$

onde:

$R$  = raio da tora (em polegadas)

$r$  = distância da medula onde se deseja medir a deformação  $\epsilon_z$  (em polegadas)

$\alpha_z$  = deformação longitudinal potencial medida na periferia da tora, onde  $r = R$

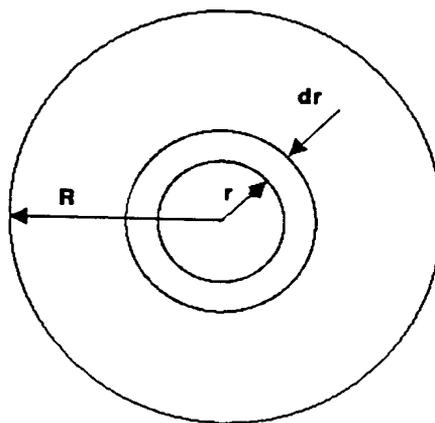
KUBLER (1959) obteve uma equação de distribuição de tensões ao longo do raio de uma tora, através de uma teoria muito simples baseada na suposição de que o incremento de tensão induzido por uma tensão de tração na madeira em desenvolvimento não varia no interior da área existente. Fazendo o equilíbrio de forças na direção  $z$ , perpendicular ao plano da Fig. 2.3, ele obteve uma equação a qual, depois de convenientemente adaptada para uniformizar-se a convenção de sinais, é a seguinte

$$2\pi r dr \sigma_{zp} - \pi r^2 d\sigma_z = 0 \quad (2.30a)$$

donde

$$d\sigma_z = 2\sigma_{zp} \frac{dr}{r} \quad (2.30b)$$

sendo  $\sigma_{zp}$  a tensão de crescimento medida na direção longitudinal e na periferia da árvore.



**Figura 2.3** Seção transversal da árvore mostrando o raio  $R$  obtido por sucessivas adições da camada de crescimento  $dr$  ao raio  $r$

Ao longo do crescimento da árvore, sucessivos incrementos de tensões serão adicionados e a tensão acumulada é expressa pela integral

$$\sigma_z = \int d\sigma_z$$

que resulta, tendo em vista a equação (2.30b), em

$$\sigma_z = 2\sigma_{zp} \ln r + C_1 \quad (2.30c)$$

Da condição de contorno de que na periferia

$$\sigma_z(R) = \sigma_{zp}$$

obtém-se

$$C_1 = \sigma_{zp} - 2\sigma_{zp} \ln R$$

a qual substituída na equação (2.30c), resulta finalmente na componente de tensão procurada

$$\sigma_z = \sigma_{zp} \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{R} \right) \quad (2.31a)$$

Procedimento análogo, obviamente mais trabalhoso, possibilita a obtenção das outras duas componentes de tensão

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta p} \left( 1 + \ln \frac{r}{R} \right) \quad (2.31b)$$

$$\sigma_r = \sigma_{\theta p} \ln \frac{r}{R} \quad (2.31c)$$

Observa-se que KUBLER tratou as componentes de tensão como problemas independentes e ainda, que suas distribuições apresentam na região da medula, uma inexplicada singularidade.

GIORDANO et alii (1969) realizaram um experimento de avaliação das tensões em pranchas diametrais obtidas de toras de *Eucalyptus camaldulensis* de diâmetro  $D$  variando de 12,70 a 48,26 cm. De acordo com a Fig. 2.4 eles serraram, consecutivamente da borda para a medula, quatro pares de sarrafos correspondentes e mediram após a retirada de cada par, a deformação específica sofrida pela prancha e a curvatura média dos dois sarrafos retirados. Os dados experimentais obtidos foram ajustados por funções do tipo

$$y = \frac{a}{D^b} \quad (2.32)$$

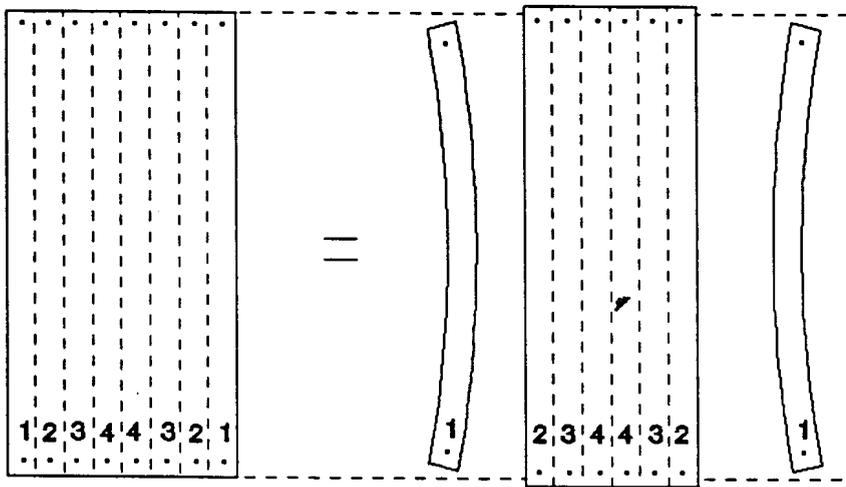


Figura 2.4 Deformações observadas na conversão prancha-sarrafo de *Eucalyptus camaldulensis*

A espessura da prancha diametral foi de 2,29 cm para a tora de 12,70 cm de diâmetro, e acrescida de 0,25 cm para cada 2,54 cm de aumento no diâmetro da tora.

A largura dos sarrafos mais externos variou com a proporção de alburno na prancha diametral e a largura dos demais, foi obtida pela divisão da largura remanescente da prancha

por seis sarrafos de mesma largura. Entretanto o trabalho não fornece qualquer indicação sobre estas dimensões e nem da espessura da serra utilizada na individualização dos sarrafos.

Para contornar esta falha, adotou-se como primeira aproximação, que a largura dos sarrafos mais externos foi de valor igual à própria espessura da prancha e que a largura dos demais foi obtida também pela divisão da largura remanescente da prancha por seis unidades, negligenciando-se a perda ocasionada pelo corte.

As larguras assim estimadas para os quatro pares de sarrafos ( $h_1 \neq h_2 = h_3 = h_4$ ) estão na Tab. 2.2 juntamente com os dados experimentais estimados pela Eq. (2.32).

**Tabela 2.2** Deformações específicas sofridas pela prancha ( $\epsilon_{Zi}^P$ ) e a curvatura média ( $K_i$ ) do par de sarrafos retirados, de *Eucalyptus camaldulensis*

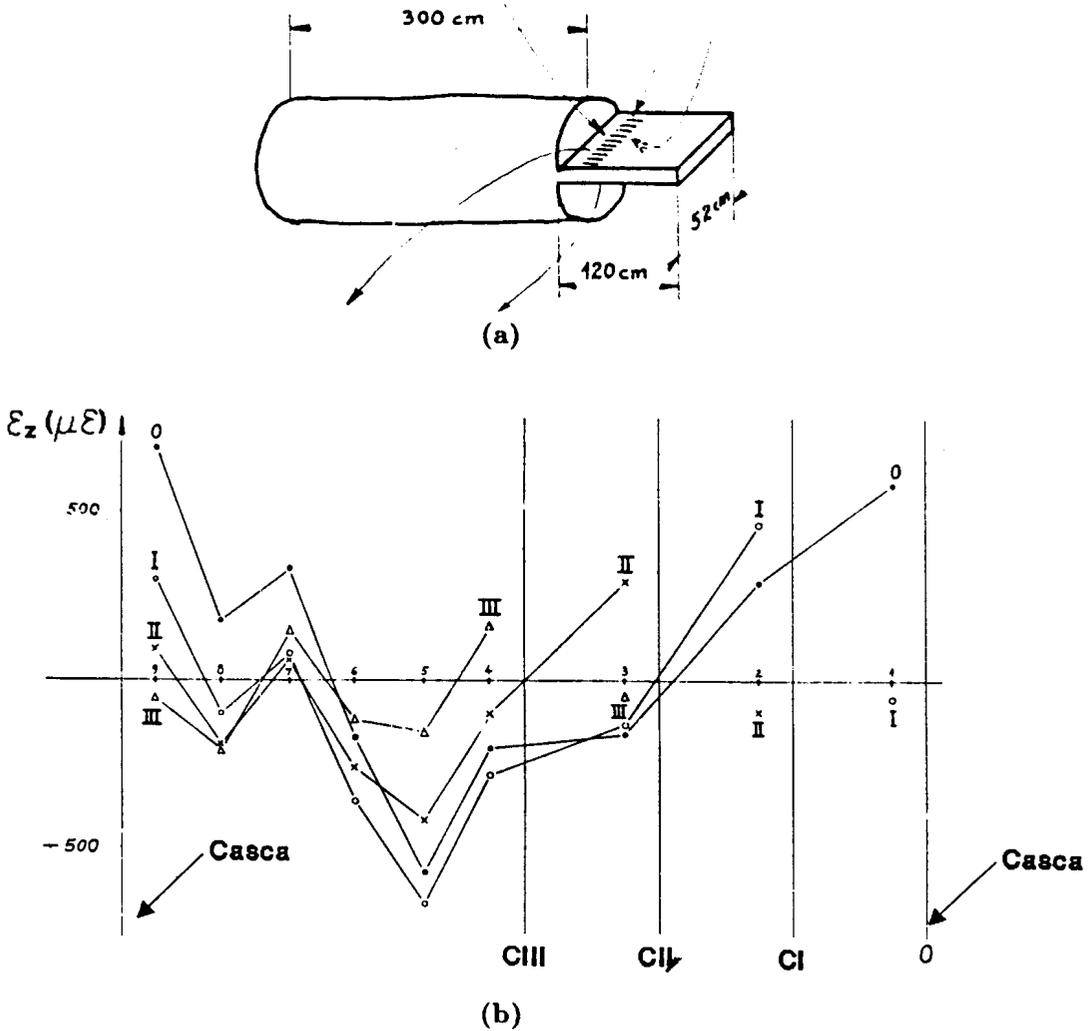
Diâmetro da tora ou Largura da prancha	$h_1$	$h_2=h_3=h_4$	$\epsilon_{Z1}^P$	$\epsilon_{Z2}^P$	$\epsilon_{Z3}^P$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$
	(cm)		$\times 10^4(\mu\epsilon)$			$\times 10^4 (cm^{-1})$			
12,70	2,29	1,36	11,58	14,55	16,85	4,68	5,86	2,24	1,75
15,24	2,54	1,69	9,68	12,68	16,00	3,67	4,47	2,14	1,54
17,78	2,79	2,03	8,32	11,28	15,21	2,98	4,13	2,06	1,38
20,32	3,05	2,37	7,30	10,20	14,50	2,50	3,58	1,98	1,26
22,86	3,30	2,71	6,50	9,49	13,83	2,14	3,15	1,90	1,16
25,40	3,56	3,05	5,86	8,62	13,30	1,85	2,84	1,83	1,08
27,94	3,81	3,39	5,33	8,02	12,77	1,63	2,60	1,76	1,01
30,48	4,06	3,73	4,90	7,51	12,26	1,46	2,41	1,70	0,95
33,02	4,32	4,06	4,53	7,07	11,81	1,31	2,24	1,65	0,90
35,56	4,57	4,40	4,21	6,68	11,41	1,19	2,10	1,60	0,85
38,10	4,83	4,74	3,93	6,34	11,05	1,08	1,97	1,56	0,81
40,64	5,08	5,08	3,69	6,04	10,73	0,99	1,85	1,53	0,78
43,18	5,33	5,42	3,48	5,77	10,43	0,91	1,76	1,49	0,74
45,72	5,59	5,76	3,29	5,52	10,16	0,85	1,66	1,46	0,71
48,26	5,84	6,10	3,12	5,30	9,91	0,81	1,59	1,44	0,69

Para chegar-se a uma distribuição mais real das deformações longitudinais sem a interferência do efeito de extremidades GUÉNEAU (1973) transformou uma das extremidades de uma tora de *Desbordesia glauscescens* em uma prancha diametral, como mostra a Fig. 2.5(a). Bem próximo do engaste ele colou 9 extensômetros convenientemente distribuídos ao longo da largura desta prancha diametral e em seguida desvinculou-a da tora para permitir a liberação das possíveis tensões residuais.

Com as deformações medidas, oriundas desta liberação de tensões, ele plotou a curva 0 da

Fig. 2.5(b).

Aproveitando os mesmos extensômetros, ele traçou também as curvas I, II e III com os valores das deformações obtidas após os correspondentes cortes longitudinais CI, CII e CIII.



curva 0: deformações medidas após a desvinculação da prancha diametral por um corte transversal

curva I: deformações medidas após o corte longitudinal CI

curva II: deformações medidas após o corte longitudinal CII

curva III: deformações medidas após o corte longitudinal CIII

Figura 2.5 Prancha diametral engastada na tora (a) e distribuições das deformações liberadas quando esta prancha foi desvinculada e resserada (b)

Na conversão tora-prancha diametral ele também verificou em duas toras de *Fraké* que as

deformações potenciais passaram de 515 e 915  $\mu\epsilon$  na periferia da tora para respectivamente 1080 e 1850  $\mu\epsilon$  na borda da prancha diametral, fato este que será discutido também no item 4.7.1.4 adiante.

GILLIS (1973) tratando a madeira como material isótropo considerou a interdependência entre as componentes de tensão e para resolver os problemas de singularidades do caso anterior, ele postulou a existência de um cilindro central de raio  $A$  cuja madeira tem as mesmas propriedades daquela do resto do tronco, mas formado inicialmente sem tensão de crescimento.

Suas deduções, bastantes simplificadas, culminaram nas seguintes distribuições de tensões

a) para  $0 \leq r \leq A$

$$\sigma_r = \sigma_{\theta p} \ln \frac{A}{R}$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta p} \ln \frac{A}{R}$$

$$\sigma_z = 2\sigma_{zp} \ln \frac{A}{R}$$

b) para  $A < r \leq R$

$$\sigma_r = \sigma_{\theta p} \ln \frac{r}{R}$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta p} \left(1 + \ln \frac{r}{R}\right)$$

$$\sigma_z = \sigma_{zp} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{R}\right)$$

Percebe-se que a singularidade não ficou satisfatoriamente resolvida porque o valor de  $A$  continua indefinido, mas estas equações confirmam aquelas de KUBLER (1959).

ARCHER & BYRNES (1974) apresentaram um estudo mais aprofundado, tratando a tora como um corpo cilindricamente ortotrópico.

Admitindo que as causas das tensões independem de  $z$  e que o comprimento da tora é sempre muito maior que o diâmetro eles fizeram uma aproximação da axissimetria geral através do estado plano de deformação fazendo  $\varepsilon_z$  constante e introduziram uma função de tensão tal que atenda as equações de equilíbrio (2.21).

$$\sigma_r = \frac{\phi}{r} \quad \sigma_\theta = \frac{d\phi}{dr} \quad (2.33)$$

Substituindo estas componentes de tensão na equação de compatibilidade (2.25) eles obtiveram a seguinte equação diferencial

$$r \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{dr} - \frac{1 - \nu_{zr}\nu_{rz}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \frac{E_\theta}{E_z} \frac{\phi}{r} = \frac{\nu_{zr} - \nu_{z\theta}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} E_\theta (\alpha_z - \varepsilon_z) + \frac{E_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} (\alpha_r - \alpha_\theta) \quad (2.34)$$

Baseados em MAITI & ADAMS (1968) que mostraram que a anisotropia cilíndrica não tem sentido no eixo longitudinal do tronco, porque o material é isotrópico nesta região, eles identificaram três regiões na seção transversal da árvore para estudar o envolvimento da tensão de crescimento.

região da medula:  $0 \leq r \leq A$

xilema diferenciado:  $A < r \leq B$

novo incremento de crescimento:  $B < r \leq B + \Delta B$

Devido ao baixo módulo de elasticidade eles desprezaram a carga a ser absorvida pela região da medula de raio  $A$  e dentro de cada pequeno incremento  $\Delta B$  adicionado ao xilema diferenciado de raio  $B$  foram assumidas deformações de crescimento  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  e  $\varepsilon_z$  oriundas do encurtamento e/ou inchamento das células durante a fase de maturação. Estas deformações provocam o aparecimento das correspondentes tensões devido ao efeito de confinamento do tecido vizinho. Quando um elemento periférico da árvore é desconfinado, estas deformações se manifestam respectivamente nas formas de  $\alpha_r$ ,  $\alpha_\theta$  e  $\alpha_z$ .

Fazendo, para a região do xilema,  $\alpha_r = \alpha_\theta = \alpha_z = 0$  eles aproveitaram a função de tensão obtida por MAITI & ADAMS (1968), dada pela equação (2.35), a qual satisfaz a equação de compatibilidade (2.34)

$$\phi = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda} - r \frac{\nu_{zr} - \nu_{z\theta}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \frac{E_\theta \varepsilon_z}{1 - \lambda^2} \quad (2.35)$$

onde:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - \nu_{zr}\nu_{rz}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \frac{E_\theta}{E_r}} \quad (2.36)$$

A partir das equações (2.33) e (2.35), podem ser obtidas as tensões

$$\sigma_r = A_1 r^{\lambda-1} + A_2 r^{-\lambda-1} - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \varepsilon_z \quad (2.37a)$$

$$\sigma_\theta = \lambda A_1 r^{\lambda-1} - \lambda A_2 r^{-\lambda-1} - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \varepsilon_z \quad (2.37b)$$

Da condição de que  $\sigma_r = 0$  em  $r = A$ , determina-se a partir da equação (2.37a).

$$A_2 = -A_1 A^{2\lambda} + \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} A^{\lambda+1} \varepsilon_z \quad (2.38)$$

Substituindo (2.38) em (2.37), obtêm-se

$$\sigma_r = A_1 r^{\lambda-1} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \varepsilon_z \quad (2.39a)$$

$$\sigma_\theta = \lambda A_1 r^{\lambda-1} \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{A}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \varepsilon_z \quad (2.39b)$$

No incremento de crescimento ARCHER & BYRNES (1974) definiram outra função de tensão que também satisfaz a equação de compatibilidade (2.25) para a condição de  $\alpha_r$ ,  $\alpha_\theta$  e  $\alpha_z$  diferentes de zero.

$$\phi_p = B_1 r^\lambda + B_2 r^{-\lambda} + \frac{r E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} [(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_r - \alpha_\theta] \quad (2.40)$$

Utilizando-se novamente as equações (2.33) calculam-se as componentes de tensão  $\sigma_{rp}$  e  $\sigma_{\theta p}$  na nova camada formada

$$\sigma_{rp} = B_1 r^{\lambda-1} + B_2 r^{-\lambda-1} + \frac{E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} [(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_r - \alpha_\theta] \quad (2.41a)$$

$$\sigma_{\theta p} = \lambda B_1 r^{\lambda-1} - \lambda B_2 r^{-\lambda-1} + \frac{E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} [(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_r - \alpha_\theta] \quad (2.41b)$$

onde

$\sigma_{rp}$  = tensão existente na direção radial e na periferia da árvore

$\sigma_{\theta p}$  = tensão existente na direção tangencial e na periferia da árvore

Da condição de que  $\sigma_{rp} = 0$  em  $r = \hat{B} = B + \Delta B$ , determina-se a constante  $B_2$  pela equação

$$B_2 = -B_1 \hat{B}^{2\lambda} - \frac{\hat{B}^{\lambda+1} E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} [(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_r - \alpha_\theta] \quad (2.42)$$

Substituindo (2.42) em (2.41) obtêm-se as seguintes tensões periféricas

$$\sigma_{rp} = B_1 r^{\lambda-1} \left[ 1 - \left( \frac{\hat{B}}{r} \right)^{2\lambda} \right] + \frac{E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} [(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})(\alpha_z - \varepsilon_z) + \alpha_r - \alpha_\theta] \left[ 1 - \left( \frac{\hat{B}}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \quad (2.43a)$$

$$\sigma_{\theta P} = \lambda B_1 r^{\lambda-1} \left[ 1 + \left( \frac{\hat{B}}{r} \right)^{2\lambda} \right] + \frac{E_{\theta}}{(1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z})(1 - \lambda^2)} [(\nu_{Zr} +$$

$$- \nu_{Z\theta})(\alpha_Z - \varepsilon_Z) + \alpha_r - \alpha_{\theta}] \left[ 1 - \lambda \left( \frac{B}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \quad (2.43b)$$

No ponto  $r = B$  a componente de tensão  $\sigma_{rP}$  é proporcional a  $\Delta B$  e portanto, utilizando-se os binômios de Newton

$$\left( \frac{\hat{B}}{B} \right)^{2\lambda} = \left( \frac{B + \Delta B}{B} \right)^{2\lambda} \simeq 1 + 2\lambda \frac{\Delta B}{B} \quad (2.44a)$$

$$\left( \frac{\hat{B}}{B} \right)^{1+\lambda} = \left( \frac{B + \Delta B}{B} \right)^{1+\lambda} \simeq 1 + (1 + \lambda) \frac{\Delta B}{B} \quad (2.44b)$$

transforma-se a equação (2.43a), no ponto  $B$ , em

$$\sigma_{rP}(B) = - \left\{ 2\lambda B_1 B^{\lambda-2} + \frac{E_{\theta}}{(1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z})(1 - \lambda^2)} [(\nu_{Zr} +$$

$$- \nu_{Z\theta})(\alpha_Z - \varepsilon_Z) + \alpha_r - \alpha_{\theta}] (\lambda + 1) B^{-1} \right\} \Delta B$$

No limite, desprezando-se os termos em  $\varepsilon_Z$  por serem considerados produtos de ordem superior, chega-se a

$$d\sigma_{rP}(B) = - \left\{ B_1 B^{\lambda-2} + \frac{E_{\theta}}{(1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z})(1 - \lambda^2)} [(\nu_{Zr} +$$

$$- \nu_{Z\theta})\alpha_Z + \alpha_r - \alpha_{\theta}] (\lambda + 1) B^{-1} \right\} dB \quad (2.45)$$

Da condição de que  $\sigma_r$  (equação 2.43a) em  $B$  se iguala a  $d\sigma_{rP}(B)$  (equação 2.45) determina-se a constante  $A_1$ .

$$A_1 = \frac{E_\theta}{(B^{2\lambda} - A^{2\lambda})(1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z})} [(B^{\lambda+1} - A^{\lambda+1}) \frac{(\nu_{Zr} - \nu_{Z\theta})}{1 - \lambda^2} \varepsilon_Z + (\nu_{Z\theta}\alpha_Z + \alpha_\theta) B^\lambda dB] \quad (2.46)$$

Montando-se a equação (2.24b) no incremento de crescimento e lembrando-se de que nesta região  $\sigma_{rp}$  e  $\varepsilon_Z$  são proporcionais a  $\Delta B$  e portanto podem ser anuladas, obtém-se

$$\varepsilon_{\theta p} = \frac{1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z}}{E_\theta} \sigma_{\theta p} + \nu_{Z\theta}\alpha_Z + \alpha_\theta \quad (2.47)$$

A tensão  $\sigma_{\theta p}$  que aparece nesta equação é obtida de maneira análoga aquela aplicada na dedução de  $\sigma_{rp}$ , isto é, substituindo-se (2.44b) em (2.43b) e desprezando-se os termos proporcionais a  $\Delta B$

$$\sigma_{\theta p} = 2\lambda B^{\lambda-1} B_1 (1 + \lambda) \frac{(\nu_{Zr} - \nu_{Z\theta})\alpha_Z + \alpha_r - \alpha_\theta}{(1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z})(1 - \lambda^2)} E_\theta \quad (2.48)$$

Para compatibilizar o deslocamento radial em  $B$ , é necessário ter-se  $\varepsilon_{\theta p} = 0$  como mostra a 2ª das equações (2.19a).

Disso resulta

$$\sigma_{\theta p} = -\frac{\nu_{Z\theta}\alpha_Z + \alpha_\theta}{1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z}} E_\theta \quad (2.49)$$

que substituída em (2.48), fornece

$$B_1 = -\frac{B^{1-\lambda}}{2\lambda} \left\{ \left[ \frac{(\nu_{Zr} - \nu_{Z\theta})\alpha_Z + \alpha_r - \alpha_\theta}{(1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z})(1 - \lambda^2)} \right] (1 + \lambda) + \frac{\nu_{Z\theta}\alpha_Z + \alpha_\theta}{1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z}} \right\} E_\theta \quad (2.50)$$

O estado de tensão no cilindro ortotrópico está agora completamente definido em termos de  $\varepsilon_Z$ .

Por ser auto equilibrado este estado de tensão deve produzir forças de mesma intensidade e de sentidos diferentes no xilema e no incremento de crescimento.

Sendo assim

$$\int_0^{2\pi} \int_A^B \sigma_z r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_B^{B+\Delta B} \sigma_{zP} r dr d\theta = 0 \quad (2.51)$$

onde  $\sigma_z$  é expresso pela equação (2.23) com  $\alpha_z = 0$  e  $\sigma_{zP}$  é também expresso pela equação (2.23) mas com  $\varepsilon_z = \sigma_r = 0$

Substituindo-se  $\sigma_z$  e  $\sigma_{zP}$  na equação (2.51) e procedendo-se a primeira integração, tem-se

$$\int_A^B (\varepsilon_z E_z + \nu_{zr} \sigma_r + \nu_{z\theta} \sigma_\theta) r dr + \int_B^{B+\Delta B} (-\alpha_z E_z + \nu_{z\theta} \sigma_{\theta P}) r dr = 0 \quad (2.52)$$

Substituindo as equações (2.39) e (2.49) na equação (2.52) e integrando-a, obtém-se

$$\begin{aligned} & \left[ E_z \frac{r^2}{2} \varepsilon_z + \right. \\ & + \nu_{zr} \left[ A_1 \left( \frac{r^{\lambda+1}}{\lambda+1} - A^{2\lambda} \frac{r^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right) + \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta}) E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left( A^{\lambda+1} \frac{r^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} - \frac{r^2}{2} \right) \varepsilon_z \right] + \\ & + \nu_{z\theta} \left[ \lambda A_1 \left( \frac{r^{\lambda+1}}{\lambda+1} + A^{2\lambda} \frac{r^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right) - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta}) E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left( \lambda A^{\lambda+1} \frac{r^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} + \frac{r^2}{2} \right) \varepsilon_z \right] \Big]_A^B + \\ & - \left( \alpha_z E_z + \nu_{z\theta} E_\theta \frac{\nu_{z\theta} \alpha_z + \alpha_\theta}{1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z}} \right) \left[ \frac{r^2}{2} \right]_B^{B+\Delta B} = 0 \quad (2.53) \end{aligned}$$

Na substituição dos limites de integração o termo  $(\Delta B)^2$  é desprezado e a equação (2.53) torna-se

$$E_z \frac{B^2 - A^2}{2} \varepsilon_z + \nu_{zr} \left[ A_1 \left( \frac{B^{\lambda+1} - A^{\lambda+1}}{\lambda+1} - A^{2\lambda} \frac{B^{-\lambda+1} - A^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right) + \right.$$

neste ponto quando ele era o incremento de crescimento com todas as tensões provocadas pelos diversos incrementos de crescimento posteriores, isto é,

$$\sigma_r = \int_r^R d\sigma_r \quad (2.60a)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta p} + \int_r^R d\sigma_\theta \quad (2.60b)$$

$$\sigma_z = \sigma_{zp} + \int_r^R d\sigma_z \quad (2.60c)$$

A tensão  $\sigma_{\theta p}$  é dada pela equação (2.49), a tensão  $\sigma_{zp}$  é dada pela equação (2.23) onde  $\varepsilon_z = \sigma_r = 0$  e os incrementos de tensões  $d\sigma_r$ ,  $d\sigma_\theta$  e  $d\sigma_z$  são dados pelas equações (2.59).

Assim

$$\sigma_r = \int_r^R \left\{ r^{\lambda-1} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] S(B) - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \varepsilon(B) \right\} dB \quad (2.61a)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})} + \int_r^R \left\{ \lambda r^{\lambda-1} \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] S(B) + \right. \\ \left. - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{A}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \varepsilon(B) \right\} dB \quad (2.61b)$$

$$\sigma_z = -\alpha_z E_z - \nu_{z\theta} \frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})} + \int_r^R [E_z \varepsilon(B) dB + \nu_{zr} d\sigma_r + \nu_{z\theta} d\sigma_\theta] \quad (2.61c)$$

Das equações (2.61) pode-se observar que somente  $\varepsilon(B)$  e  $S(B)$  dependem de  $B$  e que a integração do 2º e 3º termos da terceira das equações (2.61) já é feita nas duas primeiras, bastando somente eliminar a tensão periférica  $\nu_{z\theta}\sigma_{\theta p}$  da equação (2.61c).

As equações (2.61) podem então ser melhor expressas por

$$\begin{aligned} \sigma_r = r^{\lambda-1} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] \int_r^R S(B) dB + \\ - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta}) E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \int_r^R \varepsilon(B) dB \end{aligned} \quad (2.62a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = - \frac{(\nu_{z\theta} \alpha_z + \alpha_\theta) E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})} + \lambda r^{\lambda-1} \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] \int_r^R S(B) dB + \\ - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta}) E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{A}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \int_r^R \varepsilon(B) dB \end{aligned} \quad (2.62b)$$

$$\sigma_z = -\alpha_z E_z + \nu_{zr} \sigma_r + \nu_{z\theta} \sigma_\theta + E_z \int_r^R \varepsilon(B) dB \quad (2.62c)$$

Para facilitar estas integrações os autores desprezaram os termos em  $A$  e verificaram mediante alguns cálculos de  $\varepsilon_z$  dado pela equação (2.55) que eles influenciam em pequena monta, quando  $B$  é grande comparado com  $A$ .

Esta simplificação reduz a equação (2.55) a

$$\varepsilon_z = - \frac{2}{B} \frac{\frac{(\nu_{z\theta} \alpha_z + \alpha_\theta) E_\theta}{1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda \nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z E_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta}) E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + E_z} dB \quad (2.63)$$

Fazendo-se a simplificação

$$\varepsilon_z = \varepsilon_A(B) dB \quad (2.64)$$

e substituindo em (2.46), obtém-se

$$A_1 = \left\{ \frac{E_\theta}{B^{2\lambda} (1 - \nu_{z\theta} \nu_{\theta z})} \left[ B^{\lambda+1} \frac{\nu_{zr} - \nu_{z\theta}}{1 - \lambda^2} \varepsilon_A(B) + (\nu_{z\theta} \alpha_z + \alpha_\theta) B^\lambda \right] \right\} dB \quad (2.65)$$

que pode ser simplificada novamente para

$$A_1 = S_A(B) \text{ dB}$$

e ser substituída nas equações (2.62), para fornecer

$$\begin{aligned} \sigma_r = r^{\lambda-1} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] \int_r^R S_{A(B)} \text{ dB} + \\ - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \int_r^R \varepsilon_{A(B)} \text{ dB} \end{aligned} \quad (2.66a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = - \frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})} + \lambda r^{\lambda-1} \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] \int_r^R S_{A(B)} \text{ dB} + \\ - \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 + \lambda \left( \frac{A}{r} \right)^{\lambda+1} \right] \int_r^R \varepsilon_{A(B)} \text{ dB} \end{aligned} \quad (2.66b)$$

$$\sigma_z = -\alpha_z E_z + \nu_{zr}\sigma_r + \nu_{z\theta}\sigma_\theta + E_z \int_r^R \varepsilon_{A(B)} \text{ dB} \quad (2.66c)$$

Resolvendo-se as integrais das equações (2.66) obtêm-se

$$\begin{aligned} \sigma_r = r^{\lambda-1} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^{2\lambda} \right] \frac{E_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left\{ \right. \\ - \frac{2(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{1 - \lambda^2} \frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)E_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z E_z \left[ \frac{B^{-\lambda+1}}{-\lambda + 1} \right]_r^R + \\ \left. \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + E_z \left[ \frac{B^{-\lambda+1}}{-\lambda + 1} \right]_r^R + \right. \\ \left. + (\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta) \right\} \left[ \frac{B^{-\lambda+1}}{-\lambda + 1} \right]_r^B + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})\mathbf{E}_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 - \left(\frac{A}{r}\right)^{\lambda+1} \right] \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)\mathbf{E}_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z \mathbf{E}_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})\mathbf{E}_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + \mathbf{E}_z} [\ln B]_r^R \quad (2.67a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & -\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)\mathbf{E}_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} + \lambda r^{\lambda-1} \left[ 1 + \left(\frac{A}{r}\right)^{2\lambda} \right] \frac{\mathbf{E}_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left\{ \right. \\ & \left. \left[ \frac{-2(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{1 - \lambda^2} \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)\mathbf{E}_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z \mathbf{E}_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})\mathbf{E}_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + \mathbf{E}_z} \right] \frac{B^{-\lambda+1}}{-\lambda + 1} \right]_r^R + \\ & + (\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta) \left\} \left[ \frac{B^{-\lambda+1}}{-\lambda + 1} \right]_r^B + \frac{2(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})\mathbf{E}_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 + \right. \\ & \left. + \lambda \left(\frac{A}{r}\right)^{\lambda+1} \right] \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)\mathbf{E}_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z \mathbf{E}_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})\mathbf{E}_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + \mathbf{E}_z} [\ln B]_r^R \quad (2.67b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\alpha_z \mathbf{E}_z + \nu_{zr} \sigma_r + \nu_{z\theta} \sigma_\theta + \\ & - 2\mathbf{E}_z \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)\mathbf{E}_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z \mathbf{E}_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})\mathbf{E}_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + \mathbf{E}_z} [\ln B]_r^R \quad (2.67c) \end{aligned}$$

Substituindo-se os limites de integração nas equações (2.67), obtém-se finalmente as componentes da tensão de crescimento

$$\begin{aligned} \sigma_r = & r^{\lambda-1} \left[ 1 - \left(\frac{A}{r}\right)^{2\lambda} \right] \frac{\mathbf{E}_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left[ \right. \\ & \left. \left[ \frac{-2(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{1 - \lambda^2} \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)\mathbf{E}_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z \mathbf{E}_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})\mathbf{E}_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + \mathbf{E}_z} \right] + \right. \\ & \left. + (\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta) \right] \frac{R^{-\lambda+1} - r^{-\lambda+1}}{-\lambda + 1} + \end{aligned}$$

$$-\frac{2(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_{\theta}}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 - \left(\frac{A}{r}\right)^{\lambda+1} \right] \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_{\theta})E_{\theta}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z E_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_{\theta}}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + E_z} \ln \frac{r}{R} \quad (2.68a)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_{\theta})E_{\theta}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} + \lambda r^{\lambda-1} \left[ 1 + \left(\frac{A}{r}\right)^{2\lambda} \right] \frac{E_{\theta}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left[ \right.$$

$$\left. \left[ \frac{-2(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{1 - \lambda^2} \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_{\theta})E_{\theta}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z E_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_{\theta}}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + E_z} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_{\theta}) \right] \frac{R^{-\lambda+1} - r^{-\lambda+1}}{-\lambda + 1} + \right.$$

$$\left. -\frac{2(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_{\theta}}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \left[ 1 + \lambda \left(\frac{A}{r}\right)^{\lambda+1} \right] \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_{\theta})E_{\theta}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z E_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_{\theta}}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + E_z} \ln \frac{r}{R} \quad (2.68b)$$

$$\sigma_z = -\alpha_z E_z + \nu_{zr}\sigma_r + \nu_{z\theta}\sigma_{\theta} +$$

$$-2 E_z \frac{\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_{\theta})E_{\theta}}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left( \frac{\nu_{zr} + \lambda\nu_{z\theta}}{\lambda + 1} - \nu_{z\theta} \right) - \alpha_z E_z}{\frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_{\theta}}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})(1 - \lambda^2)} \frac{(1 - \lambda)(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})}{\lambda + 1} + E_z} \ln \frac{r}{R} \quad (2.68c)$$

Pode-se notar, que todas as substituições foram executadas de modo a deixar as componentes de tensão de crescimento somente em termos das deformações potenciais de crescimento o que possibilita suas determinações de forma generalizada e independente da espécie.

GILLIS & HSU (1979) admitiram o mesmo postulado de GILLIS (1973), mas consideraram a madeira como um material elásto-plástico que apresenta o comportamento da Fig. 2.6.

Para maior simplicidade da análise eles consideraram somente a tensão longitudinal e também consideraram o tronco como sendo um cilindro circular homogêneo.

No caso particular onde as tensões são uniformes e de valores  $-\sigma_0$  no cilindro central de raio  $A$ , a condição de equilíbrio a ser satisfeita é

$$-2\pi \int_0^A r\sigma_0 dr + 2\pi \int_r^R r\sigma_z dr = 0 \quad (2.69)$$

onde  $\sigma_z$  é uma função de  $r$  e representa a solução do problema.

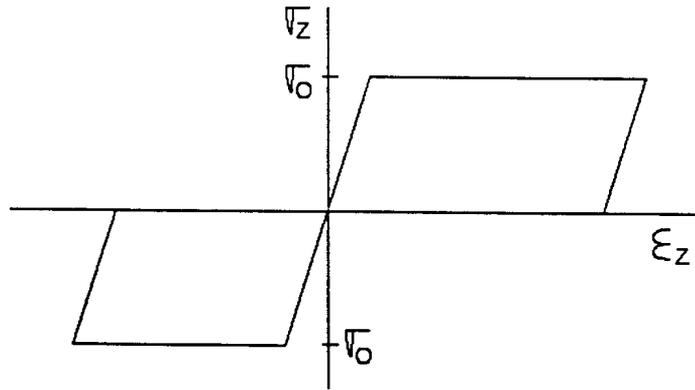


Figura 2.6 Comportamento elasto-plástico da madeira

Devido à adição de uma nova camada  $dR$  de crescimento sob tensão de tração uniforme ( $\sigma_{zp}$ ) surge uma nova condição de equilíbrio.

$$-2\pi \int_0^{A+dA} r(\sigma_0 + d\sigma_0) dr + 2\pi \int_{A+dA}^R r(\sigma_2 + d\sigma_2) dr + 2\pi \int_R^{R+dR} r\sigma_{zp} dr = 0 \quad (2.70)$$

Subtraindo a equação (2.69) da equação (2.70) eles chegaram à seguinte equação diferencial

$$A^2 \left( \frac{d\sigma_0}{dR} \right) + (R^2 - A^2) \left( \frac{d\sigma_z}{dR} \right) + 2R\sigma_{zp} = 0 \quad (2.71)$$

Com as condições de contorno

$$\sigma_z(R) = \sigma_{zp}$$

$$\sigma_z(r \leq A) = -\sigma_0$$

e também com as seguintes hipóteses adotadas

$$\frac{A}{R} = \text{constante}$$

$$\sigma_{zp}R = \text{constante}$$

eles obtiveram as seguintes soluções

$$\sigma_z = -\sigma_0 = -\sigma_{zp} \left( \frac{R}{A} \right) \left( 1 - \frac{A}{R} \right) \quad \text{para } 0 \leq r \leq A \quad (2.72a)$$

$$\sigma_z = -\sigma_{zp} \frac{\left( \frac{R}{A} \right) \left[ \frac{A}{r} - 2\frac{A}{R} + \left( \frac{A}{R} \right)^2 \right]}{1 - \frac{A}{R}} \quad \text{para } A < r \leq R \quad (2.72b)$$

POST (1979) propôs um modelo que segundo ele foi conceitualmente desenvolvido de maneira análoga ao crescimento da árvore em diâmetro. Ele tratou cada incremento de crescimento como uma zona na qual as propriedades do material, tensões e deformações são as mesmas num dado tempo. É portanto um modelo de elementos finitos, onde cada elemento finito é um tubo.

Ele tomou como base uma área  $A_1$  da seção transversal da medula, isenta de tensão, de uma tora de comprimento unitário [Fig. 2.7(a)] e adicionou um incremento de crescimento de área  $A_2$ , a qual pode ser determinada pela área da seção transversal da árvore, menos a área transversal da medula. Quando as células deste incremento se maturam elas querem, de acordo com a teoria da origem da tensão de crescimento, se encurtar de uma quantidade igual à deformação de crescimento  $\varepsilon_{z2}$  desta nova madeira, conforme a Fig. 2.7(b). A tensão longitudinal de crescimento ( $\sigma_{z1}$ ) será portanto, igual ao produto do módulo de elasticidade naquela direção e naquele tempo pela deformação de crescimento  $\varepsilon_{z2}$ .

A compatibilidade de deslocamentos devido a compressão na medula e a tração no incremento produzirá no conjunto, como mostra a Fig. 2.7(c), uma deformação de apenas  $\varepsilon_1$ . A

força aplicada na medula ( $F_1$ ), pode ser então calculada por

$$F_1 = -A_1\sigma_1 = -A_1E_{1,1,1}\epsilon_1 \quad (2.73)$$

onde:

$\sigma_1$  = tensão de compressão na medula

$E_{1,1,1}$  = módulo de elasticidade da medula (anel 1), ao nível da tensão atuante 1 e no tempo 1.

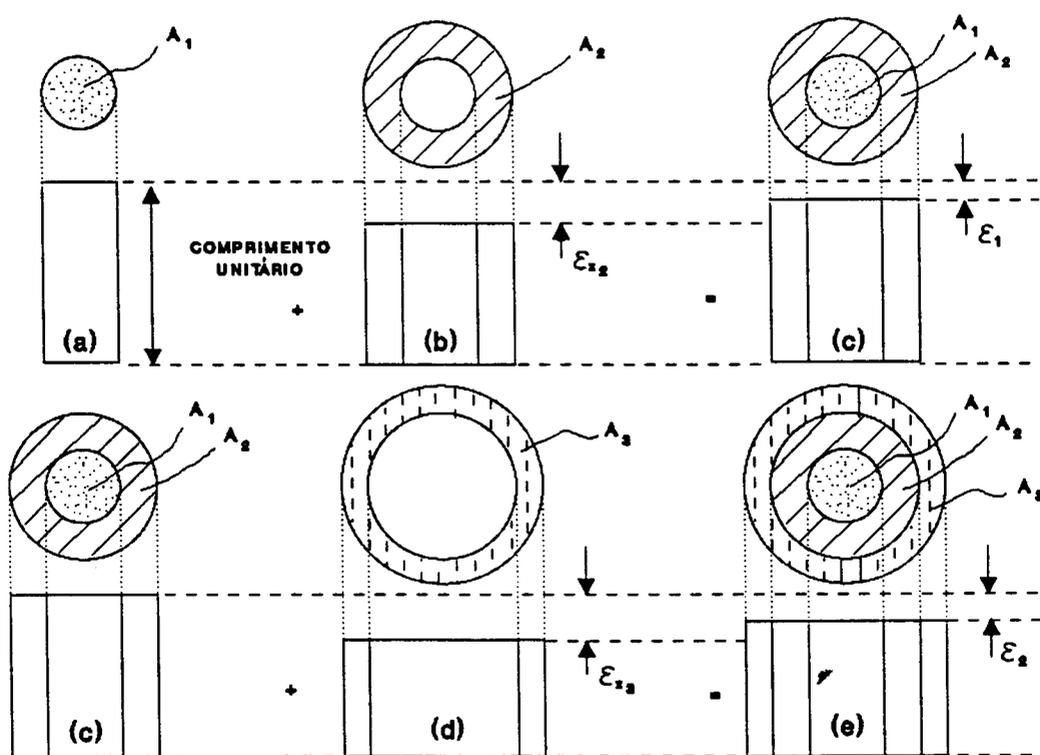


Figura 2.7 Deformações longitudinais periféricas no crescimento diametral da árvore

Analogamente, a força no incremento neste nível de tensão e no mesmo tempo será

$$F_2 = A_2\sigma_2 = A_2E_{2,1,1}(\epsilon_{2,2} - \epsilon_1) \quad (2.74)$$

onde:

$\sigma_2$  = tensão no incremento (anel 2)

$E_{2,1,1}$  = módulo de elasticidade do material 2, ao nível da tensão 1 e também no tempo 1.

O equilíbrio exige que

$$F_1 + F_2 = 0$$

portanto, das equações (2.73) e (2.74)

$$- A_1 E_{1,1,1} \epsilon_1 + A_2 E_{2,1,1} (\epsilon_{Z2} - \epsilon_1) = 0 \quad (2.75)$$

que fornece

$$\epsilon_1 = \frac{A_2 E_{2,1,1} \epsilon_{Z2}}{A_2 E_{2,1,1} + A_1 E_{1,1,1}} \quad (2.76)$$

É importante observar que tendo-se medido  $\epsilon_{Z2}$ , pode-se então pela equação (2.76), calcular-se  $\epsilon_1$  e a partir daí as tensões atuantes na medula e no incremento de crescimento.

Adicionando-se um terceiro incremento de área  $A_3$  e módulo de elasticidade  $E_{3,1,1}$  que se encurtará de  $\epsilon_{Z3}$  [Fig. 2.7(d)] provocar-se-á no conjunto de todas as camadas já existentes uma deformação de  $\epsilon_2$ , conforme mostra a [Fig. 2.7(e)], devido a uma nova compatibilidade de deslocamentos.

Consequentemente novos esforços surgirão entre estas camadas que estão em firme contato, os quais poderão ser num tempo 2 calculados por

$$F_1 = - A_1 E_{1,1,2} \epsilon_1 - A_1 E_{1,2,2} \epsilon_2$$

$$F_2 = A_2 E_{2,1,2} (\epsilon_{Z2} - \epsilon_1) - A_2 E_{2,2,2} \epsilon_2$$

$$F_3 = A_3 E_{3,1,1}(\varepsilon_{Z_3} - \varepsilon_2)$$

Novamente, somando-se estas três equações, igualando a zero e isolando-se  $\varepsilon_2$ , obtém-se

$$\varepsilon_2 = \frac{A_3 E_{3,1,1} \varepsilon_{Z_3} + A_1 E_{2,1,2}(\varepsilon_{Z_2} - \varepsilon_1) - A_1 E_{1,1,2} \varepsilon_1}{A_3 E_{3,1,1} + A_2 E_{2,2,2} + A_1 E_{1,2,2}} \quad (2.77)$$

Observa-se que obtendo-se  $\varepsilon_{Z_3}$  na periferia da árvore de seção transversal igual a  $A_1 + A_2 + A_3$  e já tendo anteriormente medido  $\varepsilon_{Z_2}$  podem-se calcular  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e consequentemente todas as tensões correspondentes aos três anéis da Fig. 2.7(e).

Genericamente, a deformação na n-ésima camada será dada por

$$\varepsilon_n = \frac{\sum_{j=2}^{n+1} A_j E_{j,1,n+2-j} \varepsilon_{Z_j} - \sum_{j=1}^n \left\{ A_j \left[ \sum_{k=j}^{n-1} (\varepsilon_1 E_{j,k+1-j,n}) \right] \right\}}{A_1 E_{1,n,n} + \sum_{l=2}^{n+1} A_l E_{l,n+2-l,n+2-l}} \quad (2.78)$$

Considerável simplificação pode ser obtida na equação (2.78) admitindo-se que o módulo de elasticidade não varia com o tempo o que equivale a dizer que

$$E_{x,y,1} = E_{x,y,2} = E_{x,y,3} = \dots$$

Neste caso, a equação (2.77) reduz-se a

$$\varepsilon_2 = \frac{A_3 E_{3,1,1} \varepsilon_{Z_3} + A_2 E_{2,1,1}(\varepsilon_{Z_2} - \varepsilon_1) - A_1 E_{1,1,1} \varepsilon_1}{A_3 E_{3,1,1} + A_2 E_{2,2,1} + A_1 E_{1,2,1}} \quad (2.79)$$

Entretanto parte do numerador desta equação é nula pela equação (2.75) fato este que simplifica ainda mais a equação (2.79), reduzindo-a a

$$\varepsilon_2 = \frac{A_3 E_{3,1,1} \varepsilon_{Z_3}}{A_3 E_{3,1,1} + A_2 E_{2,2,1} + A_1 E_{1,2,1}} \quad (2.80)$$

Genericamente, na  $n$ -ésima camada, obtém-se

$$\varepsilon_n = \frac{A_{n+1} E_{n+1,1,1} \varepsilon_{z(n+1)}}{A_1 E_{1,n,1} + \sum_{l=2}^{n+1} A_l E_{l,n+2-1,1}} \quad (2.81)$$

Para o caso de a deformação acumulada  $\varepsilon_n$  ultrapassar o limite de proporcionalidade do material, POST (1979) indica para corrigir o módulo de elasticidade a seguinte equação

$$E_z = \frac{330}{(|\text{def}| - 0,0085)^{0,9}} \quad (2.82)$$

e como acima deste limite não vale mais a lei de HOOKE ele calcula, então, a tensão longitudinal por

$$\sigma_z = -3300(|\text{def}| - 0,0085)^{0,1} \quad (2.83)$$

Para comprovar toda esta teoria ele selecionou uma árvore extremamente reta e vertical de White Ash (*Frazinus americana*) e dela obteve uma tora de 3,63 metros de comprimento e 40,64 centímetros de diâmetro. Nos topos desta tora ele cravou pinos alinhados segundo duas direções radiais e mediu antes de qualquer corte, como mostra a Fig. 2.8, as distâncias entre pares de pinos correspondentes.

Em seguida ele cortou as pranchas diametrais, mediu novamente as distâncias entre os pinos correspondentes e transformou-as em sarrafos que foram retificados, medidos e depois utilizados para determinações dos módulos de elasticidade num ensaio de compressão paralela.

Com este procedimento ele obteve os dados da Tabela 2.3, os quais possibilitou-lhe plotar as distribuições radiais das deformações e tensões longitudinais liberadas quando a tora foi convertida em uma prancha diametral (Fig. 2.9) e em sarrafos (Fig. 2.11).

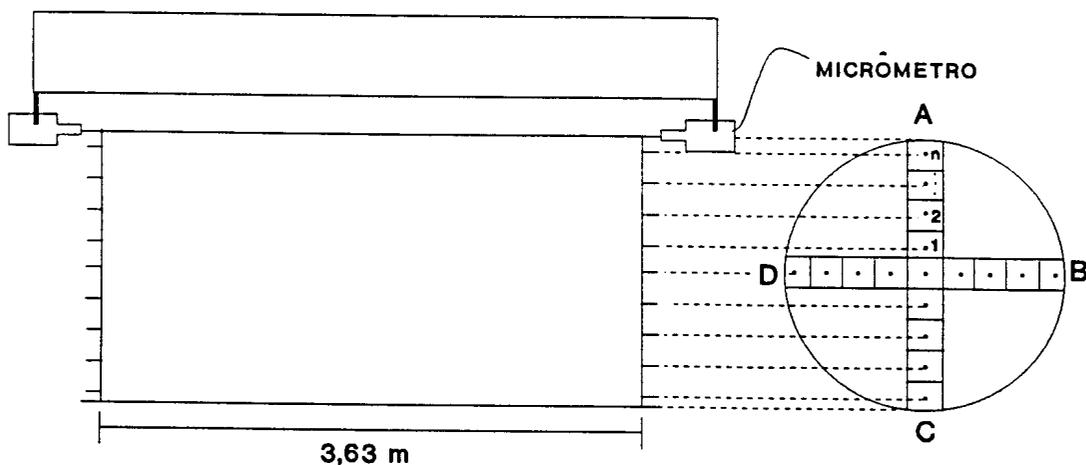
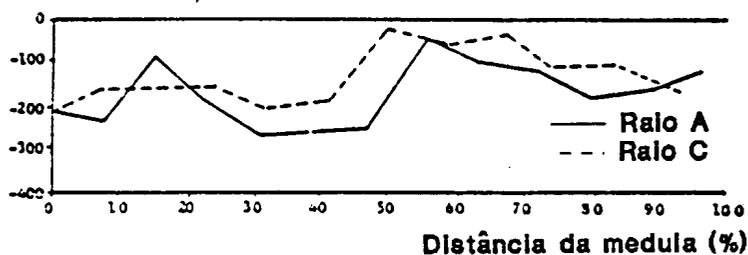


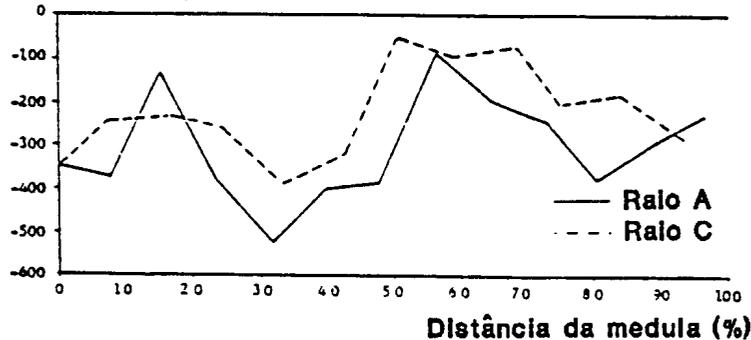
Figura 2.8 Determinação dos comprimentos iniciais de peças a serem serradas

Deformação longitudinal ( $\mu\epsilon$ )



(a)

Tensão longitudinal (Lb/poi<sup>2</sup>)

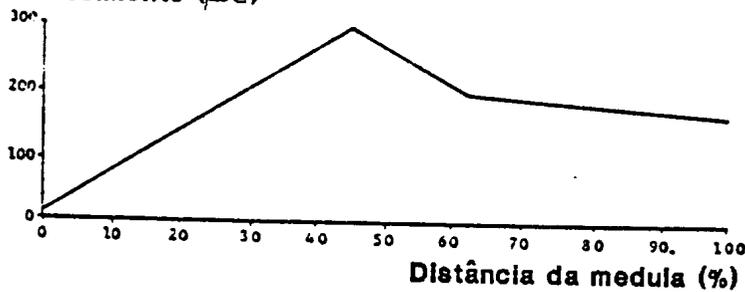


(b)

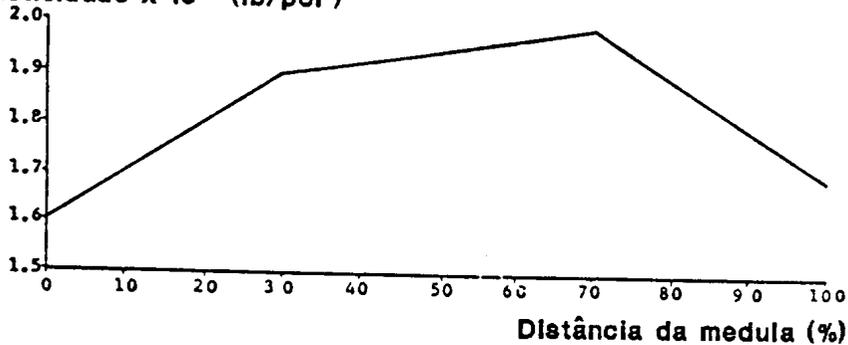
Figura 2.9 Distribuição radial das deformações (a) e das tensões (b) liberadas na conversão tora-prancha diametral

Tabela 2.3 Deformações longitudinais de crescimento, em  $\mu\epsilon$ , liberadas no desdobro

distância da medula no raio				tora - prancha		prancha - sarrafo		tora - sarrafo			
A	C	B	D	A	C	A	C	A	C	B	D
0	0	0	0	-217	-217	-657	-657	-874	-874	-874	-874
1,59	1,59	2,06	2,06	-231	-168	-573	-531	-804	-699	—	—
3,18	3,18	3,65	3,65	-84	-161	-238	-280	-322	-441	-622	—
4,76	4,76	5,24	5,24	-196	161	-119	-126	-315	-237	-412	-448
6,35	6,35	6,83	6,83	-273	-201	63	-28	-210	-230	-301	-203
7,94	7,94	8,41	8,41	-266	-182	42	196	-224	14	-154	0
9,53	9,53	10,00	10,00	-245	-21	300	161	56	140	-56	-42
11,11	11,11	11,59	11,59	-49	-49	112	28	63	-21	-119	-42
12,70	12,70	13,18	13,18	-104	-35	175	140	70	105	-63	—
14,29	14,29	14,76	14,76	-126	-112	224	217	98	105	-7	-28
15,86	15,86	16,35	16,35	-188	-105	315	224	126	119	70	98
17,46	17,46	17,94		-168	-168	301	399	133	231	161	—
19,05		19,53		-126		287		161		—	

Deformação de crescimento ( $\mu\epsilon$ )

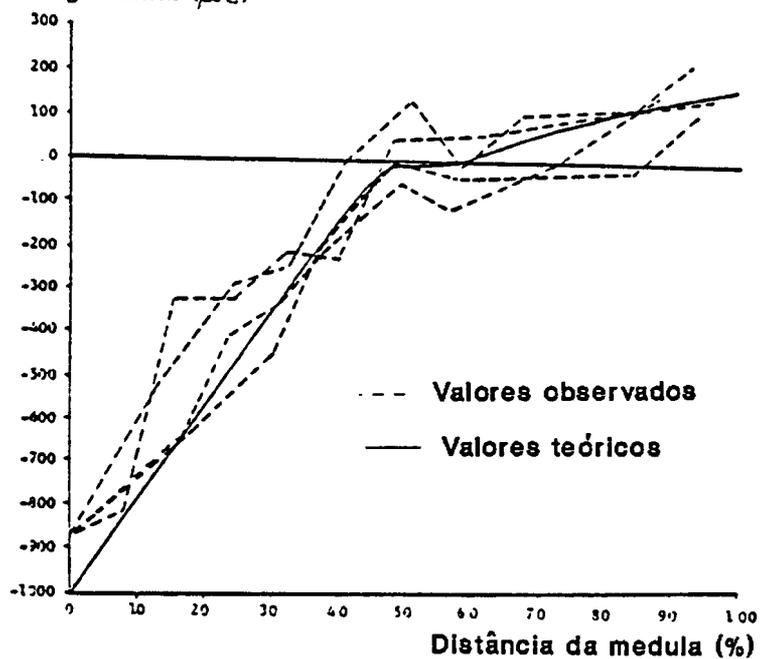
(a)

Módulo de elasticidade  $\times 10^{-6}$  (lb/pol<sup>2</sup>)

(b)

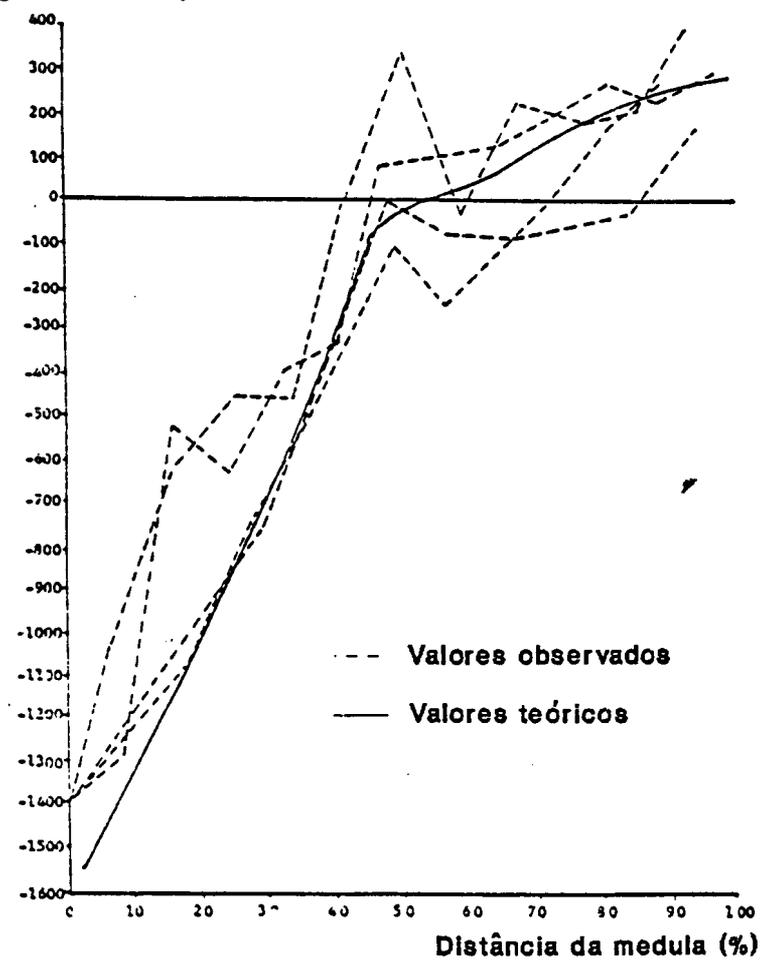
Figura 2.10 Distribuições de deformações de crescimento assumidas (a) e dos módulos de elasticidade medidos (b)

Deformação longitudinal ( $\mu\epsilon$ )



(a)

Tensão longitudinal (Lb/po<sup>2</sup>)



(b)

Figura 2.11 Deformações (a) e tensões (b) liberadas na conversão tora-sarrafo

Variando as deformações de crescimento ao longo da vida da árvore da forma subjetiva mostrada na Fig. 2.10(a) e variando os módulos de elasticidade medidos da forma mostrada na Fig. 2.10(b) POST obteve as distribuições teóricas de deformações e de tensões fornecidas pelo seu modelo genérico da equação (2.78), as quais estão plotadas na Fig. 2.11 conjuntamente com as observações experimentais efetuadas.

Observa-se nestas figuras que o modelo de POST se aproxima razoavelmente bem dos valores de deformações e de tensões liberadas. Isto é devido à sua grande capacidade de adaptação às condições de crescimento da árvore.

Entretanto o histórico da vida da árvore é quase sempre desconhecido limitando a generalidade do modelo, como será visto no capítulo 4. adiante.

Observa-se também que a variação do módulo de elasticidade ao longo do raio da árvore quase não modificou, nas tensões, aquela distribuição observada nas deformações.

POST et alii (1980) apenas reescreveram o procedimento prático descrito acima, bem como um similar de ATHERTON (1978) e admitiram que o método determina deformações médias que ocorrem ao longo de todo o comprimento de cada sarrafo. Existe portanto um pequeno erro devido aos efeitos de extremidades que embora possa ser minimizado em toras de grande comprimento face ao seu diâmetro, não foi quantificado.

#### 2.2.3.2. Na periferia do tronco em árvores vivas

NICHOLSON (1971), desenvolveu um método específico para medir a deformação longitudinal potencial  $\alpha_z$  na periferia de toras recém cortadas ou mesmo de árvores vivas.

Apesar de ser considerado um método rápido de medição da deformação longitudinal periférica potencial e atualmente muito utilizado na Austrália este método envolve sete estágios, sendo três dos quais, bastante delicados do ponto de vista prático.

O primeiro estágio consiste em descascar a árvore e delimitar um segmento de forma mais ou menos paralelepipedica na região onde se deseja fazer a medida. No segundo estágio são

coladas neste segmento, longitudinalmente alinhadas, três arruelas especiais que servem de base para um tensotast do tipo Huggenberger.

A Fig. 2.12(a) mostra estes procedimentos já executados e o tensotast, no 3º estágio, indicando a distância entre as arruelas das extremidades. Precisão de  $10^{-3}$  mm e uma distância de 5 cm foram consideradas satisfatórias.

Na etapa seguinte um novo tensotast é usado para medir o nível do ponto médio do segmento em relação aos pontos extremos como mostra a Fig. 2.12(b).

No 5º estágio procede-se a retirada do segmento, de dimensões aproximadas de 19 mm de largura, 89 mm de comprimento e 19 mm de profundidade, que contém as arruelas referenciais [Fig. 2.12(c)] para possibilitar a livre manifestação da tensão de crescimento e no 6º estágio um dispositivo especial como o da Fig. 2.12(d) é utilizado para recuperar pelo menos no ponto médio do comprimento da amostra, o nível da elástica natural, memorizado pelo tensotast do 4º estágio.

Por último, uma nova medição da distância entre as arruelas das extremidades é executada e o resultado é comparado com aquele da medição inicial no 3º estágio, para o cálculo da deformação longitudinal ou indiretamente através do módulo de elasticidade, da tensão longitudinal.

Considerável simplificação deste método pode ser obtida pela eliminação dos 4º e 5º estágios, procedendo-se apenas dois cortes transversais um acima e outro abaixo das arruelas superior e inferior para a liberação das tensões longitudinais.

Segundo NICHOLSON este procedimento mostrou suficiente precisão nas determinações longitudinais periféricas em tronco com mais de 75 cm de diâmetro, os quais apresentam na superfície um relativamente fraco gradiente radial dessas deformações.

NICHOLSON (1973) estudou as variações das tensões de crescimento em *Eucalyptus regnans* e *Eucalyptus obliqua* de 2ª rotação medindo as deformações longitudinais potenciais e os módulos de elasticidade em 10 ou 20 pontos igualmente espaçados ao longo da circunferência periférica de várias árvores ainda em pé e também nas mesmas árvores depois de derrubadas.

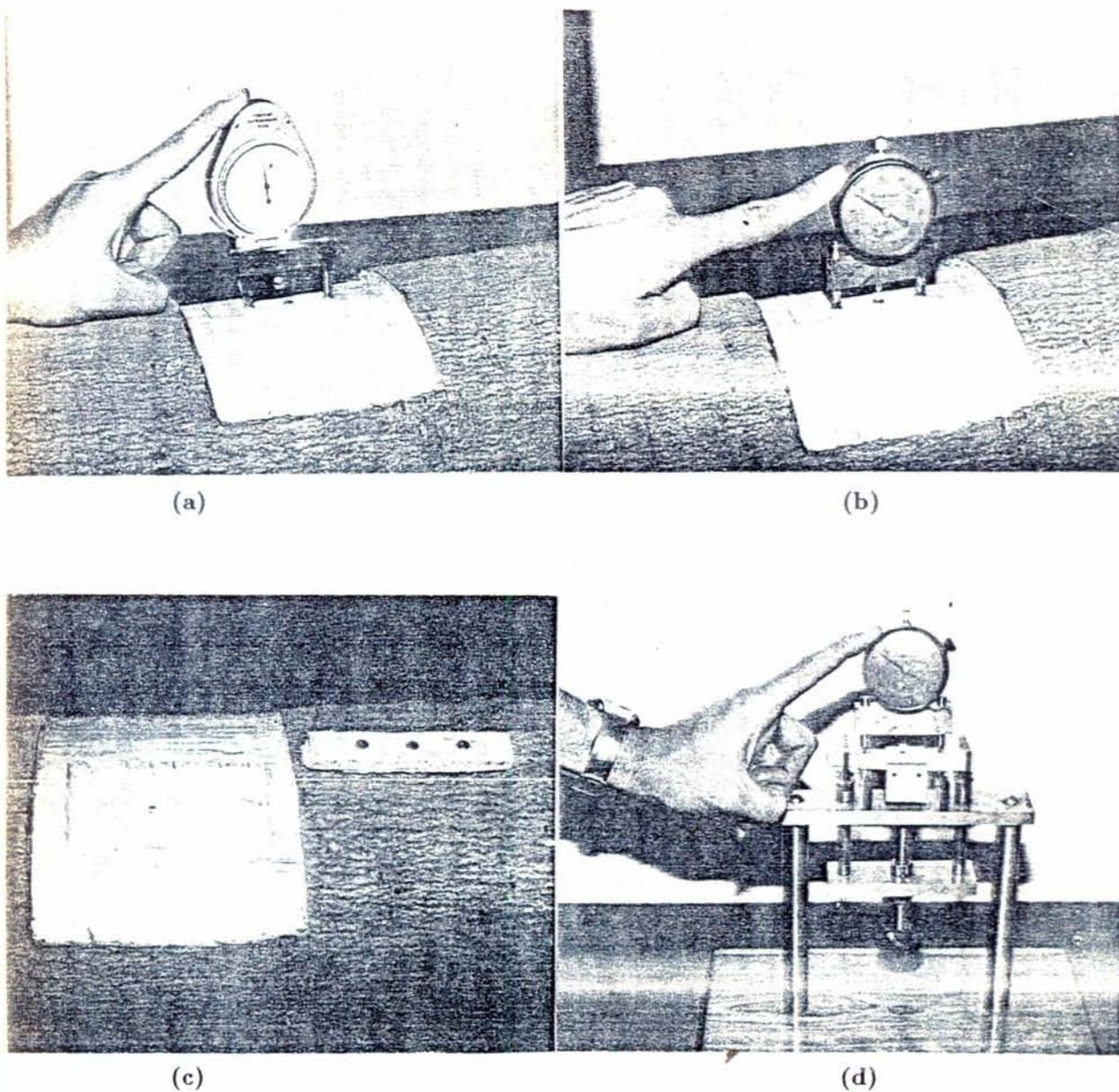


Figura 2.12 Procedimento utilizado para determinação da deformação longitudinal periférica potencial

(a) medida de comprimento inicial

(b) medida da posição da elástica do segmento de madeira a ser isolado da árvore

(c) desconfinamento total da amostra

(d) recuperação da posição inicial da elástica antes da medida do comprimento final

Os módulos de elasticidade foram obtidos num ensaio de compressão simples e as deformações foram obtidas pela mesma técnica descrita na citação anterior.

O valor da tensão média entre árvores variou de 710 a 2370 Lb/pol<sup>2</sup> no *Eucalyptus regnans* e de 1030 a 2490 Lb/pol<sup>2</sup> no *Eucalyptus obliqua*.

Na árvore mais homogênea de *Eucalyptus obliqua* as tensões variaram de 560 a 1900 e na menos homogênea de 1160 a 5500 Lb/pol<sup>2</sup> e a Fig. 2.13 mostra as grandes variações também observadas nas árvores de *Eucalyptus regnans*.

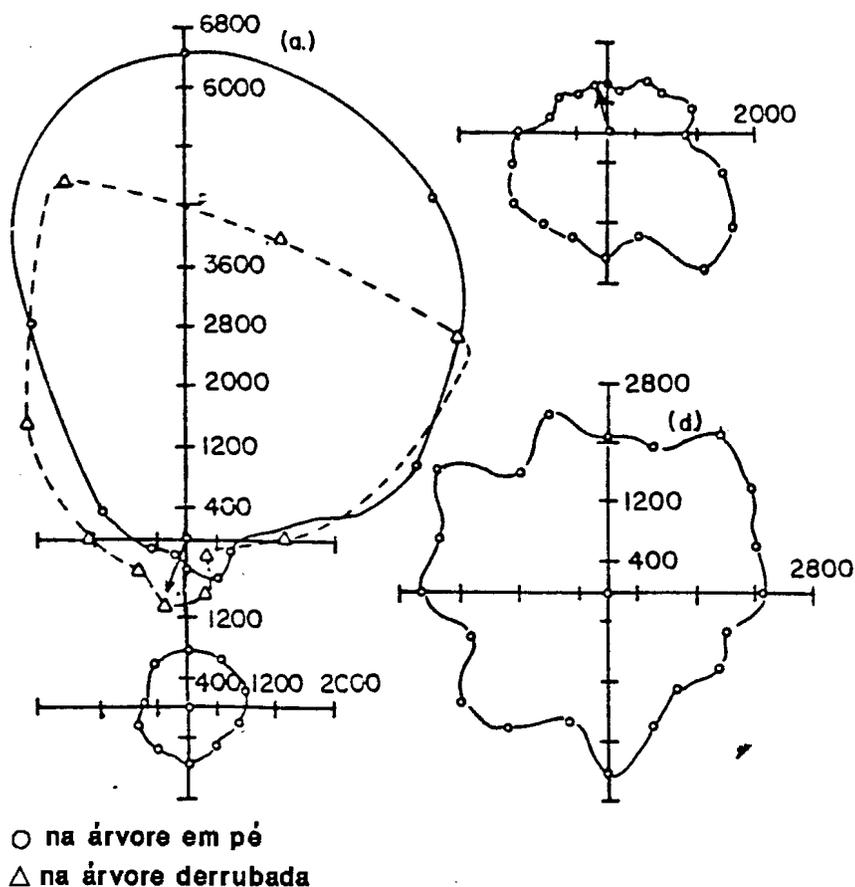


Figura 2.13 Tensões longitudinais periféricas, em Lb/pol<sup>2</sup>, em árvores moderadamente inclinadas (a) e (b) e verticais (c) e (d) de *Eucalyptus regnans*

Analizando esta figura ele concluiu que a tensão logitudinal média não parece ser função da inclinação da árvore e que a distribuição de tensões que se desenvolve na periferia de uma particular árvore está estreitamente relacionada à sua necessidade de suporte.

Por outro lado quatro árvores de diâmetros 18, 20, 15 e 19 cm, próximas entre si e

portanto dentro do mesmo ambiente, que apresentaram tensões de 900, 1130, 1730 e 2200 Lb/pol<sup>2</sup> respectivamente, levaram-no a concluir que a tensão de crescimento é controlada por outros fatores que não a taxa de crescimento e o ambiente.

Aproveitando a conclusão de NICHOLSON et alii (1972) de que parece haver uma substancial correlação entre densidade básica e o nível de tensão de crescimento dentro da árvore e sabendo que a densidade básica está sob significativo controle genético ele achou razoável sugerir que as tensões de crescimento podem estar também, pelo menos em parte, sob controle genético.

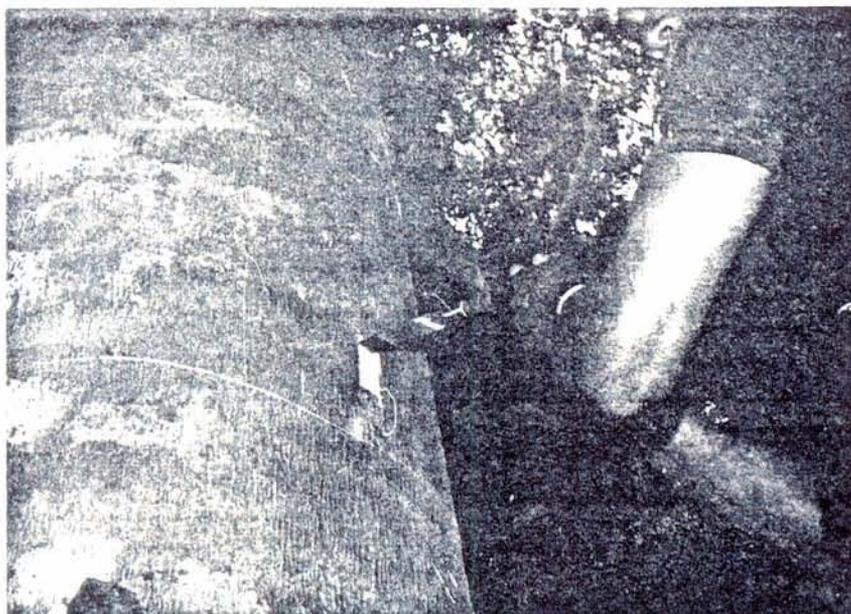
GUÉNEAU (1973) mediu, também pelo método da supressão das tensões em cinco pontos da circunferência, as deformações longitudinais periféricas potenciais em várias árvores de várias espécies da Costa do Marfim.

As medições foram feitas através de extensômetros elétricos colados à superfície das árvores previamente descascadas [Fig. 2.14(a)] e a liberação das tensões foi feita através de 2 furos de 30 mm de diâmetro e 30 a 40 mm de profundidade, um 5 mm acima e outro 5 mm abaixo do extensômetro [Fig. 2.14(b)].

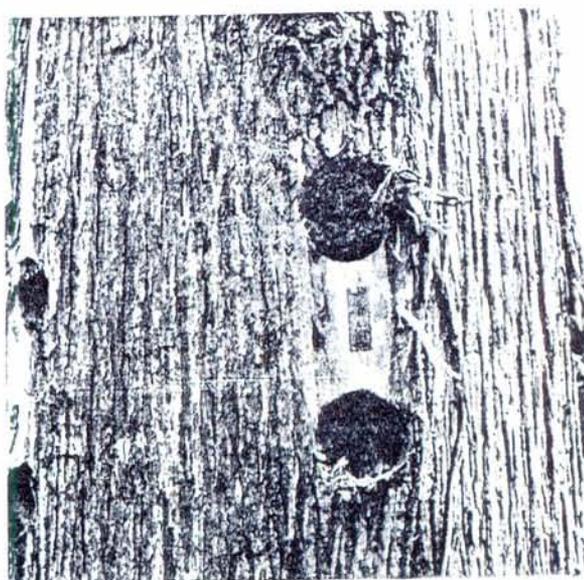
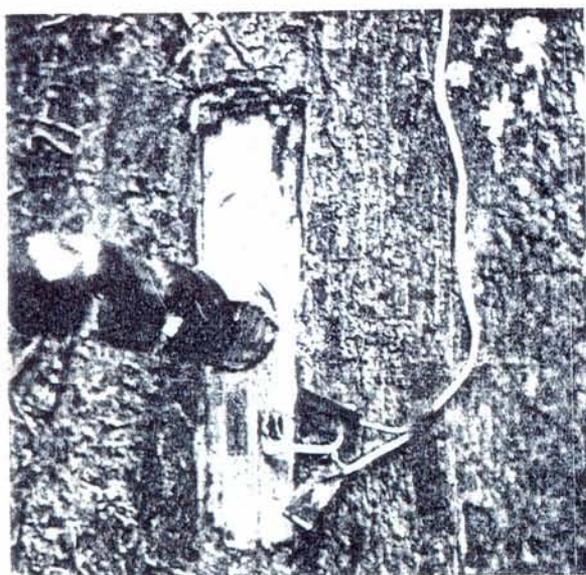
Os valores obtidos estão relacionados na Tab. 2.4 onde o ponto 0° coincide com a linha de maior inclinação do terreno. O azimute apresentado nesta tabela indica a direção desta inclinação, sendo que o valor p indica terreno plano.

Observa-se que a variabilidade das deformações longitudinais periféricas entre árvores de uma mesma espécie e em um mesmo local parece ser até mais elevada que a variabilidade intraespecífica de numerosas propriedades físicas.

Para medir o grau de relaxação das tensões promovido pelos dois furos ele aplicou a mesma técnica em ensaios de laboratório em corpos de prova submetidos a uma tração controlada de 1000 N/cm<sup>2</sup> e constatou que os extensômetros retornavam, depois das perfurações, às vizinhança do zero inicial mas fornecia para as tensões uma avaliação diferente de menos de 15 % do seu valor real. Há uma ligeira indicação de que esta diferença é devida às variações do módulo de elasticidade.



(a)



(b)

Figura 2.14 Determinação da deformação longitudinal periférica potencial com o auxílio da extensimetria

(a) descascamento da árvore para colagem do extensômetro elétrico

(b) perfurações de desconfinamento

Tabela 2.4 Deformações longitudinais periféricas potenciais medidas em folhas

nome comercial	circunferência (cm)	altura medida (cm)	altura da árvore (m)	azimute (grau)	número de microdeformações				
					0°	72°	144°	216°	288°
Dabéma	120	230	30	75	2.630	110	650	620	1.810
—	135	170	30	p	630	540	610	1.350	2.680
—	140	140	35	p	2.810	540	100	- 120	610
—	156	200	25	260	1.880	4.850	1.470	1.060	3.500
—	171	200	25	p	610	200	100	3.000	3.350
—	180	230	25	p	2.150	1.640	420	530	0
—	184	232	30	p	750	920	3.360	3.590	390
—	192	230	25	165	1.410	430	2.660	2.590	1.430
—	226	250	25	p	1.070	550	820	5.010	1.650
—	250	200	30	p	3.960	1.420	480	480	840
—	258	230	35	270	3.300	2.850	1.090	560	760
—	368	420	25	p	590	890	750	1.000	770
Fraké	138	300	20	p	730	600	970	1.200	630
—	167	323	25	p	1.680	830	810	440	1.590
—	170	400	30	p	570	1.400	570	740	670
—	176	310	35	p	2.780	1.700	1.050	1.160	1.000
—	185	290	35	p	990	890	650	520	400
—	204	450	25	p	630	380	470	900	890
—	220	470	20	p	800	1.700	1.920	1.000	1.050
—	230	230	30	255	1.280	480	750	1.260	1.200
—	235	260	30	p	500	770	570	600	1.010
Lotofa	145	270	?	p	250	750	640	770	440
—	187	260	30	p	610	340	560	790	620
—	240	300	30	p	250	340	270	590	350
—	91	90	25	p	240	460	560	590	330
—	170	200	30	p	290	450	540	450	?
Avodiré	185	160	?	p	20	?	770	280	250
—	216	160	?	270	540	?	550	550	540
Abale	230	200	20	70	340	1.220	80	2.590	700
Framiré	204	180	20	p	600	1.840	1.670	580	580
—	40	100	?	p	3.550*	3.700*	- 2.080*	- 1.390*	*
—	58	100	?	400	2.990	2.060	- 250	- 520	3.330
—	70	100	?	400	700	680	1.400	?	3.600
Teck	105	105	30	290	1.500	1.140	520	1.010	1.500
—	108	140	35	400	240	390	770	430	500
—	110	145	30	400	730	1.210	1.450	1.020	1.260
—	119	130	30	400	1.130	1.110	110	0	780
—	158	170	25	400	490	560	480	850	950
—	76	130	25	400	220	280	250	250	280
—	77	140	20	400	300	490	440	210	340
—	80	90	25	400	650	550	460	640	970
—	101	140	20	400	520	380	570	910	1.060
—	92	120	25	400	360	300	370	450	610
—	76	133	18	400	480	480	330	370	360
Eucalyptus	94	150	30	400	690	690	600	700	980
Citriodora	102	170	35	400	1.030	930	1.000	?	740

Por este motivo o método adotado não dá uma medida absoluta incontestável da intensidade das tensões longitudinais mas fornecem resultados numéricos comparativos que

permitem julgar o campo inicial das tensões quanto à sua intensidade média, sua distribuição superficial e a sua variabilidade entre árvores e entre espécies.

Quando o 1º furo atinge a profundidade de 1,0 a 1,5 vezes o seu diâmetro as indicações dos extensômetros não são mais modificadas e o 2º furo na mesma profundidade responde por um acréscimo de deformação da ordem de 20 % do total liberado pelos 2 furos.

Uma adaptação deste método pode ser feita para avaliação também das solicitações tangenciais perfurando-se quatro furos ao redor de uma roseta extensiométrica. Entretanto parece haver uma complexa interação entre os furos, onde a ordem cronológica de perfuração influencia as indicações dos extensômetros.

Com o procedimento mostrado na Fig. 2.15(a) e utilizando a Eq. (2.8) GUÉNEAU (1973) obteve como mostra a Fig. 2.15(b) uma idéia do gradiente radial das deformações ou das tensões longitudinais.

Nada impede, obviamente, que esta mesma técnica seja aplicada em árvore em pé mas como o resultado depende das dimensões transversais da amostra, acredita-se ser pouco confiável.

GUÉNEAU & SAURAT (1974,1976) inventaram o transdutor<sup>r</sup> mostrado na Fig. 2.16(a) para medições intensivas das deformações longitudinais periféricas potenciais e do gradiente radial das tensões longitudinais.

No estudo de 86 árvores de Beech (*Fagus sylvatica*) em diferentes regiões da França eles colaram cinco destes transdutores igualmente espaçados ao longo da circunferência da árvore e o alívio das tensões foi feito através da técnica dos dois furos de diâmetro e profundidade recomendados por GUÉNEAU (1973) já citado anteriormente. A distância útil entre os furos foi de 5 cm, dentro da faixa de 1,5 a 2,0 vezes o seu diâmetro, para possibilitar segundo KIKATA (1974), medida de tensão de cerca de 90 % de seu valor real.

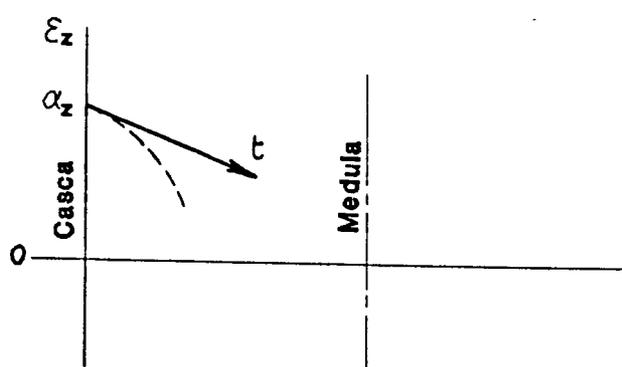
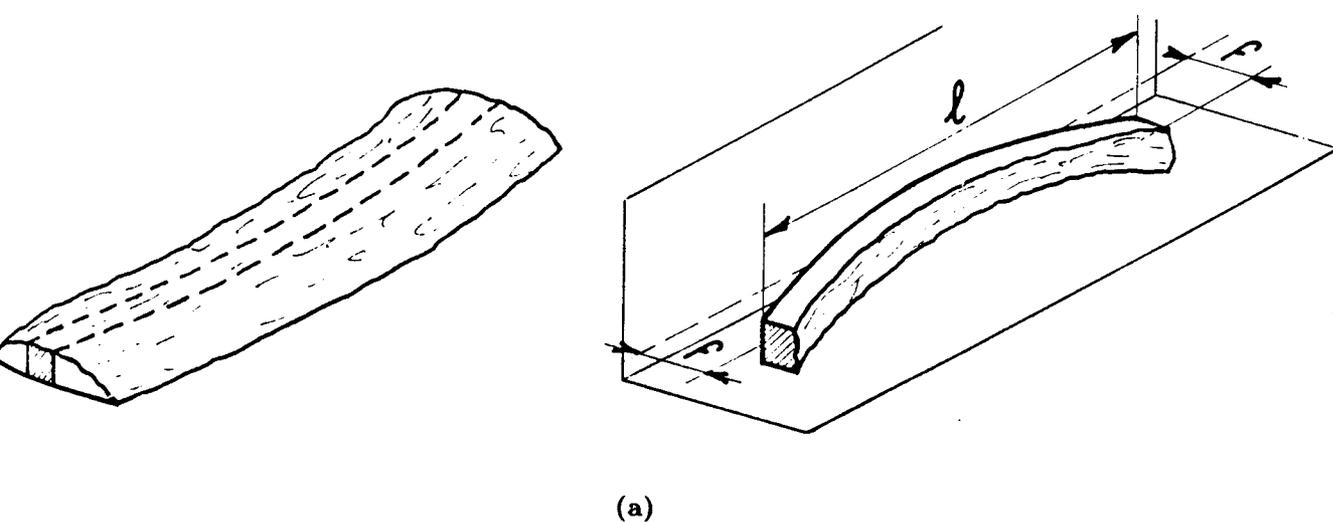


Figura 2.15 Método simplificado para avaliação do gradiente de deformações ou de tensões longitudinais

Depois de medida a deformação longitudinal periférica, dada pelos extensômetros elétricos acionados pela flexão da placa horizontal o segmento de madeira que contém o dispositivo foi retirado da árvore através dos cortes verticais mostrados na Fig. 2.16(b). A medida da flecha que surge na amostra retirada é dada pelos extensômetros elétricos acionados pela flexão da placa vertical deste transdutor. A flecha obtida, com erro estimado em 3 % foi aplicada na Eq. (2.8) para determinação do gradiente radial das tensões longitudinais. A Fig. 2.17, também obtida de KIKATA (1974) ilustra de forma clara a influência dos dois furos no alívio das tensões longitudinal e tangencial periféricas.

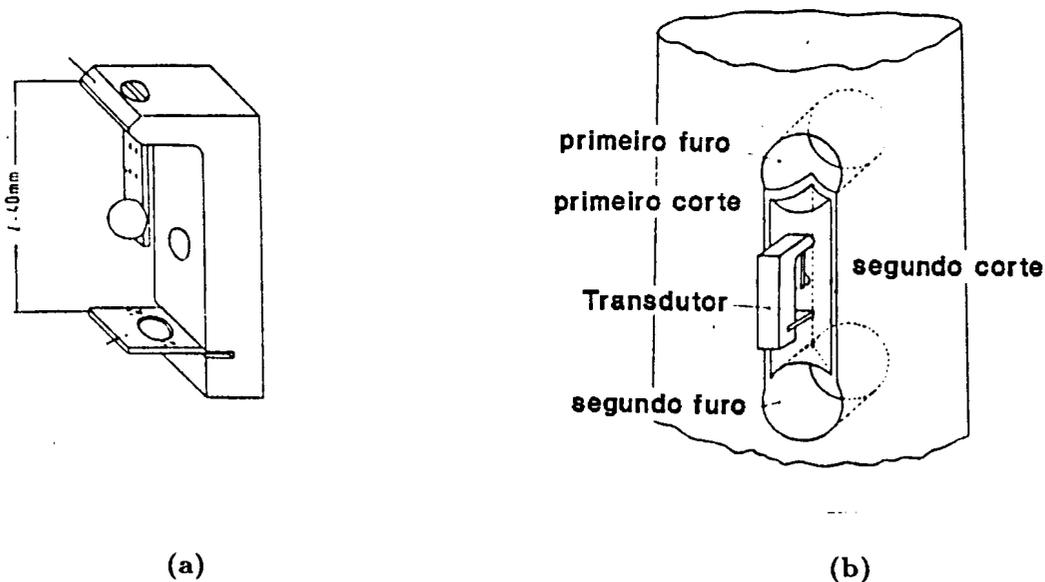


Figura 2.16 Transdutor reutilizável para medir deformações longitudinais periféricas

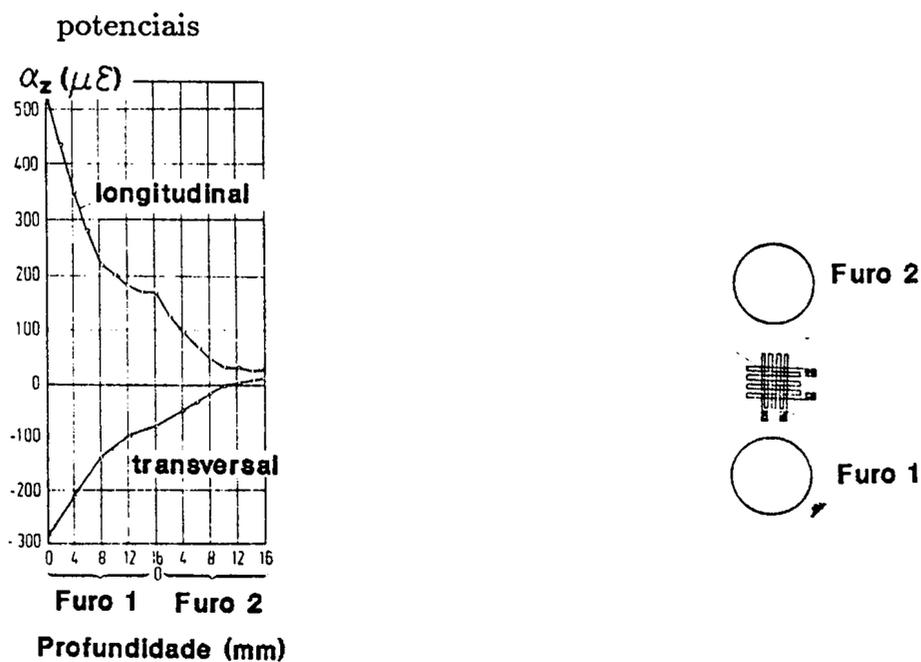


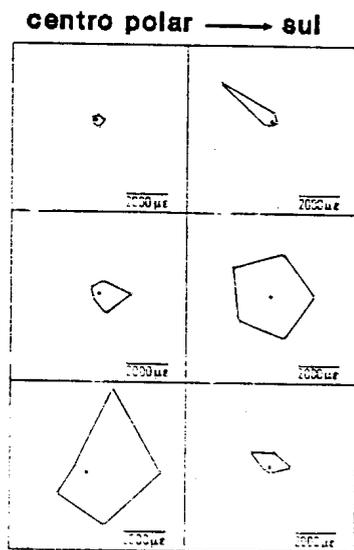
Figura 2.17 Deformações manifestadas pelas supressões parciais de tensões pelos dois furos

O módulo de elasticidade da madeira verde também foi determinado no campo através de uma flexão simples em amostras de 70 mm de comprimento, onde eles utilizaram o mesmo transdutor para medir as flechas correspondentes às cargas aplicadas. A análise dos valores obtidos está resumida na Tabela 2.5.

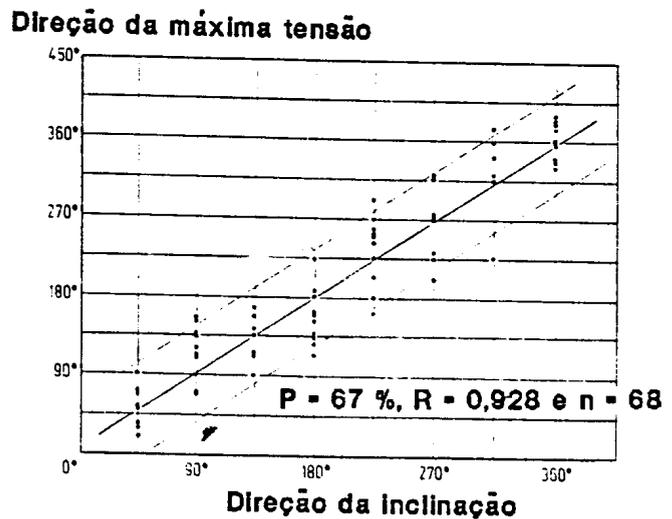
Tabela 2.5 Valores observados em 86 árvores

variável	média	desvio padrão
deformação periférica longitudinal (todas as árvores)	973 $\mu\epsilon$	833 $\mu\epsilon$
deformação periférica longitudinal (árvore individual)	—	458 $\mu\epsilon$
gradiente de deformação até 15 mm (todas as árvores)	59 $\mu\epsilon/\text{mm}$	62,4 $\mu\epsilon/\text{mm}$
gradiente de deformação até 15 mm (árvore individual)	—	28,8 $\mu\epsilon/\text{mm}$
tensão periférica (todas as árvores)	114,8 daN/cm <sup>2</sup>	98,2 daN/cm <sup>2</sup>
tensão periférica (árvore individual)	—	54,0 daN/cm <sup>2</sup>
gradiente de tensão até 15 mm (todas as árvores)	6,9 daN/cm <sup>2</sup> /mm	7,4 daN/cm <sup>2</sup> /mm
gradiente de tensão até 15 mm (árvore individual)	—	3,4 daN/cm <sup>2</sup> /mm
módulo de elasticidade (todas as amostras)	11,8 GN/m <sup>2</sup>	4,9 GN/m <sup>2</sup>
desvios padrões do modulos de elasticidade dentro da árvore	2,2 GN/m <sup>2</sup>	—

Na Fig. 2.18(a) eles mostram os exemplos típicos mais importantes das variações individuais encontradas e utilizaram a área delimitada por estas curvas polares, a qual foi denominada nível de tensão, para comparação entre árvores.



(a)



(b)

Figura 2.18 Variação das deformações periféricas intra árvore (a) e relação entre a direção da maior tensão de tração e a direção da inclinação da árvore (b)

Todas as curvas polares obtidas apresentaram um valor máximo quando a árvore era inclinada em relação à vertical mas esse valor não se correlacionou com o ângulo de inclinação da árvore e sim com o ângulo, em relação ao sul, que dá a direção da inclinação [Fig. 2.18(b)].

Como os valores encontrados foram sempre de tração, eles concluíram que esta relação não é devida ao esforço necessário para a árvore manter-se inclinada, e admitiram que esta

tração máxima era a causa da inclinação da árvore.

Verificaram também que existe uma boa correlação entre a variabilidade e a amplitude das tensões longitudinais com o tipo de floresta onde a árvore cresceu. A Fig. 2.19 indica que parece existir de fato, diferenças significativas entre as árvores pertencentes a florestas de uma único estrato e aquelas pertencentes a florestas de múltiplos estratos. Este fato é conhecido pelos madeireiros da França que atribuem valores diferentes para toras da mesma espécie se oriundas de florestas diferentes.

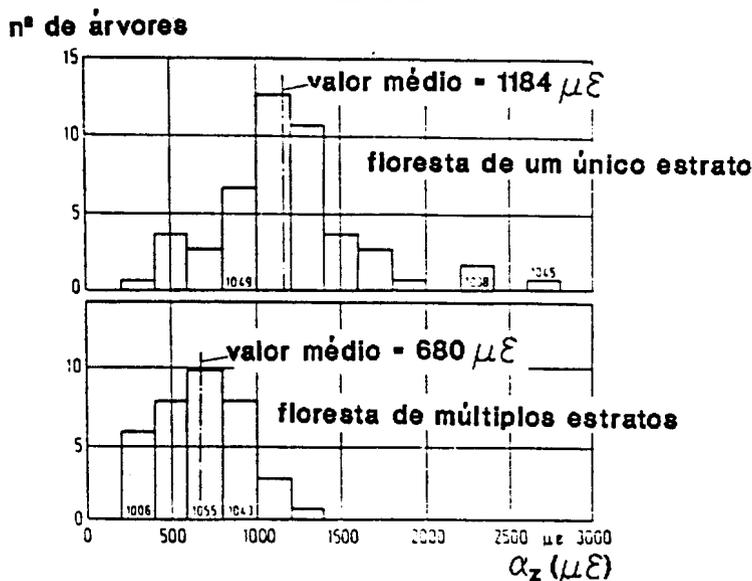


Figura 2.19 Influência do tipo de floresta nas deformações de crescimento individuais

Encontraram finalmente uma forte correlação entre a tensão medida numa árvore e a densidade da população ao seu redor e uma fraca e negativa correlação entre a mesma tensão e a projeção horizontal da copa da árvore.

Observa-se que há, de fato, uma certa concordância entre estas constatações porque uma é dependente da outra, isto é, um acréscimo na área da copa indica uma decréscimo na densidade de árvores vizinhas.

Visando desenvolver um método mais prático e menos prejudicial à árvore POLGE & THIERCELIN (1979) retiraram, para verificação de possíveis correlações, baguetas de apenas 5 mm de diâmetro das mesmas árvores de Beech (*Fagus sylvatica*) nas quais SAURAT & GUÉNEAU (1974,1976) mediram as deformações longitudinais periféricas potenciais.

Em cada uma dessas baguetas eles obtiveram, através do equipamento especial mostrado na Fig. 2.20(a), 100 medidas dos diâmetros axial e tangencial, espaçados de 0,25 mm dentro do trecho que vai da periferia até 25 mm de profundidade [Fig. 2.20(b)].

A média obtida das 100 medidas efetuadas em cada bagueta foram comparadas com a média das cinco deformações medidas em cada árvore pelos outros dois autores e obtiveram da análise, como melhor resultado, a relação mostrada na Fig. 2.20(c).

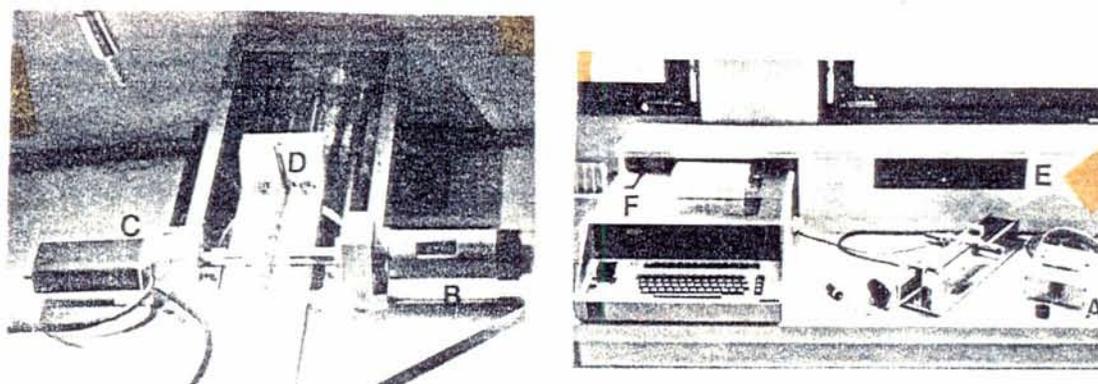
A relação entre o diâmetro axial da bagueta e a deformação longitudinal medida na periferia da árvore não foi boa e a Fig. 2.20(c) mostra que, surpreendentemente, o diâmetro tangencial se relacionou negativamente com esta mesma deformação.

Para esclarecer e explicar melhor este fato eles utilizaram uma sonda de 10 mm de diâmetro interno, cuidadosamente posicionada de forma a efetuar um corte circular ao redor de uma diminuta roseta extensiométrica colada à superfície de uma árvore e retiraram a bagueta da mesma forma com que foram retiradas as anteriores.

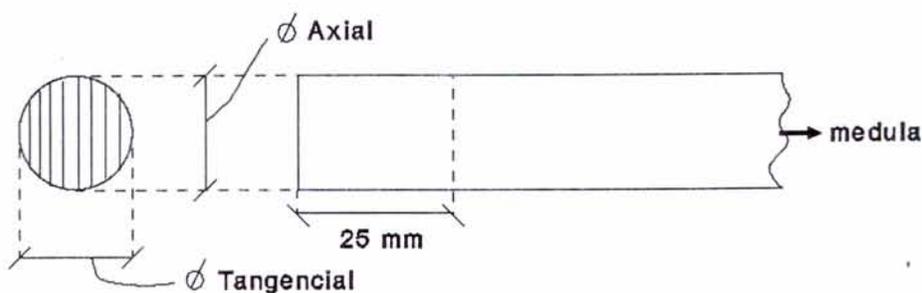
Eles verificaram uma contração do extensômetro colado na direção longitudinal e uma expansão do extensômetro colado na direção tangencial, exatamente como preconizado em muitos trabalhos anteriores e a partir desta constatação eles concluíram que o corte produzido pela sonda pode modificar a forma da seção transversal da bagueta, de circular para elíptica de acordo com o nível de tensão da árvore.

Apesar de empírico e podendo até fornecer resultados não comparáveis caso duas sondas diferentes sejam utilizadas, este método tem produzido interessantes resultados de comparações entre árvores como pode ser visto em POLGE (1981 e 1982) e FERRAND (1981 e 1982).

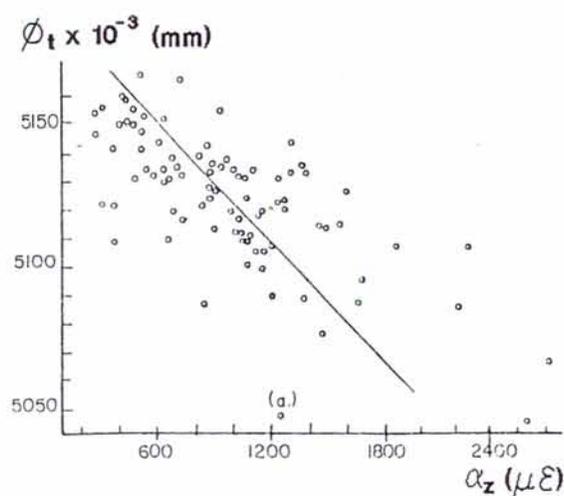
YAO (1979) estudou a variação da tensão longitudinal periférica potencial entre e ao longo da altura de árvores de White Ash (*Frazinus americana* L.) de 106, Water Oak (*Quercus nigra* L.) de 48 e Shagbark Hichory (*Carya ovata* K. Koch.) de 56 anos de idade.



(a)



(b)



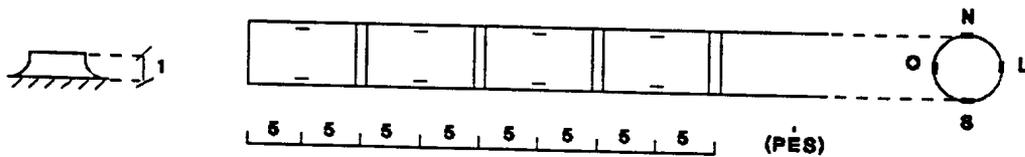
(c)

**Figura 2.20** Método indireto para determinação das tensões de crescimento

- (a) sofisticado equipamento de medida dos diâmetros axial e tangencial das baguetas
- (b) bagueta retirada da árvore com o auxílio da sonda de Presley
- (c) correlação entre o diâmetro tangencial da bagueta ( $\phi_t$ ) e a deformação longitudinal periférica potencial ( $\alpha_z$ ) medida com extensômetros elétricos

Estas espécies foram escolhidas por causa de suas tendências a desenvolverem rachaduras de topo acima do normal e dentro de cada uma foram amostradas três árvores relativamente retas, verticais e cilíndricas com diâmetros variando de 15 a 19 polegadas.

A Fig. 2.21 mostra os pontos onde foram efetuadas as medidas das deformações longitudinais, e de onde foram retiradas também, as amostras para a determinação dos módulos de elasticidade.



**Figura 2.21** Locais de medidas das deformações periféricas e dos módulos de elasticidade à tração

Para as medidas das deformações ele utilizou o método de NICHOLSON mas eliminou o 4º e o 6º estágios, isolando da árvore um segmento de tamanho aproximado de  $3 \frac{1}{2}$  polegadas de comprimento,  $\frac{3}{4}$  polegadas de largura e  $\frac{3}{8}$  polegadas de profundidade, o qual continha as arruelas referenciais espaçadas inicialmente de duas polegadas. Os módulos de elasticidade foram determinados no ensaio de tração especificado na ASTM D805-72.

Ele encontrou tensões longitudinais periféricas de 1438, 2081 e 866 Lb/pol<sup>2</sup> para Ash, 854, 1156 e 1844 para Oak e 690, 2090 e 1674 para Hickory com diferenças ao nível de 1% de probabilidade dentro de cada espécie e diferença não significativa entre espécies. Isto significa que as tensões longitudinais periféricas são dominadas por outros fatores que não a espécie.

A Fig. 2.22 mostra as variações das deformações e tensões longitudinais periféricas ( $\alpha_z$  e  $\sigma_{zp}$  respectivamente), dos módulos de elasticidade na direção longitudinal ( $E_z$ ) e das densidades básicas ( $Db$ ) observadas ao longo da altura das árvores de Ash e Oak. A espécie Hickory não apresentou variação significativa.

Numa análise mais aprofundada dos dados que deram origem a esta figura, YAO obteve

as funções da Tab. 2.6 que relacionam a tensão longitudinal periférica com a altura acima do solo.

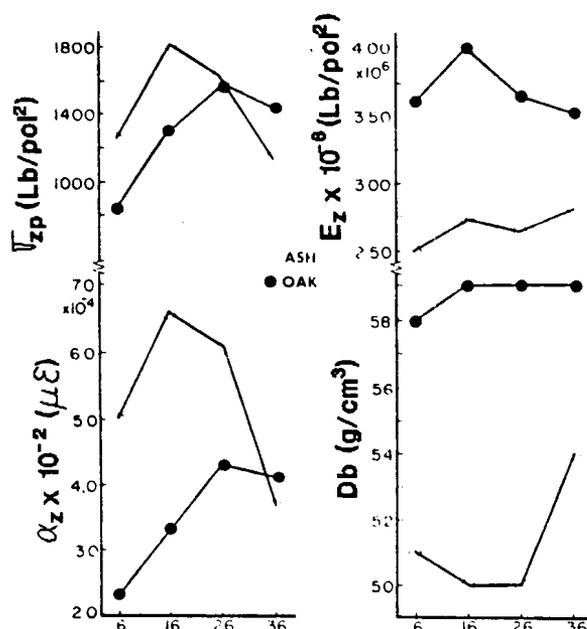


Figura 2.22 Variação de alguns parâmetros importantes ao longo da altura da árvore

A partir destes dados e também da Fig. 2.22 ele concluiu que a relação entre a tensão longitudinal periférica e a sua altura acima do solo é muito fraca e, mais importante, que a deformação longitudinal periférica potencial é um muito bom indicador da tensão longitudinal periférica.

Tabela 2.6 Principais relações entre a tensão longitudinal periférica ( $\sigma_{zp}$ ) e a sua altura acima do nível do solo (h)

campo de amostragem	funções	R <sup>2</sup>	nível de probabilidade
árvore nº 2 de Ash	$\sigma_{zp} = 1294,93 + 171,11h - 4,96h^2$	0,62	0,01
árvore nº 3 de Oak	$\sigma_{zp} = 98,88 + 148,74h - 244h^2$	0,53	0,01
3 árvores de Oak	$\sigma_{zp} = 383,51 + 82,53h - 1,47h^2$	0,14	0,05
3 árvores de Ash	—	ns	ns
9 árvores das 3 espécies	$\sigma_{zp} = 784,65 + 70,90h - 1,47h^2$	0,05	0,05

De fato, pode-se observar na Fig. 2.22 que a variação do módulo de elasticidade provo-

cou na distribuição de tensões uma tendência apenas ligeiramente diferente daquela das deformações.

Quanto à precisão das medidas das tensões YAO se limita a dizer que elas estão em concordância com os resultados obtidos por NICHOLSON (1971) e que a magnitude destas tensões já é suficiente para provocar rachaduras de topo, problemas na serraria e problemas no desenrolamento.

FERRAND (1982) interessado nas tensões acessíveis em floresta, isto é, aquelas medíveis na periferia do tronco estudou com maior profundidade o método da bagueta.

Numa experiência de simulação em laboratório ele retirou uma bagueta de um corpo de prova sob tensão conhecida e outra do mesmo corpo de prova depois de aliviada a carga.

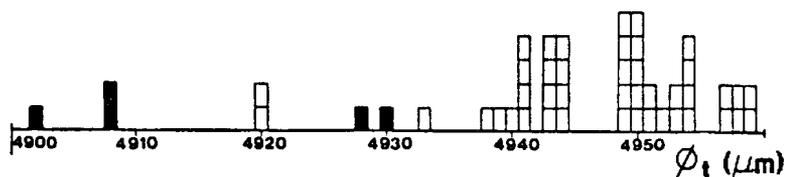
Ele verificou que mesmo na ausência de carga sobre os corpos de prova os diâmetros da bagueta variaram bastante e dentre as muitas correlações obtidas as principais estão mostradas na Tab. 2.7.

Tabela 2.7 - Valores do coeficiente de correlação  $r$

	diâmetro tangencial	diâmetro axial
proporção de fibras gelatinosas	- 0,752***	
retração longitudinal	- 0,646***	- 0,365*
retração tangencial	0,474**	- 0,679***
densidade básica	- 0,429**	- 0,737***
proporção de vasos		0,710***

Na Fig. 2.23 onde se observa que as baguetas que têm madeira de tensão, têm também menores diâmetros tangenciais ele explica o sinal negativo da correlação entre o diâmetro tangencial da bagueta e o nível de tensão de crescimento.

Devido à complexa interação entre as propriedades físicas, anatômicas e reológicas da madeira, persistem algumas dúvidas das quais pode-se citar o seguinte exemplo, não esclarecido no trabalho: O diâmetro axial da bagueta se correlacionou com a retração longitudinal a qual se correlacionou com a proporção de fibras gelatinosas. Entretanto o diâmetro axial da bagueta não se correlacionou com a proporção de fibras gelatinosas.



**Figura 2.23** Diâmetro tangencial  $\phi_t$  da bagueta retirada de corpos de prova descarregados

Na comparação entre os diâmetros das baguetas retiradas de corpos de prova sob carga (diâmetro tangencial/axial com Carga tangencial/axial) e também de corpos descarregados (diâmetro tangencial/axial) ele obteve as principais correlações da Tab. 2.8.

**Tabela 2.8** Valores de  $r$  que mostram a influência de tensões impostas nos diâmetros axial e tangencial das baguetas

	$\alpha_z$	$\alpha_\theta$
diâmetro tangencial com Carga axial - diâmetro tangencial	0,381*	0,373 ns
diâmetro tangencial com Carga tangencial - diâmetro tangencial	0,739***	0,804***
diâmetro axial com Carga axial - diâmetro axial	- 0,504**	- 0,353 ns
diâmetro axial com Carga tangencial - diâmetro axial	- 0,810 ns	- 212 ns

Estas correlações mostram que o diâmetro tangencial reage fortemente às solicitações tangenciais e pouco às solicitações longitudinais e o diâmetro longitudinal só é influenciado pelas tensões longitudinais. Observa-se que este fato, guarda uma certa relação com os valores das constantes elásticas da madeira vistas adiante.

Em outra experiência dentro de populações de Hêtre, Peuplier e *Eucalyptus* sp ele prendeu o transdutor da Fig. 2.16(a) na árvore, retirou a bagueta e depois aliviou as tensões pelo método de GUÉNEAU (1973) sendo que um dos furos foi centrado no furo produzido pela retirada da bagueta.

As constantes elásticas necessárias às suas comparações foram obtidas pelo método de velocidade de propagação de ultrassons, proposto por BUCUR (1981) na própria bagueta.

As principais correlações que ele encontrou foram, para o Hêtre por exemplo, as da Tab. 2.9.

**Tabela 2.9** Valores de  $r$  obtidos nas comparações entre alguns parâmetros coletados em condições naturais de uma população de Hêtre

	$\alpha_z$	diâmetro tangencial	diâmetro axial
retração longitudinal	0,677***	- 0,463***	- 0,397***
diâmetro tangencial	- 0,672***		
% de fibras gelatinosas	0,640***	- 0,527***	- 0,572***
diâmetro axial	- 0,560***		
% de raios lignificados		0,426**	
% de fibras normais			0,430**
$E_z$		- 0,403**	

Um fato interessante, que pode ser observado neste trabalho é que a relação entre a deformação longitudinal e o diâmetro tangencial da bagueta ( $r = - 0,672$ \*\*\* para Hêtre,  $r = - 0,768$ \*\*\* para Peuplier e  $r = - 0,759$ \*\*\* para Eucalyptus) foi praticamente a mesma encontrada por POLGE & THIERCELIN (1979) ( $r = - 0,68$ ) mostrada na Fig. 2.20(c).

Finalmente ele concluiu, de acordo com a Fig. 2.24, que a variação dos diâmetros das baguetas e o sinal negativo de sua correlação com  $\alpha_z$  é devida por um lado às estreitas ligações que existem entre a quantidade de madeira de tensão e o valor de  $\alpha_z$  e por outro lado entre o diâmetro tangencial e a deformação longitudinal.

FERRAND (1982) desenvolveu o dispositivo à base de extensômetros elétricos, reutilizável, mostrado na Fig. 2.25(a) para medidas de deformações longitudinais e transversais na periferia de árvore em pé. A Fig. 2.25(b) mostra a excelente resposta apresentada por este aparelho quando foi acoplado a uma viga de 1,5 x 5,5 x 100 centímetros de dimensões, submetida a uma flexão.

Ao lado da grande precisão ( $5 \mu\epsilon$ ) apresentada por este dispositivo persistem desvantagens como a exigência do descascamento localizado e a necessidade de braçadeiras para a sua ancoragem na árvore.

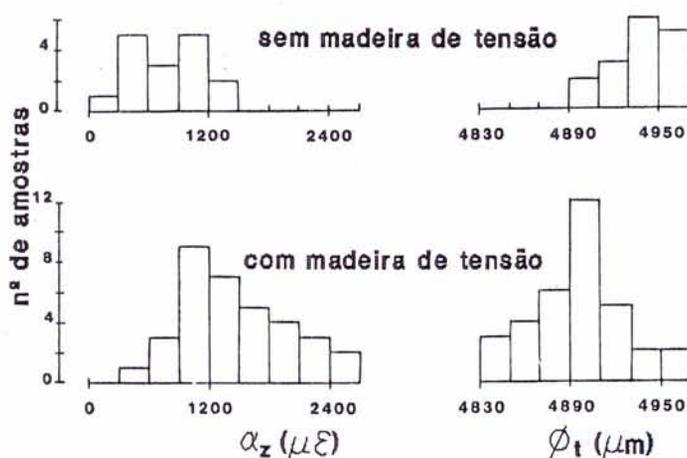
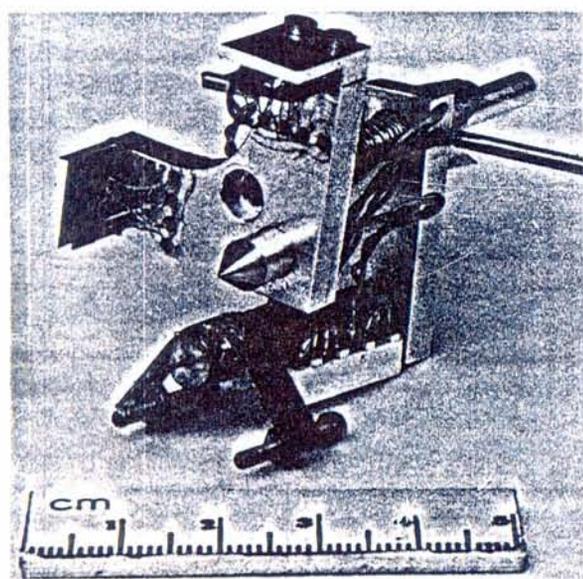
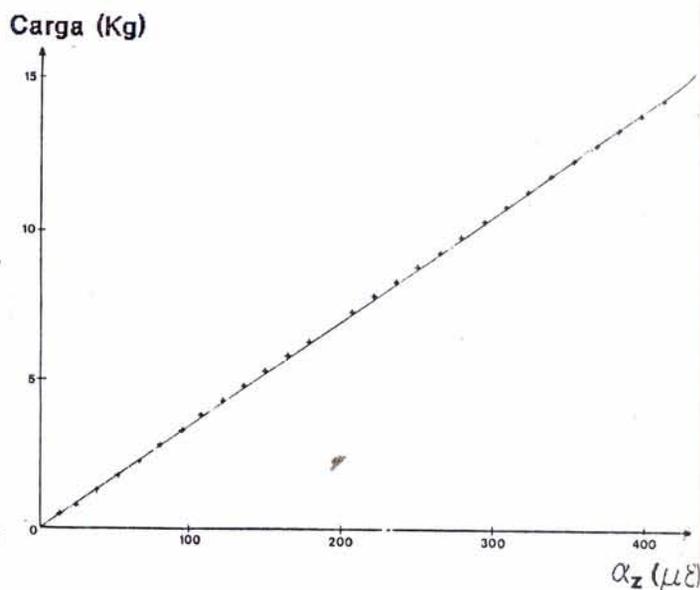


Figura 2.24 Deformação longitudinal periférica ( $\alpha_z$ ) e diâmetro tangencial da bagueta ( $\phi_t$ ) com e sem madeira de tensão



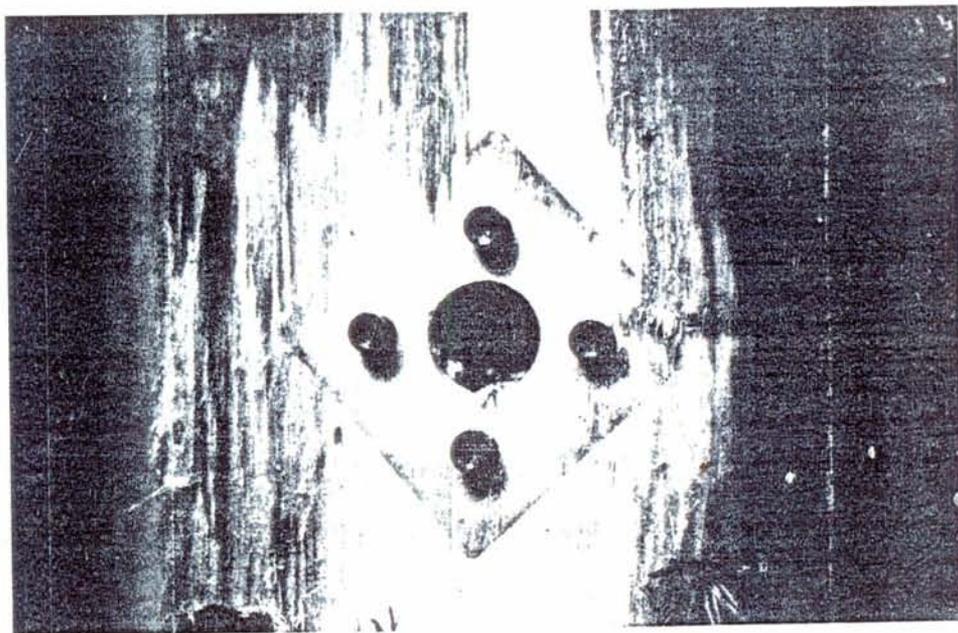
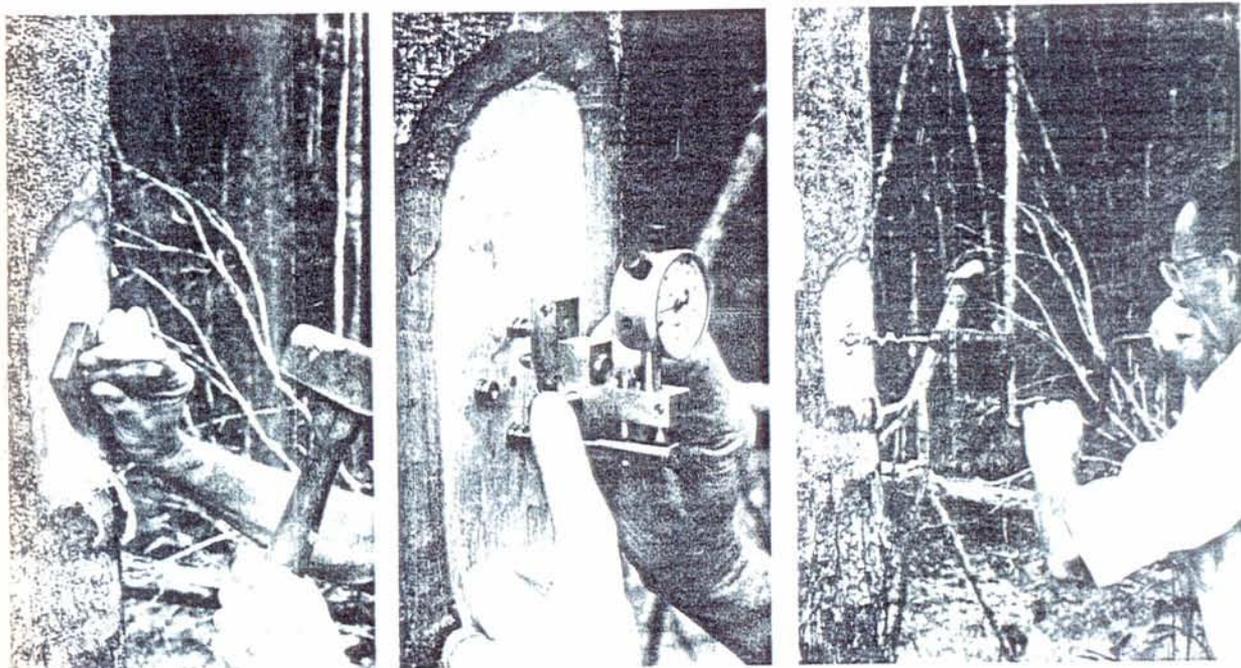
(a)



(b)

Figura 2.25 Transdutor reutilizável para medições de deformações longitudinais e tangenciais (a) e sua resposta em serviço (b)

MARIAUX & VITALIS-BRUN (1983) utilizaram o método e os dispositivos inventados por CHARDIN (1980), mostrados na Fig. 2.26, para medir deslocamentos longitudinais e transversais na periferia de árvores em pé no estudo das variações das tensões de crescimento em várias árvores de Wapa (*Eperua falcata* e *Eperua grandifolia*) da Guiana Francesa.



**Figura 2.26** Método também utilizado para medir deslocamentos na periferia de árvores em pé

A distância entre os pontos de medida é de 42 mm, o diâmetro e a profundidade do furo são de 22 e 20 mm respectivamente.

Eles obtiveram a Fig. 2.27(a) que mostra a ordem de grandeza e a variação dos deslocamentos medidos por exemplo nas árvores 13, 14, 21, 28, 30, e 31 segundo as direções iden-

tificadas nos vértices dos triângulos e a Fig. 2.27(b) que mostra a distribuição dos diversos deslocamentos medidos.

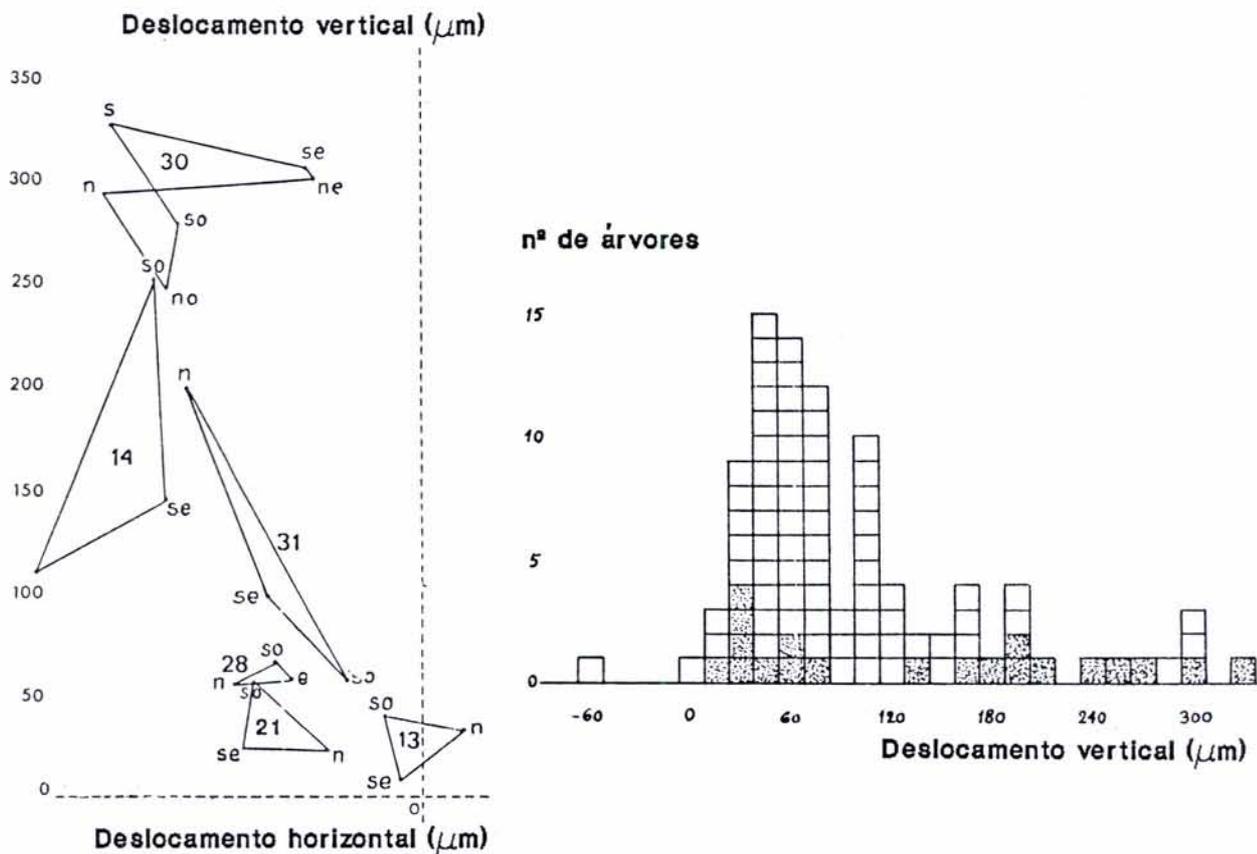


Figura 2.27 Variabilidade (a) e amplitude dos deslocamentos medidos (b) em *E. falcata* sendo que os valores positivos indicam estado de tração

As amostras hachuradas foram utilizadas para relacionar os deslocamentos medidos com o comprimento das fibras, o comprimento dos elementos de vasos, a relação entre o comprimento médio das fibras e o comprimento médio dos elementos de vasos, o ângulo fibrilar  $\theta$  da camada  $S_2$  [Fig. 2.28(a)] e a % de fibras gelatinosas indicadas com a letra g na Fig. 2.28(b).

As relações mais importantes estão mostradas na Fig. 2.29 donde eles concluíram que a diferenciação começa no câmbio uma vez que todos os elementos celulares acusaram um comprimento um pouco superior ao normal.

Entretanto KUBLER (1987), diz que a madeira externa tende a afastar os pontos de referência na direção longitudinal e aproximá-los na direção tangencial. Assim, as tensões periféricas longitudinais foram super e as tangenciais subestimadas.

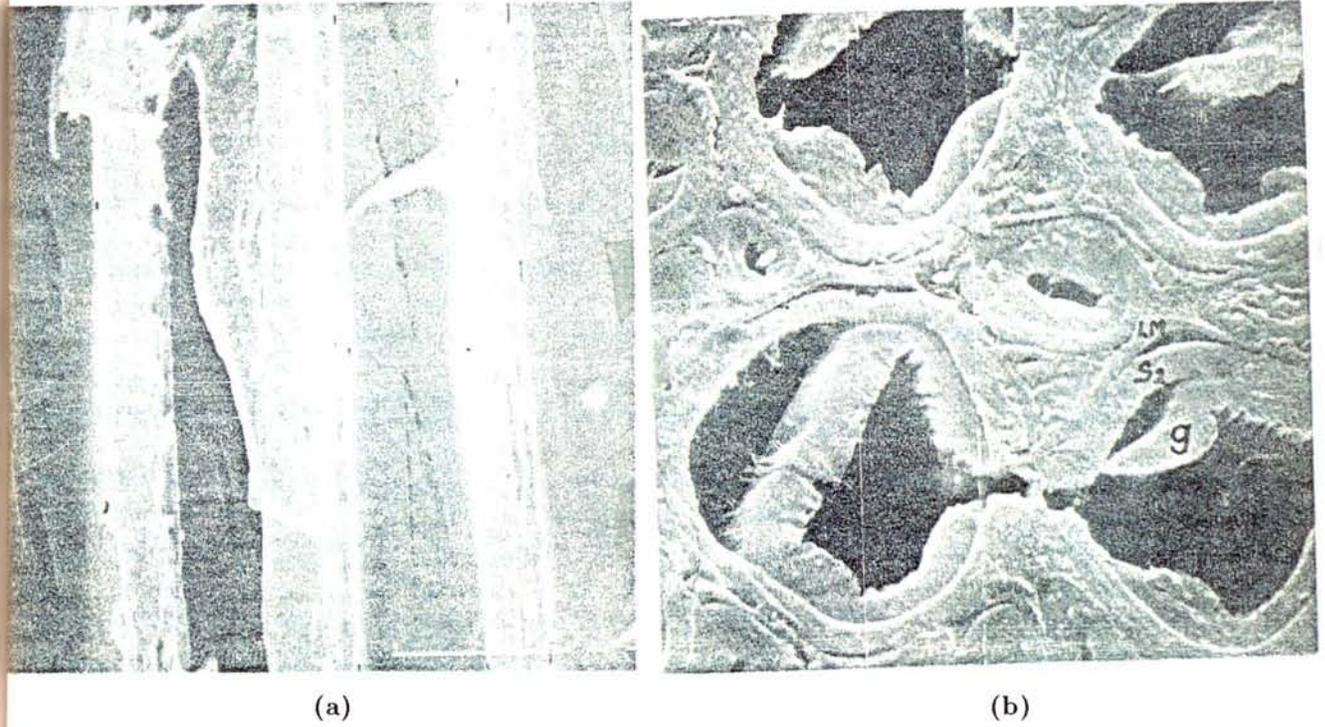


Figura 2.28 Ângulo fibrilar  $\theta$  (a) e camada gelatinosa g (b)

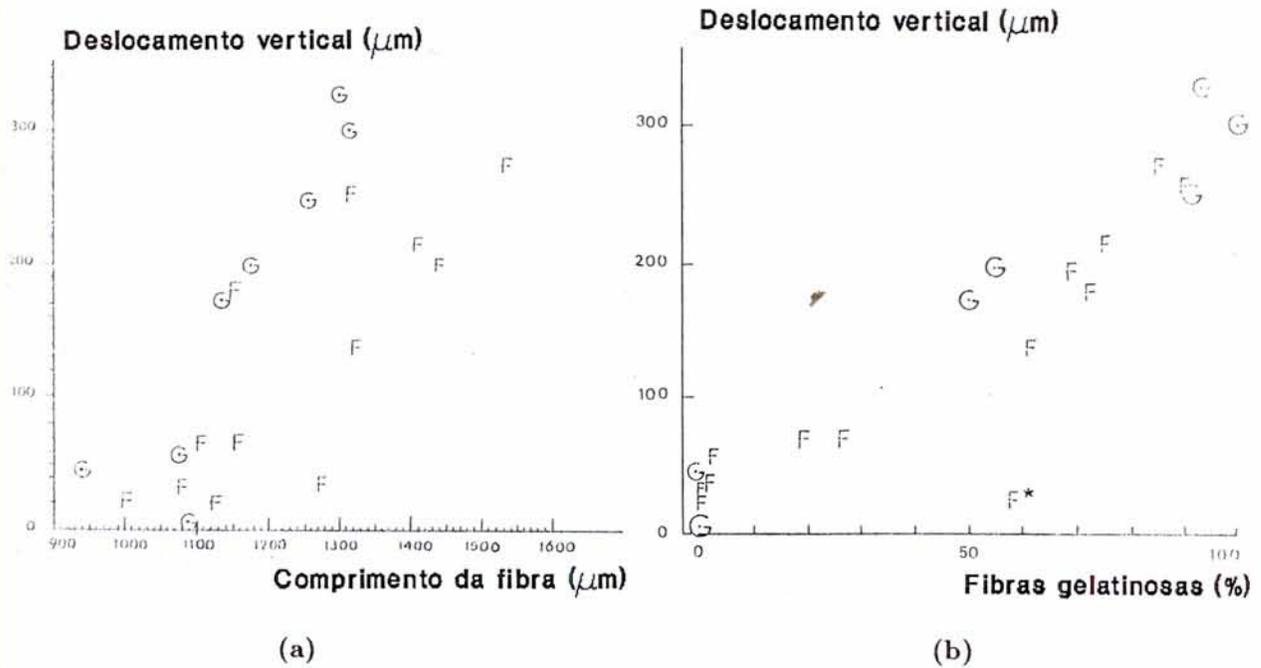


Figura 2.29 Relações entre deslocamento vertical e comprimento de fibra (a) e entre deslocamento vertical e % de fibras gelatinosas (b)

Com relação à precisão das medidas MARIAUX & VITALIS-BRUN (1983), observaram

que os valores obtidos concordam com aqueles obtidos em outras condições e em outros climas por TRENARD & GUENEAU (1975) sobre Hêtres (*Fagus sylvatica* L.) e por BOYD (1980) sobre *Eucalyptus*.

MALAN (1984) utilizou um tensotast proposto por MORICE & BASE (1953) de altíssima precisão ( $3 \times 10^{-6}$ ) para medir as deformações na periferia de árvores de *Eucalyptus grandis* devidas ao alívio de tensões provocado por dois furos.

Ele verificou que em todas as árvores examinadas a densidade básica aumentou rapidamente da medula para a casca, mas em árvores com altos níveis de tensões este acréscimo era um pouco mais pronunciado. Este fato provocou uma ligeira diferença entre a densidade básica medida na periferia de árvores com altos níveis de tensões e aquela de árvores com baixos níveis de tensões.

#### 2.2.4 Redistribuição

##### 2.2.4.1 Devida a cortes transversais

É muito comum observarem-se rachaduras de diferentes intensidades nos topos das toras, inclusive daquelas obtidas de árvores recém derrubadas.

Isto ocorre quando as tensões liberadas pelo corte transversal impõem deslocamentos longitudinais e transversais de magnitudes superiores àquelas permitidas pela madeira em questão. A este fenômeno denominou-se efeito de extremidade.

Portanto, é natural que as rachaduras de extremidades variem em intensidade, uma vez que elas dependem das magnitudes das tensões liberadas e das propriedades físico-anatômicas da madeira.

BOYD (1950) verificou, no mesmo trabalho já citado anteriormente que o alívio das tensões devido ao corte transversal vai até cerca de 1,2 vezes o diâmetro na periferia da tora e até cerca de 2,4 vezes o diâmetro na medula.

O estudo teórico do efeito de extremidade envolve uma grande complexidade matemática

e por esse motivo não foi, apesar de extremamente importante, analisado em profundidade o que pode ser observado em ARCHER (1986) e em algumas de suas citações.

A Fig. 2.30 obtida de WILHELMY & KUBLER (1973) mostra de maneira clara as distribuições e amplitudes das deformações específicas que ocorrem devido ao corte transversal de um tronco de raio  $a$  igual a 12 polegadas.

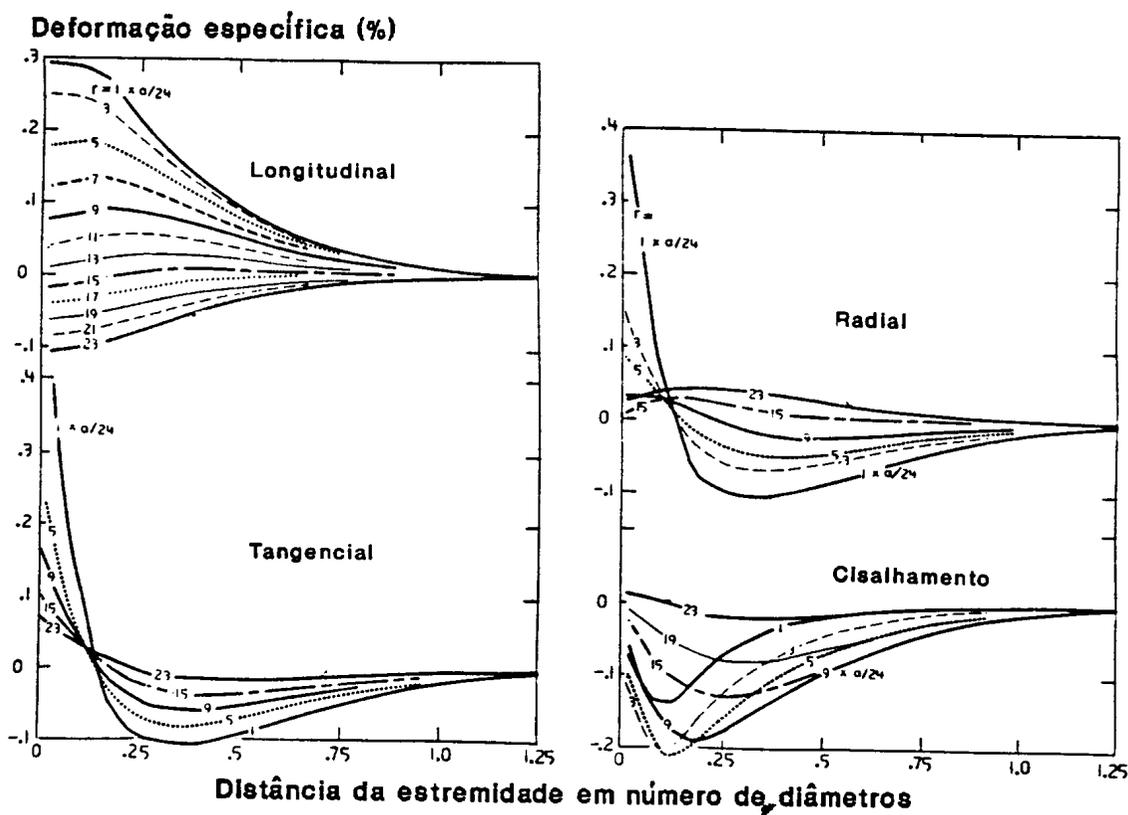


Figura 2.30 Deformações específicas e distorções liberadas no corte transversal

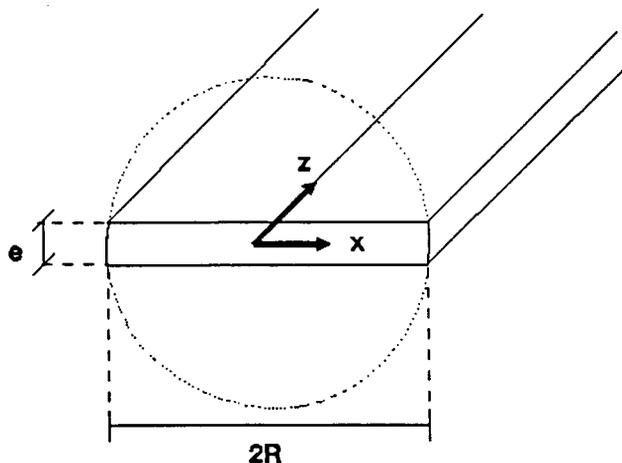
Observa-se que as deformações liberadas decrescem da medula para a casca e praticamente desaparecem à distância da extremidade de cerca de 1,25 vezes o diâmetro do tronco. Há uma quase coincidência dos picos das deformações tangenciais e radiais nos mesmos pontos, evidenciando claramente a concentração de tensões que é a causa das rachaduras de extremidades.

Entretanto, ressalta-se que estas distribuições foram obtidas através de métodos numéricos e infelizmente, não permitem visualizar claramente, as conseqüentes rachaduras.

## 2.2.4.2 Devida a cortes longitudinais

### 2.2.4.2.1 Na conversão tora-prancha diametral

VENDHAN & ARCHER (1977) fizeram uma completa análise matemática a respeito da redistribuição de tensões que surge numa prancha diametral (Fig. 2.31) quando retirada de uma tora.



**Figura 2.31** Prancha diametral de pequena espessura e obtida de uma tora de raio  $R$

Eles mostraram que as variações na deformação longitudinal induzida na prancha pelo alívio das tensões transversais nas faces é cerca de duas ordens de magnitude menor do que aquela causada pelo alívio das tensões longitudinais nas extremidades.

De fato, observou-se que vários pesquisadores negligenciaram a influência do alívio das tensões transversais e através de uma teoria bastante simplificada chegaram a resultados bem aproximados àqueles de um tratamento teórico mais apurado.

Entretanto, não foi encontrada nenhuma comparação com resultados experimentais.

GILLIS & HSU (1979) admitiram a hipótese de que ocorre uma elongação uniforme da prancha diametral quando retirada da tora, baseados na hipótese de que a seção transversal plana na tora permanece plana na prancha diametral.

Assim, eles montaram a seguinte equação

$$\sigma_Z^P = \sigma_Z + \Delta\sigma_Z^P \quad (2.84)$$

onde:  $\sigma_Z^P$  = tensão longitudinal na prancha diametral

$\sigma_Z$  = tensão longitudinal na tora

$\Delta\sigma_Z^P$  = variação da tensão na tora durante o desdobro

A Eq. (2.84) deve atender a seguinte condição de equilíbrio na direção longitudinal

$$\int_0^R \sigma_Z^P dx = 0 \quad (2.85)$$

Trocando na equação (2.72b) a variável  $r$  por  $x$ , substituindo-a na equação (2.84) e procedendo a integração da equação (2.85), eles obtiveram o seguinte acréscimo de tensão

$$\Delta\sigma_Z^P = \sigma_{ZP} \left[ -1 + \left( 1 - \frac{A}{R} \right) \ln \frac{A}{R} \right] \quad (2.86)$$

e pela lei de Hooke, o seguinte acréscimo de deformação específica

$$\Delta\epsilon_Z^P = \frac{\sigma_{ZP}}{E_Z} \left[ -1 + \left( 1 - \frac{A}{R} \right) \ln \frac{A}{R} \right] \quad (2.87)$$

Lembrando que a relação  $\frac{A}{R}$  é um valor constante observa-se que estas equações fornecem valores também constantes para  $\Delta\sigma_Z^P$  ou  $\Delta\epsilon_Z^P$ , independentemente da posição radial. Isto reduz a magnitude das tensões de compressão na região central e aumenta a magnitude das tensões de tração nas regiões laterais da prancha.

Substituindo as equações (2.72) e (2.86) em (2.84) eles obtiveram as novas distribuições de tensões longitudinais na prancha diametral

$$\sigma_Z^P = \sigma_{ZP} \frac{1 - \frac{R}{A} + \ln \frac{R}{A}}{1 - \frac{A}{R}} \quad \text{para } 0 \leq x \leq A \quad (2.88a)$$

e

$$\sigma_z^p = \sigma_{zp} \frac{1 - \frac{R}{x} + \ln \frac{R}{A}}{1 - \frac{A}{R}} \quad \text{para } A < x \leq R \quad (2.88b)$$

ARCHER (1986) fez uma simplificação da análise efetuada por VENDHAN & ARCHER (1977) desprezando a influência do alívio das tensões transversais e considerando a prancha diametral como sendo de grande comprimento e de pequena espessura.

Neste caso um muito simples estado de tensão é previsto, no qual ele introduziu uma equação de compatibilidade similar àquela dada em (2.26), válida tanto para o estado plano de tensão como para o de deformação

$$\frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Delta \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2.89)$$

onde

$\Delta \varepsilon_z$  e  $\Delta \varepsilon_x$  são as variações das deformações longitudinais e transversais

$\Delta \gamma_{xz}$  é a variação da distorção no plano  $xz$

Admitindo que todas as deformações são independentes de  $z$ , pode-se reduzir a equação (2.89) à seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0$$

cuja solução fornece

$$\Delta \varepsilon_z = A + Bx$$

A simetria das deformações em relação à medula impõe que

$$B = 0$$

e portanto

$$\Delta\varepsilon_z = A \quad (2.90)$$

Esta demonstração permite confiar na hipótese de GILLIS & HSU (1979) de que seções planas na tora permanecem planas na prancha diametral e possibilitou, como será visto no capítulo 4, deduções próprias de novas distribuições de deformações longitudinais numa prancha diametral, nos sarrafos dela retirados, e também nos sarrafos retirados diretamente da tora.

#### 2.2.4.2.2 Na conversão prancha diametral-sarrafo

GILLIS & HSU (1979) assumiram para a determinação da distribuição final de tensão no sarrafo obtido de uma prancha diametral a seguinte equação

$$\sigma_z^S = \sigma_z^P + \Delta\sigma_z^S - E_z K (x - x_0) \quad (2.91)$$

onde

$\sigma_z^S$  = tensão longitudinal no sarrafo obtido da prancha diametral

$\sigma_z^P$  = tensão longitudinal que existia nesta prancha diametral

$\Delta\sigma_z^S$  = variação da tensão longitudinal na prancha durante o desdobro

$K$  = curvatura do sarrafo

$x_0$  = distância da medula até o centro de gravidade da seção transversal do sarrafo

Esta equação deve ser tal que satisfaça duas condições de equilíbrio, uma que zera a força normal resultante e outra que zera o momento resultante

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \sigma_Z^S dx = 0 \quad (2.92a)$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \sigma_Z^S x dx = 0 \quad (2.92b)$$

onde  $h$  é a metade da altura do sarrafo.

Substituindo a equação (2.91) em (2.92) e procedendo a integração eles obtiveram

$$\Delta\sigma_Z^S = -\frac{1}{2}h \int_{x_0-h}^{x_0+h} \sigma_Z^P dx = 0 \quad (2.93a)$$

$$E_Z K = \frac{3}{2h^3} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \sigma_Z^P x dx + \frac{3x_0}{h^2} \Delta\sigma_Z^S \quad (2.93b)$$

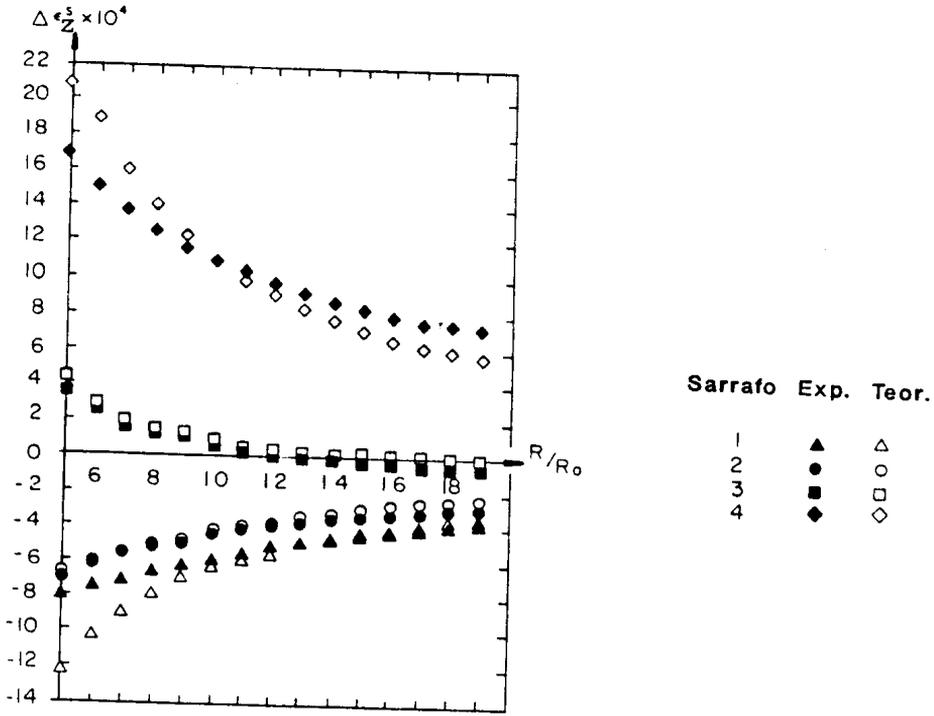
Substituindo agora as funções  $\sigma_Z^P$  dada pela equação (2.88b) na equação (2.93a) e depois o resultado também na equação (2.93b) eles obtiveram, para o caso mais normal onde  $x_0 - h \geq A$

$$\Delta\sigma_Z^S = \frac{\sigma_{ZP}}{1 - \frac{x}{R}} \left[ \frac{R}{2h} \ln \frac{1 + \frac{h}{x_0}}{1 - \frac{h}{x_0}} - \ln \frac{R}{A} - 1 \right] \quad (2.94a)$$

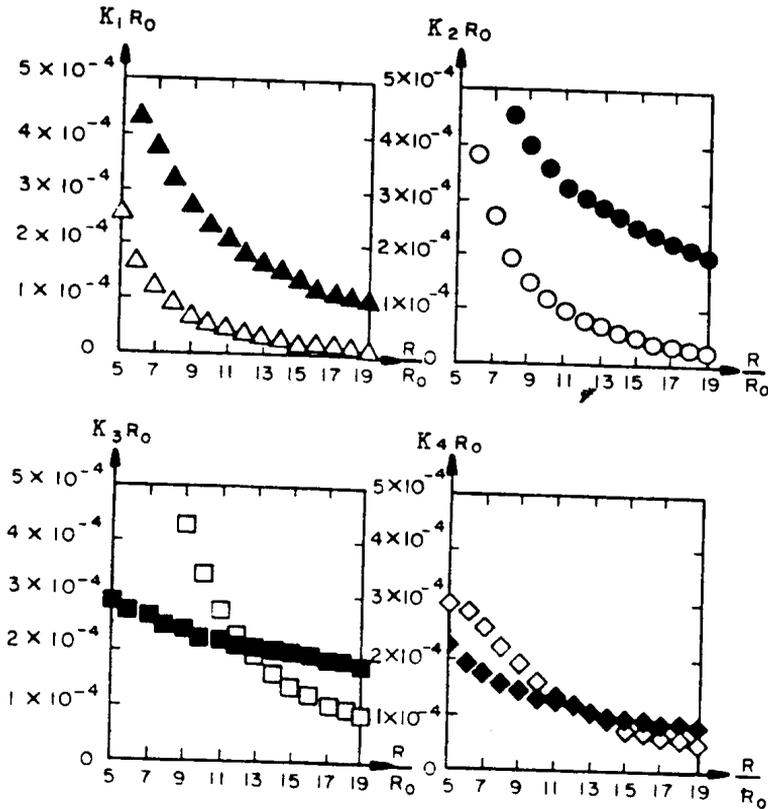
$$E_Z K = \frac{3R\sigma_{ZP}}{h^2 \left(1 - \frac{x}{R}\right)} \left[ \frac{x_0}{2h} \ln \frac{1 + \frac{h}{x_0}}{1 - \frac{h}{x_0}} - 1 \right] \quad (2.94b)$$

Observa-se na equação (2.94a) que o incremento de tensão pode ser positivo ou negativo e que da mesma forma que a curvatura dada pela equação (2.94b), dependem do tamanho e da posição do sarrafo na prancha.

A Fig. 2.32 mostra as discrepâncias entre os valores teóricos dados pelas equações (2.94) e os dados experimentais de GIORDANO et alii (Tab. 2.2), analisados por estes autores.



(a)



(b)

Figura 2.32 Deformação longitudinal (a) e curvatura (b) teórica e experimental para  $R_0 = 1,27$  cm, determinado por tentativas

Desta figura, que se refere aos mesmo sarrafos da Fig. 2.4, eles concluíram que a concordância entre teoria e prática é muito menor para a curvatura do que para a deformação longitudinal.

### 2.3 Anisotropia e ortotropia da madeira

Verifica-se nas equações (2.68), bem como em várias outras equações do capítulo 4, a necessidade e a importância de um grande número de constantes elásticas como  $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $\nu_{r\theta}$ ,  $\nu_{zr}$ ,  $\nu_{z\theta}$ ,  $G_{r\theta}$ ,  $G_{\theta z}$  e  $G_{zr}$  que não são previstas nas normas brasileiras de ensaios mecânicos, não são normalmente estudadas nas pesquisas brasileiras e portanto são completamente desconhecidas.

O primeiro passo no sentido da obtenção destas constantes foi dado por FUSCO (1989) que analisou no caso geral da anisotropia, as relações tensão-deformação dadas por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.95)$$

ou as relações deformação-tensão dadas por

$$\epsilon_{kl} = D_{ijkl} \sigma_{ij} \quad (2.96)$$

as quais envolvem dezoito constantes elásticas independentes e diferentes entre si. As matrizes  $C_{ijkl}$  e  $D_{ijkl}$  são

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$D_{ijkl} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{2211} & D_{3311} & D_{1211} & D_{2311} & D_{3111} \\ & D_{2222} & D_{3322} & D_{1222} & D_{2322} & D_{3122} \\ & & D_{3333} & D_{1233} & D_{2333} & D_{3133} \\ & & & D_{1212} & D_{2312} & D_{3112} \\ & & & & D_{2323} & D_{3123} \\ & & & & & D_{3131} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Tratando a madeira como material ortótropo, por possuir três planos de simetria elástica ( $r\theta$ ,  $\theta z$  e  $zr$ ) ele demonstrou como obter as nove constantes elásticas necessárias e, principalmente, deduziu as equações

$$C'_{mnop} = C_{ijkl} Q_{im} Q_{jn} Q_{ko} Q_{lp} \quad (2.99a)$$

ou

$$D'_{mnop} = D_{ijkl} Q_{im} Q_{jn} Q_{ko} Q_{lp} \quad (2.99b)$$

as quais permitem de forma fácil e prática obter todas as constantes  $C_{ijkl}$  ou  $D_{ijkl}$  necessárias às relações tensão-deformação (2.95) ou às relações deformação-tensão (2.96) no caso muito comum onde as peças serradas não estão completamente orientadas segundo os três eixos principais de elasticidade.

Nas equações (2.99) os índices  $i, j, k, l, m, n, o$  e  $p$  podem assumir os valores 1, 2 ou 3 e  $Q$  é a matriz dos cossenos diretores, a qual, pode ser obtida facilmente de forma análoga ao exemplo particular apresentado abaixo. Neste exemplo a matriz  $Q$  foi obtida da rotação de um ângulo  $\alpha$  do plano 12 ou  $r\theta$  em torno do eixo 3 ou  $z$  conforme mostra a Fig. 2.33.

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (2.100a)$$

logo

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.100b)$$

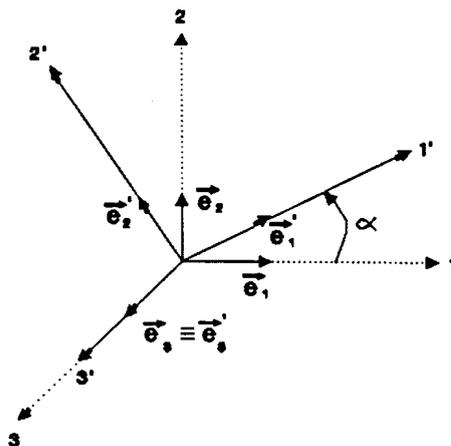


Figura 2.33 Rotação do plano transversal (12 ou  $r\theta$ ) em torno do eixo longitudinal da peça

Para se ter uma idéia da grandeza destas constantes elásticas, apresentam-se na Tab 2.10 os valores de algumas delas obtidos de KOLLMANN & COTÉ (1968) e na Tab. 2.11 alguns outros valores obtidos de SASAKI et alii (1978).

Tabela 2.10 Constantes elásticas obtidas de KOLLMANN & COTÉ (1968) em MPa

espécie	U (%)	$E_z$	$E_r$	$E_\theta$	$G_{zr}$	$G_{\theta z}$	$G_{r\theta}$	$\nu_{z\theta}$	$\nu_{r\theta}$	$\nu_{rz}$
Douglas Fir	11 a 13	16000	1010	800	900	900	90	0,4464	0,4313	0,0192
Douglas Fir	9,5	16690	1320	920	1200	930	80	0,3839	0,5940	0,0290
Pine	9,7	16610	1120	580	1780	680	70	0,4485	0,6048	0,0314
Birch	8,8	16670	1130	630	1200	930	190	0,4334	0,7232	0,0328
Oak	11,6	13000	2190	990	1320	780	400	1,1310	0,6570	0,1205

Tabela 2.11 Constantes elásticas obtidas de SASAKI (1978) em GPa

espécie	$E_z$	$E_r$	$\nu_{z\theta}$	$\nu_{\theta z}$	idade
<i>Cryptomeria japônica</i>	9,72	0,394	0,46	0,02	27
<i>Pinus densiflora</i>	7,60	0,246	0,52	0,03	27
<i>Magnolia obovata</i>	10,19	0,532	0,61	0,01	79
<i>Quercus crispula</i>	9,80	0,856	0,35	0,04	60
<i>Eucalyptus viminalis</i>	8,24	0,502	0,40	0,02	29

Outras constantes elásticas podem ser obtidas a partir dos dados destas tabelas e das relações (2.10).

Ressalta-se que esta busca em trabalhos estrangeiros, que comumente trazem valores aparentemente confiáveis dessas constantes, foi necessária para suprir a deficiência de dados a respeito das madeiras brasileiras, ressaltando-se que infelizmente não foi possível encontrar os valores dos coeficientes de Poisson e dos módulos de elasticidade transversal em nenhum trabalho brasileiro.

### 3 - MATERIAL E MÉTODO

#### 3.1 Determinação das constantes elásticas da madeira

Observou-se no capítulo 2 que muitas das propriedades da madeira, necessárias à utilização dos modelos teóricos existentes não são conhecidas, principalmente para os *Eucalyptus*.

Por esse motivo, procederam-se diversos ensaios de tração e compressão em corpos de prova perfeitamente orientados segundo os três eixos principais de elasticidade (Fig. 3.1) para a determinação dos módulos de elasticidade e dos coeficientes de Poisson e em corpos de prova cujos eixos principais de elasticidade foram convenientemente orientados (Fig. 3.2) para a determinação dos módulos de elasticidade transversal.

Todos estes corpos de prova, necessários à determinação de todas as 18 constantes elásticas da madeira, foram obtidos de uma prancha diametral oriunda da tora nº 4 (Tab. 4.2) de *Eucalyptus grandis*, a qual foi entre outras, desdobrada na serraria da Duratex de Botucatu para estudos de deslocamentos.

Após o ensaio de tração, onde foram utilizados os dispositivos mostrados na Fig. 3.3, o corpo de prova foi novamente preparado para ser ensaiado à compressão.

Verificou-se entretanto, que neste preparo o comprimento do corpo de prova que era de cerca de 11 cm foi reduzido para um valor próximo de 3 cm.

Para verificar se esta redução no comprimento do corpo de prova poderia interferir nos valores das propriedades da madeira, foi montado um ensaio auxiliar de determinação do módulo de elasticidade na direção paralela ( $E_z$ ) em um corpo de prova de uma espécie desconhecida, o qual foi sucessivamente ensaiado à compressão nos comprimentos de 11,495; 8,997; 6,354; 4,994; 2,290 e 1,207 centímetros.

A aplicação da carga tanto de tração como de compressão foi feita através de uma máquina universal de ensaios, calibrada para leitura máxima de 12.000 N e precisão de 50 N.

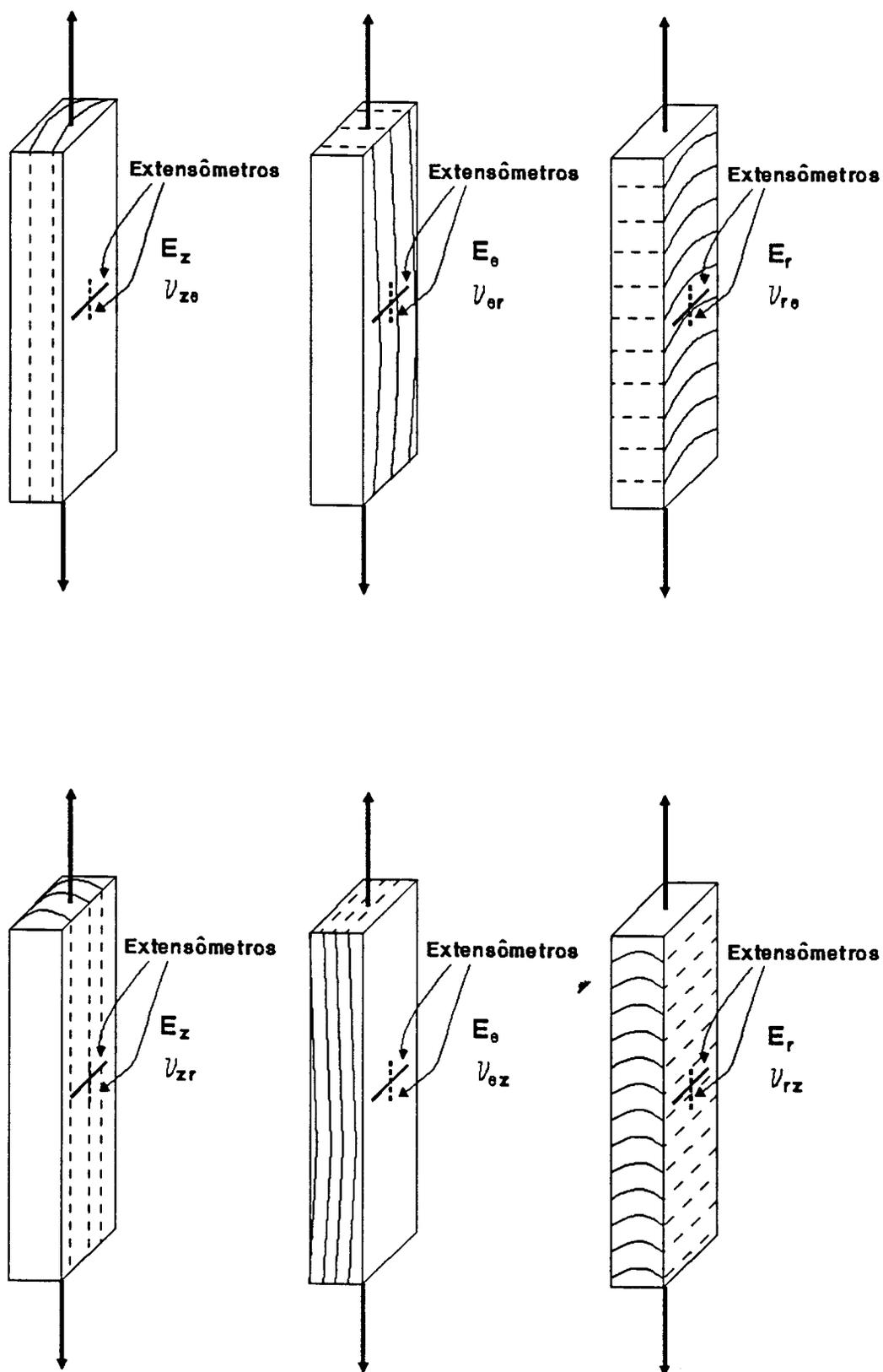


Figura 3.1 Corpos de prova orientados segundo os três eixos principais de elasticidade para determinação dos  $E_i$  e dos  $\nu_{ij}$

Para a leitura das deformações apresentadas pelos corpos de provas, foram utilizados extensômetros elétricos KYOWA KL-10-A4, de  $120 \Omega$  e fator gage igual a 1,98; ligados a um distribuidor extensiométrico modelo KYOWA SS-24R de 24 canais.

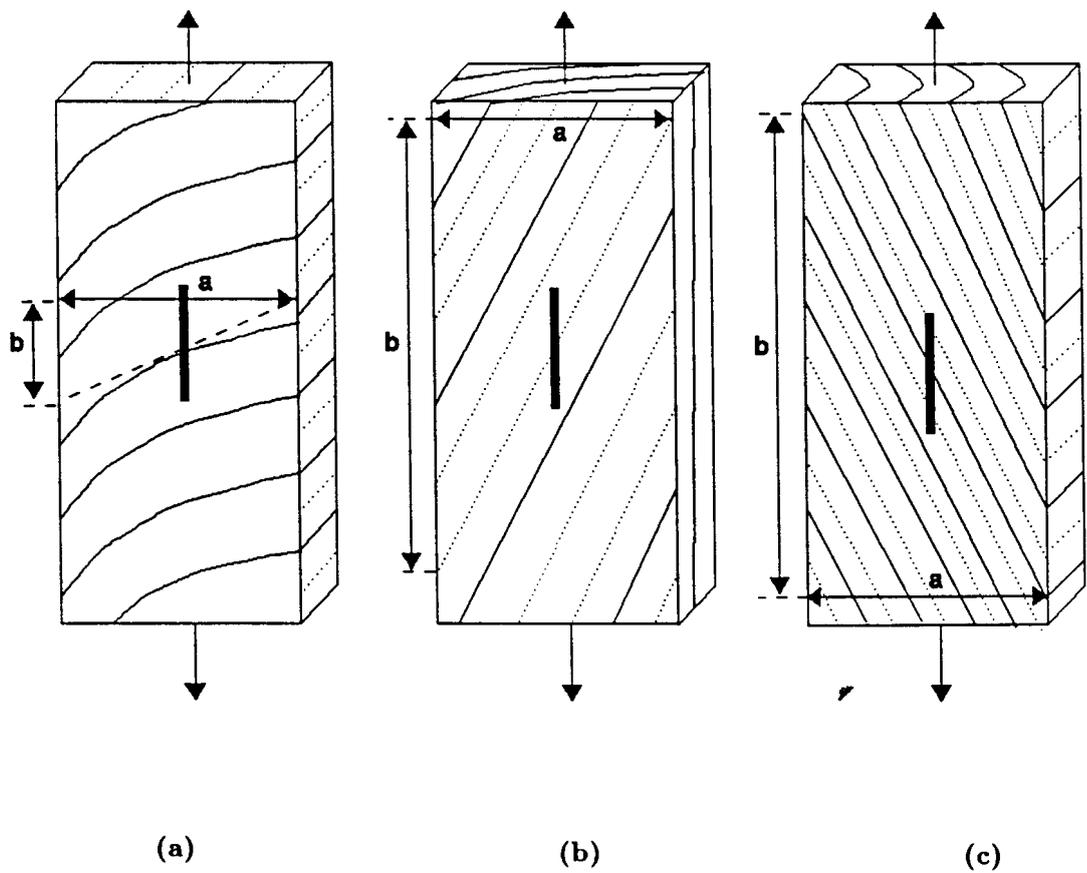


Figura 3.2 Corpos de prova com eixos principais de elasticidade convenientemente orientados para determinação dos  $G_{ij}$

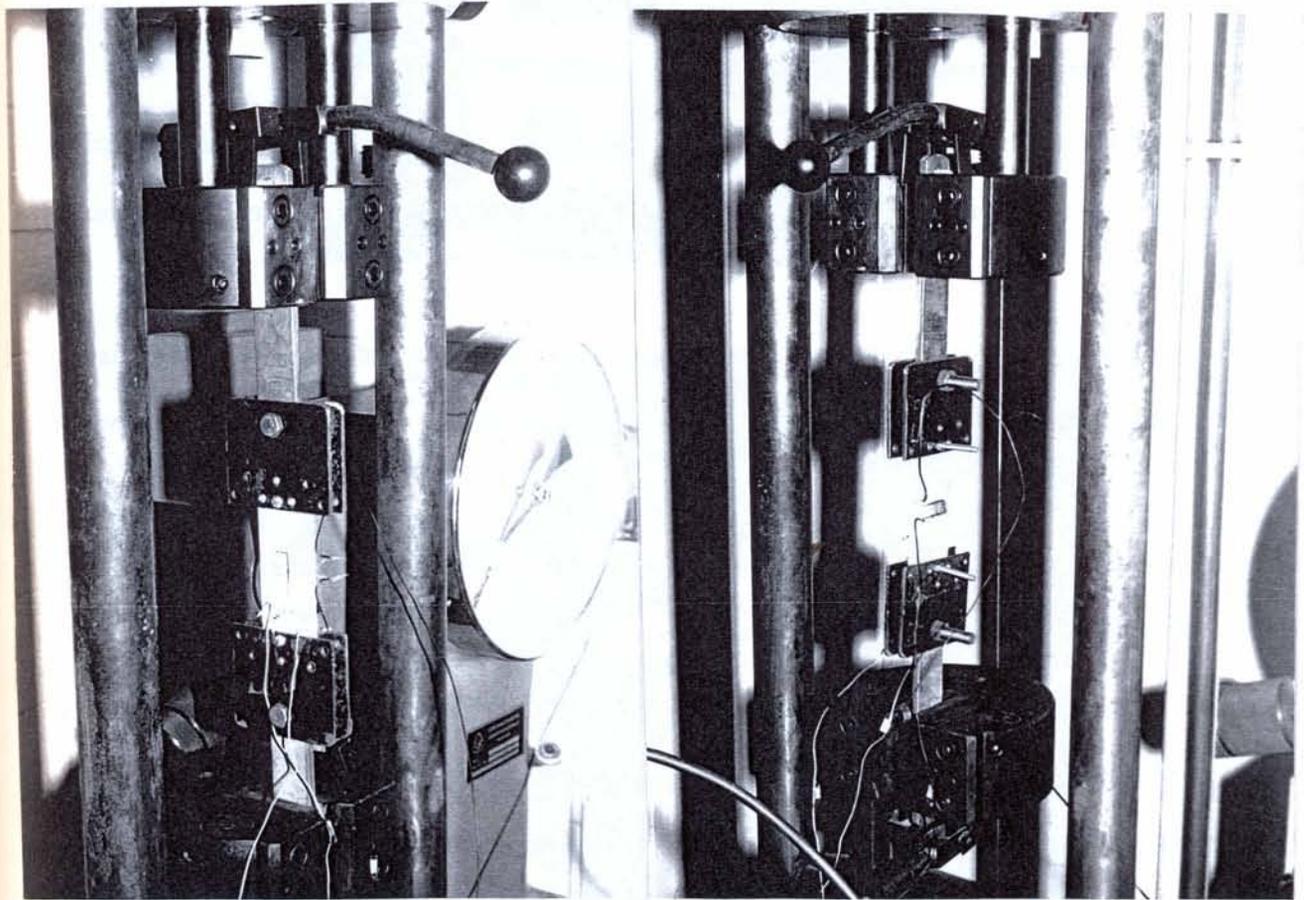
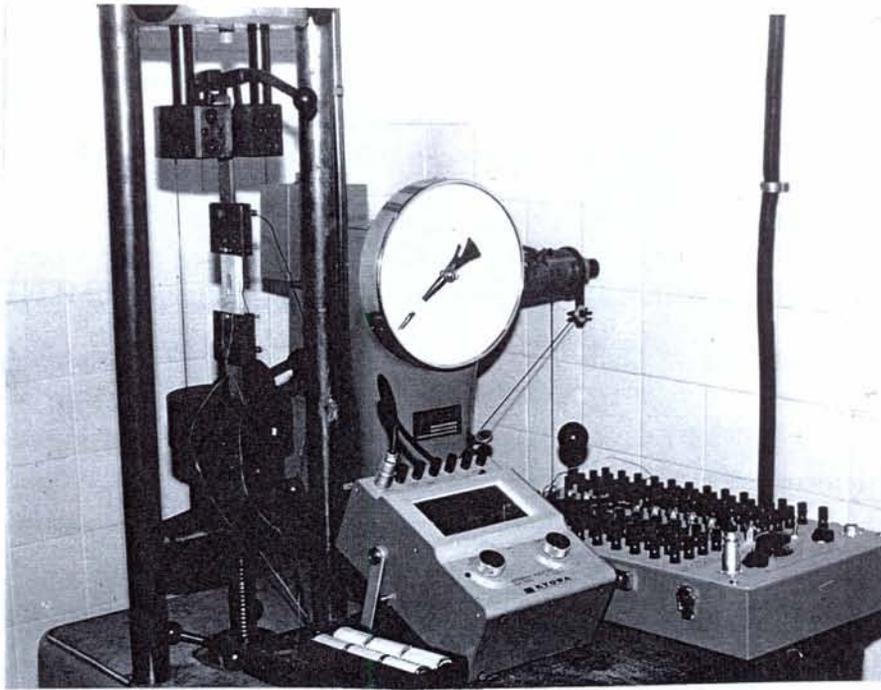


Figura 3.3 Ensaio de tração mostrando o sistema de vinculação do corpo de prova e os extensômetros, colados em faces opostas mas perpendiculares entre si, simulando uma roseta extensiométrica

Este distribuidor extensiométrico permite, através de um comutador, individualizar e identificar qualquer um dos extensômetros em serviço para ter a sua deformação específica lida em um indicador estático de deformação modelo KYOWA SM-60D.

Em alguns ensaios foram utilizados também um relógio comparador MITUTOYO DIGIMATIC para medir deslocamentos do prato da máquina durante a aplicação da carga.

### 3.2 Medição das deformações periféricas potenciais em árvores em pé

No presente trabalho foram medidas deformações periféricas potenciais, na direção longitudinal ( $\alpha_z$ ), em apenas uma árvore de cada uma de sete espécies diferentes de *Eucalyptus* e excepcionalmente para o *Eucalyptus grandis* foi obtido também um valor de deformação periférica potencial na direção tangencial ( $\alpha_\theta$ ).

As árvores avaliadas fazem parte de um teste de introdução de espécies na Estação Experimental de Anhembi, pertencente à ESALQ/USP e a técnica utilizada está bem ilustrada na Fig. 3.4.

No capítulo 4 discutir-se-ão os valores e as relações destas deformações potenciais com aquelas chamadas de deformações longitudinal ou tangencial de crescimento, respectivamente  $\varepsilon_{zp}$  ou  $\varepsilon_{\theta p}$ .

Para o desconfinamento de um elemento da árvore, o qual está normalmente sujeito a um estado de tensão, projetaram-se as ferramentas mostradas, inclusive em serviço, na Fig 3.4.

Estas ferramentas permitem retirar com grande rapidez e facilidade, pequenos discos da árvore, os quais podem ser utilizados com vantagem para as avaliações das deformações periféricas potenciais e a partir destas, das tensões existentes na periferia de árvores em pé.

A ferramenta de maior diâmetro foi utilizada para procederem-se os descascamentos das árvores e a de menor diâmetro para procederem-se os desconfinamentos de elementos periféricos das árvores.

Para verificar se esta ferramenta não introduzia nenhum efeito secundário quando utilizada, tal como ocorre com a sonda de Presley, efetuou-se um teste de desconfinamento de

um elemento em cada uma de duas peças úmidas de *Eucalyptus saligna*, tracionadas à uma tensão conhecida.

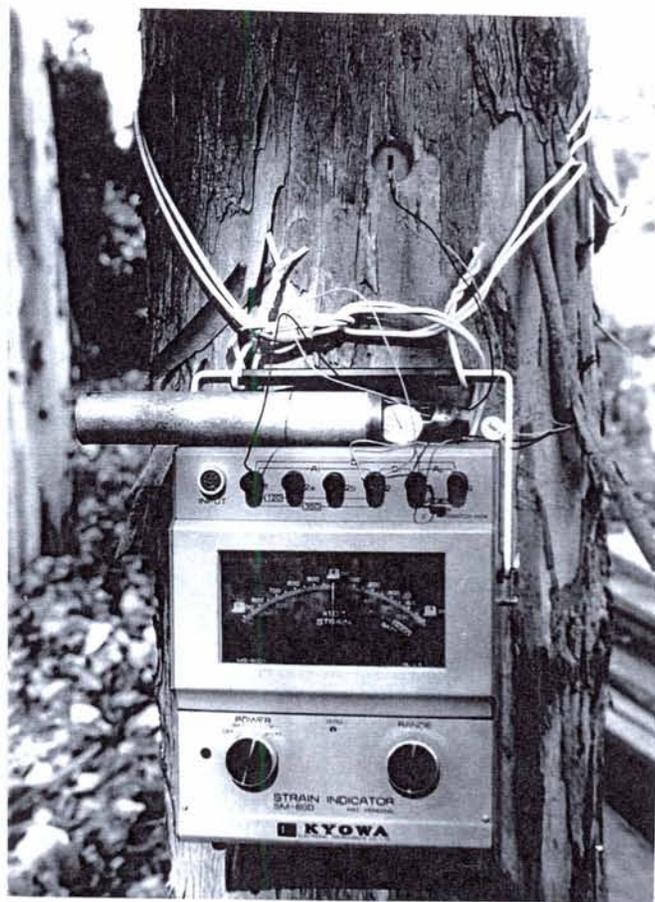


Figura 3.4 Técnica utilizada para a determinação das deformações periféricas potenciais de crescimento em árvores em pé

Na metade do comprimento de cada uma destas peças, que era de um metro, foi colado um extensômetro elétrico do tipo KFC-5-C1-11 de 120  $\Omega$ , fator gage igual a 2,11; pequeno o suficiente para caber no bocal da ferramenta.

Cada uma destas peças, de seção transversal de 2 x 5 centímetros, foi carregada e descarregada várias vezes, até verificar-se que o extensômetro não mais acusava deformação residual.

Então, procedeu-se um novo carregamento com acréscimos sucessivos de 1000 N até à tensão de 15 MPa, quando o elemento que continha o extensômetro foi desconfinado.

As imediatas indicações dos extensômetros foram tomadas através de um indicador de deformações do tipo BLH, acoplado a uma caixa seletora BLH modelo 225.

Logo em seguida foram medidos, segundo a direção das fibras, os diâmetros dos discos retirados utilizando-se um micrômetro mecânico.

Os resultados obtidos serão discutidos detalhadamente também no capítulo 4.

### 3.3 Verificação das flechas na madeira serrada

Para verificação dos deslocamentos da linha neutra, transversais ao eixo da peça indeformada, procedeu-se na serraria da Duratex em Botucatu os desdobros de 23 toras de *Eucalyptus grandis* de 2,90 m de comprimento e de vários diâmetros. Os desdobros foram efetuados de acordo com os planos de corte da Fig. 3.5 que esta serraria aplica, cada um, à classe de diâmetros mais apropriada.

Os sarrafos obtidos na multilâminas eram do mesmo comprimento da tora, mas para minimizar-se o efeito de extremidades, considerou-se como útil somente o trecho central de dois metros.

Uma linha esticada passando pelos pontos  $z = 100$  e  $z = -100$  cm contados a partir do ponto  $z = 0$  na metade do comprimento do sarrafo serviu como eixo de referência para a medida destes deslocamentos, os quais estão concentrados na Tab. 4.2.

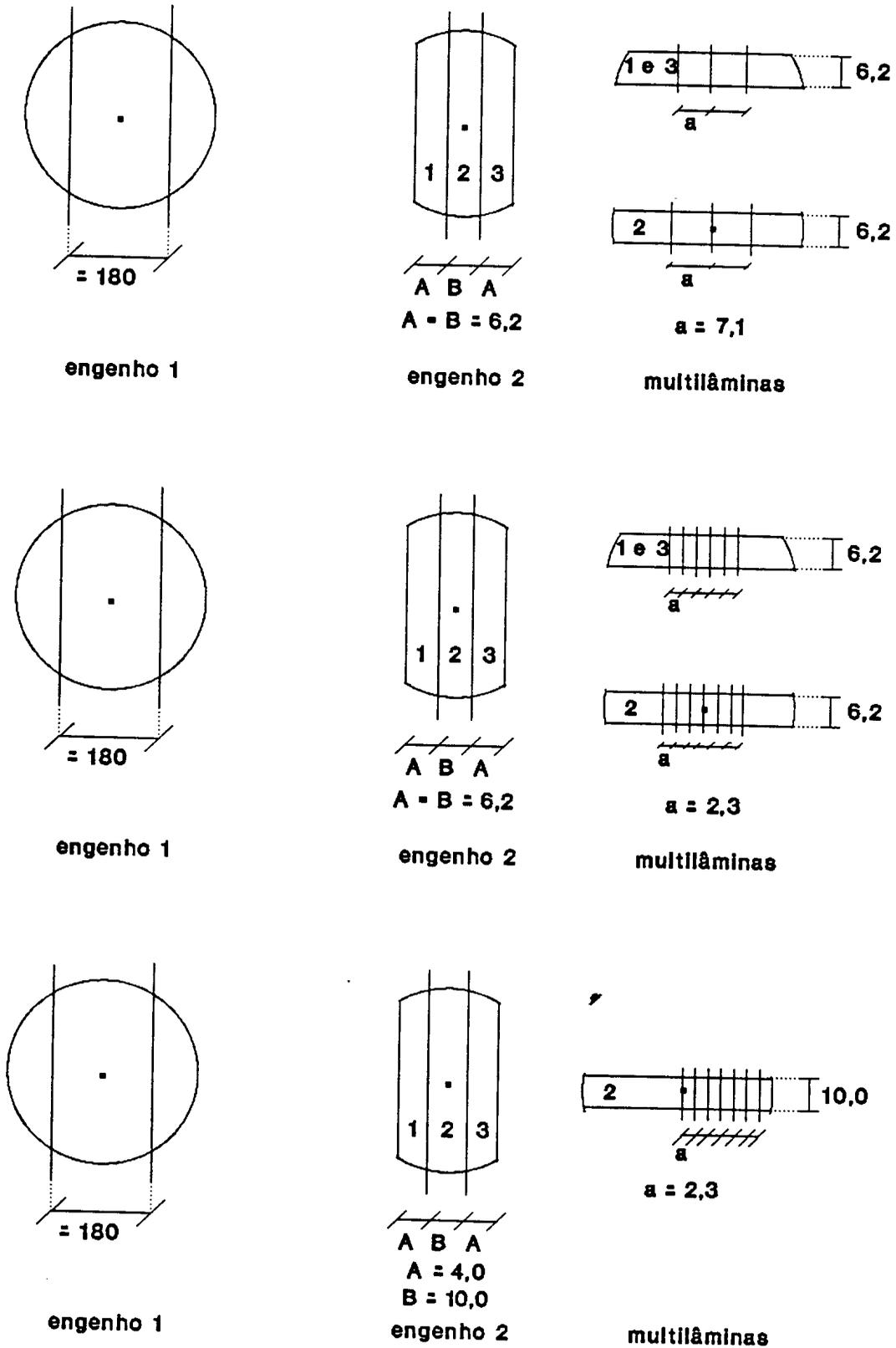


Figura 3.5 Planos de cortes efetuados para produção de sarrafos orientados segundo os três eixos principais de elasticidade

## 4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Constantes elásticas da madeira de *Eucalyptus grandis*

Para a determinação dos módulos de elasticidade foram ajustadas, a partir do trecho retílineo do gráfico tensão-deformação, funções do tipo

$$\sigma_i = a + b_i \varepsilon_i$$

onde o coeficiente angular  $b_i$  representa o próprio módulo de Elasticidade  $E_i$  e o índice  $i$  representa a direção principal de elasticidade, na qual foi aplicada a carga e também na qual, foi medida a deformação.

Um exemplo de aplicação pode ser visto na Fig. 4.1(a) onde se determina um dos diversos módulos de elasticidade.

Analogamente, para a determinação dos coeficientes de Poisson  $\nu_{ij}$  foram ajustadas funções do tipo

$$\varepsilon_j = a + b_{ij} \varepsilon_i$$

onde o coeficiente angular ( $b_{ij}$ ) é o próprio coeficiente de Poisson que exprime a dependência da deformação medida na direção  $j$ , daquela medida na direção  $i$  também de aplicação da carga.

A Fig. 4.1(b) mostra, também como exemplo, a determinação de um dos diversos coeficientes de Poisson obtidos neste trabalho.

Os dados utilizados na Fig. 4.1 são os da Tab. 4.1, as quais foram tomadas como padrões para as determinações das demais constantes elásticas no. ANEXO I<sub>B</sub>.

Para a determinação dos módulos de elasticidade transversal ( $G_{ij}$ ) obteve-se a equação geral abaixo que permite obter os coeficientes  $D'_{ijkl}$  ( $i=j=k=l = 1,2$  ou  $3$ ), que surgem devido

à rotação  $\alpha$  do corpo de prova em torno de um dos eixos principais de elasticidade, a partir de outros coeficientes  $D_{ijkl}$  relativos às três direções principais de elasticidade.

$$D'_{ijkl} = \text{sen}^4\alpha D_{oooo} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{D_{ijoo}}{2} + D_{iojo} \right) + \text{cos}^4\alpha D_{ijkl} = \frac{\varepsilon'_{kl}}{\sigma'_{kl}} = \frac{1}{E'_{kl}} \quad (4.1)$$

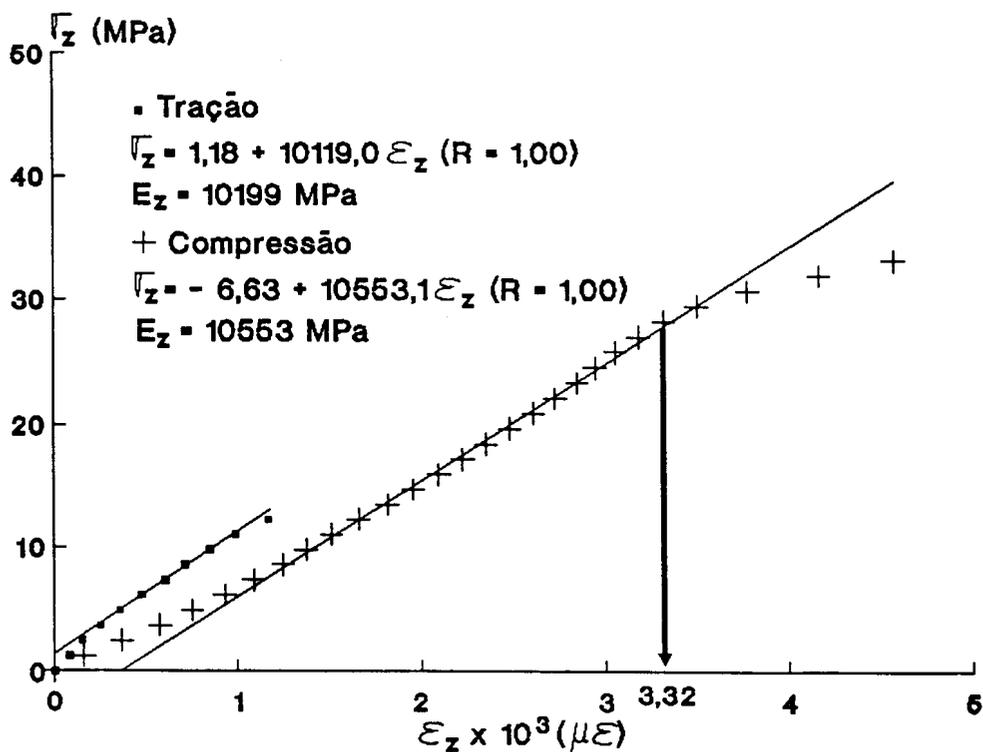
onde:

o = outro eixo, em relação ao desejado mas referido na base velha, também pertencente ao plano que sofre rotação.

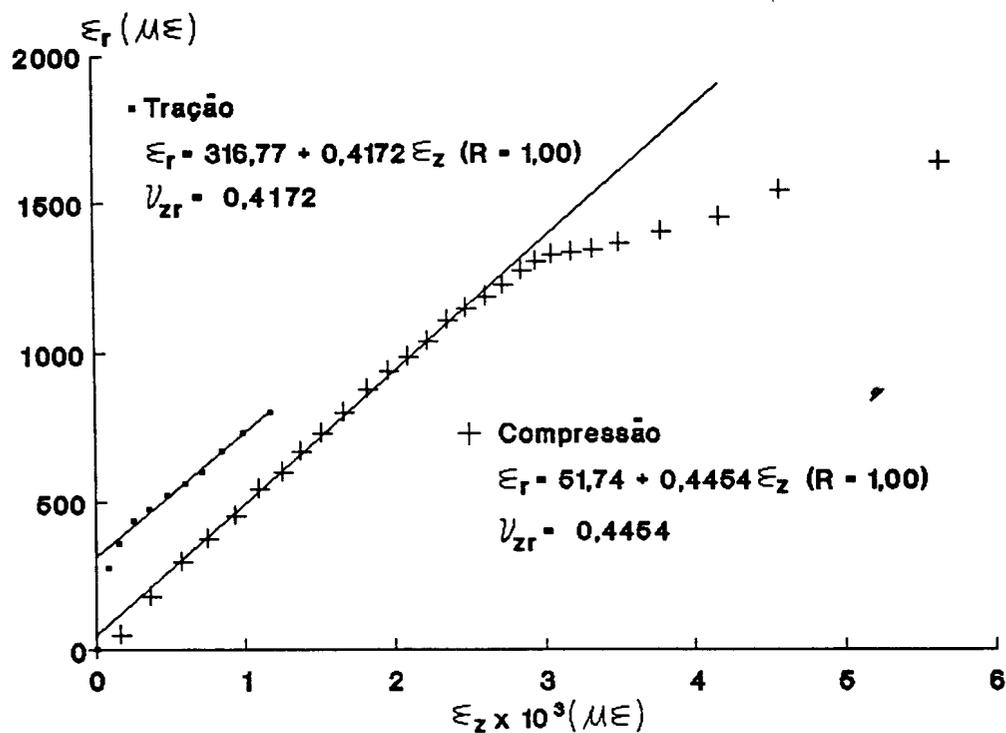
Quando o eixo de rotação coincidir com a direção desejada, basta fazer-se  $\alpha = 0$ .

Tabela 4.1 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 3,655		Tangencial: 1,112		Longitudinal: 11	
Ensaio	Carga	Extensômetro ( $\mu\varepsilon$ )			
	(N)	Longitudinal		Radial	
Tração / Compressão	0	0	/	0	0 / 0
	500	40	/	-80	-140 / 25
	1000	75	/	-185	-180 / 90
	1500	125	/	-290	-220 / 150
	2000	180	/	-380	-240 / 190
	2500	240	/	-470	-265 / 230
	3000	305	/	-550	-285 / 275
	3500	360	/	-630	-305 / 305
	4000	430	/	-695	-310 / 340
	4500	500	/	-765	-315 / 370
	5000	590	/	-840	-310 / 405
	5500		/	-920	/ 445
	6000		/	-990	/ 475
	6500		/	-1060	/ 500
	7000		/	-1125	/ 525
	7500		/	-1190	/ 560
	8000		/	-1255	/ 580
	8500		/	-1320	/ 600
	9000		/	-1380	/ 620
	9500		/	-1440	/ 645
	10000		/	-1490	/ 660
	10500		/	-1545	/ 670
	11000		/	-1610	/ 675
	11500		/	-1680	/ 680
	12000		/	-1770	/ 690
	12500		/	-1910	/ 710
	13000		/	-2105	/ 735
	13500		/	-2310	/ 780
	14000		/	-2850	/ 830



(a)



(b)

Figura 4.1 Exemplos dos procedimentos desenvolvidos para a determinação do módulo de elasticidade (a) e do coeficiente de Poisson (b)

Como exemplos de utilização desta equação, seguem abaixo as deduções dos casos necessários à determinação do  $G_{12} = G_{r\theta} = \frac{1}{4D_{1212}}$ ,  $G_{23} = G_{\theta Z} = \frac{1}{4D_{2323}}$  e  $G_{31} = G_{Zr} = \frac{1}{4D_{3131}}$ .

a) Para a determinação do  $G_{12} = G_{r\theta}$

No corpo de prova escolhido para este caso [Fig. 3.2(a)] pode-se observar que o plano que sofreu rotação foi o plano 12 e que se for tomado como ângulo  $\alpha$  aquele entre a direção dos anéis de crescimento e a direção perpendicular à direção da carga, ou seja

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{b}{a} \quad (4.1a)$$

então o eixo desejado é o 1', o índice o será portanto o 2 e a equação necessária será

$$D'_{1111} = \text{sen}^4 \alpha D_{2222} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{D_{1122}}{2} + D_{1212} \right) + \text{cos}^4 \alpha D_{1111} = \frac{\epsilon'_1}{\sigma'_1} = \frac{1}{E'_1} \quad (4.1b)$$

Se por outro lado for tomado o ângulo  $\alpha$  como aquele entre a direção dos anéis e a própria direção da carga aplicada, ou seja

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{a}{b} \quad (4.1c)$$

então o eixo desejado é o 2', o índice o será o 1 e a equação necessária será

$$D'_{2222} = \text{sen}^4 \alpha D_{1111} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{D_{2211}}{2} + D_{2121} \right) + \text{cos}^4 \alpha D_{2222} = \frac{\epsilon'_2}{\sigma'_2} = \frac{1}{E'_2} \quad (4.1d)$$

b) Para a determinação do  $G_{23} = G_{\theta Z}$

Se no corpo de prova da Fig. 3.2(b), cujo plano de rotação é o plano 23

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{b}{a} \quad (4.1e)$$

então o eixo desejado é o 2', o índice o será o 3 e a equação necessária será

$$D'_{2222} = \text{sen}^4\alpha D_{3333} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{D_{2233}}{2} + D_{2323} \right) + \text{cos}^4\alpha D_{2222} = \frac{\varepsilon'_2}{\sigma'_2} = \frac{1}{E'_2} \quad (4.1f)$$

Mas, se

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{a}{b} \quad (4.1g)$$

então o eixo desejado será o 3', o índice o será o 2 e a equação necessária será

$$D'_{3333} = \text{sen}^4\alpha D_{2222} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{D_{3322}}{2} + D_{3232} \right) + \text{cos}^4\alpha D_{3333} = \frac{\varepsilon'_3}{\sigma'_3} = \frac{1}{E'_3} \quad (4.1h)$$

c) Para a determinação do  $G_{31} = G_{zr}$

Se no corpo de prova da Fig. 3.2(c), cujo plano de rotação é o plano 13

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{b}{a} \quad (4.1i)$$

então o eixo desejado será o 1', o índice o será o 3 e a equação necessária será

$$D'_{1111} = \text{sen}^4\alpha D_{3333} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{D_{1133}}{2} + D_{1313} \right) + \text{cos}^4\alpha D_{1111} = \frac{\varepsilon'_1}{\sigma'_1} = \frac{1}{E'_1} \quad (4.1j)$$

e finalmente, se

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{a}{b} \quad (4.1k)$$

então o eixo desejado será o 3', o índice o será o 1 e a equação necessária será

$$D'_{3333} = \text{sen}^4\alpha D_{1111} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{D_{3311}}{2} + D_{3131} \right) + \text{cos}^4\alpha D_{3333} = \frac{\varepsilon'_3}{\sigma'_3} = \frac{1}{E'_3} \quad (4.1l)$$

Com a uniformização das tomadas dos valores a e b sempre respectivamente perpendicular e paralelo à carga aplicada e utilizando-se sempre qualquer das equações (4.1c, g e k), o ângulo  $\alpha$  será sempre aquele entre o elemento anatômico considerado e a direção da carga aplicada.

Portanto as equações mais convenientes para os cálculos dos  $G_{ij}$  foram obtidas das equações (4.1d,h e l) e são as seguintes

$$G_{r\theta} = \frac{\text{sen}^2 2\alpha}{4 \left( \frac{1}{E_\theta} - \frac{1}{E_r} \text{sen}^4\alpha + \frac{\nu_{\theta r}}{2E_\theta} \text{sen}^2 2\alpha - \frac{1}{E_\theta} \text{cos}^4\alpha \right)} \quad (4.2a)$$

$$G_{\theta z} = \frac{\text{sen}^2 2\alpha}{4 \left( \frac{1}{E_z} - \frac{1}{E_\theta} \text{sen}^4\alpha + \frac{\nu_{z\theta}}{2E_z} \text{sen}^2 2\alpha - \frac{1}{E_z} \text{cos}^4\alpha \right)} \quad (4.2b)$$

$$G_{zr} = \frac{\text{sen}^2 2\alpha}{4 \left( \frac{1}{E_z} - \frac{1}{E_r} \text{sen}^4\alpha + \frac{\nu_{zr}}{2E_z} \text{sen}^2 2\alpha - \frac{1}{E_z} \text{cos}^4\alpha \right)} \quad (4.2c)$$

#### 4.1.1 Influência do comprimento do corpo de prova na determinação do $E_z$ à compressão

Os dados originais obtidos neste ensaio inclusive os gráficos plotados a partir deles estão no ANEXO I<sub>A</sub>, e resumidamente na Fig. 4.2, abaixo.

Observa-se nesta figura que o tamanho do corpo de prova utilizado neste ensaio de compressão não interfere, a menos do comprimento exageradamente pequeno de 1,207 cm, no valor do módulo de elasticidade determinado na direção paralela.

As tensões tangenciais que surgem pelo confinamento das extremidades do corpo de prova pelo prato da máquina parecem não ser suficientes para interferir nos deslocamentos medidos pelo extensômetro elétrico na direção paralela às fibras.

Admitiu-se portanto, embora não tenham sido testadas todas as demais propriedades, que até o comprimento de 2,92 cm elas podem ser consideradas livres dos efeitos de extemidades.

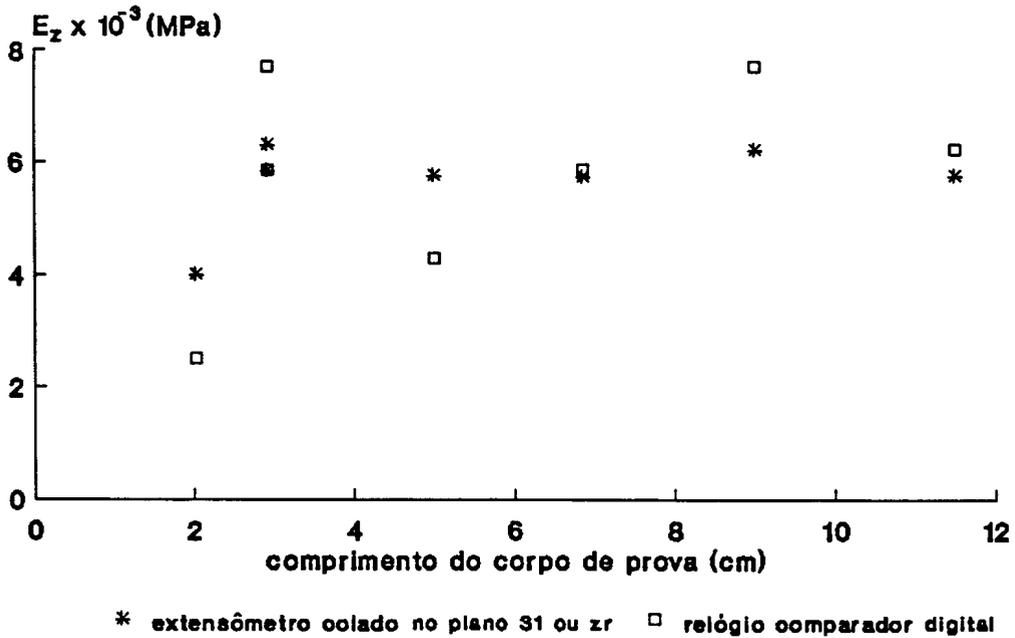


Figura 4.2 Relação entre o  $E_z$  determinado na compressão e o comprimento do corpo de prova utilizado

Sendo assim, os ensaios de compressão efetuados foram aceitos como puros, mas devido à pequena espessura dos corpos de prova, em torno de 1,1 cm houve grande facilidade de flambagem quando comprimidos nas direções perpendiculares à direção das fibras, fato este que inutilizou um grande número de ensaios.

#### 4.1.2. Ensaio de compressão

A matriz de deformabilidade abaixo apresenta os valores das constantes elásticas obtidos nos ensaios de compressão.

Cada elemento dessa matriz foi obtido por média aritmética dos dados originais tabelados

no ANEXO I<sub>B</sub>. Os valores dos módulos de elasticidade estão dados em MPa.

Observa-se que as igualdades dadas pelas equações (2.10) são perfeitamente satisfeitas não se obtendo diferença superior a 8,33 %, fato este que comprova que a madeira se aproxima bastante de um material ortotrópico quando submetida à compressão.

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{E_r} = \frac{1}{492}\right) & -\left(\frac{\nu_{\theta r}}{E_{\theta}} = \frac{0,4169}{298}\right) & -\left(\frac{\nu_{zr}}{E_z} = \frac{0,5143}{10295}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{0,6767}{492}\right) & \left(\frac{1}{E_{\theta}} = \frac{1}{298}\right) & -\left(\frac{\nu_{z\theta}}{E_z} = \frac{0,5726}{10295}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\nu_{rz}}{E_r} = \frac{0,0245^*}{492}\right) & -\left(\frac{\nu_{\theta z}}{E_{\theta}} = \frac{0,0153}{298}\right) & \left(\frac{1}{E_z} = \frac{1}{10295}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}} = \frac{1}{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}} = \frac{1}{185} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zr}} = \frac{1}{2220} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

\* valor ideal

Por outro lado, observa-se também que as propriedades da madeira de *Eucalyptus grandis* estão dentro de valores médios quando comparados com os dados de literatura mostrados nas tabelas 2.10 e 2.11 do capítulo 2.

Recomenda-se entretanto que os ensaios de compressão sejam efetuados com bastante cuidados para minimizar-se o erro experimental, devido em grande parte às eventuais excêntricas da carga aplicada.

Foi verificado que dos vários ensaios efetuados para obtenção dessas constantes elásticas, alguns mais cuidadosos conseguem preencher a matriz de deformabilidade acima, sem necessidade de repetições. Isto mostra que com a diminuição do erro experimental é possível minimizar-se o número de ensaios necessários para se caracterizar uma espécie já melhorada e manejada como esta.

#### 4.1.3. Ensaio de tração

A matriz deformabilidade abaixo apresenta os valores das constantes elásticas obtidos nos ensaios de tração.

Cada elemento dessa matriz foi obtido por média aritmética dos dados originais também tabelados no ANEXO I<sub>B</sub>. Os valores dos módulos de elasticidade estão dados também em

MPa.

Observa-se que as igualdades dadas pela equação (2.10) também são perfeitamente satisfeitas, não se obtendo diferença superior a 11,90 %, fato este que comprova que a madeira se aproxima bastante de um material ortotrópico também e principalmente quando submetida a esforços de tração.

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{E_r} = \frac{1}{435}\right) & -\left(\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} = \frac{0,4630}{313}\right) & -\left(\frac{\nu_{zr}}{E_z} = \frac{0,5110}{9974}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{0,6493}{435}\right) & \left(\frac{1}{E_\theta} = \frac{1}{313}\right) & -\left(\frac{\nu_{z\theta}}{E_z} = \frac{0,5527}{9974}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\nu_{rz}}{E_r} = \frac{0,0214}{435}\right) & -\left(\frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} = \frac{0,0155}{313}\right) & \left(\frac{1}{E_z} = \frac{1}{9974}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{G_{r\theta}} = \frac{1}{81}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{G_{\theta z}} = \frac{1}{154}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{G_{zr}} = \frac{1}{2713}\right) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Observa-se também que os elementos dessa matriz não diferem significativamente daqueles da matriz anterior, evidenciando o fato de que são aproximadamente iguais as propriedades da madeira úmida de *Eucalyptus grandis* tanto determinadas em ensaios de compressão quanto de tração.

Os diagramas  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  e  $\varepsilon_j = g(\varepsilon_i)$  mostram que os dados obtidos na tração são mais ajustados do que aqueles obtidos na compressão. Isto evidencia um fato já esperado pois verificou-se na prática que os ensaios de tração foram naturalmente mais consistentes do que os ensaios de compressão.

Não há motivo entretanto, para se concluir ainda, que o ensaio de tração seja mais puro que o de compressão, mas as condições de vinculação e a possibilidade de maior esbeltez no corpo de prova permitem trabalhar-se com material mais homogêneo.

De fato, foi verificado que nos corpos de prova mais finos onde a distância entre os dois extensômetros, colados um em cada face e perpendiculares entre si, foi menor os coeficientes de Poisson também foram melhor determinados.

Por outro lado o ensaio de compressão permite definir-se o estado limite de elasticidade o que não é possível no ensaio de tração.

No presente trabalho não foi possível medir a deformação específica no momento da ruptura à tração porque os corpos de prova rompiam na seção minimizada pelo furo de fixação do parafuso, mas acredita-se que ela não deve ser muito maior do que os seguintes valores tirados do ANEXO I<sub>B</sub>.

$$\text{- na direção longitudinal: } 2,19 \mu\epsilon/1000 \quad (4.6a)$$

$$\text{- na direção radial: } 4,75 \mu\epsilon/1000 \quad (4.6b)$$

$$\text{- na direção tangencial: } 3,43 \mu\epsilon/1000 \quad (4.6c)$$

Um outro fato observado é que parece existir uma relação do tipo

$$\frac{E_{iT}}{E_{iC}} = \frac{\nu_{ijT}}{\nu_{ijC}} \quad (4.5)$$

onde os índices T e C indicam tração e compressão respectivamente.

Como exemplos, obtêm-se das matrizes apresentadas:

$$\frac{E_{\theta T} = 313}{E_{\theta C} = 298} \approx \frac{\nu_{\theta r T} = 0,4630}{\nu_{\theta r C} = 0,4169} \text{ com diferença de } 5,74 \%$$

$$\frac{E_{z T} = 9974}{E_{z C} = 10295} \approx \frac{\nu_{z r T} = 0,5110}{\nu_{z r C} = 0,5143} \text{ com diferença de } 2,56 \%$$

$$\frac{E_{r T} = 435}{E_{r C} = 492} \approx \frac{\nu_{r \theta T} = 0,6493}{\nu_{r \theta C} = 0,6767} \text{ com diferença de } 8,52 \%$$

$$\frac{E_{r T} = 435}{E_{r C} = 492} \approx \frac{\nu_{r z T} = 0,0214}{\nu_{r z C} = 0,0245} \text{ com diferença de } 1,01 \%$$

$$\frac{E_{\theta T} = 313}{E_{\theta C} = 298} \approx \frac{\nu_{\theta Z} = 0,0155}{\nu_{\theta Z} = 0,0153} \text{ com diferença de } 3,68 \%$$

$$\frac{E_{zT} = 9974}{E_{zC} = 10295} \approx \frac{\nu_{zrT} = 0,5110}{\nu_{zrC} = 0,5143} \text{ com diferença de } 2,56 \%$$

Estas constatações foram observadas também em vários ensaios individuais.

#### 4.2 Aferição da ferramenta a ser utilizada no desconfinamento de um elemento da árvore em pé

Na calibração da ferramenta apresentada no item 3.2 foi verificado que as deformações específicas longitudinais dadas por

$$\varepsilon_z = \frac{D_e - D_i}{D_i} \quad (4.7)$$

onde:

$D_e$  = diâmetro do elemento desconfinado

$D_i$  = diâmetro interno do bocal da ferramenta

não coincidiam com as leituras dos extensômetros e ainda, que as tensões obtidas pelos produtos desta deformações pelos respectivos módulos de elasticidade chegaram a diferir cerca de 50 % das tensões efetivamente aplicadas.

Esta discrepância foi atribuída à falta de sensibilidade do micrômetro utilizado e infelizmente inviabilizou uma das técnicas mais baratas e rápidas na seleção de árvores com baixo níveis de tensões de crescimento.

Por outro lado, foi verificado também que os valores negativos das deformações específicas, registrados pelos extensômetros depois que os discos foram retirados das amostras, multiplicados também pelos respectivos módulos de elasticidade produziram valores de tensões que não chegaram a diferir, em valores absolutos 3 % dos valores das tensões realmente aplicadas.

A partir desses resultados admitiu-se que esta ferramenta, doravante denominada **vazador**, é bastante eficiente e prática no desconfinamento de um elemento da árvore, mas para se avaliar corretamente o nível de tensão a que ele estava previamente submetido, há ainda a necessidade de que a sua deformação específica seja obtida com os recursos da extensimetria elétrica.

#### 4.3 Tensões e deformações de crescimento periféricas

As tensões na periferia das árvores são determinadas indiretamente através das respectivas deformações potenciais periféricas sendo as principais, de acordo com as equações (2.68),  $\alpha_z$  e  $\alpha_\theta$ .

A Tab. 4.2 mostra alguns valores da deformação longitudinal  $\alpha_z$  medidas em árvores em pé de várias espécies de *Eucalyptus* e excepcionalmente para o *Eucalyptus grandis* mostra também um valor da deformação tangencial  $\alpha_\theta$ . Esta Tab. traz também os diâmetros (DAP) das mesmas árvores em que foram medidas as deformações e os respectivos módulos de elasticidade  $E_z$  determinados por média dos valores obtidos de duas outras árvores da mesma população.

Tabela 4.2 Deformações e tensões periféricas medidas em árvores em pé

espécie	DAP (cm)	$E_z$ (MPa)	$\alpha_z(\mu\varepsilon)$	$\alpha_z(\mu\varepsilon)$	$\sigma_{zp}$ (MPa)
<i>Eucalyptus grandis</i>	24,00	11,597	1023,35	1076,10	11,87
<i>Eucalyptus saligna</i>	31,60	10,123	1529,75	—	15,49
<i>Eucalyptus urophylla</i>	34,00	13,457	875,65	—	11,78
<i>Eucalyptus citriodora</i>	31,60	20,820	928,40	—	19,33
<i>Eucalyptus tereticornis</i>	25,00	14,026	1571,95	—	22,05
<i>Eucalyptus camaldulensis</i>	28,60	13,152	2287,24	—	30,08
<i>Eucalyptus pilularis</i>	26,00	13,852	858,77	—	11,90

As tensões periféricas que podem ser obtidas pelo produto das deformações periféricas potenciais pelos respectivos módulos de elasticidade não são exatamente as mesmas que existem nas árvores. Este produto indica um estado linear e nas árvores ocorre, no mínimo, um estado plano de tensão.

De fato, aplicando-se as equações (2.17) na camada de crescimento onde  $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = 0$  e

$\sigma_r$ , proporcional à espessura desta camadas é muito pequeno, obtém-se

$$-\begin{bmatrix} \alpha_\theta \\ \alpha_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_\theta} & -\frac{\nu_{Z\theta}}{E_Z} \\ -\frac{\nu_{\theta Z}}{E_\theta} & \frac{1}{E_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\theta p} \\ \sigma_{Zp} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

cuja solução fornece as tensões de crescimento que realmente atuam na árvore.

$$\sigma_{\theta p} = -\frac{\nu_{Z\theta}\alpha_Z + \alpha_\theta}{1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z}} E_\theta \quad (4.9a)$$

$$\sigma_{Zp} = -\frac{\nu_{\theta Z}\alpha_\theta + \alpha_Z}{1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z}} E_Z \quad (4.9b)$$

Entretanto, como pode ser observado nas tabelas 2.10 e 2.11 e nas matrizes (4.3) e (4.4), o valor de  $\nu_{\theta Z}$  é muito pequeno, possibilitando simplificar-se (4.9) para

$$\sigma_{\theta p} = -E_\theta(\nu_{Z\theta}\alpha_Z + \alpha_\theta) \quad (4.10a)$$

$$\sigma_{Zp} = -E_Z\alpha_Z \quad (4.10b)$$

A maioria do autores tem utilizada somente a segunda das equações (4.10), negligenciando quase sempre as tensões tangenciais.

Dividindo-se as tensões dadas pelas equações (4.9) pelos respectivos módulos de elasticidade, obtém-se as seguintes componentes da deformação de crescimento

$$\varepsilon_{\theta p} = -\frac{\nu_{Z\theta}\alpha_Z + \alpha_\theta}{1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z}} \quad (4.11a)$$

$$\varepsilon_{Zp} = -\frac{\nu_{\theta Z}\alpha_\theta + \alpha_Z}{1 - \nu_{Z\theta}\nu_{\theta Z}} \quad (4.11b)$$

Estas deformações de crescimento, que na verdade são as causas do aparecimento das conhecidas tensões de crescimento, também são geralmente simplificadas a

$$\varepsilon_{\theta p} = -\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_{\theta} \quad (4.12a)$$

$$\varepsilon_{zp} = -\alpha_z \quad (4.12b)$$

Com os valores de  $\alpha_z$  e de  $\alpha_{\theta}$  da Tab. 4.2, das constantes elásticas da matriz de deformabilidade (4.4) e com as equações (4.11) obtiveram-se para o *Eucalyptus grandis* os seguintes valores para as deformações de crescimento.

$$\varepsilon_{zp} = -\frac{0,0155 \times 1076,10 - 1023,35}{1 - 0,5527 \times 0,0155} = 1015,37\mu\varepsilon \quad (4.13a)$$

$$\varepsilon_{\theta p} = -\frac{0,5527 \times (-1023,35) \times 1076,10}{1 - 0,5527 \times 0,0155} = -514,91\mu\varepsilon \quad (4.13b)$$

Estes cálculos indicam que as tensões de crescimentos em ação na árvore são menores do que aquelas comumente obtidas na prática, através da expressão

$$\sigma_i = -\alpha_i E_i \quad (4.14)$$

Entretanto, as deformações  $\alpha_z$  e  $\alpha_{\theta}$  têm, pelo menos aparentemente, maior expressão nas atividades práticas e por esse motivo serão normalmente utilizadas, e sempre que possível discutidas no decorrer deste trabalho.

#### 4.4 Comparações entre os modelos teóricos de distribuição de tensões na tora

Estas comparações foram efetuadas para 4 árvores de diâmetros de 20, 40, 60 e 80 centímetros de *Eucalyptus grandis*, espécie esta tomada como padrão e para a qual foram de-

terminadas todas as variáveis exigidas pelos principais modelos teóricos de distribuição de tensões apresentados no capítulo 2.

As constantes elásticas necessárias foram tomadas da matriz de deformabilidade (4.4) e as deformações periféricas potenciais foram tomadas da Tab. 4.2.

A tensão periférica na direção  $i$  ( $\sigma_{ip}$ ), única variável exigida pelos modelos mais simples foram obtidas através da Eq. (4.14).

Foram elaboradas também, seis programas de computador na linguagem BASIC, os quais estão apresentados no ANEXO II, para gerarem dados em quantidades suficientes para não discretizarem as funções e alcançarem os pontos dos contornos, onde normalmente ocorrem os problemas de singularidade.

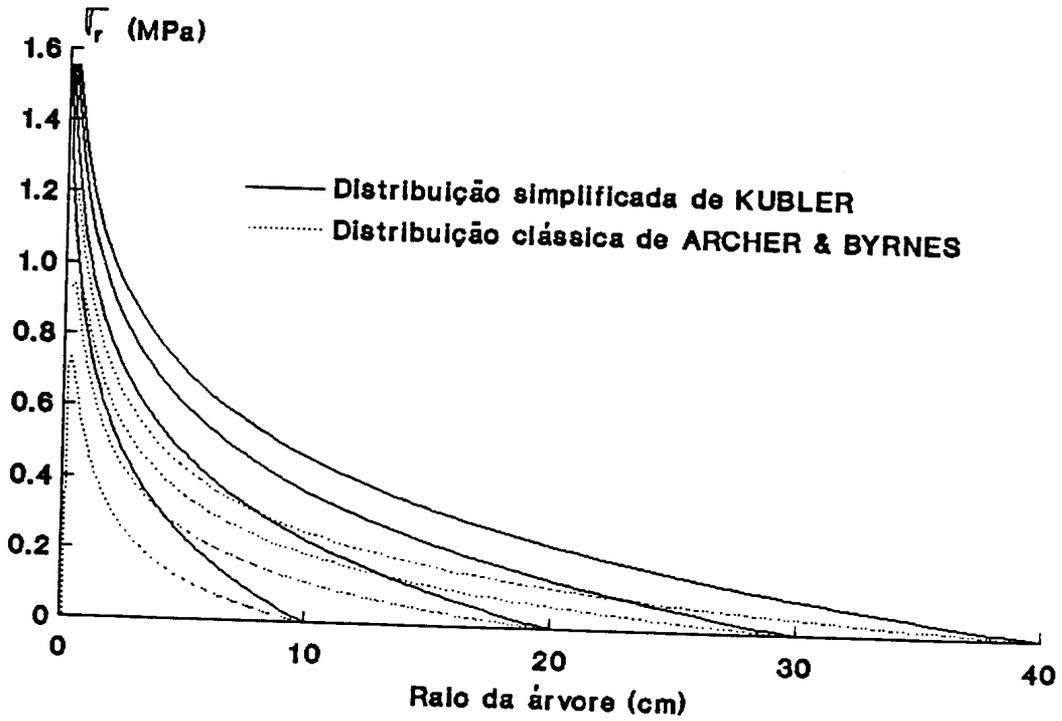
Os dados gerados por estes programas foram arquivados de tal forma a serem lidos posteriormente pelo Harvard Graphycs. o qual foi comandado a plotar os gráficos mostrados a seguir.

#### 4.4.1 Radiais ( $\sigma_r$ )

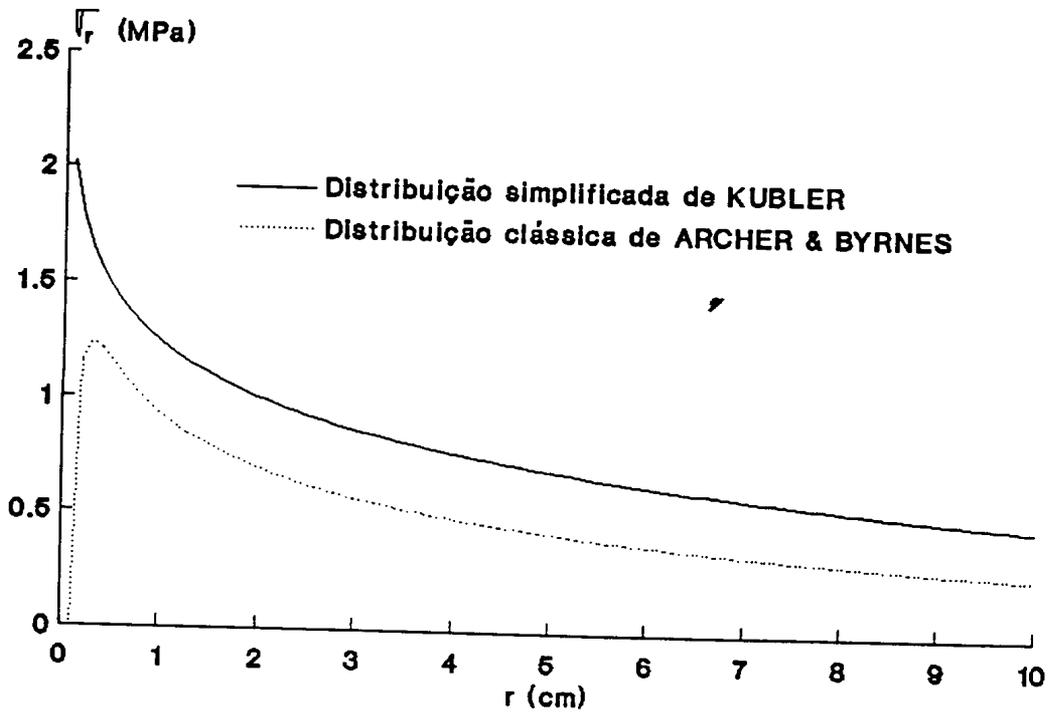
A Fig. 4.3(a) obtida das equações (2.31c) de KUBLER e 2.68(a) de ARCHER & BYRNES com  $A$  igual a 0,1 cm mostra que os dois modelos concordam nas predições de tensões de tração em todo o comprimento dos raios das árvores, mas não são coincidentes a menos do ponto localizado na periferia.

Entretanto a diferença marcante entre estes dois modelos está na região central da árvore, onde a distribuição de KUBLER apresenta uma grave singularidade e a distribuição de ARCHER & BYRNES se anula para valores de  $r$  menores do que o raio arbitrário  $A$  da medula.

A Fig. 4.3(b) mostra esta constatação que parece ser a causa principal da divergência entre estes dois modelos.



(a)



(b)

Figura 4.3 Distribuições de tensões radiais em 4 árvores de *Eucalyptus grandis* (a) e singularidades centrais ampliadas para a árvore de 40 cm de raio (b)

Nas proximidades do ponto  $r = 0.1$  cm, da árvore de 40 cm de raio, as deformações por tração radial chegam a valores próximos de 6,45 por mil superando portanto a capacidade intrínseca do material que como pode ser visto em (4.6b) ou no ANEXO I<sub>B</sub>, não deve ultrapassar em muito o valor de 4,75 por mil.

Portanto, pelo modelo de KUBLER, a região central da árvore estaria totalmente fissurada e pelo modelo de ARCHER & BYRNES pode-se ajustar um valor de **A** que compatibilize as tensões solicitantes e resistentes.

#### 4.4.2 Tangenciais ( $\sigma_{\theta}$ )

As distribuições tangenciais de tensões dadas por KUBLER e ARCHER & BYRNES, equações 2.31b e 2.68b respectivamente, estão mostradas na Fig. 4.4(a) onde se observa que estes dois modelos também não são coincidentes.

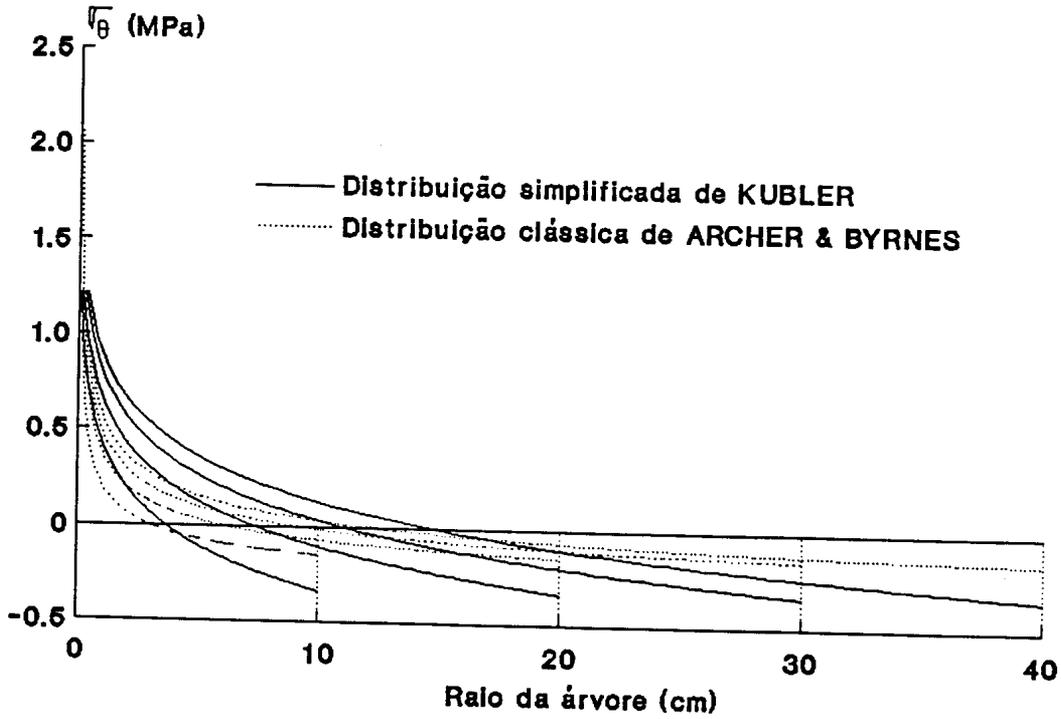
As diferenças que ocorrem nas periferias das árvores são devidas à simplicidade do modelo de KUBLER que negligencia a interdependência entre os componentes de tensão de crescimento e portanto não considera o estado plano de tensão que aí existe. Entretanto, verificou-se que mesmo que se corrijam estas diferenças, com a adoção do valor calculado em (4.13b), os modelos não se aproximam satisfatoriamente para os pontos mais internos, embora concordem plenamente quanto aos sinais das tensões.

A Fig. 4.4(b) mostra a diferença entre os dois modelos no contorno da medula de uma árvore de 80 cm de diâmetro onde também produzem deformações por tração da ordem de 5,37 por mil, maiores portanto do que a capacidade de deformações do material que para esse caso é, conforme (4.6c), da ordem de 3,43 por mil.

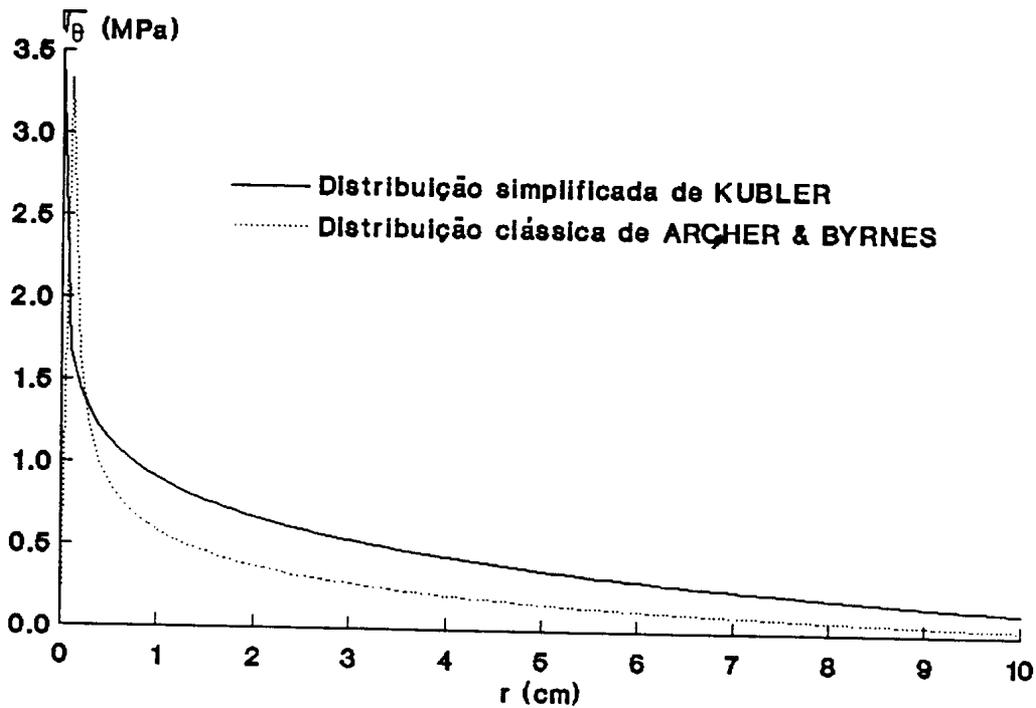
#### 4.4.3 Longitudinais ( $\sigma_z$ )

A Fig. 4.5(a) obtida das equações (2.31a) de KUBLER e (2.68c) de ARCHER & BYRNES mostra que os dois modelos são perfeitamente coincidentes na predição das tensões longitu-

nais, mas também diferem ligeiramente no contorno da medula onde se observam em qualquer dos dois casos, valores exageradamente altos dessas tensões.



(a)



(b)

Figura 4.4 Distribuições de tensões tangenciais em 4 árvores de *Eucalyptus grandis* (a) e singularidades centrais ampliadas para a árvore de 40 cm de raio (b)

Nas proximidades do ponto  $r = 0,1$  cm, da árvore de 40 cm de raio, as deformações por tração radial chegam a valores próximos de 6,45 por mil superando portanto a capacidade intrínseca do material que como pode ser visto em (4.6b) ou no ANEXO I<sub>B</sub>, não deve ultrapassar em muito o valor de 4,75 por mil.

Portanto, pelo modelo de KUBLER, a região central da árvore estaria totalmente fissurada e pelo modelo de ARCHER & BYRNES pode-se ajustar um valor de A que compatibilize as tensões solicitantes e resistentes.

#### 4.4.2 Tangenciais ( $\sigma_{\theta}$ )

As distribuições tangenciais de tensões dadas por KUBLER e ARCHER & BYRNES, equações 2.31b e 2.68b respectivamente, estão mostradas na Fig. 4.4(a) onde se observa que estes dois modelos também não são coincidentes.

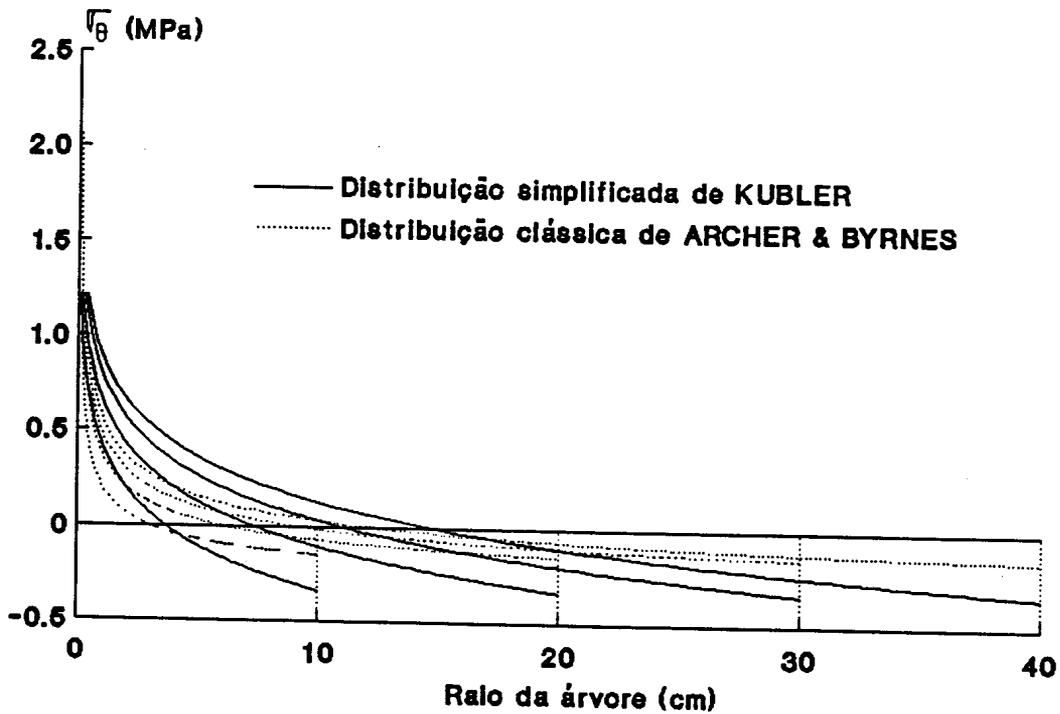
As diferenças que ocorrem nas periferias das árvores são devidas à simplicidade do modelo de KUBLER que negligencia a interdependência entre os componentes de tensão de crescimento e portanto não considera o estado plano de tensão que aí existe. Entretanto, verificou-se que mesmo que se corrijam estas diferenças, com a adoção do valor calculado em (4.13b), os modelos não se aproximam satisfatoriamente para os pontos mais internos, embora condenem plenamente quanto aos sinais das tensões.

A Fig. 4.4(b) mostra a diferença entre os dois modelos no contorno da medula de uma árvore de 80 cm de diâmetro onde também produzem deformações por tração da ordem de 5,37 por mil, maiores portanto do que a capacidade de deformações do material que para esse caso é, conforme (4.6c), da ordem de 3,43 por mil.

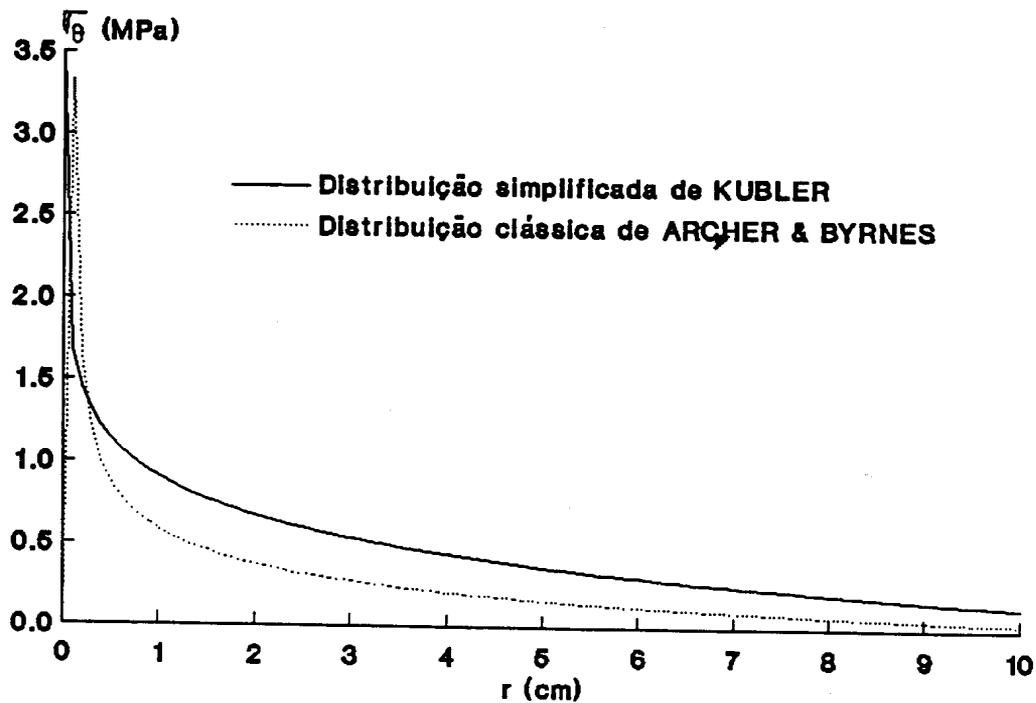
#### 4.4.3 Longitudinais ( $\sigma_z$ )

A Fig. 4.5(a) obtida das equações (2.31a) de KUBLER e (2.68c) de ARCHER & BYRNES mostra que os dois modelos são perfeitamente coincidentes na predição das tensões longitudi-

nais, mas também diferem ligeiramente no contorno da medula onde se observam em qualquer dos dois casos, valores exageradamente altos dessas tensões.



(a)



(b)

Figura 4.4 Distribuições de tensões tangenciais em 4 árvores de *Eucalyptus grandis* (a) e singularidades centrais ampliadas para a árvore de 40 cm de raio (b)

A Fig. 4.5(b) mostra que qualquer destes dois modelos prediz na região central da árvore de 40 cm de raio, deformação da ordem de  $11,82 \mu\epsilon$  por mil, portanto bem acima do valor 2,19 observado em (4.6a).

Alguns autores concordam que as regiões centrais das árvores, principalmente as mais grossas, possam estar já esmagadas pela intensa compressão, mas deve-se ressaltar então que neste caso as tensões não podem chegar aos valores preditos de até 108 MPa.

A excelente aderência entre estes dois modelos indica que a condição de ortotropia cilíndrica imposta por ARCHER & BYRNES pode ser relaxada pelo menos para o *Eucalyptus grandis* e no caso de considerar-se o tronco desta árvore como um corpo transversalmente isótropo, como aliás foi admitido por KUBLER, têm-se

$$E_r = E_\theta$$

$$\nu_{zr} = \nu_{z\theta}$$

$$\nu_{rz} = \nu_{\theta z}$$

e portanto, da equação (2.36)

$$\lambda = 1$$

Estas simplificações reduzem as equações (2.66) a

$$\sigma_r = \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] \int_r^R S_{A(B)} dB \quad (4.15a)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)E_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} + \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] \int_r^R S_{A(B)} dB \quad (4.15b)$$

$$\sigma_Z = -\alpha_Z E_Z - \nu_{Z\theta} \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z}} + 2\nu_{ZR} \int_r^R S_{A(B)} dB + E_Z \int_r^R \varepsilon_{A(B)} dB \quad (4.15c)$$

O termo  $\varepsilon_{A(B)}$  dado pelas equações (2.63) e (2.64) transforma-se, pela condição de isotropia transversal, em

$$\varepsilon_{A(B)} = \frac{2\alpha_Z}{B}$$

e o termo  $S_{A(B)}$  obtido pelas equações (2.65) transforma-se em

$$S_{A(B)} = \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{B (1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})}$$

Estas duas equações em (4.15), fornecem

$$\sigma_r = \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] \int_r^R \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{B (1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} dB \quad (4.16a)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{(1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} + \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] \int_r^R \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{B (1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} dB \quad (4.16b)$$

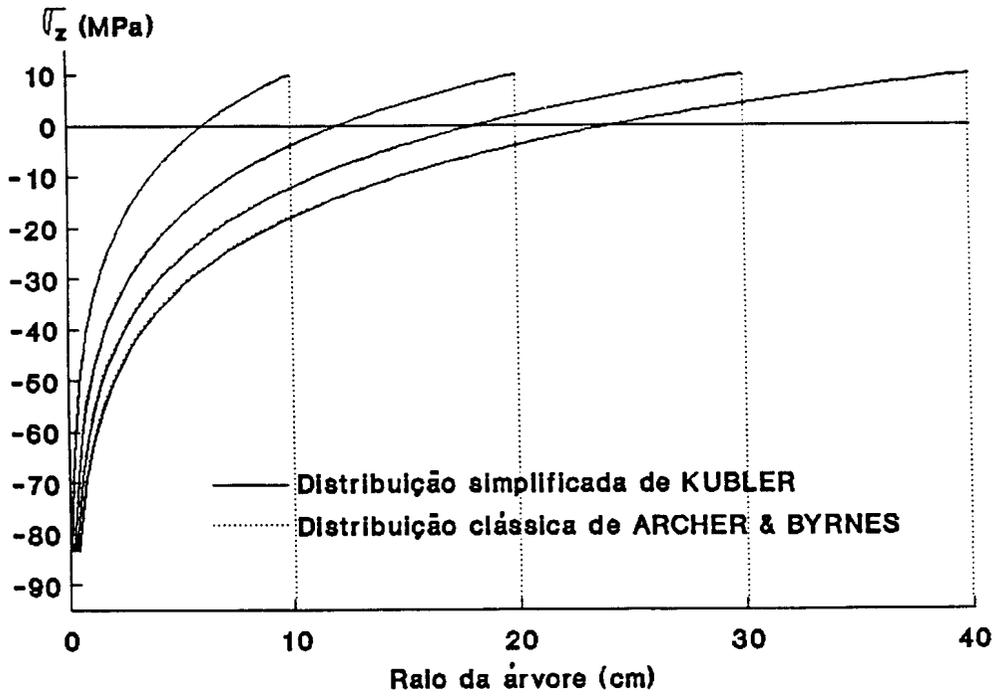
$$\sigma_Z = -\alpha_Z E_Z - \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{(1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} + 2\nu_{ZR} \int_r^R \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{B (1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} dB + E_Z \int_r^R \frac{2\alpha_Z}{B} dB \quad (4.16c)$$

que integradas, resultam

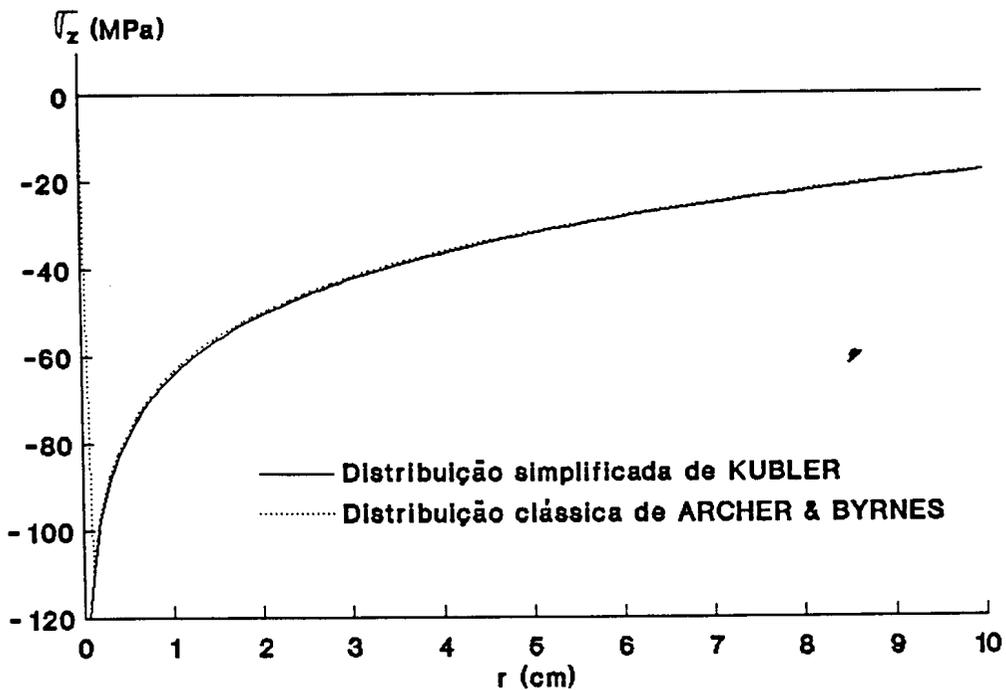
$$\sigma_r = \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{(1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] [\ln B]_r^R$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{(1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] [\ln B]_r^R \right\}$$

$$\sigma_Z = -\alpha_Z E_Z - \nu_{Z\theta} \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{(1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} + 2\nu_{ZR} \frac{(\nu_{Z\theta} \alpha_Z + \alpha_\theta) E_\theta}{(1 - \nu_{Z\theta} \nu_{\theta Z})} [\ln B]_r^R + 2E_Z \alpha_Z [\ln B]_r^R$$



(a)



(b)

Figura 4.5 Distribuições de tensões longitudinais em 4 árvores de *Eucalyptus grandis* (a) e singularidades centrais ampliadas para a árvore de 40 cm de raio (b)

Substituindo os limites de integração obtêm-se finalmente, as componentes da tensão de crescimento para o caso de material transversalmente isotrópico, as quais são

$$\sigma_r = -\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)E_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{R} \quad (4.17a)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)E_\theta}{(1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z})} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{R} \right\} \quad (4.17b)$$

$$\sigma_z = \left( -\alpha_z E_z - \nu_{z\theta} \frac{(\nu_{z\theta}\alpha_z + \alpha_\theta)E_\theta}{1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}} \right) \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{R} \right) \quad (4.17c)$$

Estas expressões também podem ser expressas, de acordo com as equações (2.23) e (2.49), em termos de tensões, como mais comumente o assunto é tratado na literatura. Neste caso elas se transformam em

$$\sigma_r = \sigma_{\theta p} \left[ 1 - \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{R} \quad (4.18a)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta p} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left( \frac{A}{r} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{R} \right\} \quad (4.18b)$$

$$\sigma_z = \sigma_{z p} \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{R} \right) \quad (4.18c)$$

A comparação destas equações (4.18) com as equações (2.31) mostra claramente que o modelo de KUBLER é um caso particular do modelo de ARCHER & BYRNES e que as diferenças entre eles serão maiores quanto maiores forem os afastamentos de  $\lambda$  do valor 1.

O valor de  $\lambda$  obtido para o *Eucalyptus grandis* em estudo neste trabalho foi de 0.8758, explicando portanto a boa aproximação entre os dois modelos, vista na Fig. 4.5.

Entretanto, independentemente do valor de  $\lambda$  quase sempre desconhecido, muitos pesquisadores negligenciam a influência das componentes transversais, na componente longitudinal da tensão de crescimento.

Os próprios autores testaram um valor de  $\lambda = 0.709$  obtido para a espécie *Red Beech* e encontraram um maior afastamento, porém, também apenas na região central da árvore e admitiram finalmente que o modelo de KUBLER é suficientemente preciso, a menos da singularidade central, para prever a componente longitudinal da tensão de crescimento.

Sendo assim, tomou-se o modelo de KUBLER como padrão o qual será constantemente enfocado no decorrer deste trabalho.

A Fig. 4.6(a) mostra a distribuição radial de tensões longitudinais dada pelas equações (2.72) de GILLIS & HSU, na qual adotou-se  $\frac{A}{R} = 0.1$  comparada com a tradicional equação (2.31a) de KUBLER.

Observa-se que há uma grande discrepância entre os dois modelos na região central sendo que nesta região o primeiro modelo apresenta um gradiente de tensão muito mais acentuado. Esta pronunciada variação de tensões provoca, como se pode ver na Fig. 2.32, uma exagerada curvatura dos sarrafos mais interiores da tora.

Entretanto, o modelo do GILLIS & HSU prevê uma estabilidade, por plastificação, das tensões na região da medula, que depende da relação  $\frac{A}{R}$ .

Para  $\frac{A}{R}$  muito pequeno as tensões mesmo no regime plástico são muito grandes como se pode observar na Fig. 4.6(a) e para  $\frac{A}{R}$  muito grande estas tensões diminuem para valores compatíveis, mas o raio da medula plastificada torna-se também igualmente grande.

A Fig. 4.6(b) foi obtida das equações (2.31a) de KUBLER e (2.81) de POST tomando-se como deformação específica no limite de proporcionalidade para o *Eucalyptus grandis* o valor ensaiado  $\epsilon_p = 0,00332$ , o qual pode ser verificado na Fig. 4.1(a).

A parte não linear da teoria de POST explicada pelas equações (2.82 e 2.83) foi ajustada para o *Eucalyptus grandis* com as seguintes equações

$$E_z = \frac{86}{(\text{def} - 0.0026)^{0,9}} \quad (4.19a)$$

$$E_z = 656(\text{def} - 0.0026)^{0,1} \quad (4.19b)$$

Observa-se que estas equações resolvem, numa distribuição praticamente idêntica à de KUBLER, o problema da singularidade central.

Entretanto, tal como nos casos anteriores, admitiu-se para plotar a curva de POST que o módulo de elasticidade e também a tensão de crescimento não variaram ao longo da vida da árvore. Este fato significou transformar-se a equação (2.81) em

$$\epsilon_n = \frac{A_{n+1} E \epsilon_z}{A_1 E + \sum_{l=2}^{n+1} A_l E} \quad (4.20)$$

Adaptando-se os termos desta equação à Fig. 2.3 com as seguintes analogias

$$E \epsilon_n = d\sigma_z$$

$$E \epsilon_z = \sigma_z p$$

$$A_{n+1} = 2\pi r dr$$

$$A_1 + \sum_{l=2}^{n+1} A_l = \pi r^2$$

ela se transforma em

$$d\sigma_z = 2\sigma_z p \frac{dr}{r} \quad (4.21)$$

que é a mesma equação (2.30b) deduzida por KUBLER no equilíbrio da seção transversal da árvore. Esta constatação explica a boa aproximação entre estes dois modelos na região não próxima da medula.

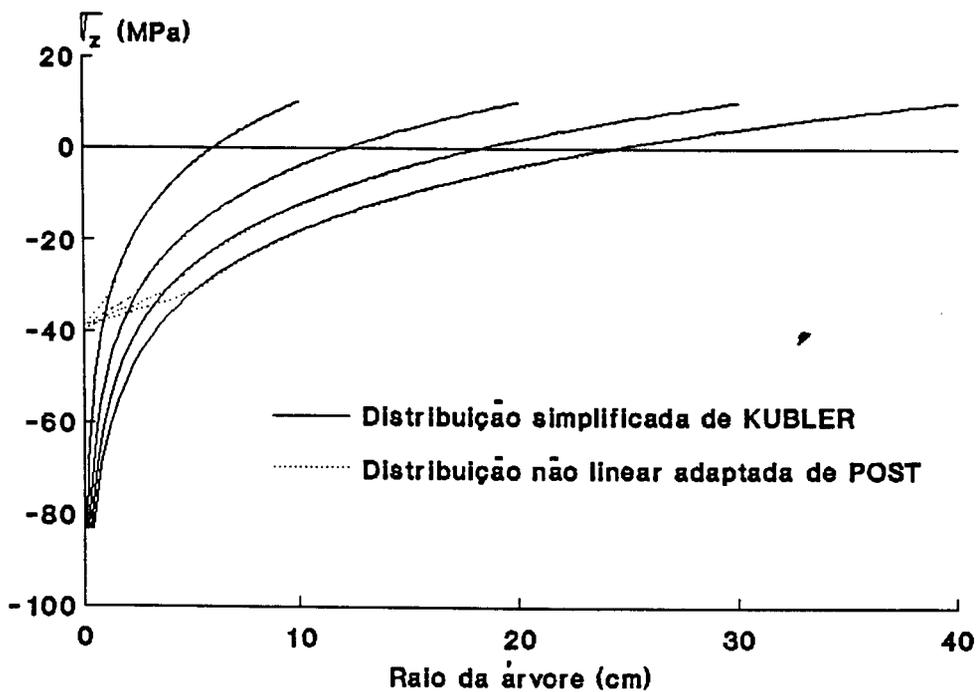
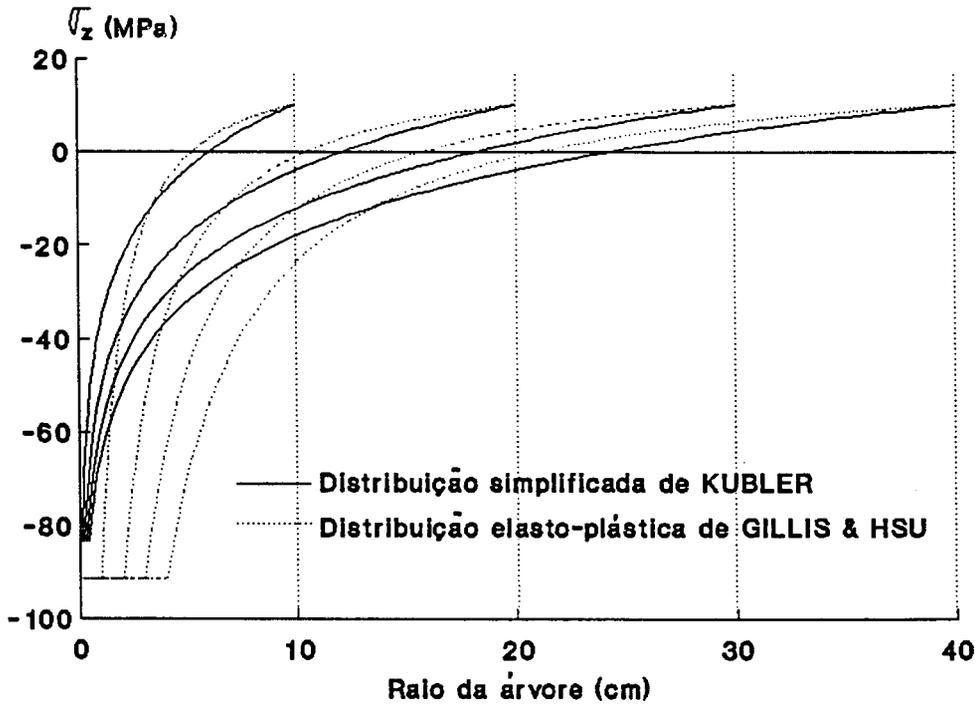
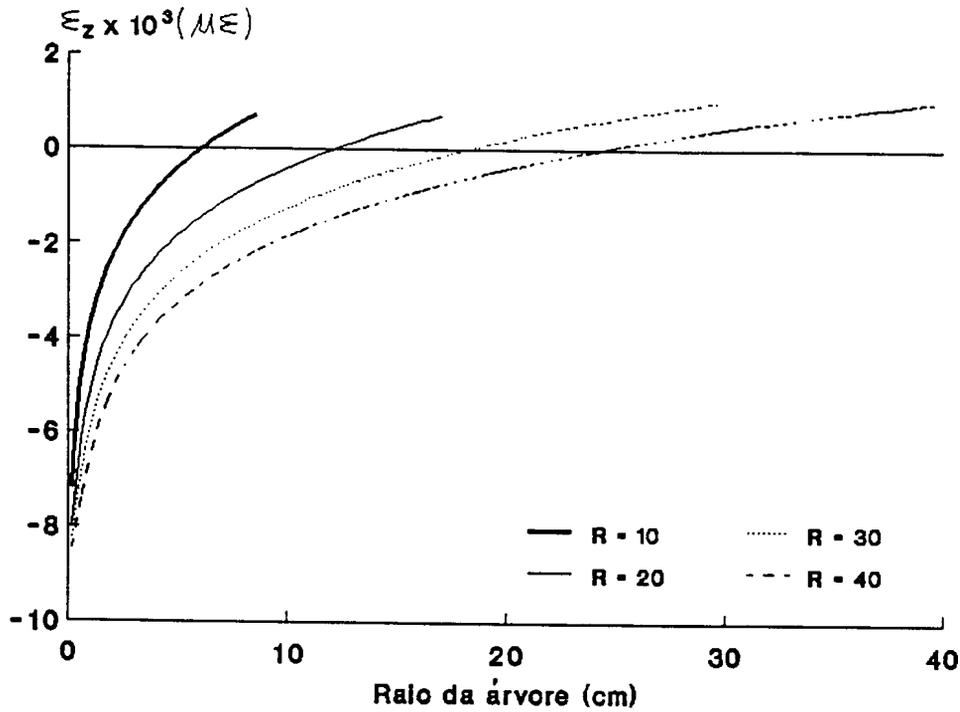
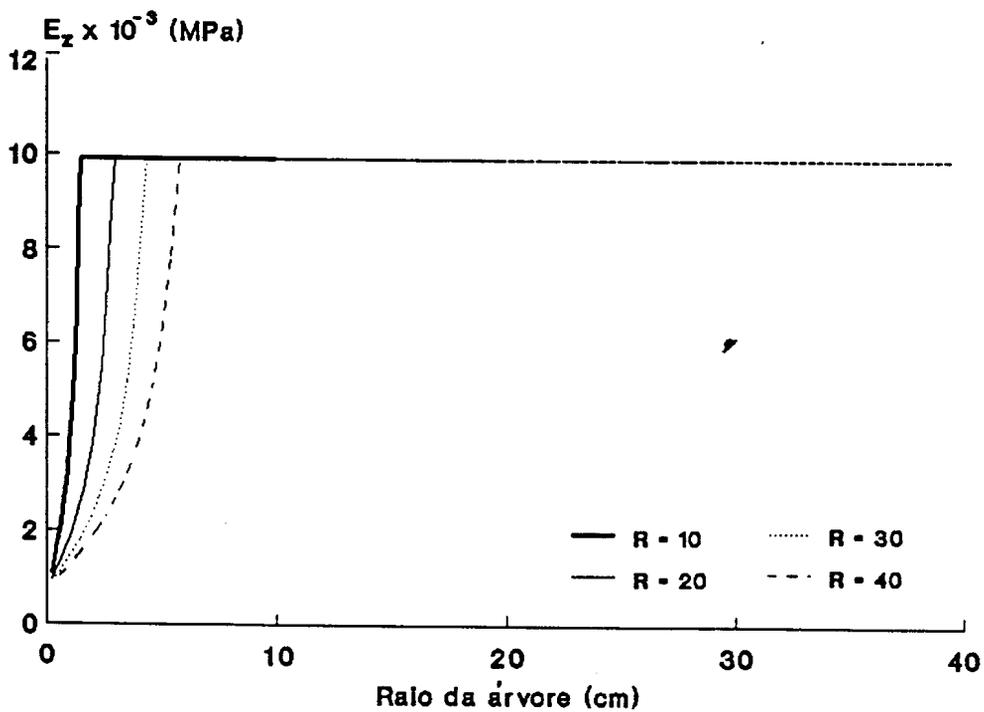


Figura 4.6 Distribuições de tensões longitudinais em 4 árvores de *Eucalyptus grandis* supostamente oriundas de um mesmo estado linear de tensões



(a)



(b)

Figura 4.7 Distribuições das deformações específicas longitudinais (a) e dos módulos de elasticidade (b) determinados pelo modelo de POST para o *Eucalyptus grandis*

Foi observado que quanto maior o número de incrementos utilizados no modelo de POST, mais ele se aproxima do modelo mais simplificado de KUBLER.

É importante observar também que o modelo de POST (1979) prevê uma estabilização das tensões próximas à medula mas não das deformações, as quais podem ser observadas na Fig. 4.7(a). A compensação é feita pela diminuição do módulo de elasticidade, por plastificação da madeira nesta região, como se pode ver na Fig. 4.7(b).

Do ponto de vista da resistência da madeira este modelo apresenta na região da medula, valores de tensões mais próximos do real.

#### 4.5 Novos modelos de distribuição de tensões na tora

Com relação aos modelos apresentados anteriormente, observaram-se algumas anormalidades que impedem a aceitação total das teorias propostas.

O modelo de KUBLER apresenta uma grave singularidade no eixo da tora. O modelo de GILLIS & HSU apresenta uma brusca transição entre a região plastificada e a região elástica e a sua comprovação experimental conferiu-lhe uma consistência apenas parcialmente aceitável.

O modelo de POST, aparentemente mais realista, exige um acompanhamento histórico da vida da árvore e resolve o problema da singularidade central através de duas equações empíricas e ainda pouco conhecidas. A sua comprovação experimental, onde POST considerou como sendo zero o módulo de elasticidade na região da medula também não foi, talvez por falta de dados históricos, muito boa.

Os demais modelos são matematicamente mais completos, mas pouco diferem do modelo simplificado de KUBLER. O modelo de ARCHER & BYRNES resolve o problema de singularidade na região da medula admitindo uma região central incapaz de absorver carga e o de GILLIS, um pouco mais consistente neste aspecto, admite que o cilindro central tem as mesmas características que o resto da tora, apenas formado inicialmente sem carga.

Verifica-se portanto que todos os modelos teóricos anteriores apresentam na região da medula, um problema de singularidade não ou insatisfatoriamente resolvido.

Verificou-se também que esta singularidade surge do fato de que todas as deduções anteriores admitem que todo o material já formado, se encurtam de uma mesma quantidade, devida à compressão imposta pela contração da camada periférica.

Admitindo-se que este fato não ocorre na prática, deduziu-se a seguir, dois modelos bastante simplificados e assentados sobre bases plenamente concebíveis. Mais adiante eles serão comparados com alguns dos modelos obtidos na literatura, utilizados para prognoses de deslocamentos e comparados com dados experimentais.

#### 4.5.1 Parabólico

A hipótese adotada neste caso é a de que as tensões longitudinais oriundas da tensão de crescimento se distribuem parabolicamente ao longo do raio da árvore e estão sujeitas às seguintes condições de contorno

$$a + bR + cR^2 = \sigma_{zp} \quad (4.22a)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^A (a + br + cr^2) r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_A^R (a + br + cr^2) r dr d\theta = 0 \quad (4.22b)$$

$$a = -\sigma_c \quad (4.22c)$$

onde:

$\sigma_c$  = tensão no limite de resistência à compressão paralela

A = raio de transição da compressão interna para a tração externa

Resolvendo-se este sistema de equações chegou-se ao seguinte modelo teórico

$$\sigma_z = -\sigma_c + 3(\sigma_c - \sigma_{zp}) \frac{r}{R} + (4\sigma_{zp} - 2\sigma_c) \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (4.23)$$

Observa-se que neste caso o ponto de transição não é fixo e depende da tensão longitudinal periférica e também do limite de resistência à compressão paralela. O seu valor é determinado pela seguinte equação

$$\frac{r}{R} = \frac{-3(\sigma_c - \sigma_{zp}) + \sqrt{\sigma_c^2 + 9\sigma_{zp}^2 - 2\sigma_c\sigma_{zp}}}{8\sigma_{zp} - 4\sigma_c} \quad (4.24)$$

Este modelo é, como será visto adiante, bastante versátil podendo-se substituir o valor  $\sigma_c$  por qualquer outro valor desejado na região da medula, por exemplo a tensão de compressão no limite de proporcionalidade.

#### 4.5.2 Linear

A hipótese adotada neste caso é a de que as tensões de crescimento se distribuem linearmente no raio da árvore e sujeitas às seguintes condições de contorno

$$a + bR = \sigma_{zp} \quad (4.25a)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^A (a + br) r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_A^R (a + br) r dr d\theta = 0 \quad (4.25b)$$

Resolvendo-se este sistema de equações chegou-se ao seguinte modelo teórico, bastante simples

$$\sigma_z = \sigma_{zp} \left( -2 + 3 \frac{r}{R} \right) \quad (4.26)$$

Observa-se que para  $\sigma_z = 0$  a relação  $\frac{r}{R}$  é igual a 0,66; exatamente  $\frac{2}{3}$  do raio como já admitido por muitos pesquisadores. No caso do modelo de KUBLER (1959) esta mesma relação é de 0.61.

#### 4.6 Comparações dos modelos teóricos propostos com alguns modelos teóricos anteriores

A Fig. 4.8 mostra o modelo parabólico proposto dado pela equação (4.23) tomando-se para  $\sigma_c$  o valor de 30 MPa e o modelo tradicional de KUBLER dado pela equação (2.31a). Observa-se que a maior ou menor concordância entre estes dois modelos depende do valor adotado para  $\sigma_c$  e que, na região da medula, o primeiro resolve com facilidade o problema da singularidade apresentada pelo segundo.

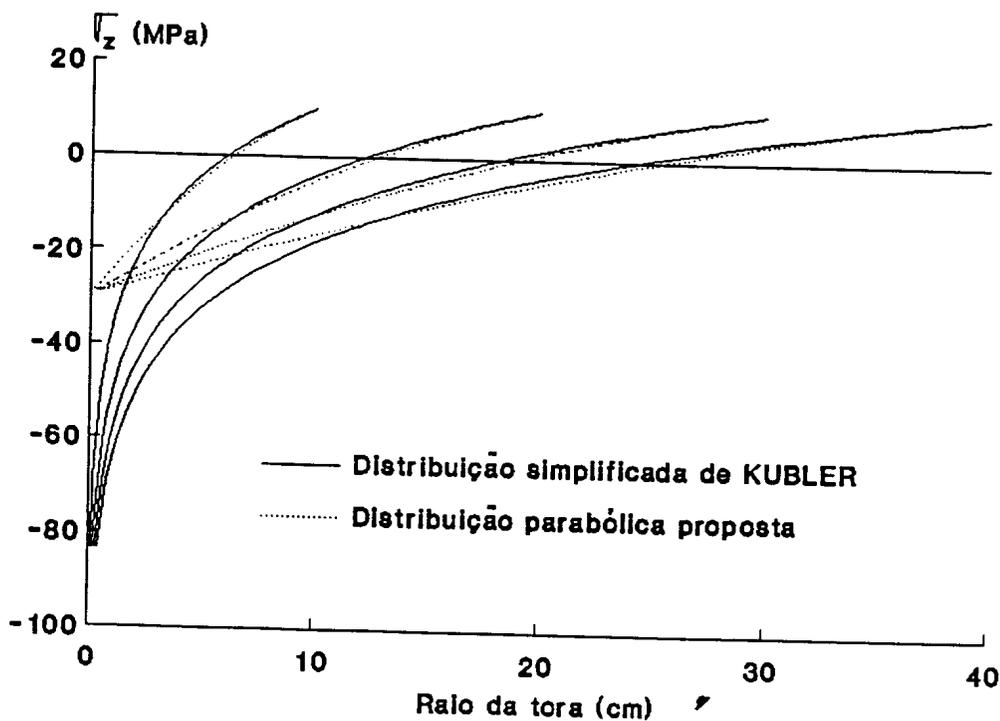


Figura 4.8 Modelo parabólico proposto que depende de  $\sigma_{zp}$  e  $\sigma_c$  X modelo simplificado de KUBLER que depende de  $\sigma_{zp}$

A Fig. 4.9 mostra o modelo linear proposto dado pela equação (4.26) comparado também com o mesmo modelo de KUBLER.

Verifica-se, da análise das figuras 4.8 e 4.9 e das equações (4.23) e (4.26), que para o caso particular onde  $\sigma_c = 2\sigma_{zp}$  o modelo parabólico se degenera, transformando-se exatamente no modelo linear.

A Fig. 4.10 mostra a distribuição parabólica proposta comparada ao modelo numérico de

POST adaptado ao *Eucalyptus grandis* pelas equações (4.19).

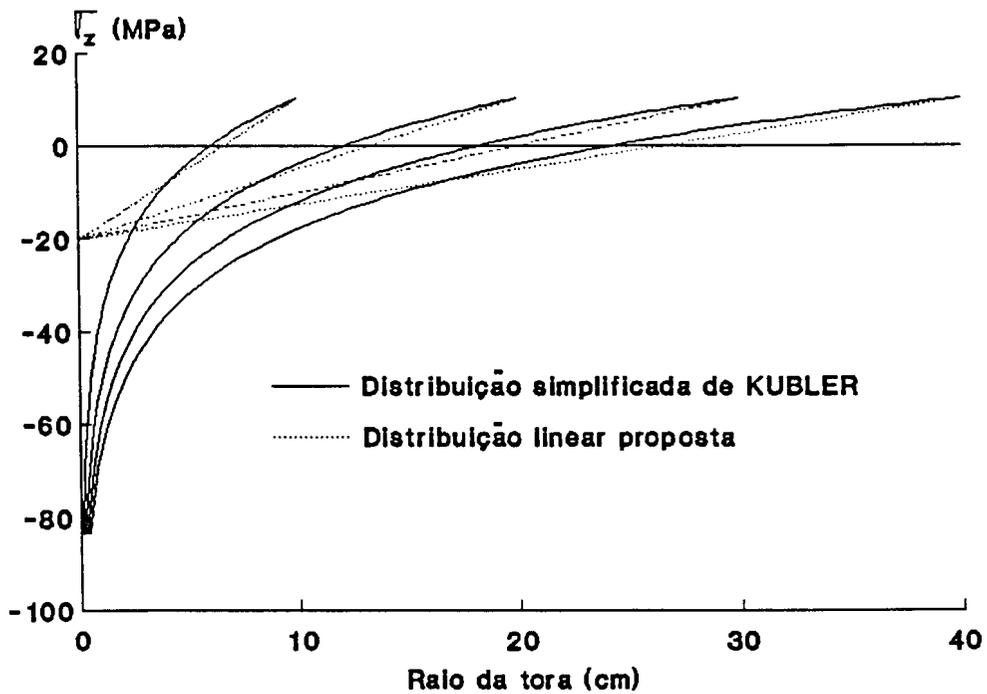


Figura 4.9 Modelo linear proposto X modelo simplificado de KUBLER, ambos dependentes de apenas  $\sigma_{zp}$

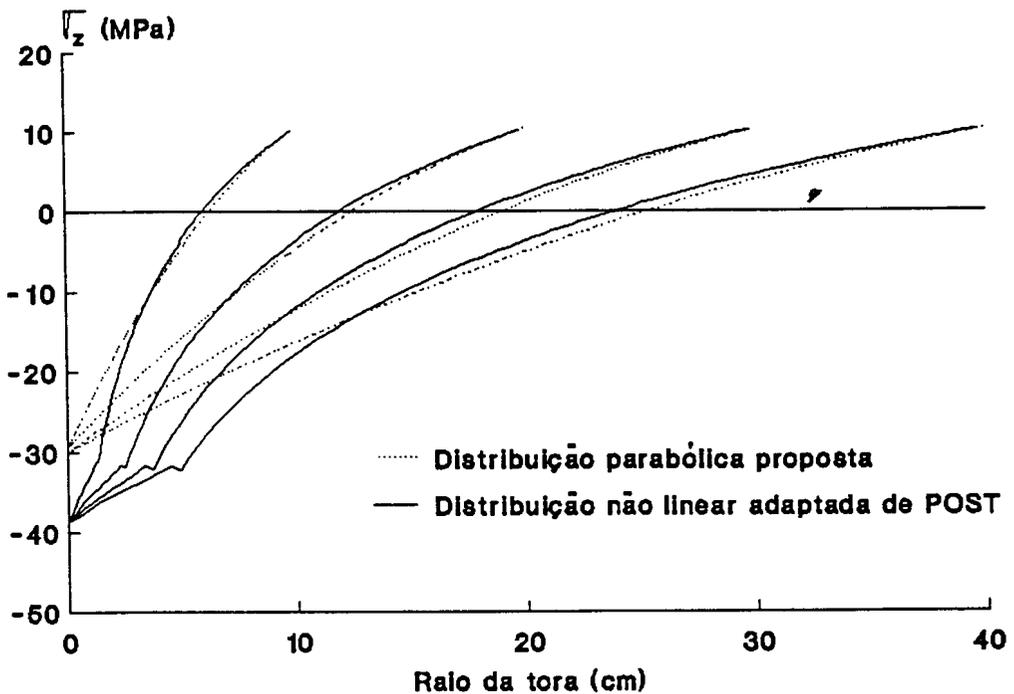


Figura 4.10 Distribuições de tensões longitudinais em 4 árvores de *Eucalyptus grandis* supostamente oriundas de um mesmo estado linear de tensão

Pode-se admitir que as diferenças entre estes dois modelos se restringem às regiões das medulas, sendo que estas diferenças podem ser sensivelmente minimizadas por pequenas alterações nas constantes das equações (4.19) e no valor de  $\sigma_c$  da equação (4.23).

Entretanto, estas alterações não foram executadas e nem julgadas de interesse imediato, porque o modelo numérico de POST mostrando-se ser de difícil aplicação prática, acabou por ser abandonado.

#### 4.6.1 Comprovação experimental

Aproveitando-se os dados experimentais de POST (1979), relacionados na Tab. 2.3, plotou-se a Fig. 4.11 a qual mostra o ajuste das equações (2.31a) de KUBLER e (4.23) e (4.26) propostas, em relação às observações práticas.

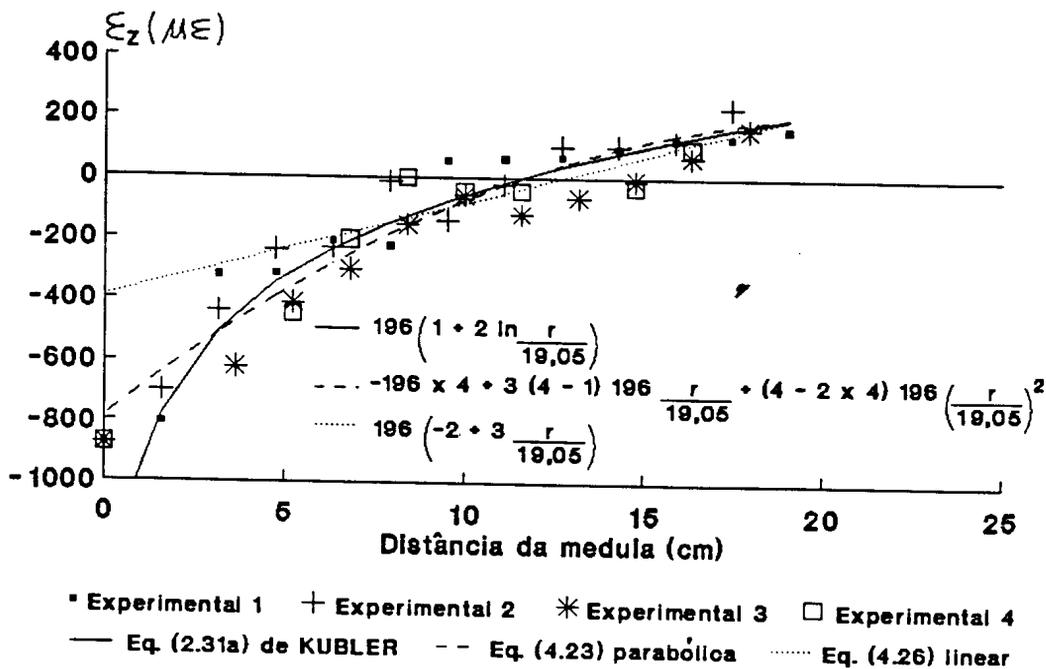


Figura 4.11 Deformações específicas teóricas e experimentais determinadas para uma tora de *Frazinus americana*

Observa-se nesta figura um excelente comportamento do modelo parabólico proposto na

predição das deformações específicas longitudinais confinadas na tora, as quais se manifestarão, provocando um campo de deslocamento, quando esta tora for convertida em sarrafos.

#### 4.7 Distribuições de tensões na madeira serrada

##### 4.7.1 Na prancha diametral

Para a distribuição de tensões longitudinais numa prancha diametral de pequena espessura, foi admitida a equação

$$\sigma_Z^P = \sigma_Z + E_Z \varepsilon_{ZR}^P \quad (4.27)$$

onde

$\sigma_Z^P$  = tensão longitudinal na prancha diametral

$\sigma_Z$  = tensão longitudinal que existia na tora, dada por qualquer um dos modelos vistos anteriormente

$\varepsilon_{ZR}^P$  = acréscimo de deformação que surge na prancha devido à redistribuição da tensão original

$E_Z$  = módulo de elasticidade na direção longitudinal

Esta equação deve ser tal que satisfaça à seguinte condição de equilíbrio

$$\int_0^R \sigma_Z^P dr = 0 \quad (4.28)$$

Substituindo agora a equação (4.27) em (4.28) e procedendo a integração, obtém-se para o caso de considerar-se  $\varepsilon_{ZR}^P$  constante

$$\varepsilon_{ZR}^P = -\frac{1}{E_Z R} \int_0^R \sigma_Z dr \quad (4.29)$$

Verifica-se portanto nesta equação que a distribuição de tensões na prancha diametral, depende daquela adotada para a tora. Os três casos, julgados de maiores interesses práticos são deduzidos a seguir.

#### 4.7.1.1 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição de KUBLER

Substituindo a equação (2.31a), na equação (4.29) obtém-se

$$\varepsilon_{zr}^p = -\frac{1}{E_z R} \int_0^R \sigma_{zp} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{R}\right) dr \quad (4.30)$$

a qual fornece pela integração

$$\varepsilon_{zr}^p = \frac{\sigma_{zp}}{E_z} \quad (4.31)$$

Substituindo agora as equações (2.31a) e (4.31) em (4.27) e efetuando as simplificações possíveis, obtém-se a seguinte distribuição de tensões na prancha diametral.

$$\sigma_z^p = 2\sigma_{zp} \left(1 + \ln \frac{r}{R}\right) \quad (4.32)$$

Esta equação mostra que a tensão medida na borda da prancha diametral é o dobro daquela medida na periferia da tora.

#### 4.7.1.2 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição parabólica proposta

Tendo em vista a equação (4.23), a equação (4.29) se transforma em

$$\varepsilon_{zr}^p = -\frac{1}{E_z R} \int_0^R \left[ -\sigma_c + 3(\sigma_c - \sigma_{zp}) \frac{r}{R} + (4\sigma_{zp} - 2\sigma_c) \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] dr \quad (4.33)$$

donde obtém-se pela integração

$$\varepsilon_{zr}^p = \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_c - \frac{3(\sigma_c - \sigma_{zp})}{2} - \frac{4\sigma_{zp} - 2\sigma_c}{3} \right] \quad (4.34)$$

Fazendo a substituição desta e também da equação (4.23) na equação na (4.27) obtém-se a segunda distribuição de tensões na prancha diametral

$$\sigma_z^p = \frac{\sigma_{zp} - 5\sigma_c}{6} + 3(\sigma_c - \sigma_{zp}) \frac{r}{R} + (4\sigma_{zp} - 2\sigma_c) \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (4.35)$$

Neste caso a relação entre a tensão medida na borda da prancha e a tensão medida na periferia da tora depende da relação  $\frac{\sigma_c}{\sigma_{zp}}$

#### 4.7.1.3 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição linear proposta

Neste caso, substituindo-se a equação (4.26) na (4.29), esta se transforma em

$$\varepsilon_{zr}^p = -\frac{1}{E_z R} \int_0^R \left[ \sigma_{zp} \left( -2 + \frac{3}{R} r \right) \right] dr \quad (4.36)$$

a qual fornece pela integração em  $r$

$$\varepsilon_{zr}^p = \frac{\sigma_{zp}}{2E_z} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.26) e (4.37) em (4.27) chega-se facilmente à terceira equação de distribuição de tensões na prancha diametral

$$\sigma_z^p = 3\sigma_{zp} \left( \frac{r}{R} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.38)$$

Neste caso, observa-se que a tensão medida na borda da prancha é 1,5 vezes aquela medida na periferia da tora.

#### 4.7.1.4 Comprovação experimental

Para comparações entre estes casos bem como deles com as medições efetuadas por GUÉNEAU (1973) e POST (1979), montou-se a tabela 4.3, abaixo.

**Tabela 4.3** Relações  $\frac{\sigma_z^p}{\sigma_z^c}$

	amostra 1	amostra 2
pelos valores experimentais de GUÉNEAU	2,10	2,02
pelos valores experimentais de POST	1,78	1,79
pela equação (4.32)		2
pela equação (4.35)		(1,5 a 2,5)*
pela equação (4.38)		1,5

\* para  $\frac{\sigma_c}{\sigma_z^p}$  variando de 2 a 8

Observa-se nesta tabela que os modelos deduzidos para a distribuição de tensões numa prancha diametral são suficientes para predizer, pelo menos, a tensão na sua borda.

Para testar a hipótese adotada de que  $\varepsilon_z^p$  é constante em r plotou-se a Fig. 4.12, abaixo, a partir dos dados de POST (1979) que estão apresentados na Tab. 2.3. As distribuições teóricas foram baseadas nos seguintes parâmetros.

$$\alpha_z = \frac{\sigma_z^p}{E_z} = 196 \mu\varepsilon$$

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_z^p} = 4,0$$

Observa-se nesta figura que os acréscimos de deformações longitudinais aparentam crescer ligeiramente da medula para a casca, com diferença entre os extremos da ordem de 70  $\mu\varepsilon$ . Esta variação pode ter sido provocada pelos efeitos de extremidades que teoricamente

tendem a diminuir esses acréscimos de deformações nas regiões laterais e aumentá-los na região central da prancha.

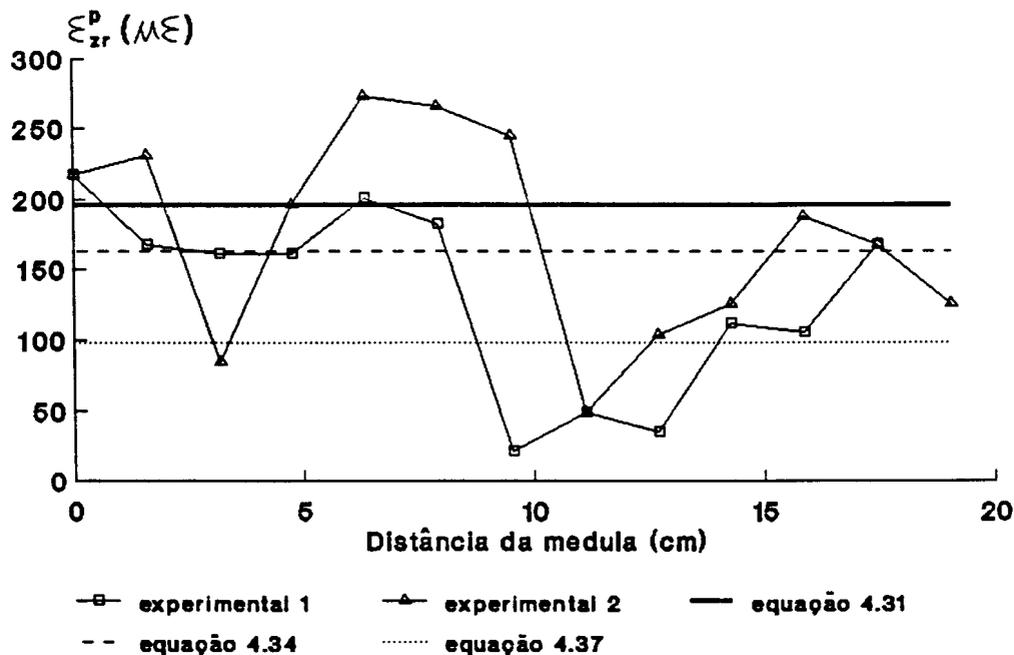


Figura 4.12 Acréscimos de deformações longitudinais que modificaram na prancha diametral as tensões originais da tora

Observam-se também algumas variações arbitrárias ao longo da semi largura da prancha sendo a máxima, da ordem de 200  $\mu\epsilon$ . Acredita-se que estas variações são consequência de erros experimentais, normalmente presentes nas medições de valores tão pequenos.

Aceitando estas hipótese de erros experimentais, as quais podem ser confirmadas na Fig. 4.13, admitir-se-á que a equação (4.34) representa muito bem a média das variações de deformações longitudinais que ocorrem na conversão tora-prancha diametral.

A Fig. 4.13 mostra as distribuições teóricas de deformações longitudinais na semi largura da prancha diametral comparadas aos dados experimentais também de POST (1979), apresentados na tabela 2.3. Nas equações pertinentes foram utilizados os seguintes parâmetros.

$$R = 19,05 \text{ cm}$$

$$\alpha_Z = \frac{\sigma_{ZP}}{E_Z} = 196 \mu\epsilon$$

$$\frac{\sigma_C}{\sigma_{ZP}} = 3,5$$

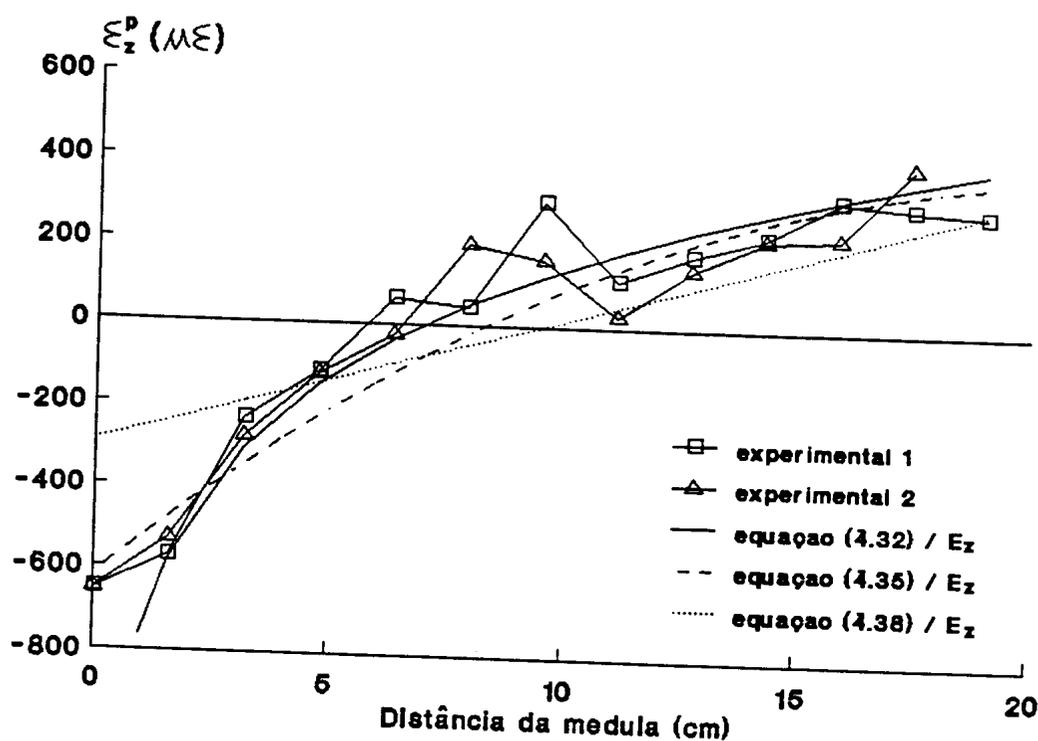


Figura 4.13 Distribuições teóricas das deformações longitudinais ( $\epsilon_z^P$ ) na prancha diametral comparadas com dados experimentais de POST (1979)

Observa-se nesta figura que as deformações longitudinais medidas na segunda metade da semi largura da prancha aparentam de fato estarem sub-valorizadas, ao contrário daquelas medidas na primeira metade.

Verificam-se também algumas variações arbitrárias, as quais podem ser perfeitamente entendidas como erros experimentais, muito provavelmente provenientes da figura anterior.

De qualquer maneira, as equações (4.32) e (4.35) são muito boas para predizerem as deformações longitudinais ao longo da semi largura de uma prancha diametral sendo de

destacar que a equação (4.35) originada da distribuição parabólica na tora é bastante versátil, podendo ser facilmente modificada com pequenas alterações na relação  $\frac{\sigma_c}{\sigma_{zp}}$ .

Efetuada-se várias comparações entre as distribuições de tensões na prancha diametral e as distribuições originais na tora, verificou-se que as curvas são defasadas, no máximo, do valor  $\sigma_{zp}$ , mas são praticamente paralelas.

Este fato indica portanto, que um sarrafo retirado da prancha deve ter a mesma curvatura que um similar retirado diretamente da tora, diferindo entre si apenas nos deslocamentos axiais. Este fato será equacionado matematicamente a seguir.

#### 4.7.2 No sarrafo

##### 4.7.2.1 Obtido da prancha diametral

Para a distribuição de tensões num sarrafo, como o da Fig. 4.14, obtido da prancha diametral adotou-se a seguinte equação adaptada da equação (2.91) de GILLIS & HSU (1979)

$$\sigma_z^s = \sigma_z^p + E_z \varepsilon_{zr}^s + E_z K \left( r - d - \frac{h}{2} \right) \quad (4.39)$$

onde

$\sigma_z^s$  = tensão longitudinal no sarrafo

$\sigma_z^p$  = tensão longitudinal que existia na prancha

$\varepsilon_{zr}^s$  = acréscimo de deformação que surge no sarrafo pela redistribuição das tensões originais que existia na prancha

$K$  = curvatura do sarrafo

Esta equação deve ser tal que satisfaça a duas condições de equilíbrio, uma de força e uma de momento, as quais podem ser matematicamente representadas por

$$\int_d^{d+h} \sigma_z^S dr = 0 \quad (4.40a)$$

$$\int_d^{d+h} \sigma_z^S r dr = 0 \quad (4.40b)$$

Integrando agora estas duas equações, obtêm-se a deformação normal adicionada e a curvatura do sarrafo ambas em função, apenas, da distribuição de tensões na prancha diametral.

$$\varepsilon_{zr}^S = -\frac{1}{E_z h} \int_d^{d+h} \sigma_z^P dr \quad (4.41a)$$

$$K = -\frac{12}{Eh^2} \left( d + \frac{h}{2} \right) E_z \varepsilon_{zr}^S - \frac{12}{Eh^3} \int_d^{d+h} \sigma_z^P r dr \quad (4.41b)$$

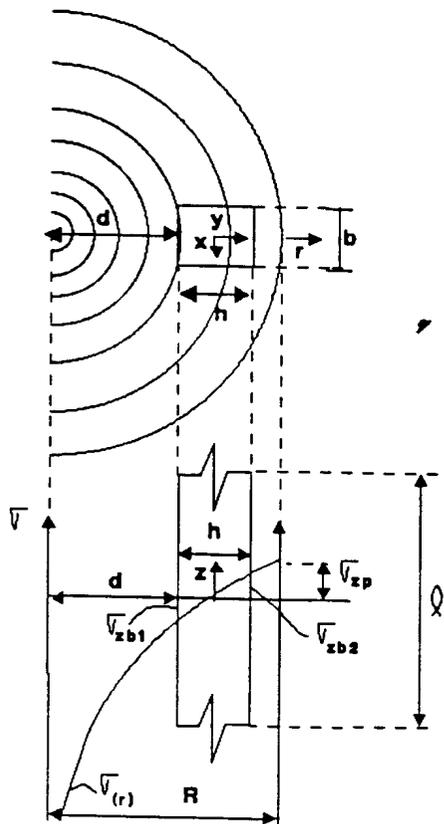


Figura 4.14 Sarrafo orientado segundo os três eixos principais de elasticidade

#### 4.7.2.1.1 Para $\sigma_z^P$ obtida de uma distribuição de KUBLER na tora

Substituindo a equação (4.32) nas equações (4.41) e procedendo as integrações obtêm-se

$$\varepsilon_{zr}^S = -\frac{2\sigma_{zp}}{E_z h} \left[ (d+h) \ln \frac{d+h}{R} - d \ln \frac{d}{R} \right] \quad (4.42a)$$

$$K = -\frac{12\sigma_{zp}}{E_z h^3} \left[ -dh - \frac{h^2}{2} + (d^2 + dh) \ln \frac{d+h}{R} - (d^2 + dh) \ln \frac{d}{R} \right] \quad (4.42b)$$

Substituindo estas duas equações na (4.39) obtêm-se a tensão procurada

$$\begin{aligned} \sigma_z^S = 2\sigma_{zp} \left\{ 1 + \ln \frac{r}{R} - \frac{1}{h} \left[ (d+h) \ln \frac{d+h}{R} - d \ln \frac{d}{R} \right] + \right. \\ \left. + \frac{6}{h^3} \left[ -dh - \frac{h^2}{2} + (d^2 + dh) \ln \frac{d+h}{R} - (d^2 + dh) \ln \frac{d}{R} \right] \left( r - d - \frac{h}{2} \right) \right\} \quad (4.43) \end{aligned}$$

#### 4.7.2.1.2 Para $\sigma_z^P$ obtida de uma distribuição parabólica na tora

Procedimento análogo ao do item anterior tomando-se para  $\sigma_z^P$  a equação (4.35), fornece

$$\varepsilon_{zr}^S = -\frac{1}{E_z} \left[ \frac{\sigma_{zp} - 5\sigma_c}{6} + 3(\sigma_c - \sigma_{zp}) \frac{2d+h}{2R} + (4\sigma_{zp} - 2\sigma_c) \frac{3d^2 + 3dh + h^2}{3R^2} \right] \quad (4.44a)$$

$$K = -\frac{3}{E_z} \left[ \frac{\sigma_c - \sigma_{zp}}{R} + (4\sigma_{zp} - 2\sigma_c) \frac{2d+h}{3R^2} \right] \quad (4.44b)$$

$$\sigma_z^S = \frac{4\sigma_{zp} - 2\sigma_c}{R^2} \left[ d^2 + dh + \frac{h^2}{6} - (2d+h)r + r^2 \right] \quad (4.44c)$$

#### 4.7.2.1.3 Para $\sigma_z^P$ obtida de uma distribuição linear na tora

Repetindo o procedimento anterior, tomando para  $\sigma_z^P$  a equação (4.38), obtêm-se

$$\varepsilon_{zr}^S = -\frac{3\sigma_{zp}}{2E_z} \left( \frac{2d+h}{R} - 1 \right) \quad (4.45a)$$

$$K = -\frac{3\sigma_{zp}}{E_z R} \quad (4.45b)$$

$$\sigma_z^S = 0 \quad (4.45c)$$

#### 4.7.2.2 Obtido diretamente da tora

Para resolver este caso, transformou-se (4.39) na seguinte a equação

$$\sigma_z^S = \sigma_z + E_z \varepsilon_{zr}^S + E_z K \left( r - d - \frac{h}{2} \right) \quad (4.46)$$

onde

$\sigma_z$  = distribuição de tensão que existia na tora

Integrando-a agora, para atender as condições de equilíbrio dadas pelas equações (4.40), obtêm-se

$$\varepsilon_{zr}^S = -\frac{1}{E_z h} \int_d^{d+h} \sigma_z dr \quad (4.47a)$$

$$K = -\frac{12}{E_z h^2} \left( d + \frac{h}{2} \right) E_z \varepsilon_{zr}^S - \frac{12}{E_z h^3} \int_d^{d+h} \sigma_z r dr \quad (4.47b)$$

Haverá portanto, uma distribuição de tensões no sarrafo para cada uma das distribuições adotada na tora.

Observou-se entretanto que a curvatura ( $K$ ) e a distribuição de tensões no sarrafo ( $\sigma_z^s$ ) são as mesmas obtidas para o caso do sarrafo ser retirado da prancha diametral. Foram constatadas diferenças somente nos incrementos de deformações específicas normais.

#### 4.7.2.2.1 Para $\sigma_z$ dada por KUBLER

$$\epsilon_{zr}^s = -\frac{2\sigma_{zp}}{E_z h} \left[ -\frac{h}{2} + (d+h) \ln \frac{d+h}{R} - d \ln \frac{d}{R} \right] \quad (4.48)$$

#### 4.7.2.2.2 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição parabólica proposta

$$\epsilon_{zr}^s = -\frac{1}{E_z} \left[ -\sigma_c + 3(\sigma_c - \sigma_{zp}) \frac{2d+h}{2R} + (4\sigma_{zp} - 2\sigma_c) \frac{3d^2 + 3dh + h^2}{3R^2} \right] \quad (4.49)$$

#### 4.7.2.2.3 Para $\sigma_z$ dada pela distribuição linear proposta

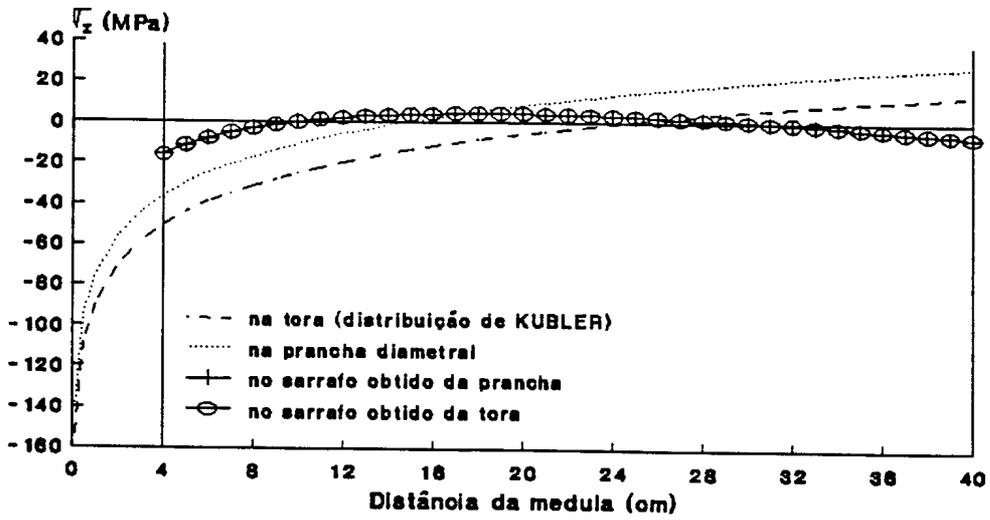
$$\epsilon_{zr}^s = -\frac{3\sigma_{zp}}{2E_z} \left( \frac{2d+h}{R} - \frac{4}{3} \right) \quad (4.50)$$

É possível comprovar matematicamente, que a deformação específica ( $\epsilon_{zr}^s$ ) obtida na conversão tora-sarrafo é exatamente igual à soma daquelas obtidas na conversão tora-prancha e depois na conversão prancha-sarrafo.

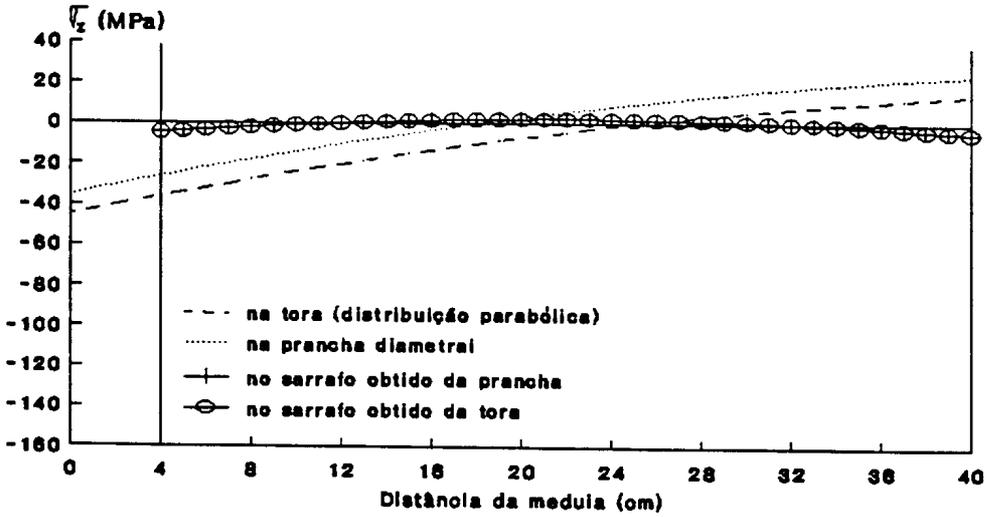
#### 4.7.2.3 Tensões residuais na madeira serrada

Na Fig. 4.15 estão plotadas as tensões residuais num sarrafo de 36 cm de largura, obtido diretamente da tora ou da prancha diametral dela originada.

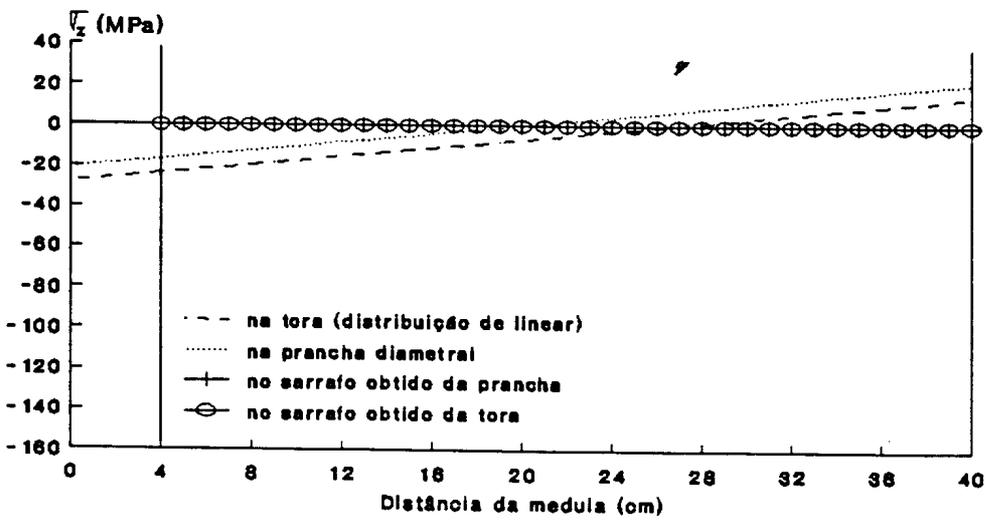
As tensões residuais foram obtidas pelas equações (4.43), (4.34c) e (4.45c) podendo então serem comparadas entre si e também com as distribuições originais na tora ou na prancha.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.15 Tensões longitudinais, originais na tora e residuais na prancha e no sarrafo

Os parâmetros utilizados nestas equações foram

$$R = 40 \text{ cm} \quad h = 36 \text{ cm} \quad d = 4 \text{ cm} \quad \sigma_{zp} = 14 \text{ MPa} \quad \sigma_c = 42 \text{ MPa}$$

Observa-se que a prancha diametral obtida da tora sempre se alonga sendo este fato explicado pela maior relação  $\frac{\text{madeira comprimida}}{\text{madeira tracionada}}$  que ela tem em relação à tora.

Observa-se também nesta figura que num sarrafo desta largura podem ocorrer tensões residuais variando de zero na Fig. 4.15(c) até 19 MPa na Fig. 4.15(a), dependendo da distribuição original de tensões adotada para a tora.

A Fig. 4.16 mostra, entretanto, que estas tensões residuais tendem para zero com a redução da largura do sarrafo, principalmente naqueles obtidos a maiores distâncias da medula.

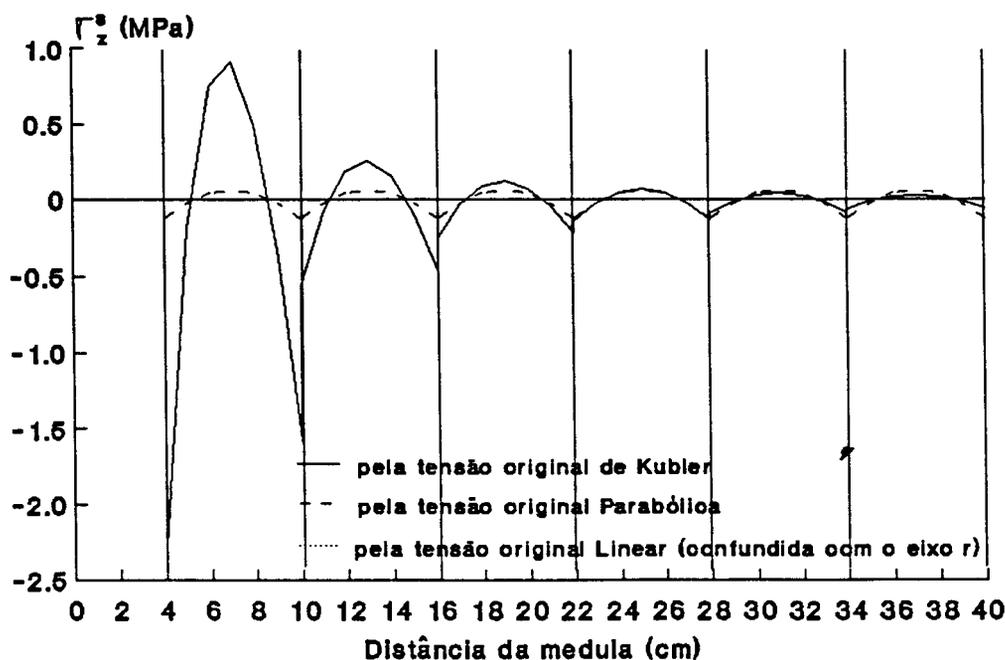


Figura 4.16 Tensões residuais num sarrafo de 6 cm de largura obtido de diferentes posições radiais de uma tora de 40 cm de raio

#### 4.8 Equações de compatibilidade para materiais ortotrópicos

Segue abaixo a dedução de uma equações de compatibilidade, similar à equação (2.27),

para materiais ortotrópicos considerando-se apenas o plano  $yz$ .

Portanto, da substituição das equações (2.11) na equação (2.26) obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{E_z} \sigma_z \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_z \right) = \frac{1}{G_{zy}} \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial y \partial z} \quad (4.51)$$

Derivando agora a equação (2.16b) em relação a  $y$  e a equação (2.16c) em relação a  $z$ , somando-se as duas e substituindo na equação (4.51) obtém-se a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{E_z} \sigma_z - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{2G_{zy}} \sigma_y \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_z + \frac{1}{2G_{zy}} \sigma_z \right) = 0 \quad (4.52)$$

que é expressa exclusivamente em termos de tensões normais. Outras duas equações deste tipo podem ser obtidas para os outros dois planos, por permutação cíclica dos índices.

#### 4.9 Desenvolvimento teórico das funções de deslocamentos no sarrafo

Observa-se que a maioria dos trabalhos a respeito das tensões de crescimento se refere ao estudo de sua distribuição no interior da árvore. Isto fornece evidentemente uma idéia relativa do problema, mas não possibilita predizerem-se as conseqüências de um determinado nível de tensão.

O presente capítulo pretende transformar valores de tensões ou deformações de crescimento medidas na periferia de árvores em pé em valores de deslocamentos, principalmente os transversais, a serem observados por exemplo, numa peça serrada de bitola  $b \times h$  localizada na seção transversal da tora pela coordenada  $r$  da Fig. 4.14.

##### 4.9.1 Pela Resistência dos Materiais

Lembrando-se que a deformação pós corte, ocorre por supressão das tensões, pode-se transformar as deformações específicas e as curvaturas, deduzidas anteriormente, em deslocamentos, através das equações (2.1) a (2.6).

Assim, ajustando-se os sinais para adequar os deslocamentos  $v$  e  $w$  aos eixos  $y$  e  $z$  da Fig.

4.14, obtêm-se

$$w = \varepsilon_{zr}^s z \quad (4.53a)$$

$$v = -\frac{Kz^2}{2} \quad (4.53b)$$

Estas equações dependem das funções deduzidas para  $\varepsilon_{zr}^s$  e  $K$  e portanto os deslocamentos podem ser determinados por qualquer um dos seguintes casos.

4.9.1.1 Para  $\varepsilon_{zr}^s$  e  $K$  obtidos de uma distribuição original de KUBLER na tora

$$w = -\frac{2\sigma_{zp}}{E_z h} \left[ -\frac{h}{2} + (d+h) \ln \frac{d+h}{R} - d \ln \frac{d}{R} \right] z \quad (4.54a)$$

$$v = \frac{6\sigma_{zp}}{E_z h^3} \left[ -dh - \frac{h^2}{2} + (d^2 + dh) \ln \frac{d+h}{R} - (d^2 + dh) \ln \frac{d}{R} \right] z^2 \quad (4.54b)$$

4.9.1.2 Para  $\varepsilon_{zr}^s$  e  $K$  obtidos de uma distribuição original parabólica na tora

$$w = -\frac{1}{E_z} \left[ -\sigma_c + 3(\sigma_c - \sigma_{zp}) \frac{2d+h}{2R} + (4\sigma_{zp} - 2\sigma_c) \frac{3d^2 + 3dh + h^2}{3R^2} \right] z \quad (4.55a)$$

$$v = \frac{3}{2E_z} \left[ \frac{\sigma_c - \sigma_{zp}}{R} + (4\sigma_{zp} - 2\sigma_c) \frac{2d+h}{3R^2} \right] z^2 \quad (4.55b)$$

4.9.1.3 Para  $\varepsilon_{zr}^s$  e  $K$  obtidos de uma distribuição original linear na tora

$$w = \varepsilon_{zr}^s = -\frac{3\sigma_{zp}}{2E_z} \left( \frac{2d+h}{R} - \frac{4}{3} \right) z \quad (4.56a)$$

$$v = \frac{3\sigma_{zp}}{2E_z R} z^2 \quad (4.56b)$$

## 4.9.2 Pela Teoria da Elasticidade

### 4.9.2.1 No plano yz ou rz num estado linear de tensão

Para atender a hipótese adotada, de distribuição linear de tensões entre os pontos  $d$  e  $d + h$  de uma peça orientada segundo os três eixos principais de elasticidade como a da Fig. 4.14, deduziu-se a seguinte equação

$$\sigma_z = \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \quad (4.57)$$

a qual será obviamente mais aproximada quanto mais distante da medula estiver a peça, menor a sua altura  $h$  e maior o raio da tora. O valor de  $\sigma_z b_1$  pode ser obtido por qualquer das equações de distribuição de tensões na tora, como por exemplo

$$\sigma_z b_1 = -\sigma_{zp} \left( 1 + 2 \ln \frac{d}{R} \right) \quad (4.58a)$$

$$\sigma_z b_2 = -\sigma_{zp} \left( 1 + 2 \ln \frac{d + h}{R} \right) \quad (4.58b)$$

Estes sinais negativos indicam a supressão das tensões originais que mantêm o sarrafo indeformado dentro da tora.

As outras componentes da tensão de crescimento, assumidas, foram

$$\sigma_y = \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{xz} = 0 \quad (4.59a)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{zy} \quad (4.59b)$$

as quais juntamente com a equação (4.57) satisfazem perfeitamente a equação de compatibilidade (4.52), desde que  $\tau_{zy}$  não seja de ordem superior à primeira.

Assim, as equações (2.11) se transformam em

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.60a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.60b)$$

Os deslocamentos  $v$  e  $w$  podem ser obtidos, de acordo com as 1ª e 3ª das equações (2.14a), por integração da equação (4.60a) em relação a  $y$  e (4.60b) em relação a  $z$ .

Assim,

$$v = \frac{-\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y + g(z) \quad (4.61a)$$

$$w = \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z + f(y) \quad (4.61b)$$

Derivando-se estas equações em relação a  $z$  e em relação a  $y$  respectivamente, obtêm-se

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{dg(z)}{dz} \quad (4.62a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z + \frac{df(y)}{dy} \quad (4.62b)$$

Substituindo agora estas duas equações na 3ª das equações (2.14b) e tendo em vista as equações (2.11), chega-se a

$$\frac{dg(z)}{dz} - \frac{1}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z + \frac{df(y)}{dy} = \frac{\tau_{zy}(y,z)}{G_{yz}} \quad (4.63)$$

donde

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = \frac{\tau_{zy}(y,z)}{G_{zy}} - \frac{df(y)}{dy} + \frac{1}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z \quad (4.64)$$

que integrada em  $z$ , fornece a função  $g(z)$

$$g(z) = \int \frac{\tau_{zy}(y,z)}{G_{zy}} dz - \int \frac{df(y)}{dy} dz + \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 + C_1 \quad (4.65)$$

Substituindo esta equação em (4.61a), obtém-se

$$\begin{aligned} v = & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y + \int \frac{\tau_{zy}(y,z)}{G_{zy}} dz - \int \frac{df(y)}{dy} dz + \\ & + \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 + C_1 \end{aligned} \quad (4.66)$$

As condições de contorno para a determinação das constantes de integração foram obtidas da Fig. 4.14, donde

$$\frac{\partial v}{\partial z}(y, 0) = 0 \quad (4.67a)$$

$$v(0,0) = 0 \quad (4.67b)$$

$$w(y,0) = 0 \quad (4.67c)$$

Portanto, derivando-se a equação (4.66) em relação a  $z$ , vem

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{zy}(y,z)}{G_{zy}} - \frac{df(y)}{dy} + \frac{1}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z \quad (4.68)$$

que igualada a zero no ponto  $(y,0)$  fica reduzida a

$$\frac{\tau_{zy}(y,z)}{G_{zy}} - \frac{df(y)}{dy} = 0 \quad (4.69)$$

Dessa equação depreende-se que a tensão de cisalhamento não pode depender da variável

$z$ .

Assim, obtém-se a igualdade

$$\frac{\tau_{zy}(y)}{G_{zy}} = \frac{df(y)}{dy} \quad (4.70)$$

que simplifica a equação (4.66) a

$$v = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y + \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 + C_1 \quad (4.71)$$

Tendo em vista as duas últimas condições de contorno dadas nas equações (4.67), obtêm-se respectivamente das equações (4.61b) e (4.71).

$$f(y) = 0 \quad (4.72a)$$

$$C_1 = 0 \quad (4.72b)$$

e finalmente as componentes do deslocamento

$$v = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y + \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 \quad (4.73a)$$

$$w = \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z \quad (4.73b)$$

É interessante observar que das equações (4.70) e (4.72a) determina-se que

$$\frac{\tau_{zy}(y)}{G_{zy}} = 0 \quad (4.74)$$

como aliás, já é conhecida da resistência dos materiais.

#### 4.9.2.2 Nos planos xy ou $\theta r$ e yz ou rz num estado linear de tensão

Este caso fornece os deslocamentos que ocorrem no espaço tridimensional, mas o estado de tensão é dado apenas pela equação (4.57), admitindo-se a partir da equação (4.74), que

$$\sigma_y = \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0 \quad (4.75)$$

Assim, das equações (2.11) obtém-se

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.76a)$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.76b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.76c)$$

Integrando a equação (4.76c) em relação a z, de acordo com a 3ª das equações (2.14a), obtém-se

$$w = \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z + w_0(x,y) \quad (4.77)$$

Das 2ª e 3ª das equações (2.14b) e tendo em vista (4.75), vêm

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \quad (4.78a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \quad (4.78b)$$

as quais fornecem por integração em  $z$

$$u = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} z + u_0(x,y) \quad (4.79a)$$

$$v = \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} z + v_0(x,y) \quad (4.79b)$$

derivando as equações (4.79a) e (4.79b) em relação a  $x$  e em relação a  $y$  e igualando respectivamente às equações (4.76b e a), obtêm-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} z + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.80a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} z + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.80b)$$

Verifica-se que as equações (4.80) somente são satisfeitas se

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.81a)$$

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (4.81b)$$

e portanto,

$$u_0(x,y) = -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + f(y) \quad (4.82a)$$

$$v_0(x,y) = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y + g(x) \quad (4.82b)$$

Substituindo estas equações em (4.79), obtêm-se

$$u = -\frac{\partial w_O(x,y)}{\partial x} z - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + f(y) \quad (4.83a)$$

$$v = \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 - \frac{\partial w_O(x,y)}{\partial y} z - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y + g(x) \quad (4.83b)$$

Derivando agora, (4.83a) em relação a  $y$  e (4.83b) em relação a  $x$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_O(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{\nu_{zx}}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x + \frac{df(y)}{dy} \quad (4.84a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_O(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{dg(x)}{dx} \quad (4.84b)$$

e substituindo-as na 1ª das equações (2.14b) e sabendo que  $\gamma_{yx} = 0$ , obtêm-se

$$-2 \frac{\partial^2 w_O(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{\nu_{zx}}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0 \quad (4.85)$$

Verifica-se novamente que (4.85) só é satisfeita se

$$\frac{\partial^2 w_O(x,y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.86a)$$

e portanto

$$\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0 \quad (4.86b)$$

Estas equações (4.86) juntamente com as equações (4.81) formam um sistema de equações diferenciais, o qual é satisfeito por

$$w_0(x,y) = C_1x + C_2y + C_3 \quad (4.87a)$$

$$f(y) = C_4y + C_5 \quad (4.87b)$$

$$g(x) = -\frac{\nu_{zx}}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x^2 - C_4x + C_6 \quad (4.87c)$$

Substituindo estas soluções em (4.83) e (4.77), obtêm-se

$$u = -C_1z - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + C_4y + C_5 \quad (4.88a)$$

$$v = \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 - C_2z - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y +$$

$$-\frac{\nu_{zx}}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x^2 - C_4x + C_6 \quad (4.88b)$$

$$w = \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z + C_1x + C_2y + C_3 \quad (4.88c)$$

As constantes de integração foram obtidas das seguintes condições de contorno, de acordo com a Fig. 4.14

$$w(x,y,0) = 0 \quad (4.89a)$$

$$u(0,y,0) = 0 \quad (4.89b)$$

$$v(0,0,0) = 0 \quad (4.89c)$$

donde, pelas equações (4.88)

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0$$

e, finalmente

$$u = -\frac{\nu_{ZX}}{E_Z} \left[ \sigma_Z b_1 - \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x \quad (4.90a)$$

$$v = \frac{1}{E_Z} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \right) z^2 - \nu_{ZY} \left[ \sigma_Z b_1 - \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y - \frac{\nu_{ZX}}{2} \left( \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \right) x^2 \right\} \quad (4.90b)$$

$$w = \frac{1}{E_Z} \left[ \sigma_Z b_1 - \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z \quad (4.90c)$$

#### 4.9.2.3 Nos planos xy ou $\theta r$ e yz ou rz num estado triplo de tensão

Este caso fornecerá os deslocamentos que ocorrerão no espaço tridimensional, devido ao seguinte estado triplo de tensão.

$$\sigma_y = \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \quad (4.91a)$$

$$\sigma_x = \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \quad (4.91b)$$

$$\sigma_z = \sigma_Z b_1 - \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \quad (4.91c)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0 \quad (4.91d)$$

Assim, das equações (2.11) obtêm-se

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] +$$

$$-\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.92a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x = & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] + \frac{1}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] + \\ & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.92b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z = & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] - \frac{\nu_{xz}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.92c)$$

Integrando a equação (4.91c) em relação a  $z$ , de acordo com a 3ª das equações (2.14a), obtém-se

$$\begin{aligned} w = & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z - \frac{\nu_{xz}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z + \\ & + \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z + w_0(x,y) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Das 2ª e 3ª das equações (2.14b) e tendo em vista (4.91d), obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \quad (4.94a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} = & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) z - \frac{\nu_{xz}}{E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) z + \frac{1}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z + \\ & -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.94b)$$

as quais fornecem por integração em  $z$

$$u = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} z + u_0(x,y) \quad (4.95a)$$

$$v = -\frac{\nu_{yz}}{2E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) z^2 - \frac{\nu_{xz}}{2E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) z^2 + \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 +$$

$$-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} z + v_0(x,y) \quad (4.95b)$$

Derivando estas equações em relação a  $x$  e em relação a  $y$  e igualando respectivamente à equação (4.92b) e (4.92a), obtêm-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} z + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.96a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} z + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] +$$

$$- \frac{\nu_{xy}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.96b)$$

Verifica-se que as equações (4.96) somente serão satisfeitas se

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.97a)$$

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (4.97b)$$

e, portanto

$$u_o(x,y) = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + \frac{1}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x +$$

$$-\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + f(y) \quad (4.98a)$$

$$v_o(x,y) = \frac{1}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y +$$

$$-\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y + g(x) \quad (4.98b)$$

Substituindo-se estas equações em (4.95), obtêm-se

$$u = -\frac{\partial^2 w_o(x,y)}{\partial x^2} z - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + \frac{1}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x +$$

$$-\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + f(y) \quad (4.99a)$$

$$v = -\frac{\nu_{yz}}{2E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) z^2 - \frac{\nu_{xz}}{2E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) z^2 + \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 +$$

$$-\frac{\partial w_o(x,y)}{\partial y} z + \frac{1}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y +$$

$$-\frac{\nu_{xy}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y + g(x) \quad (4.99b)$$

Derivando agora, (4.99a) em relação a  $y$  e (4.99b) em relação a  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_o(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{\nu_{yx}}{E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) x - \frac{1}{E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) x +$$

$$+ \frac{\nu_{zx}}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x + \frac{df(y)}{dy} \quad (4.100a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial^2_{w_0}(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{dg(x)}{dx} \quad (4.100b)$$

substituindo-as na 1ª das equações (2.14b) e sabendo de (4.91d) que  $\gamma_{yx} = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial^2_{w_0}(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{\nu_{yx}}{E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) x - \frac{1}{E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) x + \\ + \frac{\nu_{zx}}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Verifica-se novamente que (4.101) só é satisfeita se

$$\frac{\partial^2_{w_0}(x,y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.102)$$

e portanto obtém-se juntamente com as equações (4.97) o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial^2_{w_0}(x,y)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.103a)$$

$$\frac{\partial^2_{w_0}(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (4.103b)$$

$$\frac{\partial^2_{w_0}(x,y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.103c)$$

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) x - \frac{1}{E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) x + \frac{\nu_{zx}}{E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0 \quad (4.103d)$$

o qual é satisfeito por

$$w_0(x,y) = C_1 x + C_2 y + C_3 \quad (4.104a)$$

$$f(y) = C_4 y + C_5 \quad (4.104b)$$

$$g(x) = -\frac{\nu_{yx}}{2E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) x^2 + \frac{1}{2E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) x^2 - \frac{\nu_{zx}}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x^2 +$$

$$-C_4 x + C_6 \quad (4.104c)$$

Substituindo (4.104) em (4.93) e (4.99), obtêm-se

$$u = C_1 z - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + \frac{1}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x +$$

$$-\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + C_4 y + C_5 \quad (4.105a)$$

$$v = -\frac{\nu_{yz}}{2E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) z^2 - \frac{\nu_{xz}}{2E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) z^2 - \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 +$$

$$-C_2 z + \frac{1}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y +$$

$$-\frac{\nu_{zy}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y - \frac{\nu_{yx}}{2E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) x^2 +$$

$$+\frac{1}{2E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) x^2 - \frac{\nu_{zx}}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) x^2 - C_4 x + C_6 \quad (4.105b)$$

$$\begin{aligned}
w = & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z - \frac{\nu_{xz}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z + \\
& + \frac{1}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z + C_1 x + C_2 y + C_3
\end{aligned} \quad (4.105c)$$

As constantes de integração foram obtidas das seguintes condições de contorno, de acordo com a Fig. 4.14

$$w(x,y,0) = 0 \quad (4.106a)$$

$$u(0,y,0) = 0 \quad (4.106b)$$

$$v(0,0,0) = 0 \quad (4.106c)$$

donde, pelas equações (4.105)

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0 \quad (4.107)$$

Assim, obtêm-se finalmente as componentes do deslocamento final, pós desdobro

$$\begin{aligned}
u = & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + \frac{1}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x + \\
& -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \left[ \sigma_z b_1 - \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] x
\end{aligned} \quad (4.108a)$$

$$\begin{aligned}
v = & -\frac{\nu_{yz}}{2E_y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) z^2 - \frac{\nu_{xz}}{2E_x} \left( \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \right) z^2 + \frac{1}{2E_z} \left( \frac{\sigma_z b_1 - \sigma_z b_2}{h} \right) z^2 + \\
& + \frac{1}{E_y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \left[ \sigma_r b_1 - \frac{\sigma_r b_1 - \sigma_r b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y +
\end{aligned}$$

$$-\frac{\nu_{ZY}}{E_Z} \left[ \sigma_Z b_1 - \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] y - \frac{\nu_{YX}}{2E_Y} \left( \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \right) x^2 + \frac{1}{2E_X} \left( \frac{\sigma_R b_1 - \sigma_R b_2}{h} \right) x^2 +$$

$$-\frac{\nu_{ZX}}{2E_Z} \left( \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \right) x^2 \quad (4.108b)$$

$$w = -\frac{\nu_{YZ}}{E_Y} \left[ \sigma_\theta b_1 - \frac{\sigma_\theta b_1 - \sigma_\theta b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z - \frac{\nu_{XZ}}{E_X} \left[ \sigma_R b_1 - \frac{\sigma_R b_1 - \sigma_R b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z +$$

$$+\frac{1}{E_Z} \left[ \sigma_Z b_1 - \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{h} \left( y + \frac{h}{2} \right) \right] z \quad (4.108c)$$

Uma das simplificações possíveis destas equações e que é muito interessante do ponto de vista prático, é a anulação dos termos  $\sigma_R b_i$  e  $\sigma_\theta b_i$ . Neste caso as equações (4.108) se transformam nas equações (4.90).

Anulando-se ainda as variáveis  $x$  e  $y$  as equações (4.90) ou (4.73) se transformam nas equações de deslocamentos da elástica do sarrafo, as quais serão doravante chamadas de equações simplificadas da elástica.

$$u = 0 \quad (4.109a)$$

$$v = \frac{1}{E_Z} \left( \frac{\sigma_Z b_1 - \sigma_Z b_2}{2h} \right) z^2 \quad (4.109b)$$

$$w = \frac{1}{E_Z} \left( \frac{\sigma_Z b_1 + \sigma_Z b_2}{2} \right) z \quad (4.109c)$$

Para o caso de admitir-se  $E_Z$  constante ao longo do raio da árvore, estas equações podem ser convenientemente reduzidas a

$$v = \frac{\varepsilon_Z b_1 - \varepsilon_Z b_2}{2h} z^2 \quad (4.110a)$$

$$w = \frac{\varepsilon_Z b_1 + \varepsilon_Z b_2}{2} z \quad (4.110b)$$

Analogamente às equações (4.58) e lembrando-se de que a deformação potencial periférica  $\alpha_Z$  é negativa, os termos  $\varepsilon_Z b_i$  podem ser obtidos de qualquer dos modelos de distribuição de tensões na tora ou na prancha diametral, tendo-se como exemplo para o caso linear na tora, o seguinte

$$\varepsilon_Z b_1 = \alpha_Z \left( -2 + 3 \frac{d}{R} \right) \quad (4.111a)$$

$$\varepsilon_Z b_2 = \alpha_Z \left( -2 + 3 \frac{d + h}{R} \right) \quad (4.111b)$$

Para verificar as implicações decorrentes destas simplificações, plotou-se a Fig. 4.17 que mostra, como exemplo, a configuração deformada de um sarrafo, como o da Fig. 4.14, de dimensões  $h = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$  e  $l = 3 \text{ m}$  a ser obtido da posição  $d = 7 \text{ cm}$  de uma tora de *Eucalyptus grandis* de diâmetro  $D$  igual a  $40 \text{ cm}$ .

Onde necessárias foram utilizadas as equações (2.31) de forma análoga às equações (4.58), as deformações potenciais  $\alpha_Z$  e  $\alpha_\theta$  da Tab. 4.2 e as constantes elásticas da matriz obtida nos ensaios de tração.

Observa-se nesta figura que estas simplificações são perfeitamente possíveis, uma vez que as equação (4.90) do estado linear de tensão, (4.108) do estado triplo de tensão e (4.109) da linha elástica são praticamente coincidentes.

### 4.9.3 Comprovação experimental

Uma primeira comprovação das equações simplificadas da elástica (4.109) ou (4.110) foi feita com os dados de curvaturas e de deformações específicas da Tab. 2.2, obtidos por GIORDANO et alii (1959).

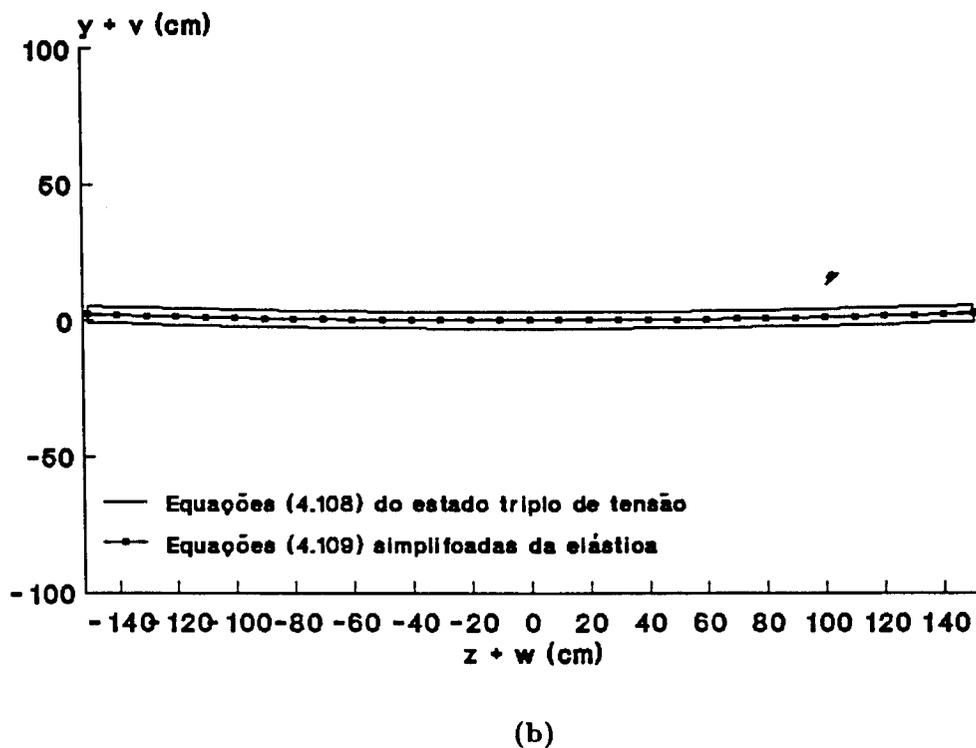
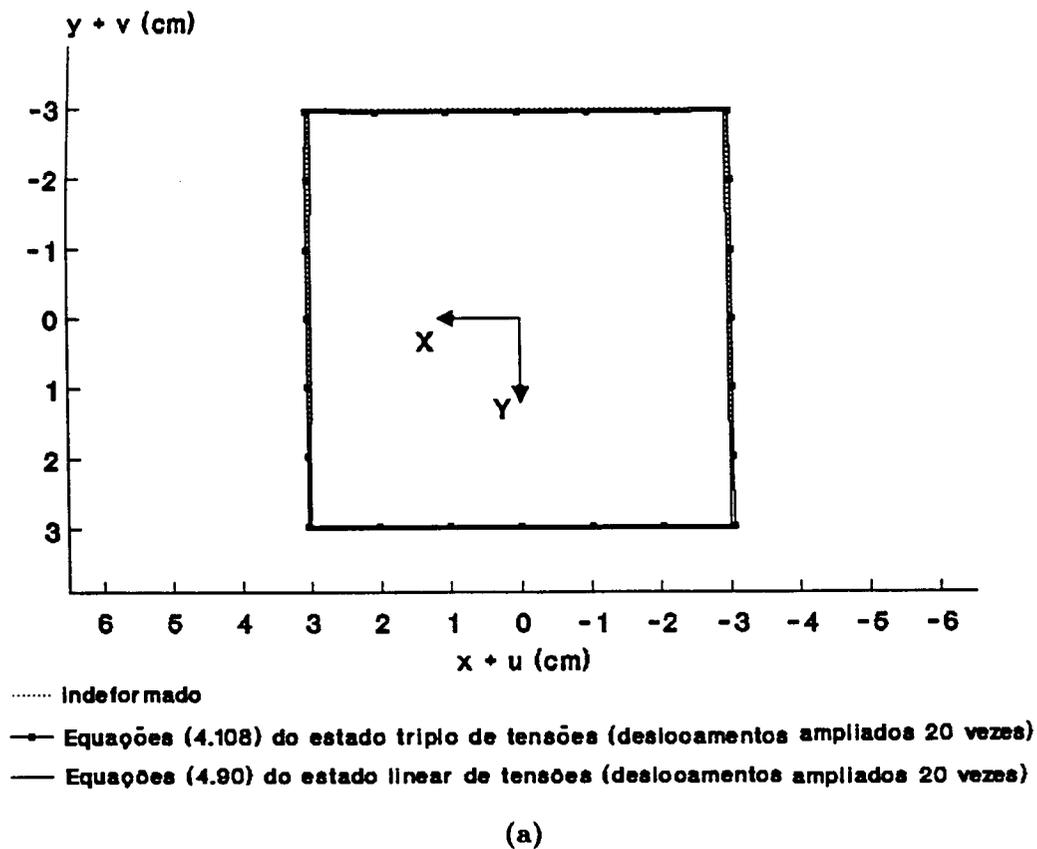


Figura 4.17 Seção transversal e elástica de um sarrafo de *Eucalyptus grandis*, deformadas pela liberação das tensões de crescimento

Para tanto, as equações (4.110) foram transformadas também em equações de curvatura ( $K$ ) e de deformações específicas ( $\varepsilon_z$ ), lembrando-se de que  $z$  varia de zero, na metade do comprimento da peça serrada, até  $\frac{1}{2}$ , numa de suas extremidades.

$$K = \frac{2v}{z^2} = \frac{\varepsilon_z b_1 - \varepsilon_z b_2}{h} \quad (4.112a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{w}{z} = \frac{\varepsilon_z b_1 + \varepsilon_z b_2}{2} \quad (4.112b)$$

#### 4.9.3.1. Curvaturas dos sarrafos

Os valores de  $\alpha_z$  dos quais dependem  $\varepsilon_z b_i$  foram obtidos, um para cada tora, pela aplicação da equação (4.112a) ao sarrafo 1 da Fig. 2.4 e a equação resultante foi em seguida igualada ao valor de  $K_1$  da Tab. 2.2.

Como exemplo de aplicação apresenta-se abaixo, aproveitando-se as equações (4.111), a determinação do valor de  $\alpha_z$  da primeira tora da Tab. 2.2, onde  $R = 6,35$  cm,  $d = h_2 + h_3 + h_4$  e  $h = h_1$

$$\varepsilon_z b_1 = \alpha_z \left( -2 + \frac{3 \times 1,36}{6,35} \right) = -0,0724 \alpha_z \quad (4.113a)$$

$$\varepsilon_z b_2 = \alpha_z \left( -2 + \frac{3 \times 1,36 + 2,29}{6,35} \right) = 1,0000 \alpha_z \quad (4.113b)$$

$$\therefore K = \frac{1}{h} (\varepsilon_z b_1 - \varepsilon_z b_2) = \frac{1}{2,29} (-0,0724 - 1,0000) \alpha_z = 4,68 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \quad (4.113c)$$

donde

$$\alpha_z = -9,9937 \times 10^{-4} \mu\varepsilon \quad (4.113d)$$

A Fig. 4.18(a) mostra todos os  $\alpha_z$  calculados para todas as toras da Tab. 2.2, onde se observa que o valor absoluto da deformação periférica potencial decresce com o aumento do diâmetro da árvore e a Fig. 4.18(b) mostra que a relação  $\left| \frac{\alpha_z}{R} \right|$  decresce mais que proporcionalmente. Observa-se também uma tendência à estabilização desses parâmetros a partir de, aproximadamente, 15 cm de raio.

Estas constatações são muito importantes para os programas de melhoramentos nos quais se desejam, prioritariamente, proceder seleções de árvores para serraria.

Os valores de  $\alpha_z$ , substituídos um a um, como parâmetro, na equação (4.112a), forneceram as figuras 4.19 a 4.22, as quais mostram respectivamente as curvaturas teóricas dos sarrafos 1 a 4 da Fig. 2.4 comparadas com as observações experimentais da Tab. 2.2.

Depreende-se destas figuras que a equação (4.110a) através da distribuição linear de deformações na árvore, pode predizer com excelente aproximação a provável curvatura que um determinado sarrafo terá quando serrado.

Isto significa que a distribuição linear de tensões ou de deformações longitudinais na árvore, está muito próxima daquela realmente liberada no seu desdobro e ainda, mais importante, que a relação entre a deformação periférica potencial e o raio da árvore é um excelente indicador para seleções de árvores para serraria.

#### 4.9.3.2 Deformações específicas normais liberadas pelo desdobro

As deformações específicas que ocorreram na prancha diametral ( $\epsilon_{zi}^P$ ) da Tab. 2.2 foram transformadas em deformações específicas que ocorreram nos sarrafos ( $\epsilon_{zi}^S$ ) através das seguintes relações de equilíbrio

- para o par de sarrafos 1

$$(R - h_1)E_Z^P \epsilon_{z_1}^P + h_1 E_Z^S \epsilon_{z_1}^S = 0$$

donde, admitindo-se  $E_Z$  constante

$$\varepsilon_{Z1}^S = -\frac{R - h_1}{h_1} \varepsilon_{Z1}^P \quad (4.114a)$$

- para o par de sarrafos 2

$$(R - h_1 - h_2) E_Z \varepsilon_{Z2}^P - h_2 E_Z \varepsilon_{Z1}^P + h_2 E_Z \varepsilon_{Z2}^S = 0$$

donde

$$\varepsilon_{Z2}^S = -\frac{R - h_1 - h_2}{h_2} \varepsilon_{Z2}^P + \varepsilon_{Z1}^P \quad (4.114b)$$

- para o par de sarrafos 3

$$(R - h_1 - h_2 - h_3) E_Z \varepsilon_{Z3}^P - h_3 E_Z \varepsilon_{Z2}^P - h_3 E_Z \varepsilon_{Z1}^P + h_3 E_Z \varepsilon_{Z3}^S = 0$$

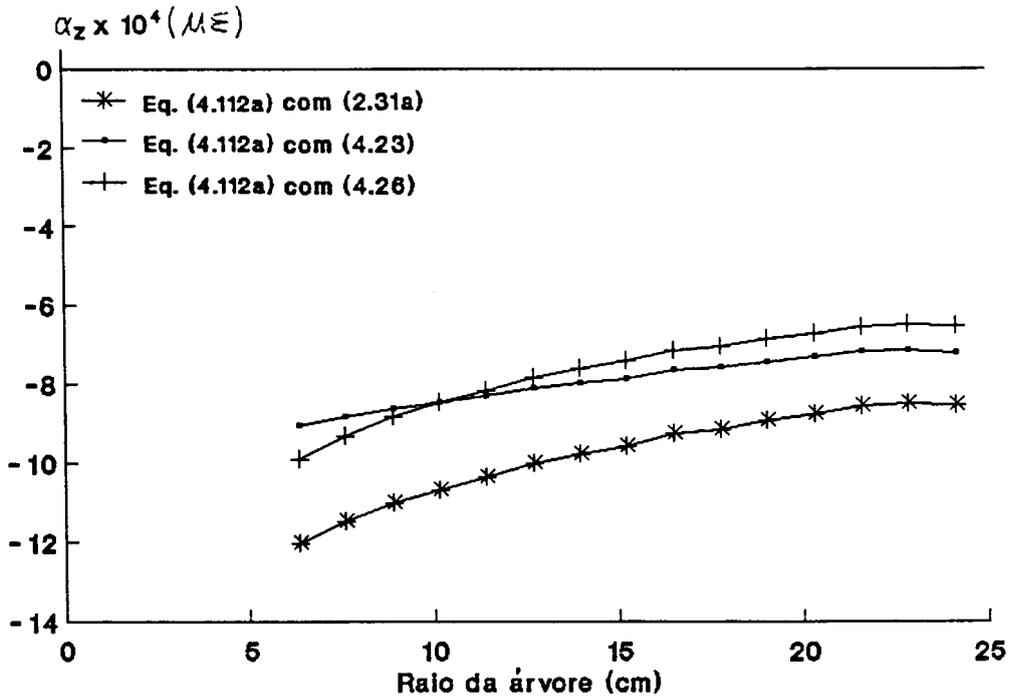
donde

$$\varepsilon_{Z3}^S = -\frac{R - h_1 - h_2 - h_3}{h_3} \varepsilon_{Z3}^P + \varepsilon_{Z2}^P + \varepsilon_{Z1}^P \quad (4.114c)$$

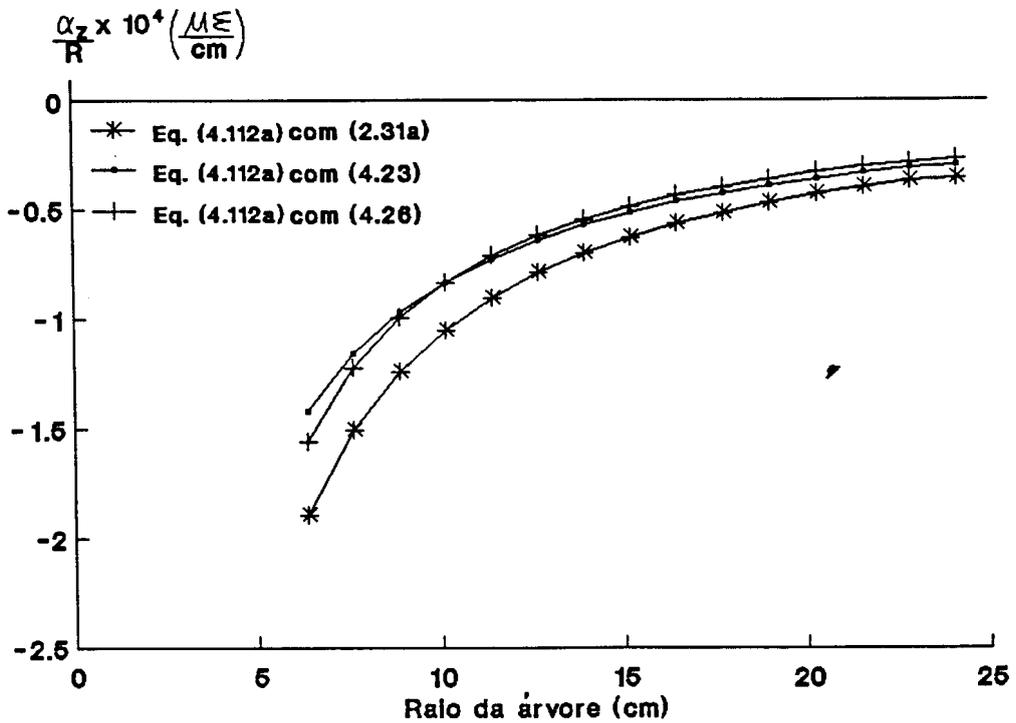
- para o par de sarrafos 4

$$\varepsilon_{Z4}^S = \varepsilon_{Z1}^P + \varepsilon_{Z2}^P + \varepsilon_{Z3}^P \quad (4.114d)$$

A Tab. 4.4 mostra os valores de deformações específicas dos sarrafos da Fig. 2.4, calculados através das equações (4.114) aplicadas sobre os dados da tabela 2.2.



(a)



(b)

Figura 4.18 Variação da deformação periférica potencial  $\alpha_z$  com o raio  $R$  da árvore de *Eucalyptus camaldulensis*

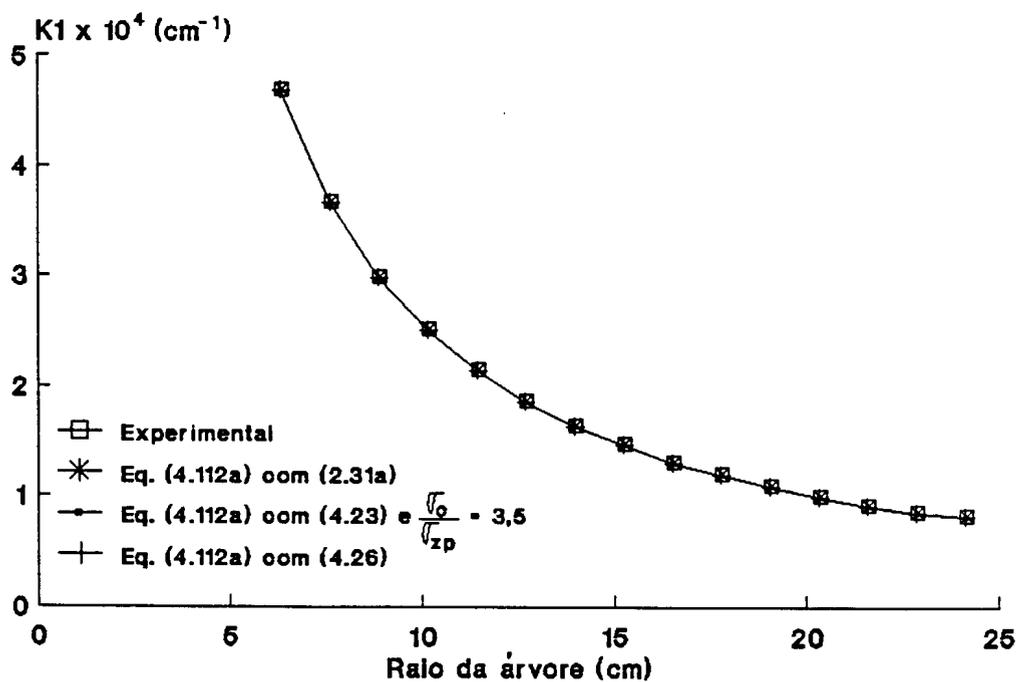


Figura 4.19 Curvaturas do sarrafo 1 obtido de cada uma das quinze toras de *Eucalyptus camaldulensis*

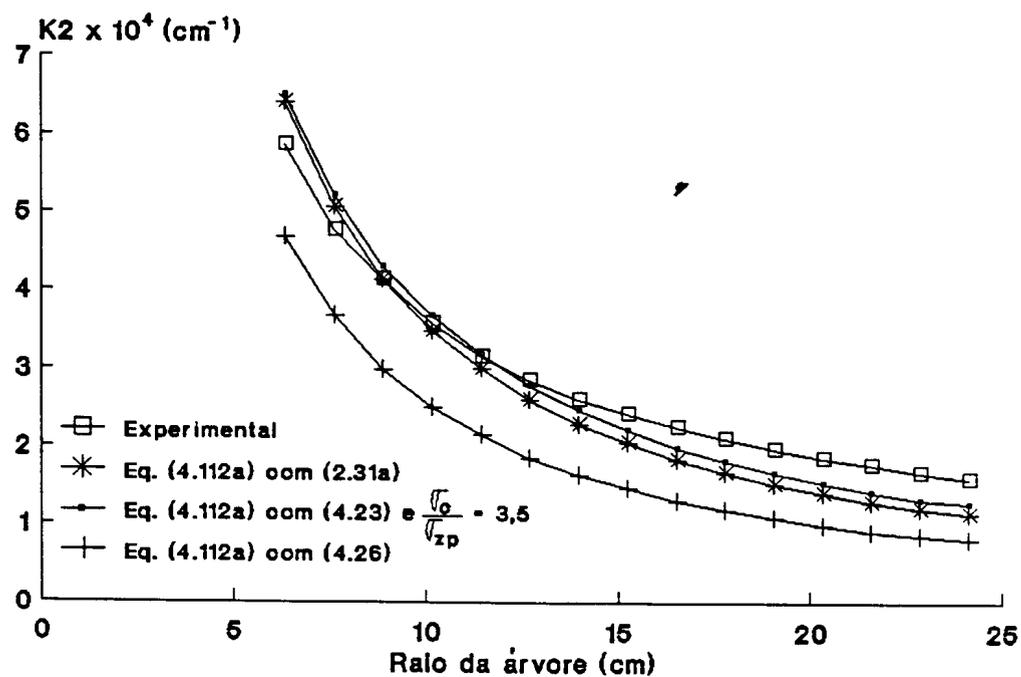


Figura 4.20 Curvaturas do sarrafo 2 obtido de cada uma das quinze toras de *Eucalyptus camaldulensis*

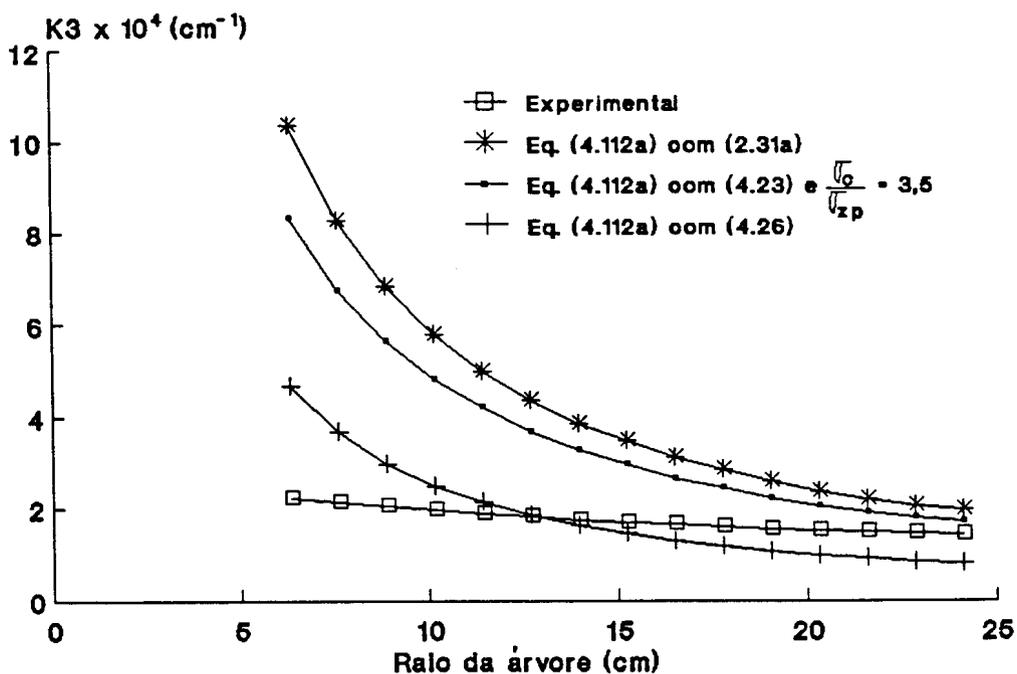


Figura 4.21 Curvaturas do sarrafo 3 obtido de cada uma das quinze toras de *Eucalyptus camaldulensis*

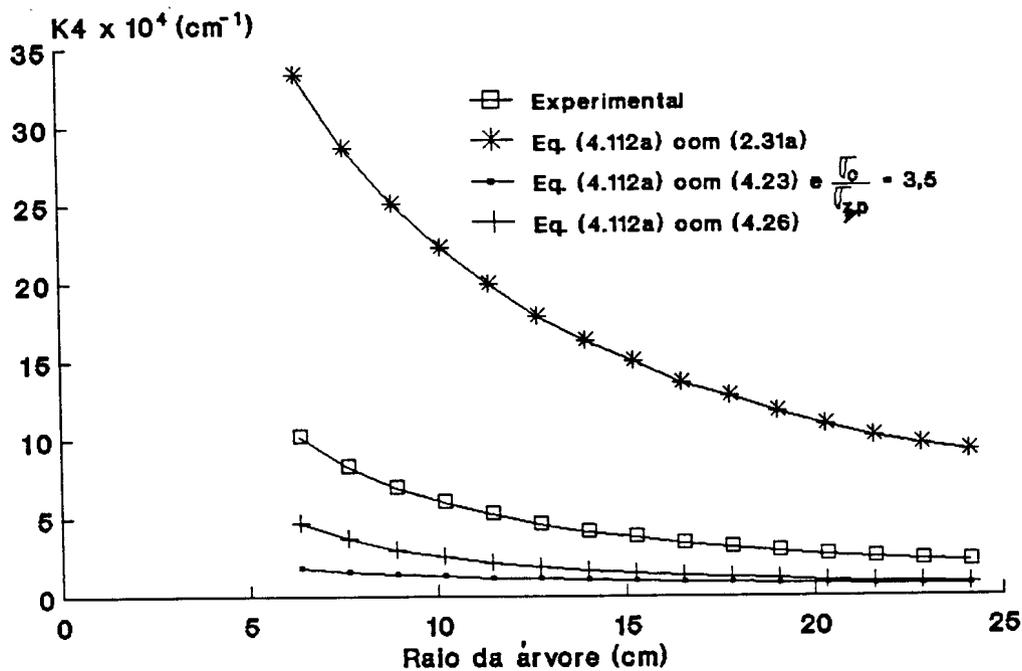


Figura 4.22 Curvaturas do sarrafo 4 obtido de cada uma das quinze toras de *Eucalyptus camaldulensis*

Tabela 4.4 Deformações específicas normais nos sarrafos de *Eucalyptus camaldulensis* da

Fig. 2.4

diâmetro da tora ou largura da prancha	$h_1$ (cm)	$h_2=h_3=h_4$ (cm)	$\varepsilon_{Z1}^S$	$\varepsilon_{Z2}^S$	$\varepsilon_{Z3}^S$	$\varepsilon_{Z4}^S$
			$\times 10^4 \mu\varepsilon$			
12,70	2,29	1,36	- 20,53	- 17,31	9,53	42,98
15,24	2,54	1,69	- 19,36	- 15,76	6,27	38,36
17,78	2,79	2,03	- 18,19	- 14,30	4,32	34,81
20,32	3,05	2,37	- 17,02	- 13,10	3,00	32,00
22,86	3,30	2,71	- 16,01	- 12,48	2,16	29,82
25,40	3,56	3,05	- 15,05	- 11,35	1,22	27,78
27,94	3,81	3,39	- 14,21	- 10,69	0,62	26,12
30,48	4,06	3,73	- 13,49	- 10,10	0,18	24,67
33,02	4,32	4,06	- 12,78	- 9,63	- 0,24	23,41
35,56	4,57	4,40	- 12,17	- 9,17	- 0,55	22,30
38,10	4,83	4,74	- 11,57	- 8,75	- 0,78	21,32
40,64	5,08	5,08	- 11,07	- 8,39	- 1,00	20,46
43,18	5,33	5,42	- 10,62	- 8,06	- 1,18	19,68
45,72	5,59	5,76	- 10,16	- 7,74	- 1,33	18,97
48,26	5,84	6,10	- 9,77	- 7,47	- 1,47	18,33

Estes valores experimentais foram plotados nas figuras 4.23 a 4.26 onde estão comparados com as predições teóricas da equação (4.112b).

Analogamente às equações (4.111) os  $\varepsilon_Z b_i$  foram calculados através das equações de distribuições de deformações na prancha diametral (4.32, 4.35 e 4.38) e os valores de  $\alpha_Z$  são os mesmos da Fig. 4.30 multiplicados por 2.14.

Apresenta-se abaixo um exemplo de aplicação da equação (4.38) que se refere à distribuição linear de deformações na prancha diametral, utilizando-se o mesmo  $\alpha_Z$  calculado nas equações (4.113).

$$\varepsilon_Z b_1 = 3\alpha_Z \left( \frac{d}{R} - \frac{1}{2} \right) = 3 \times 2,14(-9,9937 \times 10^{-4}) \left( \frac{3 \times 1,36}{6,35} - \frac{1}{2} \right) = -9,1440 \times 10^{-4} \mu\varepsilon$$

$$\varepsilon_Z b_2 = 3\alpha_Z \left( \frac{d+h}{R} - \frac{1}{2} \right) = 3 \times 2,14(-9,9937 \times 10^{-4}) \left( \frac{3 \times 1,36 + 2,29}{6,35} - \frac{1}{2} \right) = -32,0798 \times 10^{-4} \mu\varepsilon$$

$$\therefore \varepsilon_{Z1}^S = \frac{1}{2}(\varepsilon_Z b_1 + \varepsilon_Z b_2) = \frac{1}{2}(-9,1440 - 32,0798) \times 10^{-4} = 20,6119 \times 10^{-4} \mu\varepsilon$$

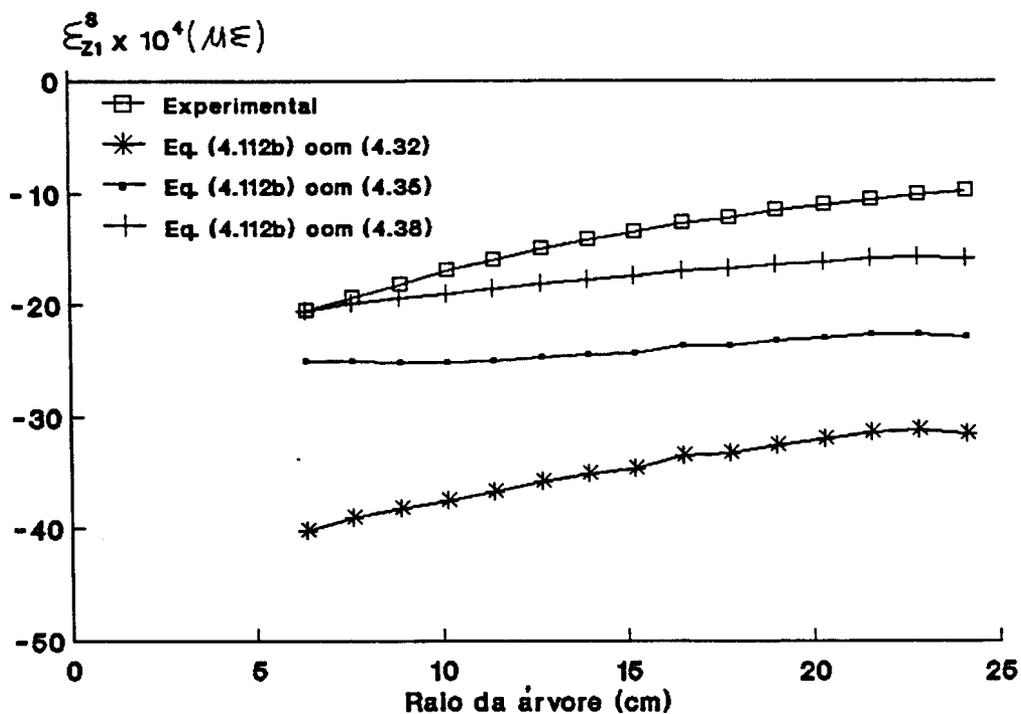


Figura 4.23 Deformações específicas no sarrafo 1 obtido de cada uma das quinze toras de *Eucalyptus camaldulensis*

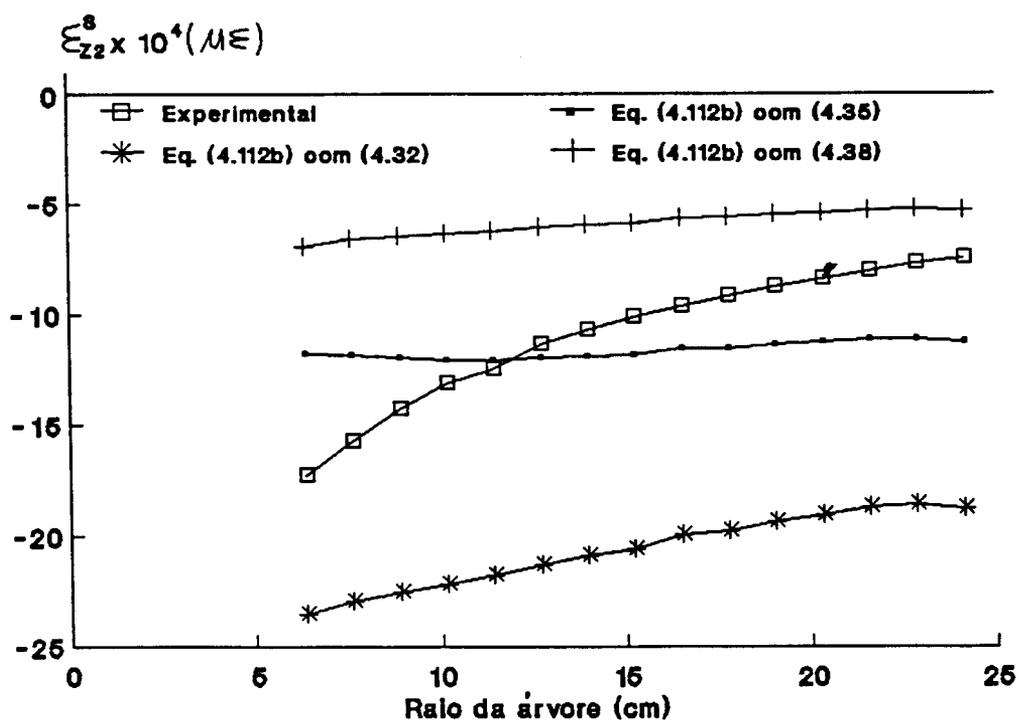


Figura 4.24 Deformações específicas no sarrafo 2 obtido de cada uma das quinze toras de *Eucalyptus camaldulensis*

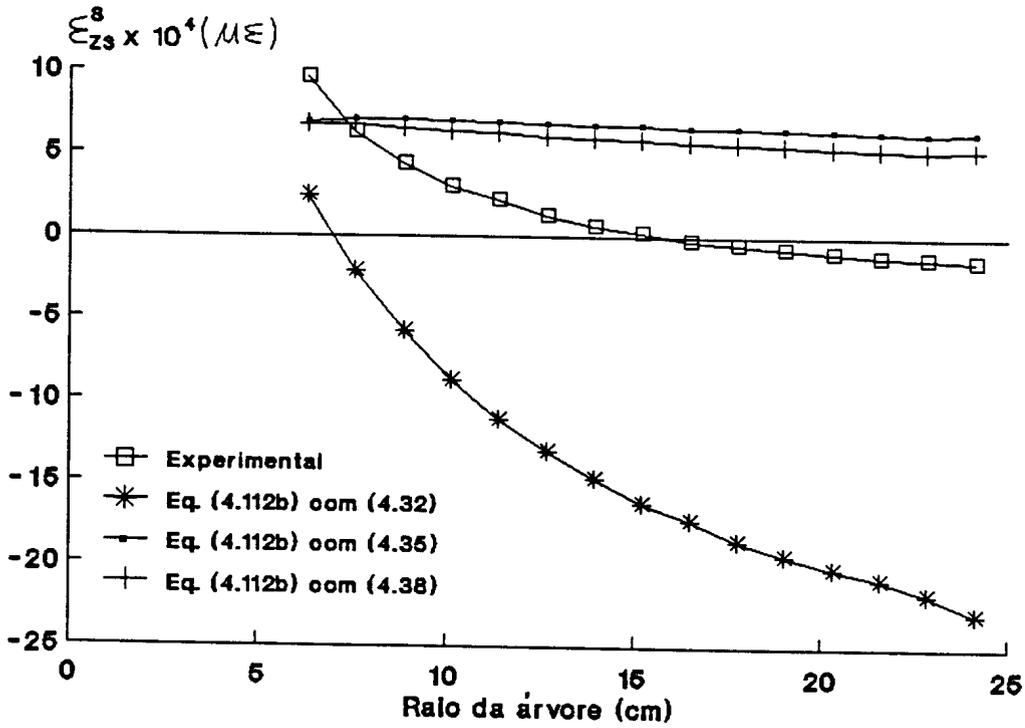


Figura 4.25 Deformações específicas no sarrafo 3 obtido de cada uma das quinze toras

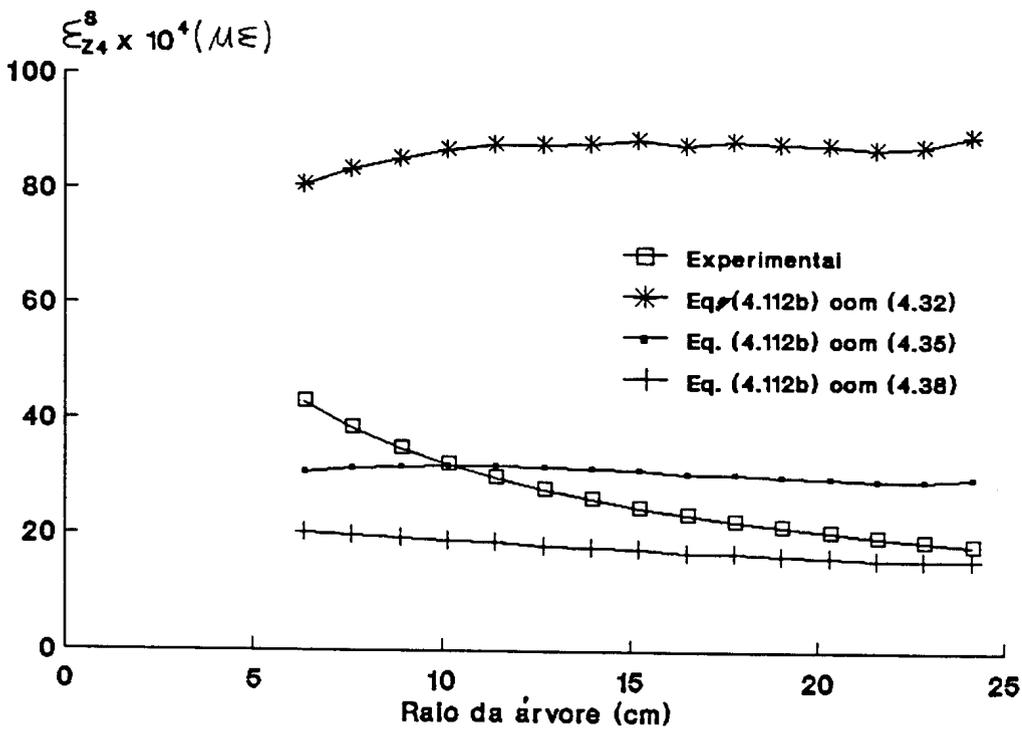


Figura 4.26 Deformações específicas no sarrafo 4 obtidas cada uma das quinze toras de

*Eucalyptus camaldulensis*

Este valor se refere ao sarrafo 1 da primeira tora e é portanto o primeiro ponto da curva obtida da equação 4.38 que está, entre outras, plotada na Fig. 4.23. Os demais pontos dessa e das figuras 4.24 a 4.26 foram obtidos de maneira análoga.

Observa-se nestas figuras que a distribuição linear de deformações na prancha diametral (Eq. 4.38) produz deformações nos sarrafos, muito mais próximas dos valores experimentais do que as outras duas, parabólica e logarítmica.

Na análise destas figuras, considerou-se que a predição de deformações específicas longitudinais feita pela equação (4.110b) através da distribuição linear de deformações na prancha diametral, apesar de melhor que as outras duas, é apenas razoável. Pode-se verificar, de fato, que elas não estão tão bem ajustadas como no caso das curvaturas.

Até certo ponto, por causa de prováveis erros experimentais, estas predições podem ser melhoradas por adoção correta das dimensões e posições dos sarrafos dentro da prancha diametral e ainda por verificar melhor o valor 2,14 adotado como multiplicativo da deformação periférica potencial da tora, para transformá-la na deformação periférica potencial da prancha diametral.

Entretanto face à pouca importância prática das deformações específicas longitudinais na utilização da madeira serrada e principalmente porque estas deformações são perfeitamente preditas pela distribuição parabólica na tora como já visto no item 4.61, optou-se por concentrar esforços nas predições dos deslocamentos transversais à linha neutra, como se verá no item seguinte.

#### 4.9.3.3 Deslocamentos transversais da linha neutra

Os deslocamentos transversais da elástica medidos em sarrafos de *Eucalyptus grandis* produzidos por um processo industrial como o da Fig. 3.5, estão mostrados na Tab. 4.5 sendo que as variáveis utilizadas nesta tabela, as quais indicam as dimensões e as posições do sarrafo dentro da tora, podem ser identificadas na Fig. 4.14.

Tabela 4.5 Deslocamentos, em cm, transversais ao eixo indeformado do sarrafo

Peça nº	d	b	h	- 100	- 75	- 50	- 25	0	25	50	75	100
Tora 1 D max. = 27,7 cm D min. = 26,1 cm Compr. = 2,90 m												
1.1	3,13	2,35	6,25	0	0,55	1,00	1,25	1,30	1,20	1,00	0,50	0
1.2	3,13	2,35	6,25	0	0,50	0,90	1,15	1,30	1,20	1,00	0,65	0
2.3	4,40	6,20	2,40	0	0,50	0,90	1,10	1,15	1,05	0,80	0,40	0
2.2	2,25	6,30	2,15	0	0,05	0,10	0,30	0,50	0,40	0,25	0,10	0
2.1	0	6,20	2,25	0	0,10	0,20	0,25	0,30	0,30	0,20	0,10	0
2.11	0	6,30	2,10	0	0,80	1,25	1,65	1,95	1,90	1,50	0,85	0
2.12	2,10	6,25	2,20	0	0,85	1,45	1,90	1,95	1,85	1,50	0,85	0
2.13	4,30	6,25	2,20	0	0,75	1,20	1,55	1,70	1,65	1,35	0,80	0
3.1	3,13	2,30	6,15	0	0,40	0,80	1,15	1,15	0,95	0,55	0,30	0
3.2	3,13	2,20	6,15	0	0,35	0,65	0,90	1,00	1,00	0,75	0,40	0
Tora 2 D max. = 26,1 cm D min. = 25,8 cm Compr. = 2,90 m												
1.1	3,59	7,10	6,50	0	0,50	1,00	1,20	1,25	1,30	1,10	0,70	0
1.2	3,59	7,00	6,20	0	0,50	0,90	1,10	1,10	1,15	0,80	0,45	0
2.1	0	6,20	7,20	0	0,50	0,85	1,20	1,40	1,40	1,15	0,75	0
2.11	0	6,30	7,15	0	0,45	0,65	0,80	0,85	0,80	0,70	0,40	0
3.1	3,59	7,10	5,90	0	0,60	1,05	1,15	0,80	0,70	0,30	0	0
3.2	3,59	7,00	6,10	0	0,40	0,70	0,90	1,00	0,85	0,80	0,45	0
Tora 3 D max. = 31,8 cm D min. = 28,8 cm Compr. = 2,90 m												
1.1	3,10	2,30	6,30	0	0,65	1,10	1,50	1,70	1,50	1,10	0,70	0
1.2	3,10	2,30	6,30	0	0,55	0,90	1,20	1,45	1,25	0,95	0,65	0
2.3	4,60	6,20	2,40	0	0,50	0,80	1,00	1,05	1,05	1,00	0,60	0
2.2	2,30	6,20	2,30	0	0,40	0,65	0,65	0,40	0,20	0,05	0	0
2.1	0	6,15	2,30	0	0,05	0,15	0,40	0,50	0,50	0,45	0,30	0
2.11	0	6,20	2,20	0	0,70	1,20	1,55	1,70	1,55	1,20	0,65	0
2.12	2,20	6,30	2,30	0	0,80	1,45	1,80	1,95	1,80	1,40	0,80	0
2.13	4,50	6,20	2,30	0	1,25	2,15	2,25	2,95	2,85	2,40	1,45	0
3.1	3,10	2,20	6,60	0	0,80	1,30	1,50	1,50	1,50	1,10	0,60	0
3.2	3,10	2,40	6,60	0	0,90	1,50	1,80	1,80	1,80	1,30	0,75	0
Tora 4 D max. = 41,5 cm D min. = 37,0 cm Compr. = 2,90 m												
2.1	0	10,20	2,40	0	0,25	0,45	0,60	0,70	0,75	0,60	0,35	0
2.2	2,40	10,20	2,30	0	0,35	0,65	0,75	0,80	0,80	0,75	0,50	0
2.3	4,70	10,15	2,35	0	0,45	0,75	1,00	1,00	1,00	0,85	0,55	0
2.4	7,05	10,15	2,25	0	0,45	0,70	0,80	0,90	0,90	0,80	0,55	0
2.5	9,30	10,10	2,25	0	0,50	0,80	0,85	0,90	0,85	0,75	0,45	0
2.6	11,55	10,10	2,25	0	0,30	0,50	0,60	0,60	0,55	0,45	0,25	0

As predições teóricas foram feitas pela equação (4.115) abaixo, obtida por simples particularização da equação (4.110a) ao caso da distribuição linear de deformações na tora, eleita nos dois itens anteriores como a mais próxima das deformações manifestadas no desdobro.

$$v = -3 \frac{\alpha z}{D} z^2 \quad (4.115)$$

Verifica-se que como  $\alpha z$  é negativa, o valor de  $v$  será positivo e máximo no ponto  $z = \frac{1}{2} o$  que provocará no sarrafo da Fig. 4.14, concavidade realmente voltada para fora da tora.

Igualando-se a equação (4.115) ao valor da flecha média apresentada pelos sarrafos de cada tora, foi possível a obtenção de quatro valores de  $\alpha_z$ , os quais podem ser vistos na Fig. 4.27, juntamente com o valor de  $\alpha_z$  da Tab. 4.2 medido experimentalmente em outra árvore da mesma espécie.

Estes prováveis valores de  $\alpha_z$  obtidos independentemente dos valores de  $E_z$ , foram substituídos como parâmetros na equação (4.115), a qual forneceu as elásticas teóricas mostradas nas figuras 4.28 a 4.35 juntamente com as elásticas observadas na prática.

Na análise destas figuras verifica-se que são realmente pequenas as discrepâncias entre a teoria e a prática e depreende-se que a equação (4.115) através da deformação periférica potencial ( $\alpha_z$ ) é excelente na predição dos deslocamentos transversais das linhas neutras de sarrafos produzidos em serras multilâminas.

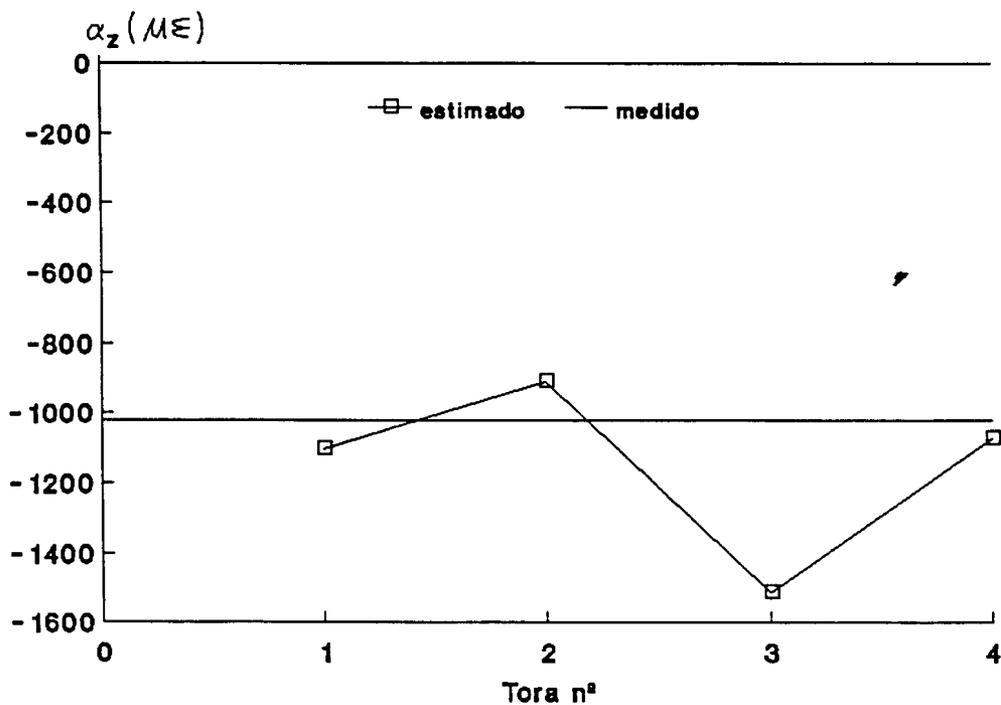
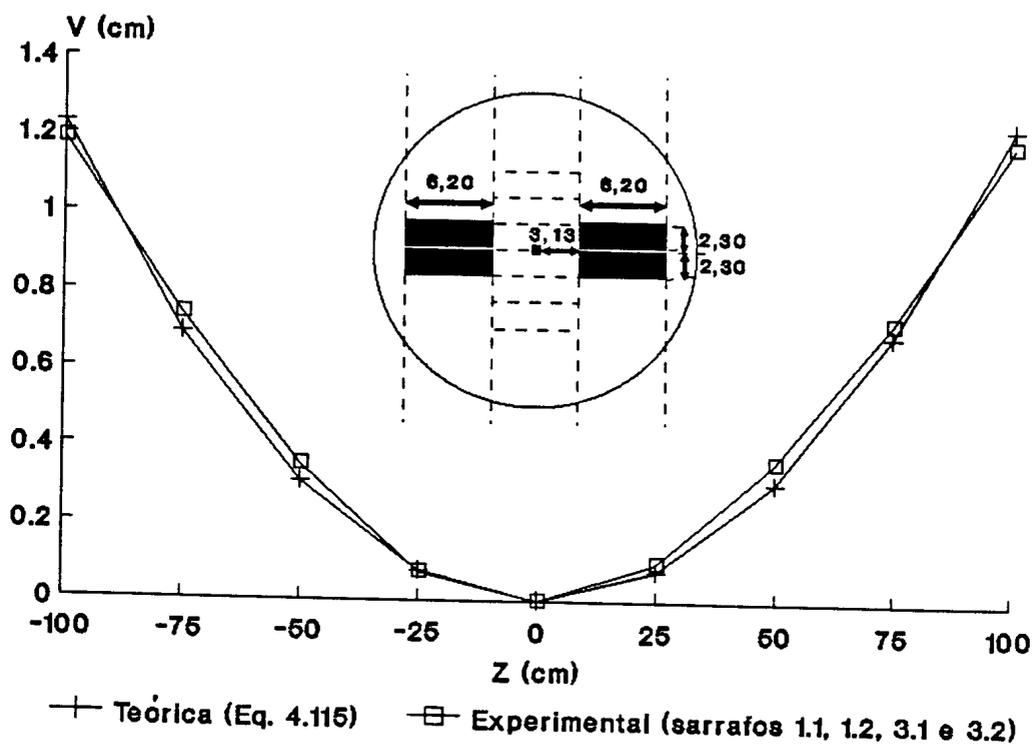
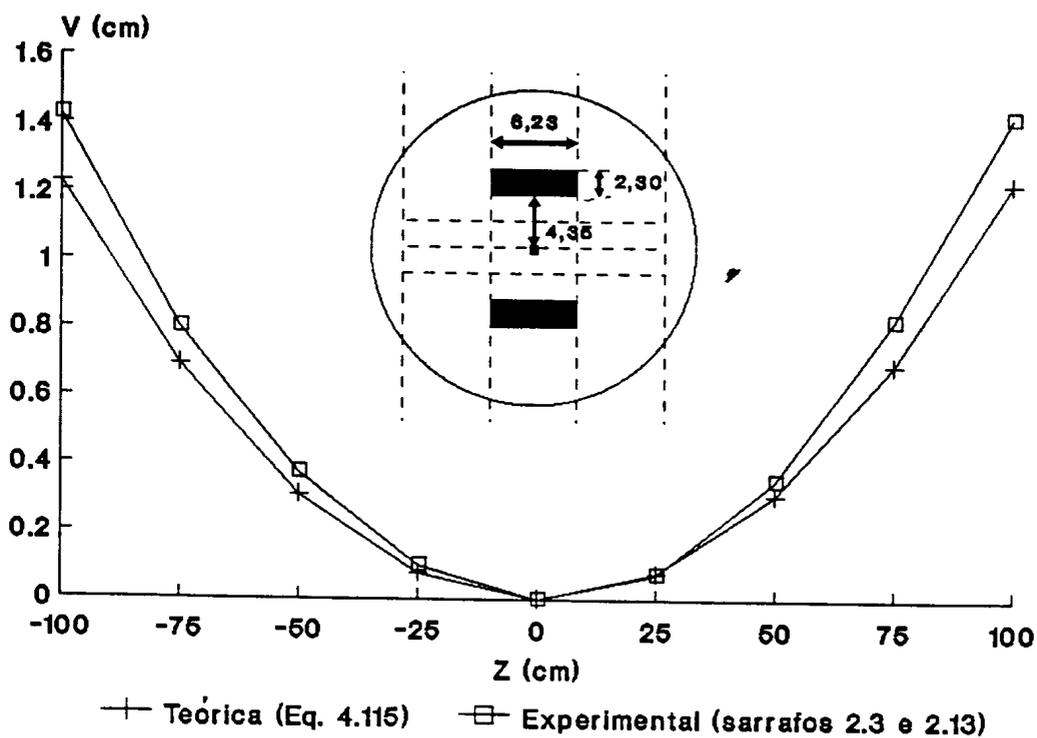


Figura 4.27 Valores de deformações periféricas potenciais ( $\alpha_z$ ) em cinco árvores de *Eucalyptus grandis*

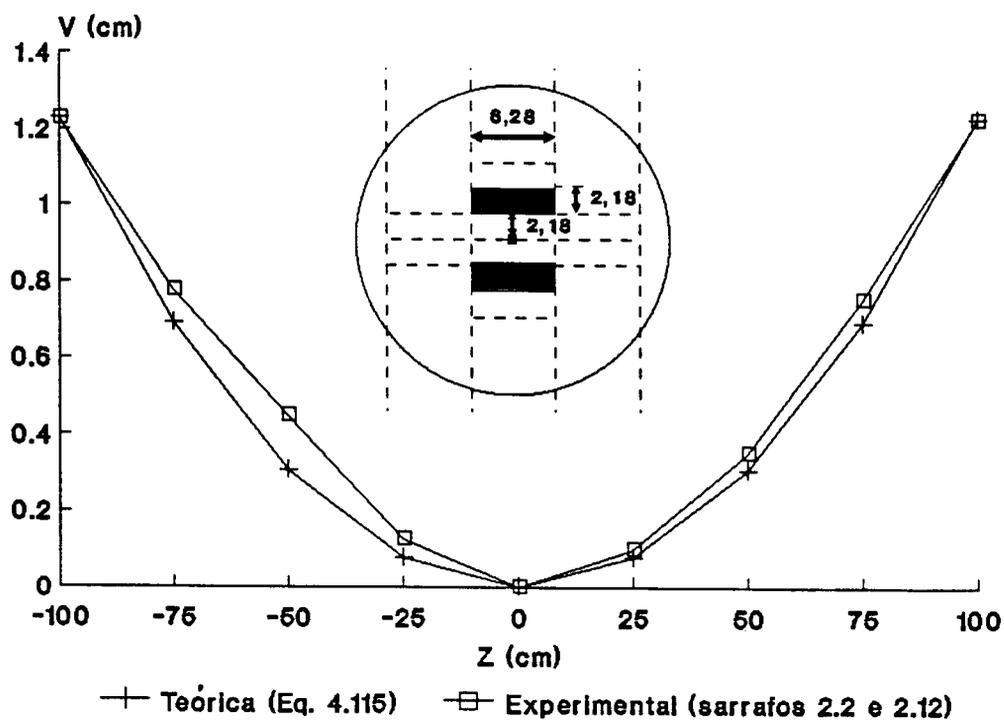


(a)

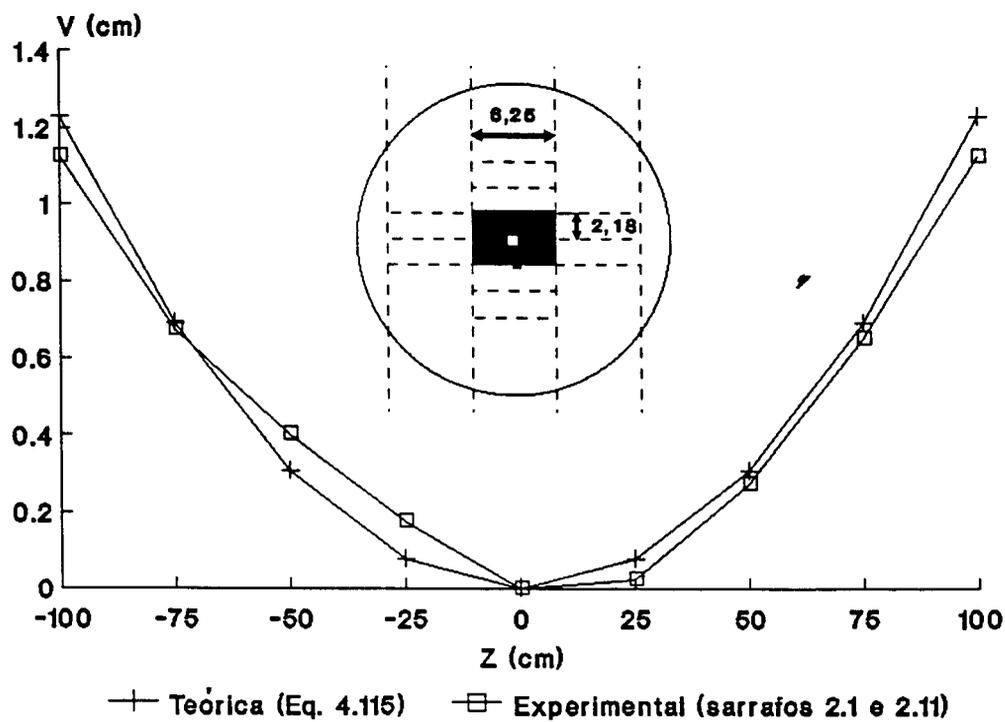


(b)

Figura 4.28 Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 1 de *Eucalyptus grandis*

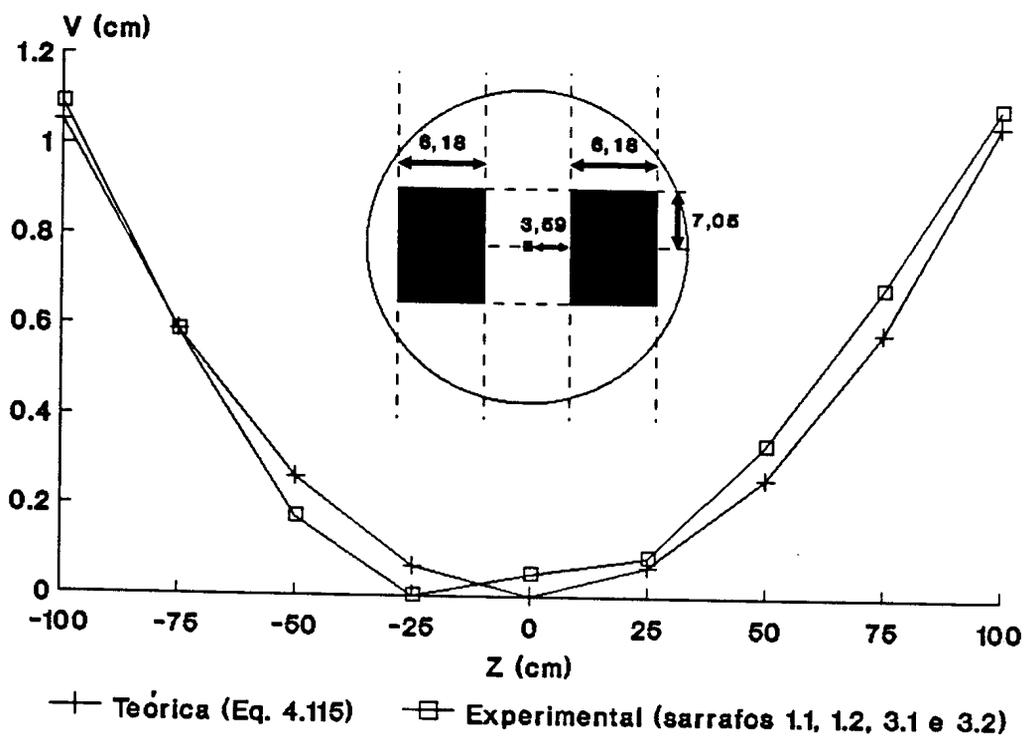


(a)

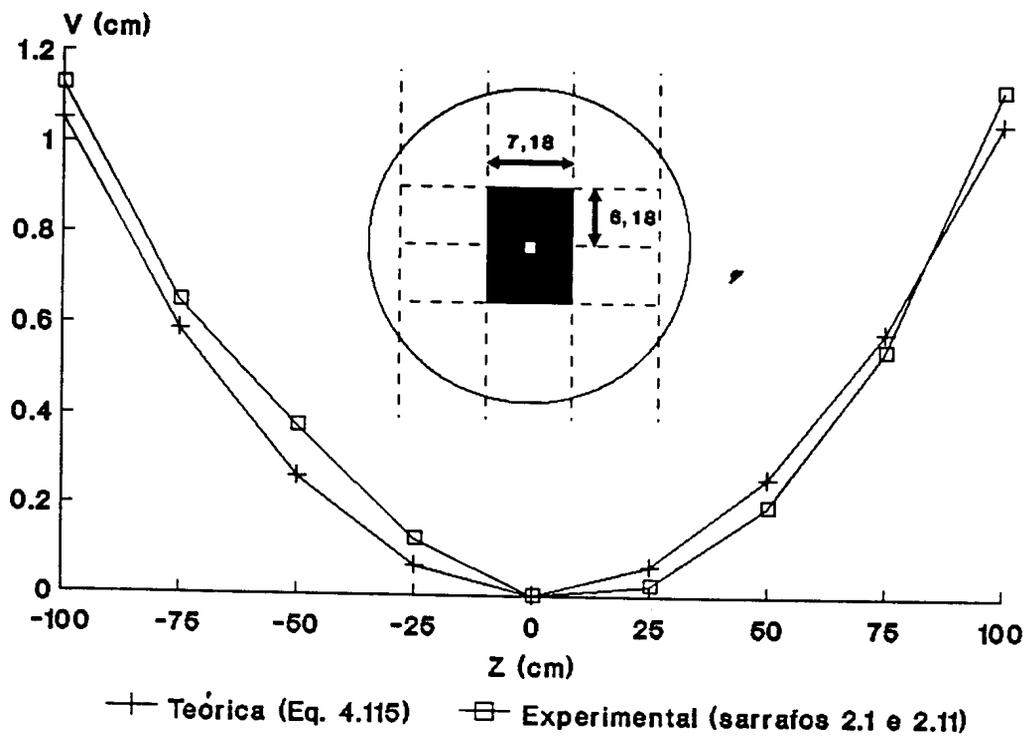


(b)

Figura 2.29 Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 1 de *Eucalyptus grandis*

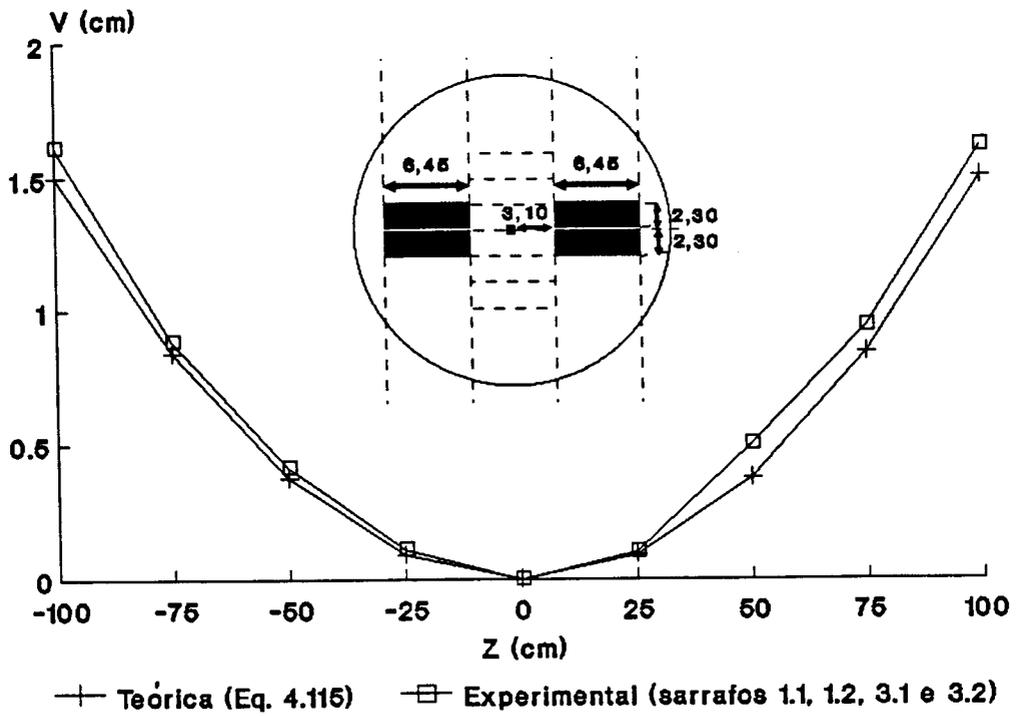


(a)

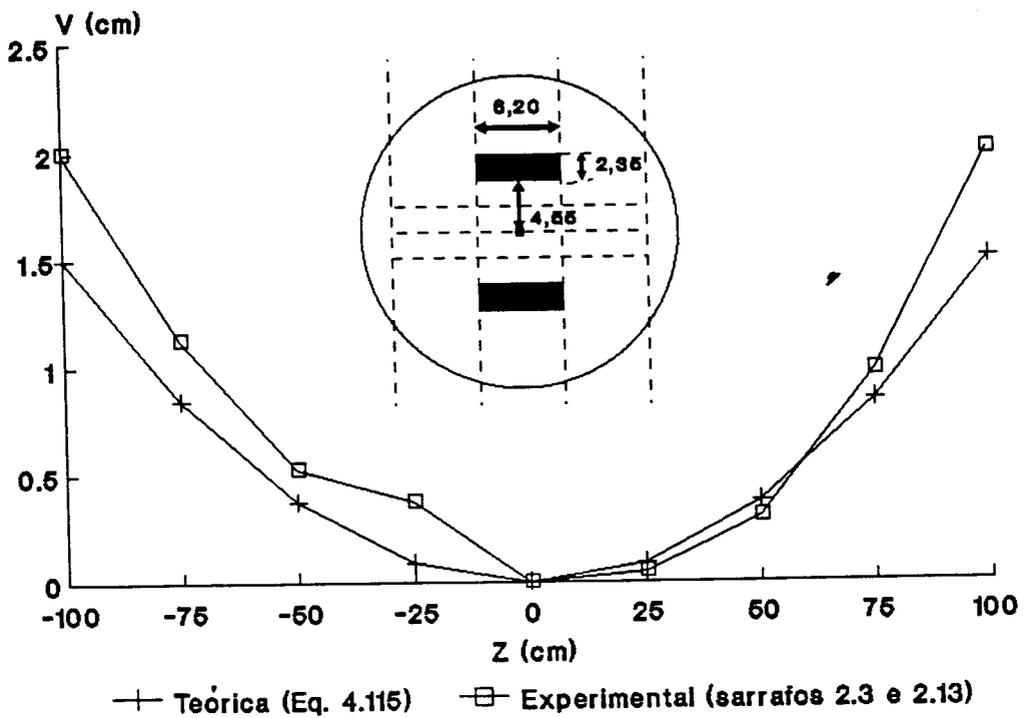


(b)

Figura 4.30 Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 2 de *Eucalyptus grandis*

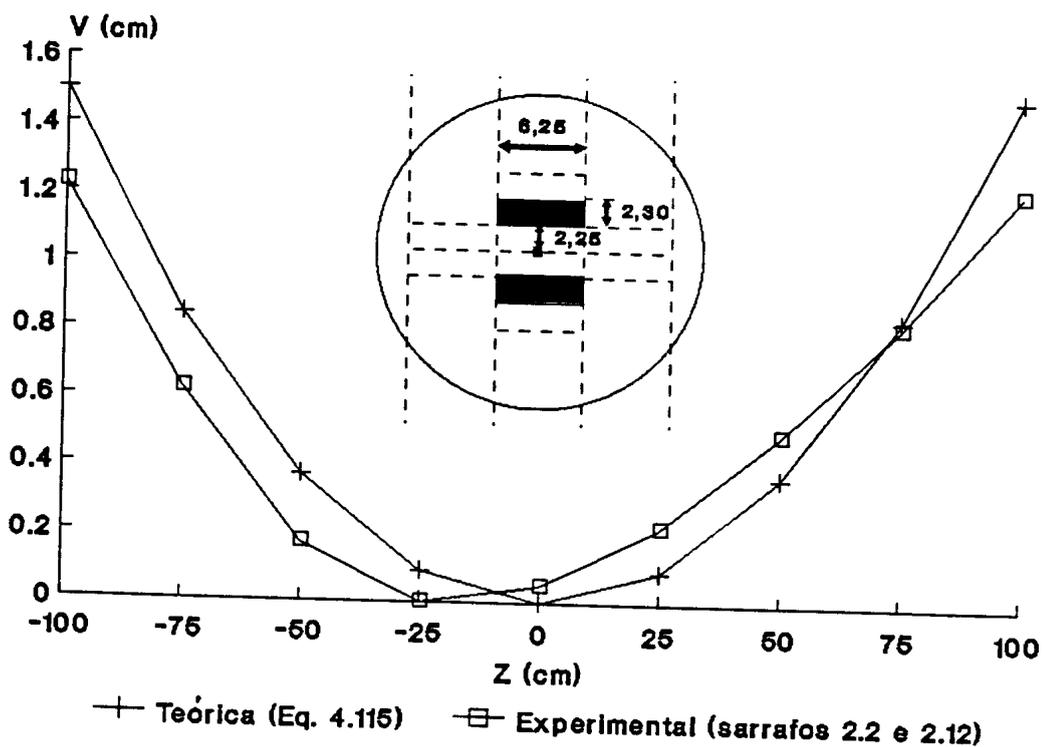


(a)

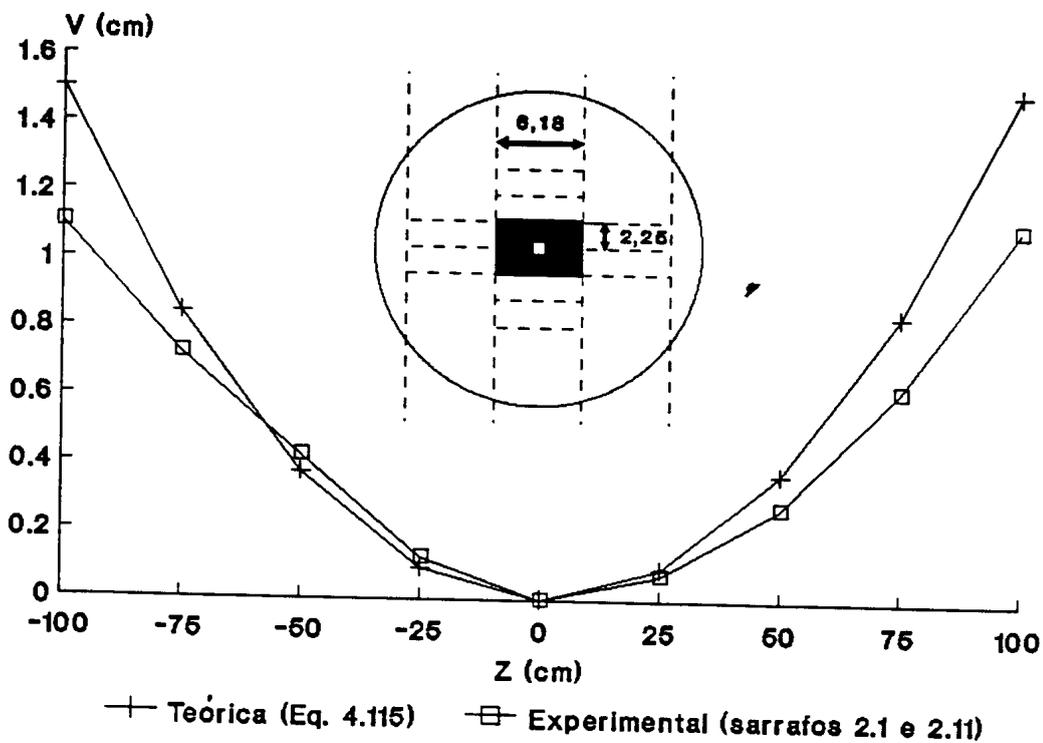


(b)

Figura 4.31 Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 3 de *Eucalyptus grandis*

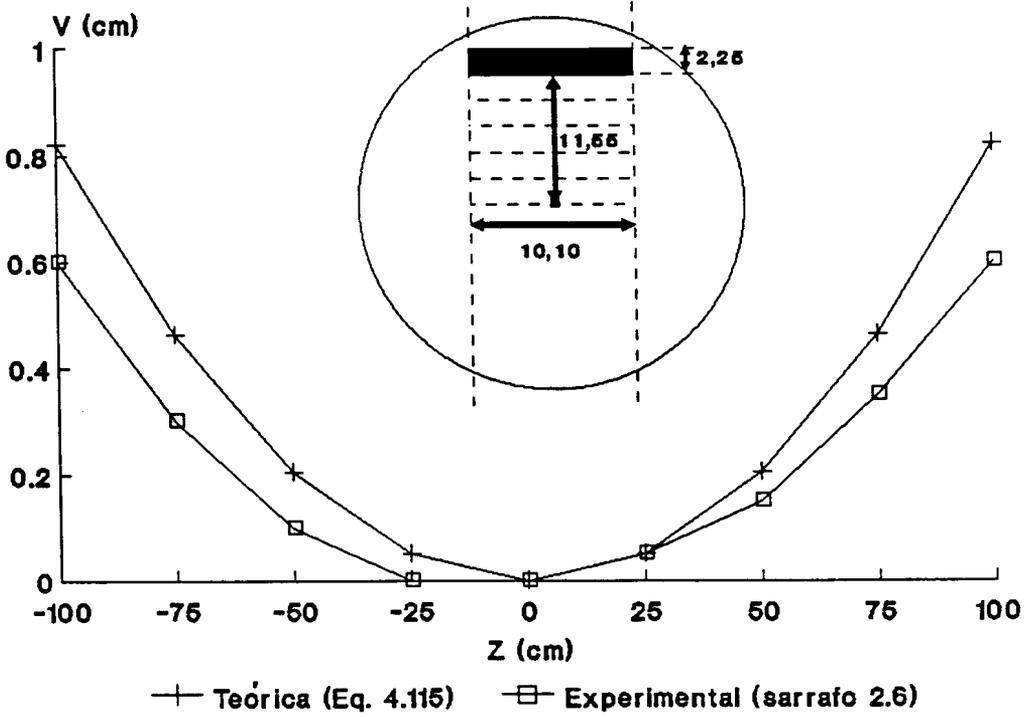


(a)

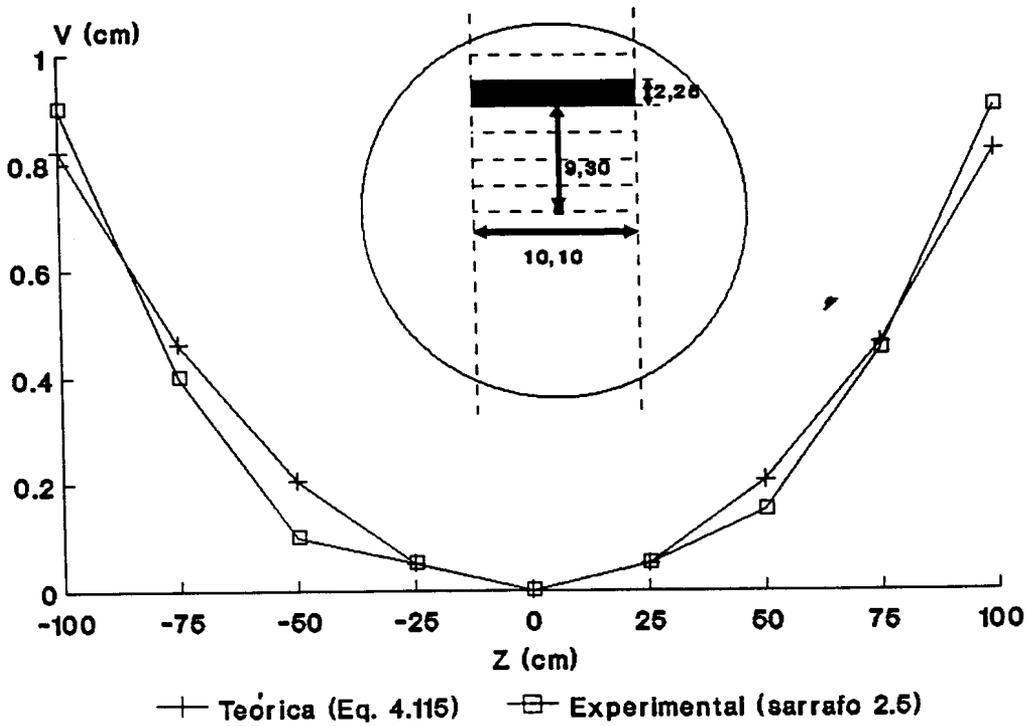


(b)

Figura 4.32 Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 3 de *Eucalyptus grandis*

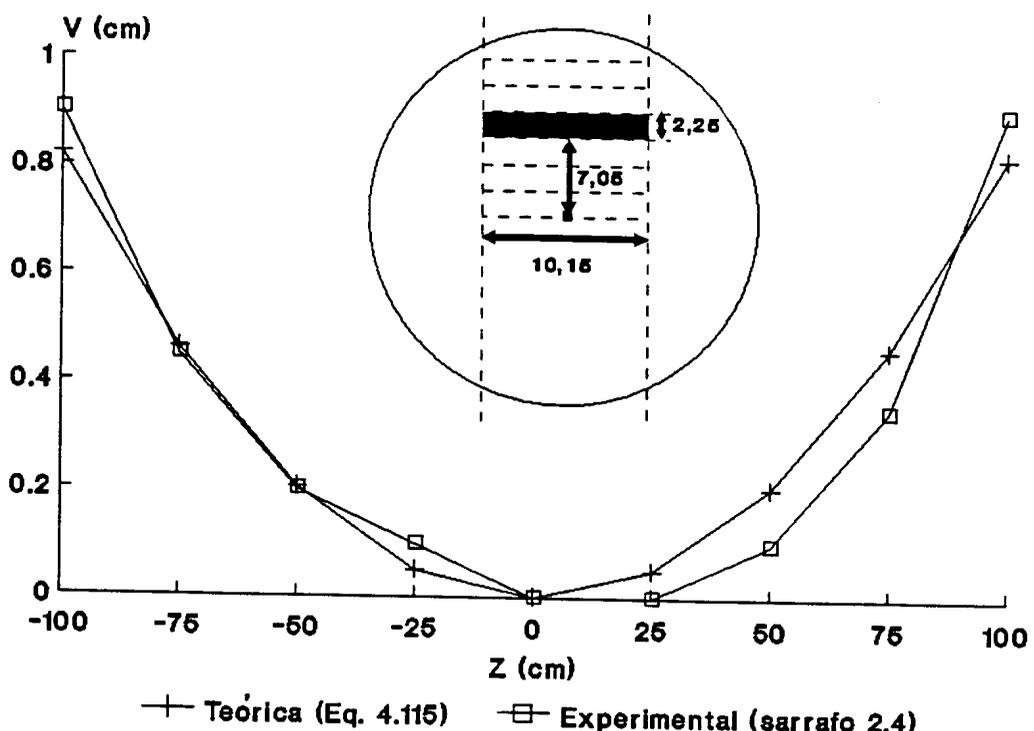


(a)

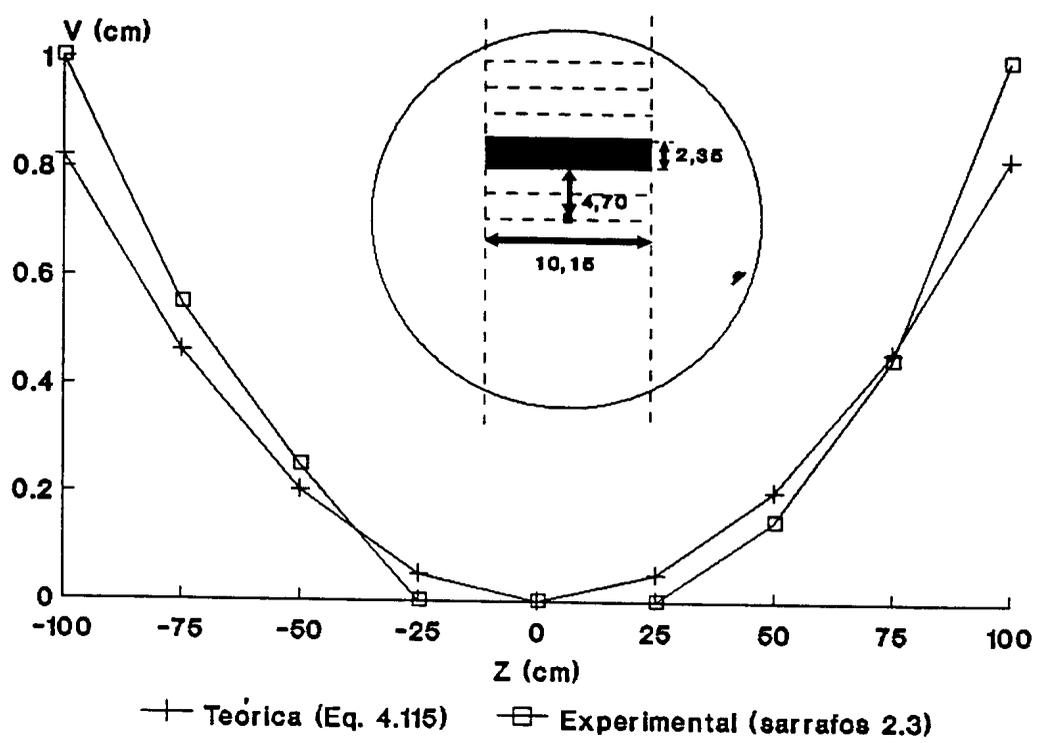


(b)

Figura 4.33 Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 4 de *Eucalyptus grandis*

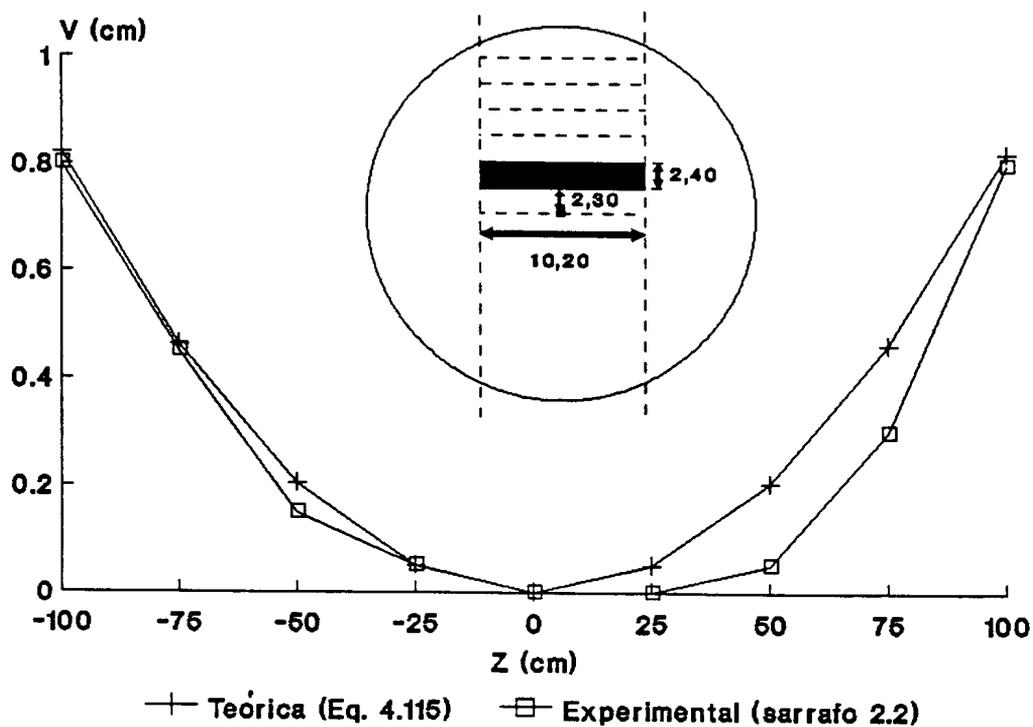


(a)

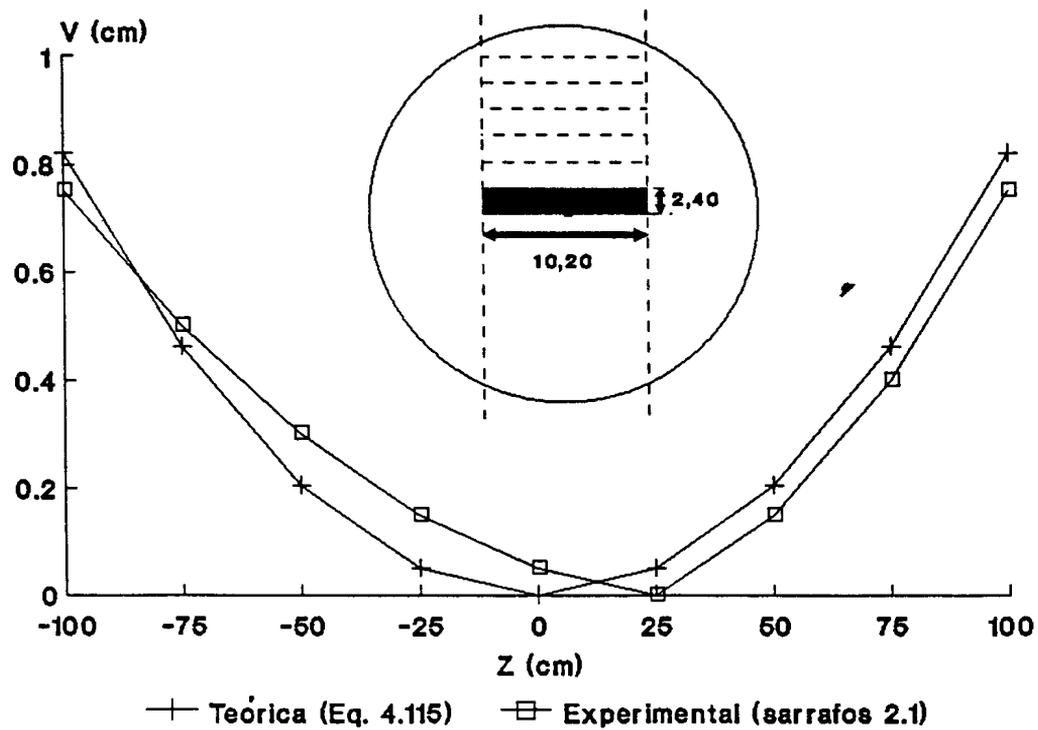


(b)

Figura 4.34 Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 4 de *Eucalyptus grandis*



(a)



(b)

Figura 4.35 Elásticas dos sarrafos obtidos da tora 4 de *Eucalyptus grandis*

As piores aproximações observadas nas Fig. 4.31(b) e 4.32, as quais se referem à tora 3 são consequências dos valores anormais de deslocamentos, medidos no sarrafo 2.13.

Uma análise mais aprofundada em termos de tensões, levando-se em conta as variações dos módulos de elasticidade dos sarrafos e das deformações periféricas potenciais não simétricas, poderia melhorar ainda mais as previsões teóricas. Entretanto acredita-se ser mais importante do ponto de vista prático, concentrar esforços na otimização do instrumental de medição da deformação periférica potencial para viabilizar a seleção de árvores para serraria.

Para comprovar a importância desta seleção cita-se o fato de que as quatro toras avaliadas experimentalmente neste trabalho foram as únicas que não racharam, de um total de vinte e três serradas. As demais foram perdidas porque as pranchas diametrais subdividiram-se em duas partes fletidas logo após o corte efetuado pelo engenho 2 da Fig. 3.5.

Uma primeira observação prática dessa possível seleção pode ser feita na Fig. 4.36, onde as curvas foram obtidas através da equação (4.115) com os correspondentes parâmetros da Tab. 4.2.

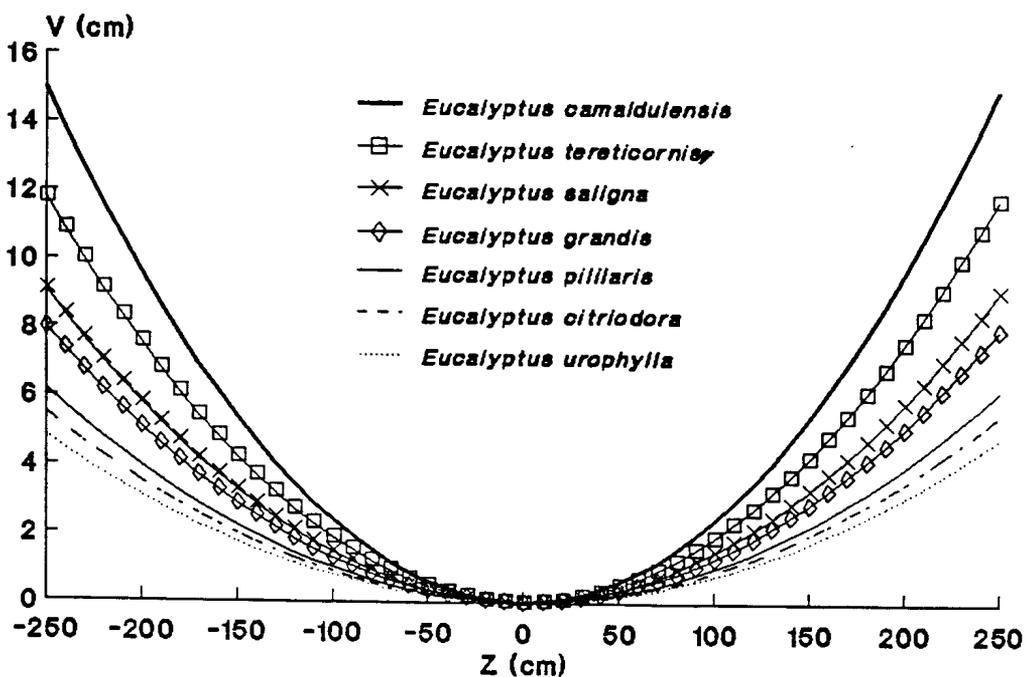


Figura 4.36 Flechas apresentadas por várias espécies de *Eucalyptus*

4.10 Influência da conicidade da tora e da inclinação dos anéis de crescimento na seção transversal da peça nos  $E_r$ ,  $E_\theta$  e  $E_z$ .

Trocando-se a notação tensorial das equações (4.1d) e (4.1f) por aquela matricial utilizada nas matrizes de constantes elásticas dos itens 4.1.2 e 4.1.3 e isolando respectivamente  $E'_\theta$  e  $E'_z$ , obtêm-se

$$E'_\theta = \frac{1}{\frac{\text{sen}^4\alpha}{E_r} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{1}{4G_{r\theta}} - \frac{\nu_{\theta r}}{2E_\theta} \right) + \frac{\text{cos}^4\alpha}{E_\theta}} \quad (4.116a)$$

$$E'_z = \frac{1}{\frac{\text{sen}^4\alpha}{E_r} + \text{sen}^2 2\alpha \left( \frac{1}{4G_{rz}} - \frac{\nu_{zr}}{2E_z} \right) + \frac{\text{cos}^4\alpha}{E_z}} \quad (4.116b)$$

Estas equações foram, até bem pouco tempo atrás, substituídas pelas tradicionais equações de HANKINSON, as quais são respectivamente

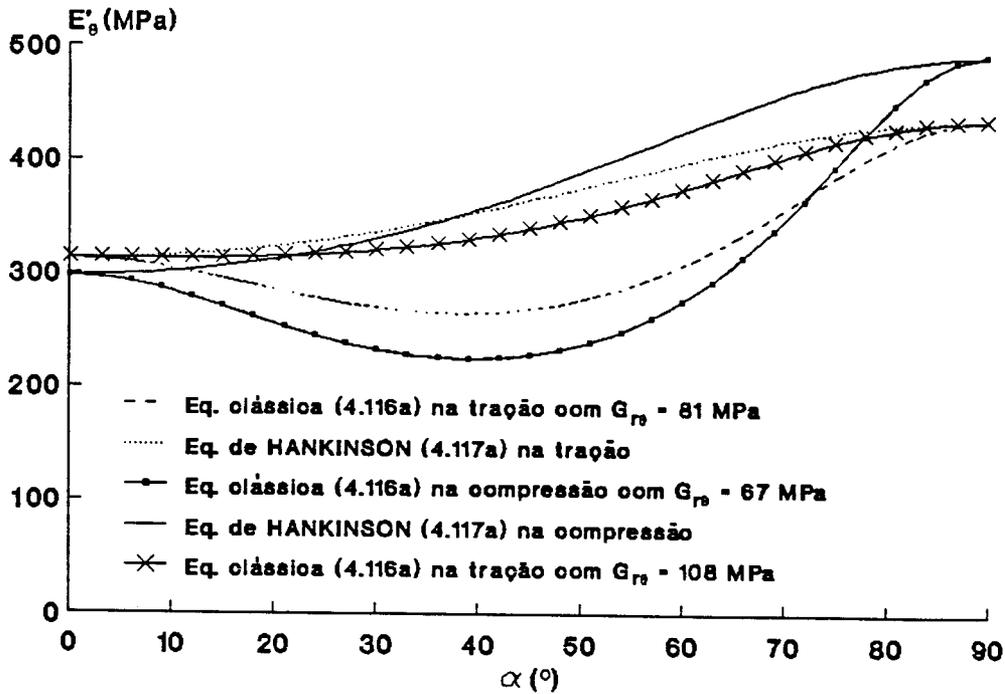
$$E'_\theta = \frac{E_\theta E_r}{E_\theta \text{sen}^2\alpha + E_r \text{cos}^2\alpha} \quad (4.117a)$$

$$E'_z = \frac{E_z E_r}{E_z \text{sen}^2\alpha + E_r \text{cos}^2\alpha} \quad (4.117b)$$

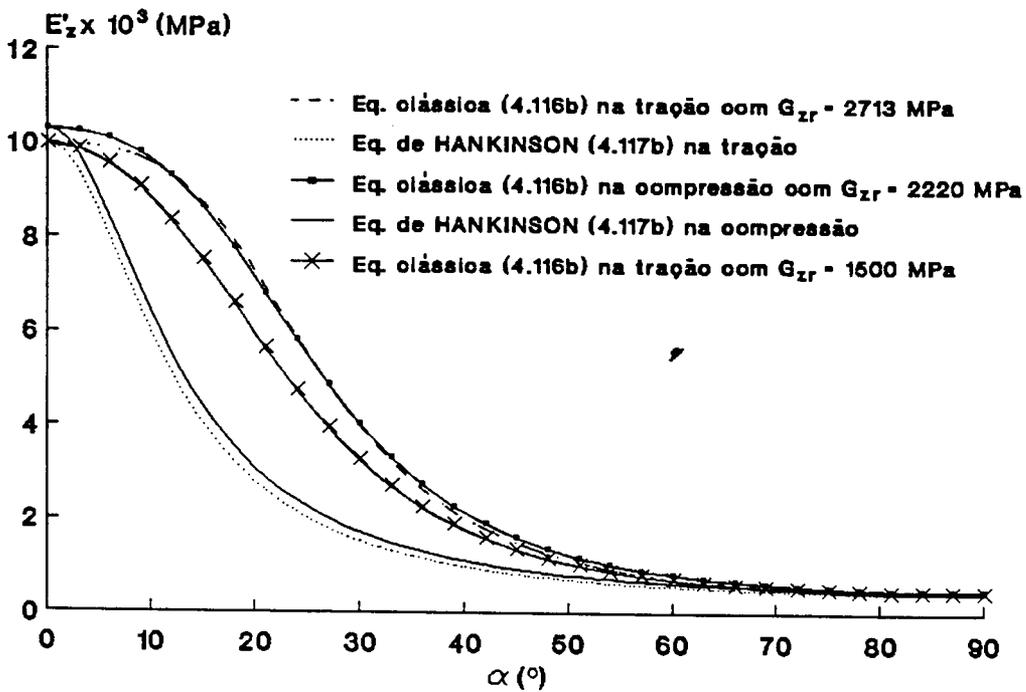
Nota-se que as equações (4.117) são, do ponto de vista matemático, completamente diferentes das equações (4.116) mas do ponto de vista da engenharia de estruturas pode-se admitir que as diferenças marcantes são impostas pelas constantes elásticas  $G_{ij}$  e  $\nu_{ij}$ .

Nas figuras 4.37 estão mostradas as envoltórias obtidas com estas equações, onde se observam com grande clareza as variações do  $E'_\theta$  e do  $E'_z$  com o ângulo  $\alpha$ .

As constantes elásticas utilizadas foram aquelas das matrizes de tração e de compressão, podendo verificar-se de imediato, que o comportamento desse material à tração é de fato, o mesmo que na compressão.



(a)



(b)

Figura 4.37 Envoltórias que mostram a variação do  $E_\theta$  com o ângulo existente entre a direção da carga e a dos anéis de crescimento (a) e a variação do  $E_z$  com o ângulo entre a direção da carga aplicada e a direção das fibras (b)

Observa-se na figura 4.37(a) que o  $E'_\theta$  praticamente não varia com o ângulo  $\alpha$  existente entre a direção da carga aplicada e a direção dos anéis de crescimento e isto se deve ao fato de ser o valor de  $E_\theta$  muito próximo do valor de  $E_r$ , principalmente quando a madeira está submetida à tração.

Esta pequena variação também explica a constatação de que o  $E_z$  determinado pela flexão também não varia significativamente com a inclinação dos anéis de crescimento na seção transversal do corpo de prova.

Verifica-se também nesta figura que a equação (4.116a) com um  $G_{r\theta} = 81$  MPa produz para o intervalo aproximado de 5 a 65° valores de  $E_\theta'$  menores do que o próprio  $E_\theta$ , o que não acontece quando se utiliza por exemplo um valor arbitrário de 108 MPa para o  $G_{r\theta}$ . Este fato indica portanto que o  $G_{r\theta}$  da matriz 4.4 e logicamente também o da matriz 4.3, estão subvalorizados em relação aos módulos de elasticidade  $E_\theta$  e  $E_r$ .

Na figura 4.37(b), entretanto, observa-se que um ângulo  $\alpha$  de 30° entre a direção das fibras e a direção do eixo da peça já praticamente transfere para  $E_z$  o valor relativamente pequeno do respectivo  $E_r$ .

Verifica-se claramente que o  $G_{zr}$  tem bastante influência na rigidez da madeira e que o seu rebaixamento, como por exemplo ao valor arbitrário de 1500 MPa, faz com que a equação clássica (4.116b) se aproxime da equação (4.117b) de HANKINSON.

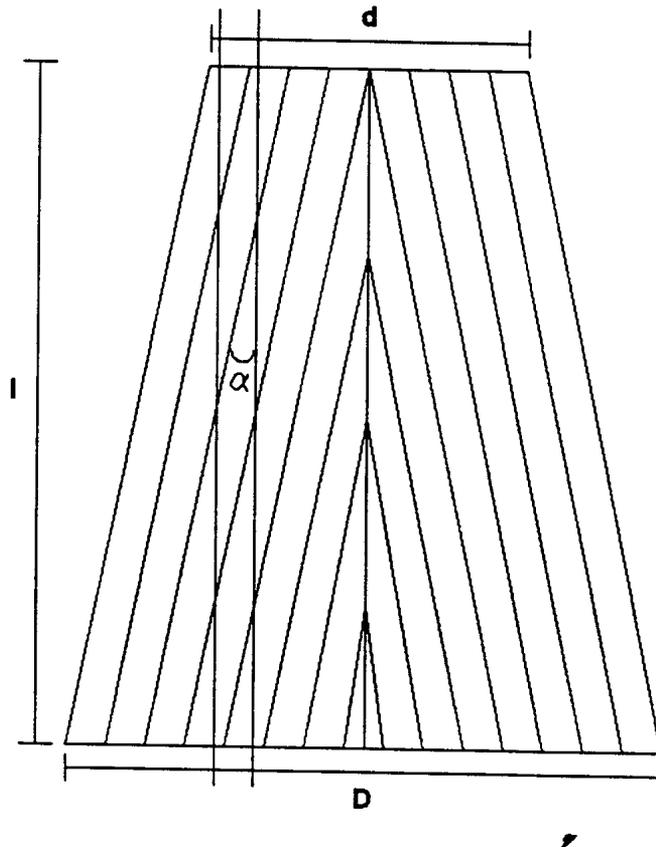
Portanto, a discrepância entre a equação (4.116b) e a equação (4.117b), bastante grande neste caso particular, pode ser ainda maior ou praticamente zerar dependendo do valor do  $G_{zr}$  da espécie.

Do ponto de vista prático, pode-se observar na figura 3.5 que tanto os cortes produzidos pelos engenhos 1 e 2 quanto aqueles efetuados pela multilâminas são paralelos à medula da árvore e portanto, de acordo com a figura 4.38, produzem peças serradas com seus eixos orientados de um ângulo  $\alpha$  em relação à direção das fibras.

Considerando-se, como mostra esta figura, que as fibras são orientadas segundo os próprios cones de crescimento da árvore, então este ângulo  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{D - d}{2l} \quad (4.118)$$

Constatou-se no campo que para o *Eucalyptus grandis*, a diferença entre os dois diâmetros varia de 0 a 2,0 cm/m impondo portanto a  $\alpha$  um valor máximo de  $0,57^\circ$ .



**Figura 4.38** Desvio da grã, introduzido pelo método convencional de desdobro em toras cônicas

Este pequeno ângulo não provoca, de acordo com a envoltória da figura 4.37(b), nenhuma alteração no  $E_z$  e portanto não há necessidade de imporem-se restrições ou modificações no processo industrial de desdobro adotado para esta espécie.

No caso de conicidades acima de 5 cm/m, convém adaptar-se a técnica de desdobro de tal forma a efetuarem-se cortes paralelos aos cones de crescimentos da árvore.

## 5 - CONCLUSÕES

As principais conclusões obtidas neste trabalho são, na ordem de apresentação do texto, as seguintes:

Os ensaios de tração e de compressão, quando puros, produzem os mesmos valores para as constantes elásticas da madeira úmida de *Eucalyptus grandis*. Entretanto, do ponto de vista prático os ensaios de tração mostraram-se mais consistentes.

As componentes  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  da tensão de crescimento não apresentam importância prática porque além de serem de pequenas intensidades, se comparadas com a componente longitudinal  $\sigma_z$ , influem muito pouco nos deslocamentos das elásticas das peças serradas devido aos baixos valores de  $\nu_{rz}$  e  $\nu_{\theta z}$ , e principalmente porque as dimensões das peças serradas segundo estas direções são também pequenas se comparadas com a da direção axial. Esta constatação simplifica em muito a seleção de árvores para serraria.

A distribuição parabólica proposta para explicar a variação da componente longitudinal da tensão de crescimento no raio da árvore, independente das componentes radial e tangencial explica muito bem o gradiente de tensões no sentido medula-casca. Esta distribuição depende da resistência da madeira, da deformação longitudinal periférica potencial e do raio da árvore.

A curvatura dos sarrafos é a mesma quer ele tenha sido obtido diretamente da tora ou, como mais normalmente, da prancha diametral.

As flechas são muito bem estimadas pelas equações deduzidas, utilizando-se a distribuição linear no raio da árvore, da componente longitudinal da tensão de crescimento.

Para propósitos práticos as flechas das peças serradas, orientadas segundo os três eixos principais de elasticidade, independem das dimensões de suas seções transversais e também de suas localizações espaciais no interior da árvore.

As prognoses de deslocamentos efetuadas, comprovadas experimentalmente, mostram que a relação  $\frac{\alpha z}{R}$  é o melhor indicador para seleção de árvores de *Eucalyptus* para serraria.

O parâmetro  $\alpha z$  necessário as distribuições teóricas existentes e principalmente nesta linear

é, pela técnica desenvolvida neste trabalho, de fácil medição e de grande precisão mesmo quando obtido na floresta.

Por ser não destrutivo este método permite fazer-se um completo acompanhamento da evolução da tensão de crescimento ao longo da vida da árvore com o intuito de procederem-se seleções precoces de boas árvores de *Eucalyptus* para serraria. Apresenta entretanto a desvantagem de ser um método caro e demorado principalmente quando aplicado em grande número de determinações.

A seleção de árvores também pode ser feita a partir dos resultados obtidos dos desdobros das árvores de uma população, do mesmo modo como vem sendo feito, em outros países com as rachaduras de topo. Entretanto, por serem métodos destrutivos, somente podem ser aplicados em espécies de boa brotação e particularmente após um corte raso.

As equações teóricas desenvolvidas que mostram as variações dos módulos de elasticidade com a direção dos respectivos elementos anatômicos da madeira, indicam que as tradicionais equações de HANKINSON são apenas casos particulares, aplicáveis somente às espécies de baixos módulos de elasticidade transversais.

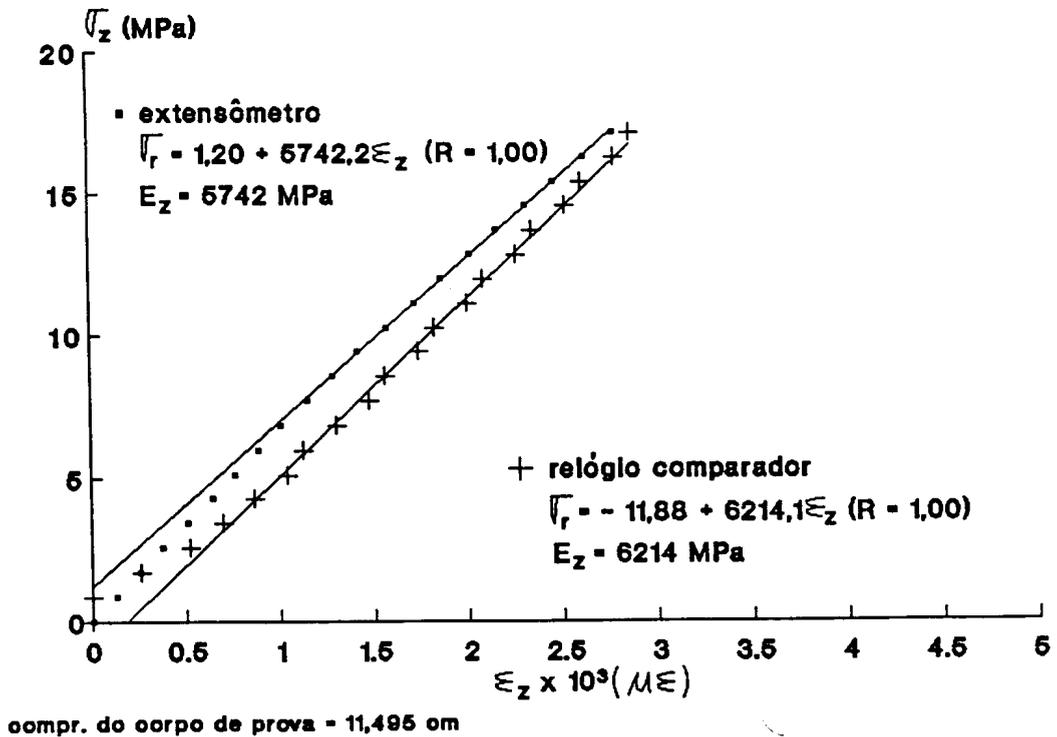
Estas mesmas equações mostram que as conicidades normalmente encontradas em árvores de *Eucalyptus*, não prejudicam a qualidade mecânica da madeira serrada, mesmo quando o desdobro é feito pela técnica convencional de cortes paralelos à medula.

**ANEXO I****RESULTADOS DOS ENSAIOS REFERIDOS NOS ÍTENS 4.1.1 A 4.1.3**

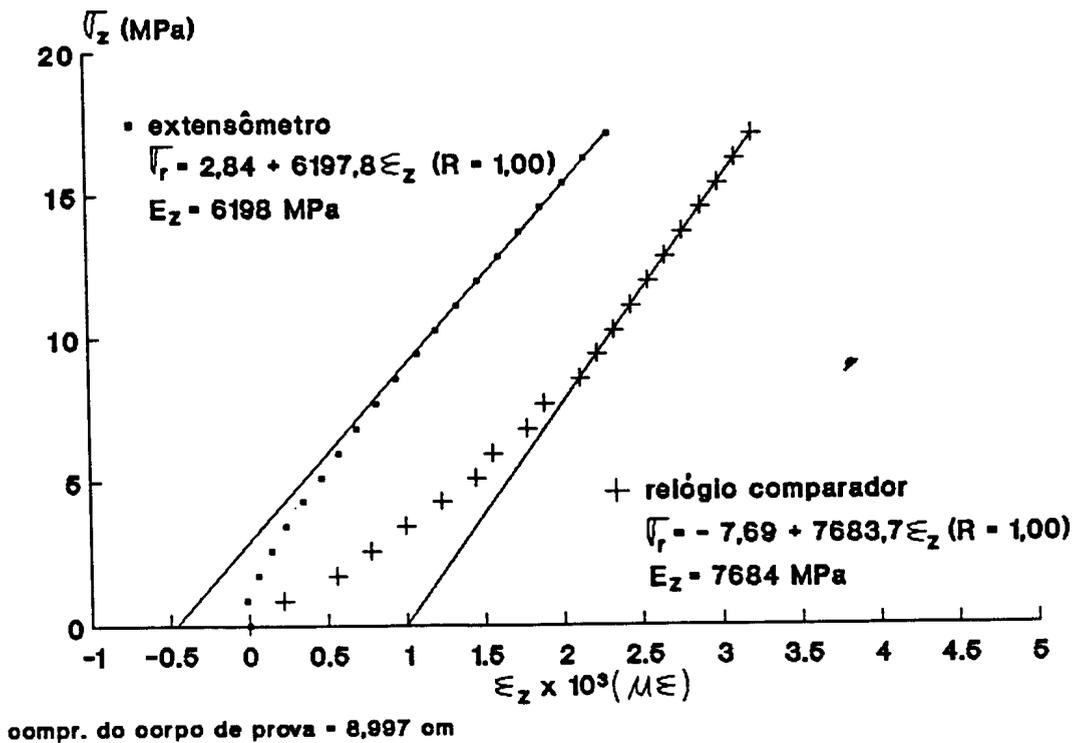
**ANEXO I<sub>A</sub> (Referente ao item 4.1.1)**

**INFLUÊNCIA DO TAMANHO DO CORPO DE PROVA NO MÓDULO DE ELASTI-  
CIDADE DETERMINADO NA DIREÇÃO LONGITUDINAL**

A Fig. I<sub>A<sub>i</sub></sub> está relacionada com a Tab. I<sub>A<sub>i</sub></sub>

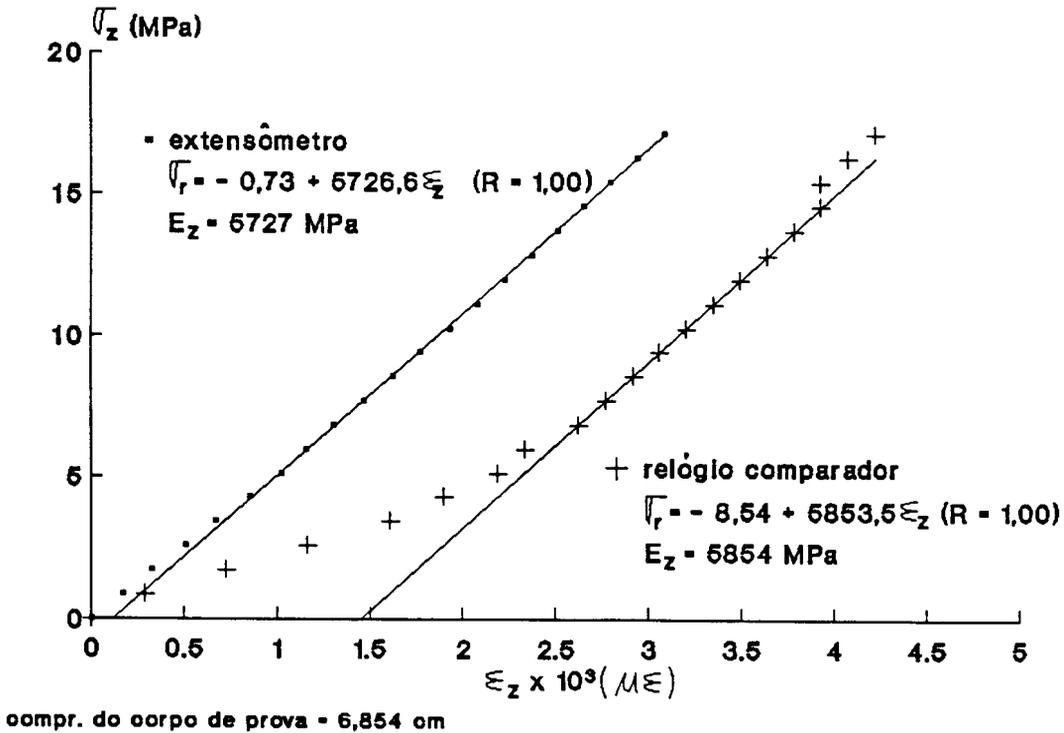


(a)

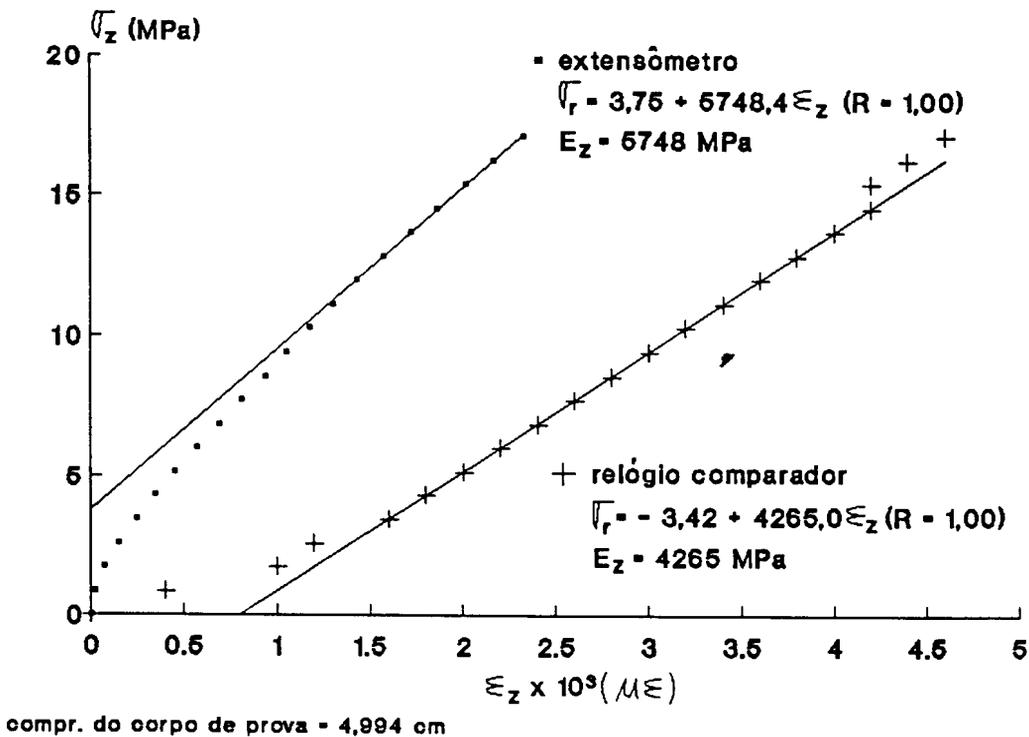


(b)

Figura I<sub>A1</sub> Módulo de elasticidade longitudinal determinado na compressão X comprimento do corpo de prova de uma espécie desconhecida

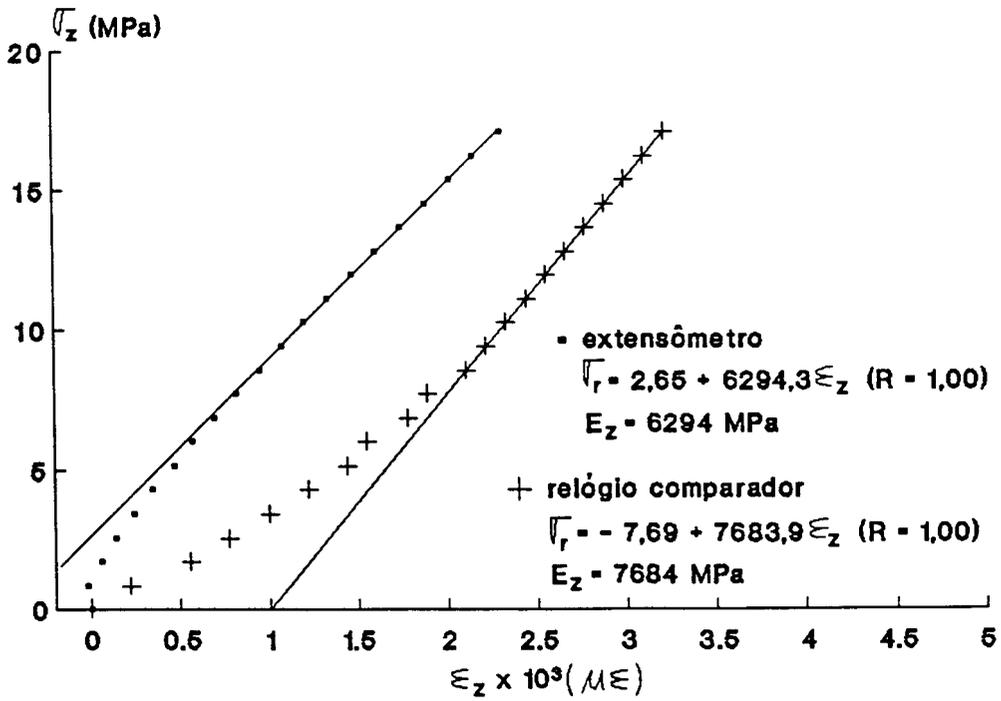


(a)



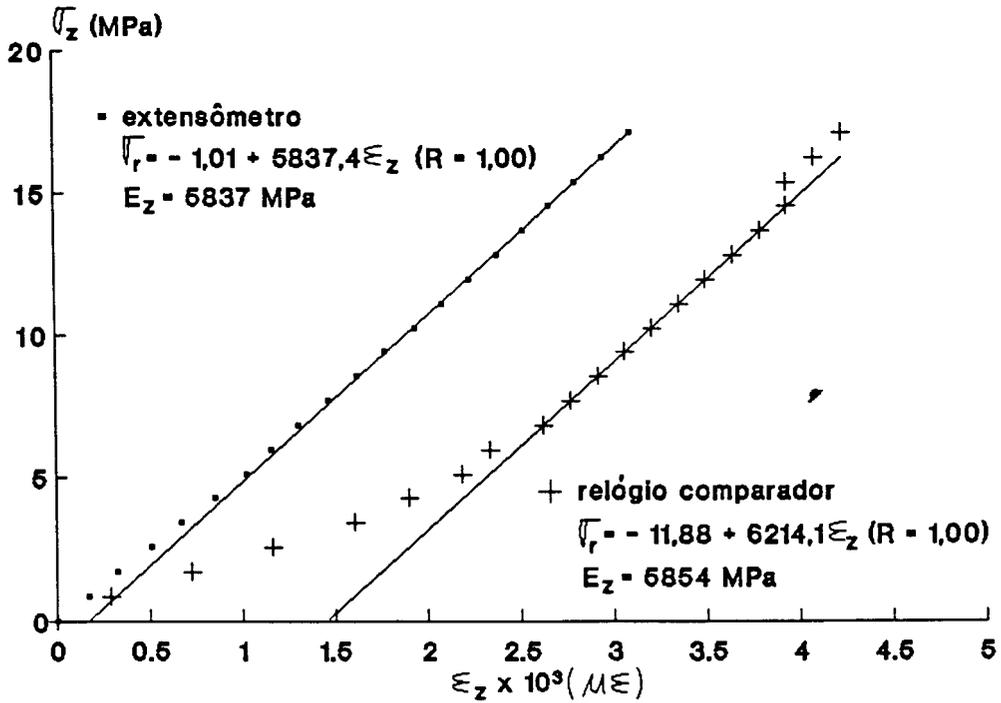
(b)

Figura I<sub>A2</sub> Módulo de elasticidade longitudinal determinado na compressão X comprimento do corpo de prova de uma espécie desconhecida



compr. do corpo de prova = 2,920 cm

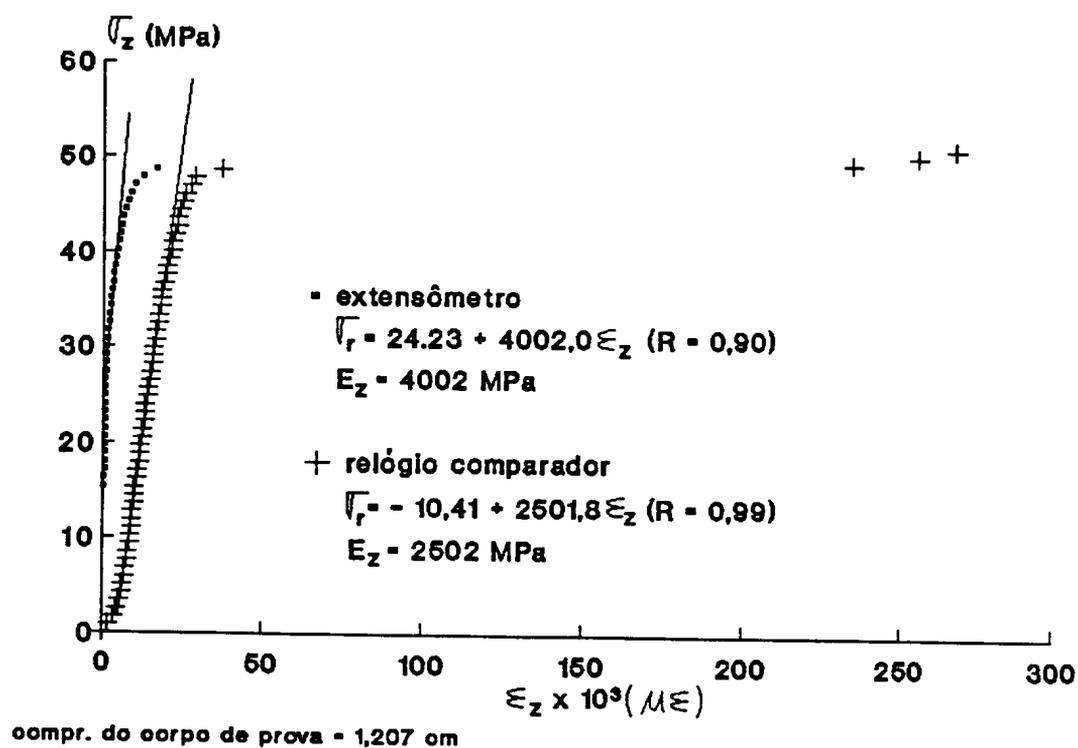
(a)



compr. do corpo de prova = 2,920 cm (2)

(b)

Figura I<sub>A3</sub> Módulo de elasticidade longitudinal determinado na compressão X comprimento do corpo de prova de uma espécie desconhecida



(a)

Figura I<sub>A4</sub> Módulo de elasticidade longitudinal determinado na compressão X comprimento do corpo de prova de uma espécie desconhecida

Tabela I<sub>A1</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de uma espécie desconhecida

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 2,920		Tangencial: 2,005	Longitudinal: 11,495
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	Relógio Comparador (mm)
Compressão	0	0	0
	500	65	0
	1000	130	0.03
	1500	190	0.06
	2000	255	0.08
	2500	325	0.10
	3000	385	0.12
	3500	450	0.13
	4000	510	0.15
	4500	580	0.17
	5000	650	0.18
	5500	715	0.20
	6000	795	0.21
	6500	870	0.23
	7000	940	0.24
	7500	1020	0.26
	8000	1090	0.27
	8500	1170	0.29
	9000	1245	0.30
	9500	1325	0.32
	10000	1405	0.33

Tabela I<sub>A2</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de uma espécie desconhecida

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 2,920		Tangencial: 2,005	Longitudinal: 8,997
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	Relógio Comparador (mm)
Compressão	0	0	0
	500	-10	0.02
	1000	30	0.05
	1500	70	0.07
	2000	120	0.09
	2500	175	0.11
	3000	235	0.13
	3500	290	0.14
	4000	350	0.16
	4500	415	0.17
	5000	480	0.19
	5500	545	0.20
	6000	605	0.21
	6500	675	0.22
	7000	745	0.23
	7500	810	0.24
	8000	880	0.25
	8500	950	0.26
	9000	1020	0.27
	9500	1090	0.28
	10000	1165	0.29

Tabela I<sub>A3</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de uma espécie desconhecida

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 2,920		Tangencial: 2,005	Longitudinal: 6,854
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	Relógio Comparador (mm)
Compressão	0	0	0
	500	85	0.02
	1000	165	0.05
	1500	255	0.08
	2000	340	0.11
	2500	430	0.13
	3000	515	0.15
	3500	585	0.16
	4000	660	0.18
	4500	740	0.19
	5000	820	0.20
	5500	895	0.21
	6000	975	0.22
	6500	1050	0.23
	7000	1125	0.24
	7500	1200	0.25
	8000	1270	0.26
	8500	1345	0.27
	9000	1415	0.27
	9500	1490	0.28
	10000	1565	0.29

Tabela I<sub>A4</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de uma espécie desconhecida

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 2,920		Tangencial: 2,005	Longitudinal: 4,994
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	Relógio Comparador (mm)
Compressão	0	0	0
	500	10	0.02
	1000	35	0.05
	1500	75	0.06
	2000	125	0.08
	2500	175	0.09
	3000	230	0.10
	3500	290	0.11
	4000	350	0.12
	4500	410	0.13
	5000	475	0.14
	5500	530	0.15
	6000	595	0.16
	6500	660	0.17
	7000	725	0.18
	7500	795	0.19
	8000	870	0.20
	8500	940	0.21
	9000	1020	0.21
	9500	1095	0.22
	10000	1175	0.23

Tabela I<sub>A5</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de uma espécie desconhecida

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 2,920		Tangencial: 2,005	Longitudinal: 2,920
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	Relógio Comparador (mm)
Compressão	0	0	0
	500	315	0.04
	1000	540	0.06
	1500	720	0.07
	2000	880	0.08
	2500	1020	0.09
	3000	1150	0.10
	3500	1270	0.11
	4000	1385	0.11
	4500	1490	0.12
	5000	1590	0.12
	5500	1690	0.13
	6000	1785	0.14
	6500	1880	0.14
	7000	1970	0.14
	7500	2065	0.15
	8000	2160	0.15
	8500	2245	0.16
	9000	2330	0.16
	9500	2420	0.17
	10000	2505	0.18

Tabela I<sub>A6</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de uma espécie desconhecida

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 2,920		Tangencial: 2,005	Longitudinal: 2,920
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	Relógio Comparador (mm)
Compressão	0	0	0
	500	90	0.01
	1000	190	0.03
	1500	295	0.05
	2000	420	0.06
	2500	540	0.06
	3000	635	0.07
	3500	755	0.08
	4000	870	0.09
	4500	980	0.09
	5000	1090	0.10
	5500	1200	0.10
	6000	1315	0.11
	6500	1420	0.11
	7000	1520	0.12
	7500	1620	0.12
	8000	1720	0.13
	8500	1830	0.13
	9000	1930	0.14
	9500	2040	0.14
	10000	2140	0.15

Tabela I<sub>A7</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de uma espécie desconhecida

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 2.920		Tangencial: 2.005	
Longitudinal: 1.207			
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	Relógio Comparador (mm)
Compressão	0		0
	500		0.02
	1000		0.04
	1500		0.05
	2000		0.06
	2500		0.07
	3000		0.07
	3500		0.08
	4000		0.08
	4500		0.09
	5000		0.09
	5500		0.10
	6000		0.10
	6500		0.11
	7000		0.11
	7500		0.11
	8000		0.12
	8500		0.12
	9000	105	0.12
	9500	110	0.13
	10000	120	0.13
	10500	130	0.14
	11000	140	0.14
	11500	150	0.14
	12000	160	0.15
	12500	170	0.15
	13000	185	0.16
	13500	205	0.16
	14000	210	0.16
	14500	240	0.17
	15000	265	0.17
	15500	295	0.18
	16000	330	0.18
	16500	375	0.19
	17000	430	0.19
	17500	500	0.19
	18000	570	0.20
	18500	660	0.20
	19000	770	0.21
	19500	860	0.21
	20000 / 25000	1005 / 2870	0.22 / 0.28
	20500 / 25500	1120 / 3080	0.22 / 0.29
	21000 / 26000	1290 / 3440	0.22 / 0.30
	21500 / 26500	1410 / 3800	0.23 / 0.31
	22000 / 27000	1600 / 4350	0.24 / 0.33
	22500 / 27500	1730 / 4900	0.24 / 0.35
	23000 / 28000	1940 / 6150	0.25 / 0.45
	23500 / 28500	2100 / 8300	0.26 / 2.87
	24000 / 29000	2390 /	0.26 / 3.12
	24500 / 29500	2590 /	0.27 / 3.26

ANEXO I<sub>B</sub> (referente aos itens 4.12 e 4.13)

CONSTANTES ELÁSTICAS OBTIDAS NOS ENSAIOS  
DE TRAÇÃO E COMPRESSÃO EM CORPOS DE  
PROVA ÚMIDOS DE *Eucalyptus grandis*

A Fig. I<sub>B</sub><sub>i</sub> está relacionada com a Tab. I<sub>B</sub><sub>i</sub>

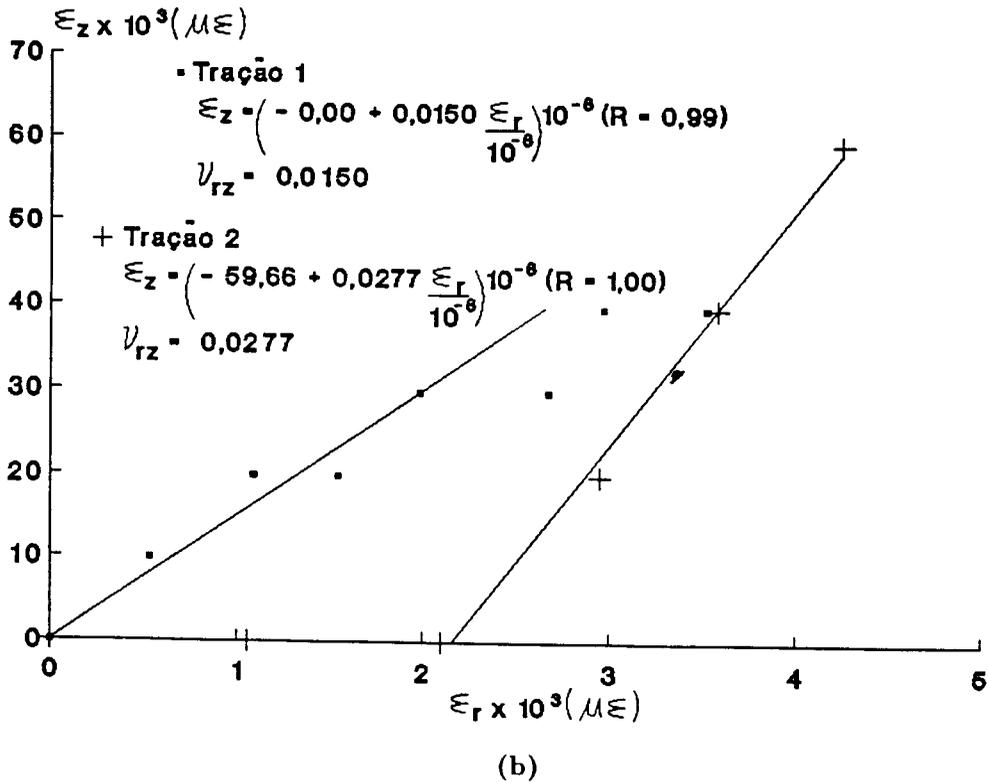
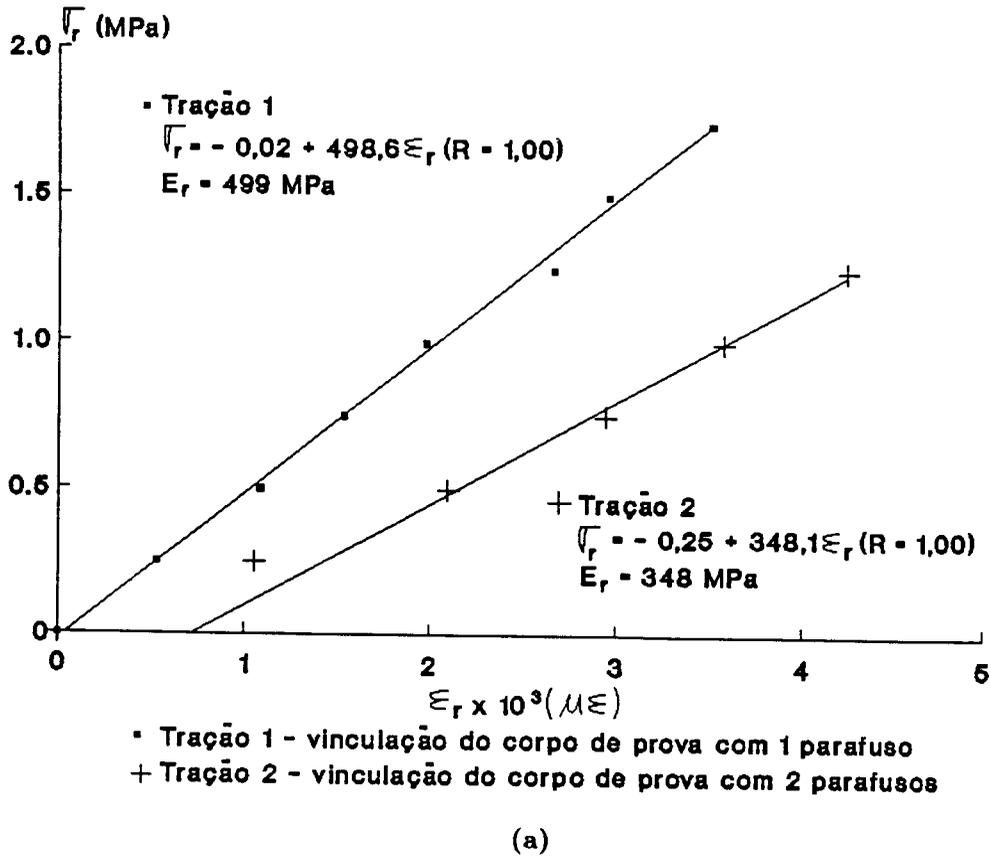


Figura I<sub>B1</sub> Diagramas tensão-deformação ambos na direção radial (a) e deformação na direção longitudinal - deformação na direção radial (b) na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

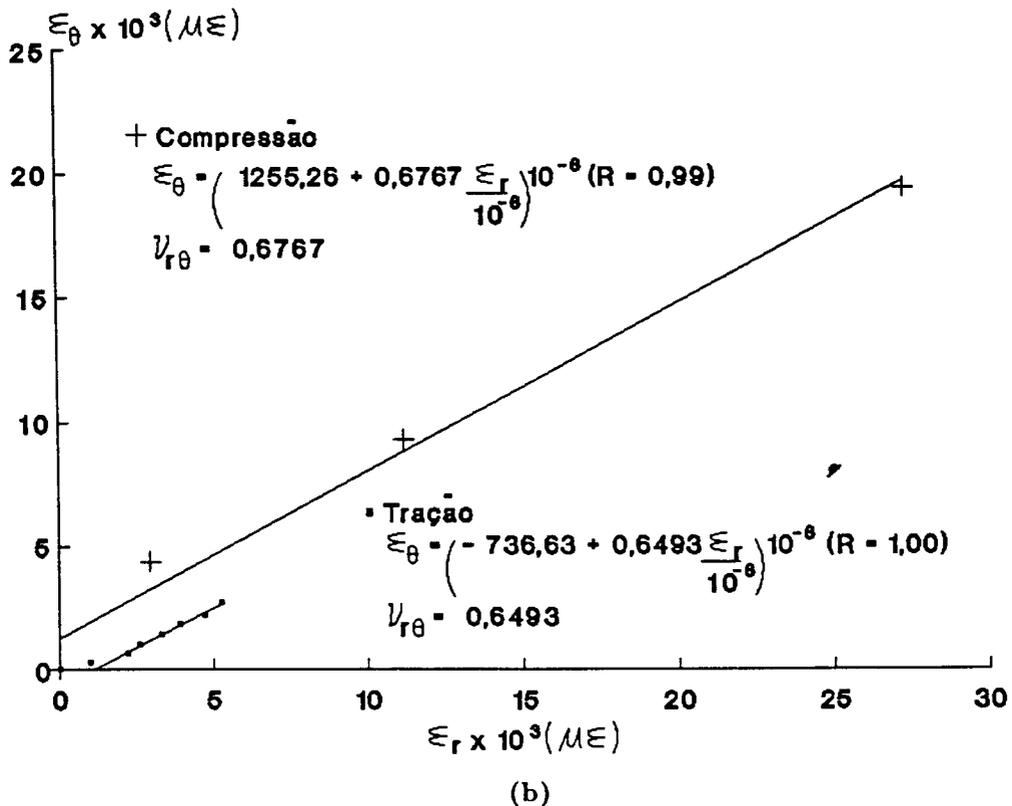
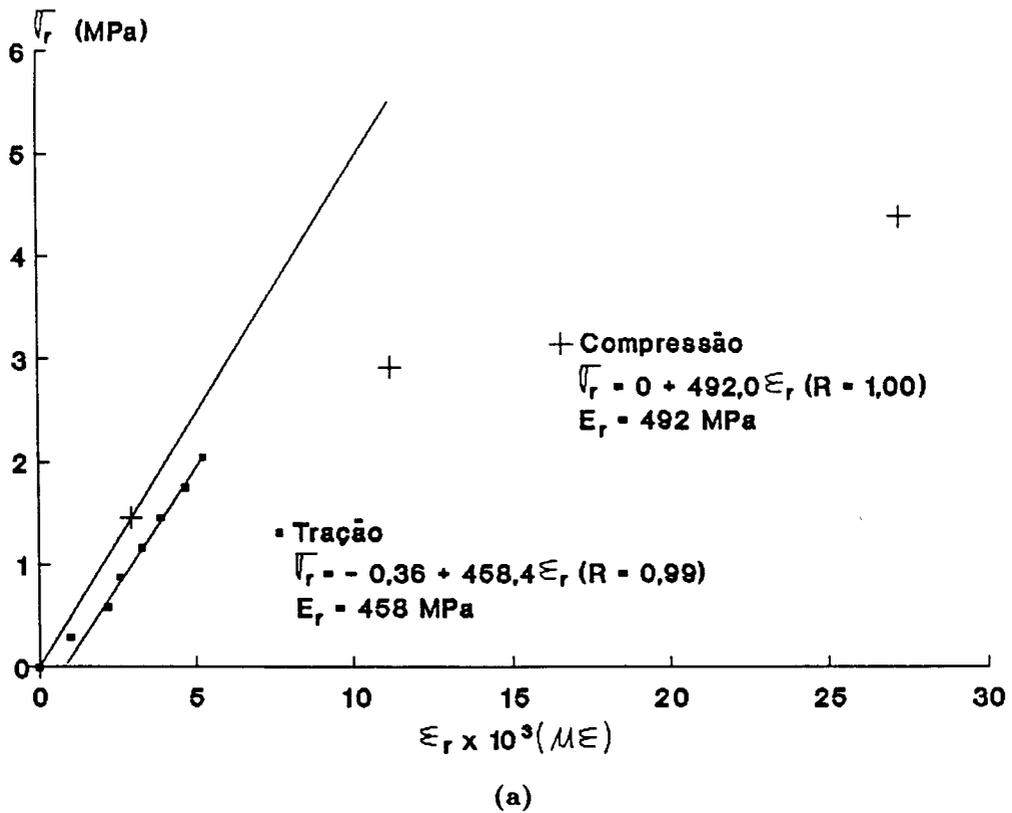


Figura IB2 Diagramas tensão-deformação ambos na direção radial (a) e deformação na direção tangencial - deformação na direção radial (b) na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

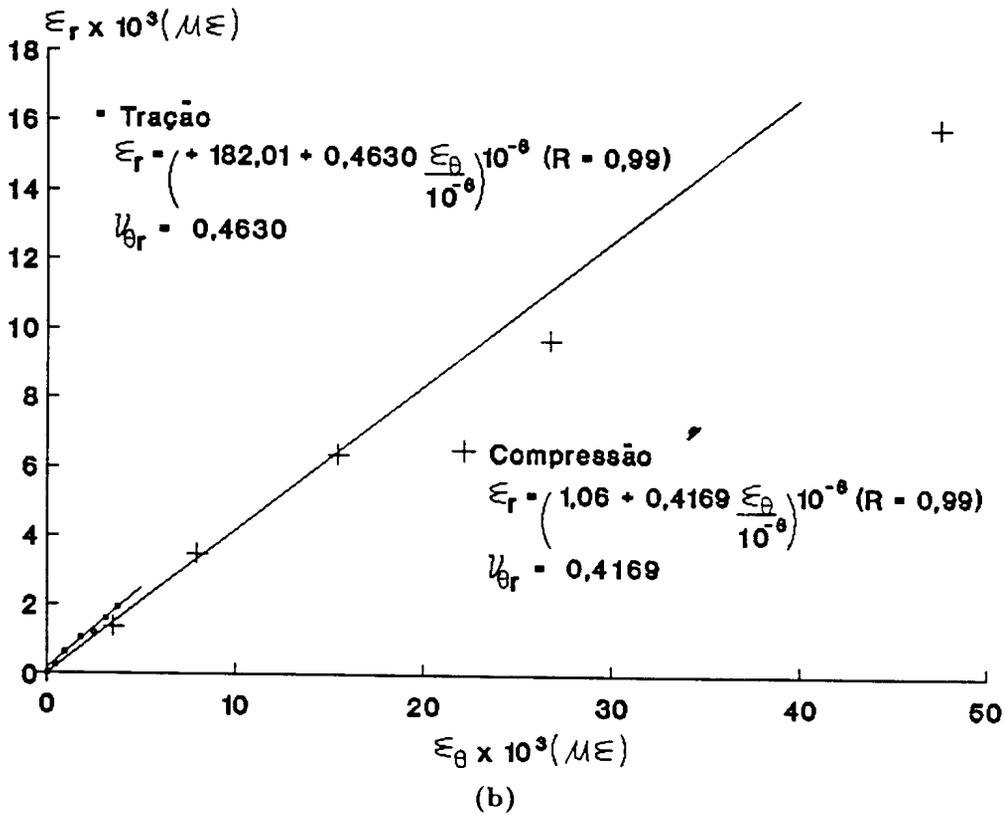
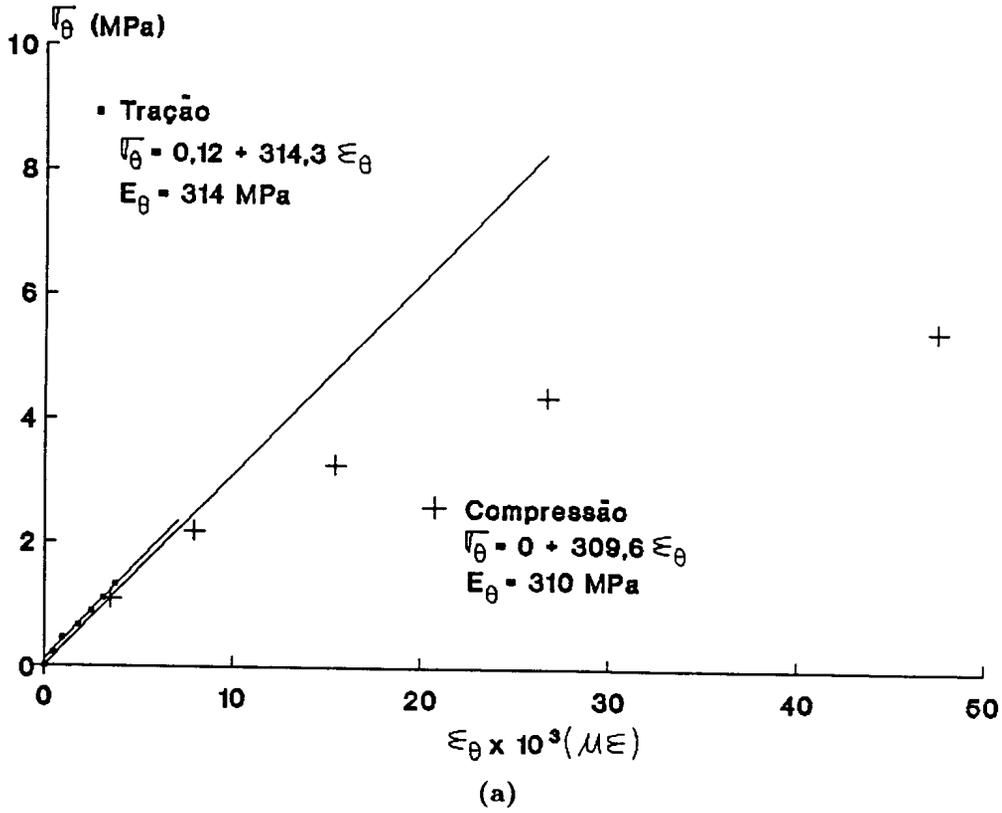


Figura IB3 Diagramas tensão-deformação ambos na direção tangencial (a) e de-  
 formação na direção radial - deformação na direção tangencial (b) na  
 madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

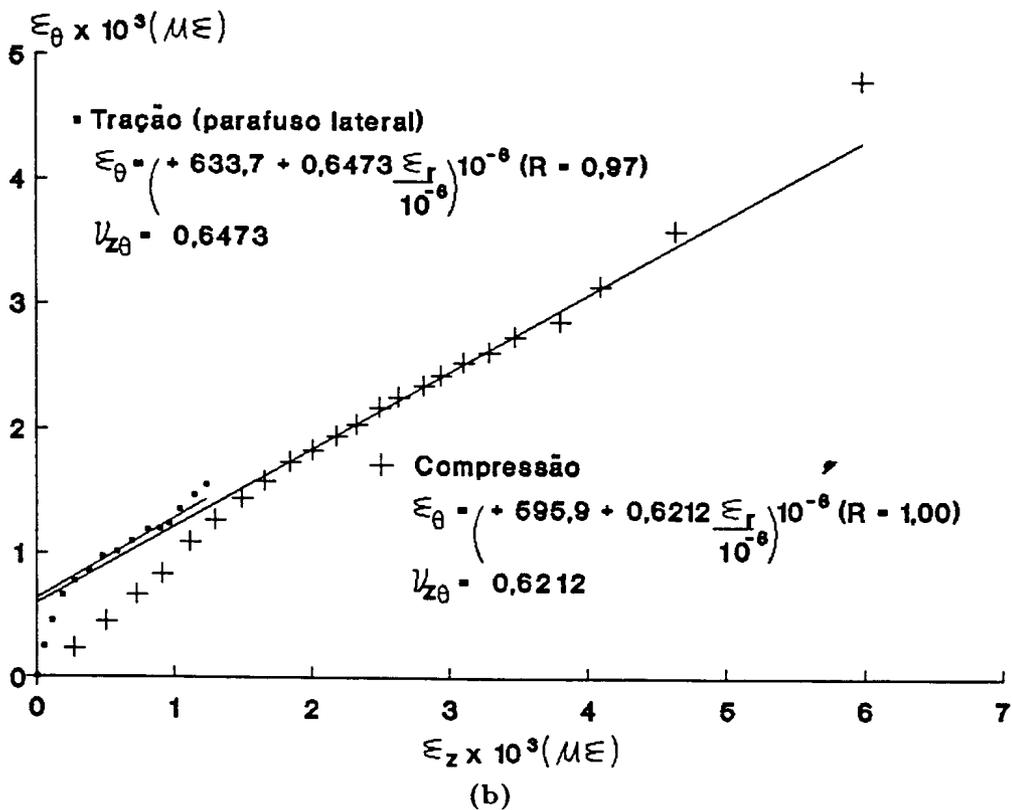
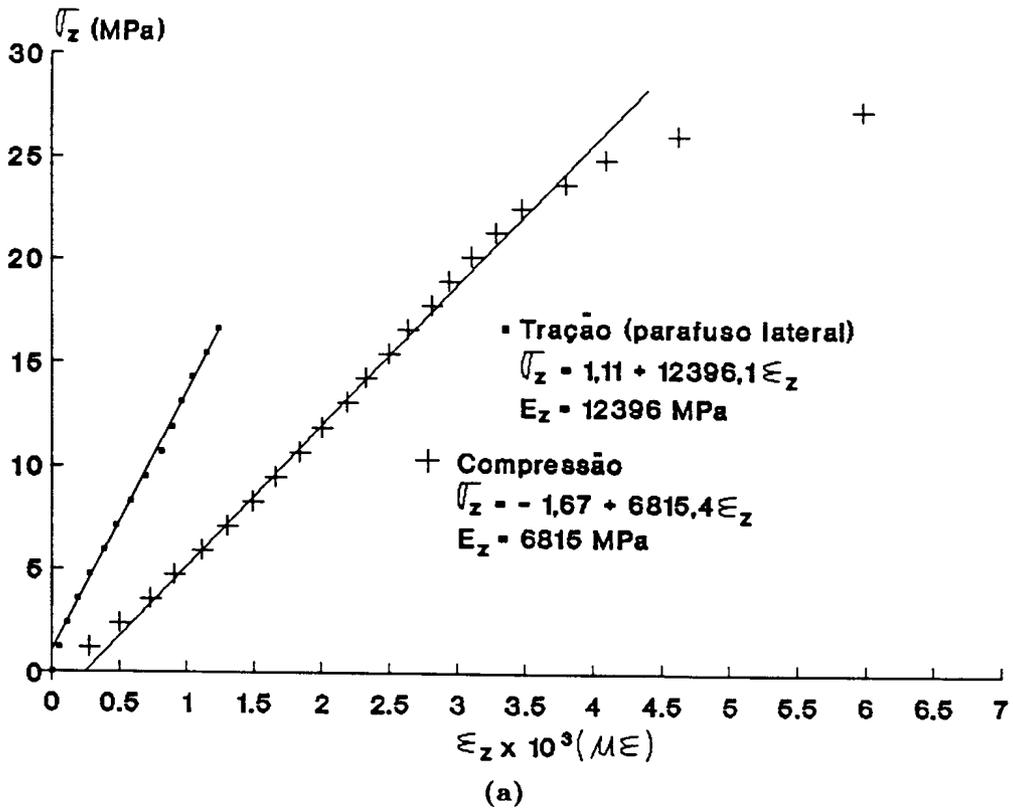


Figura I<sub>B4</sub> Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-  
 formação na direção tangencial - deformação na direção longitudinal (b)  
 na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

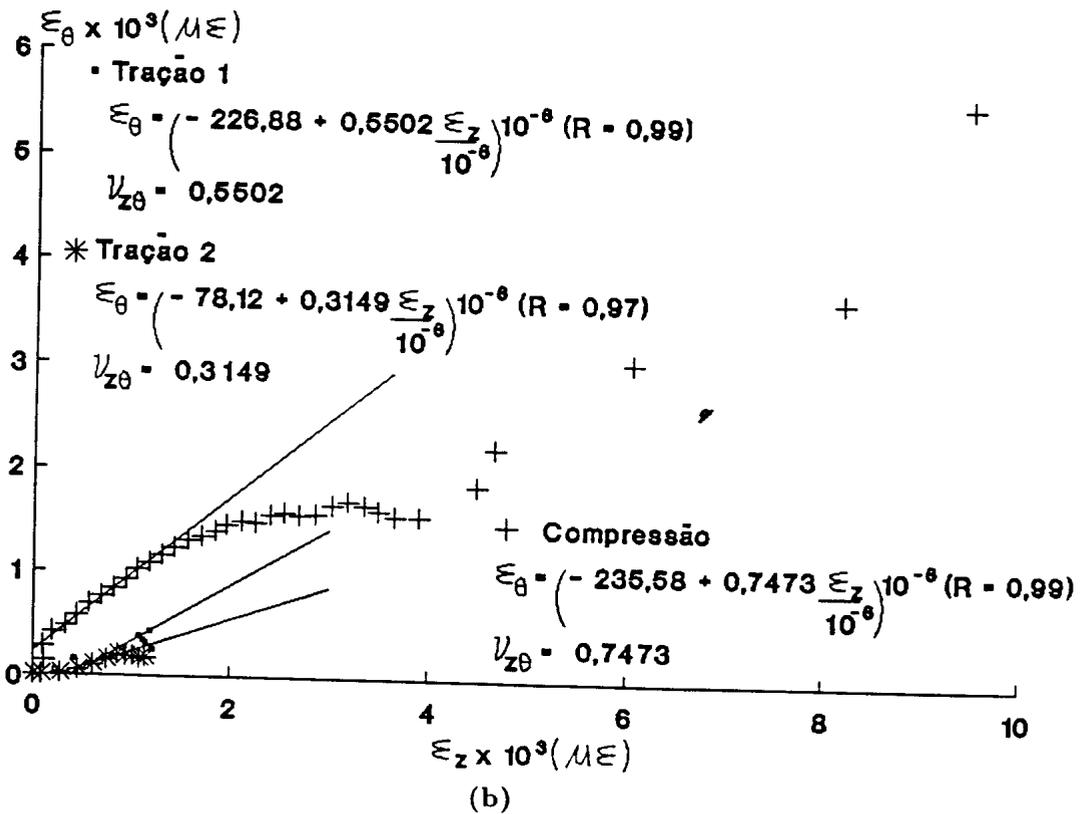
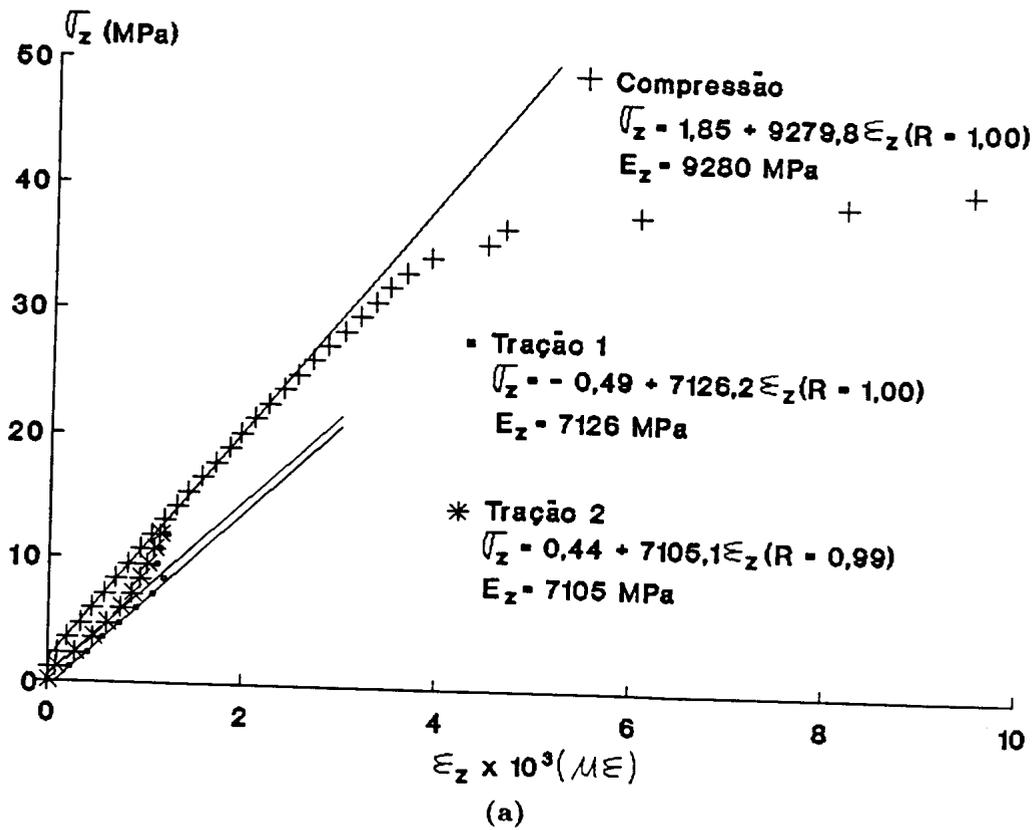
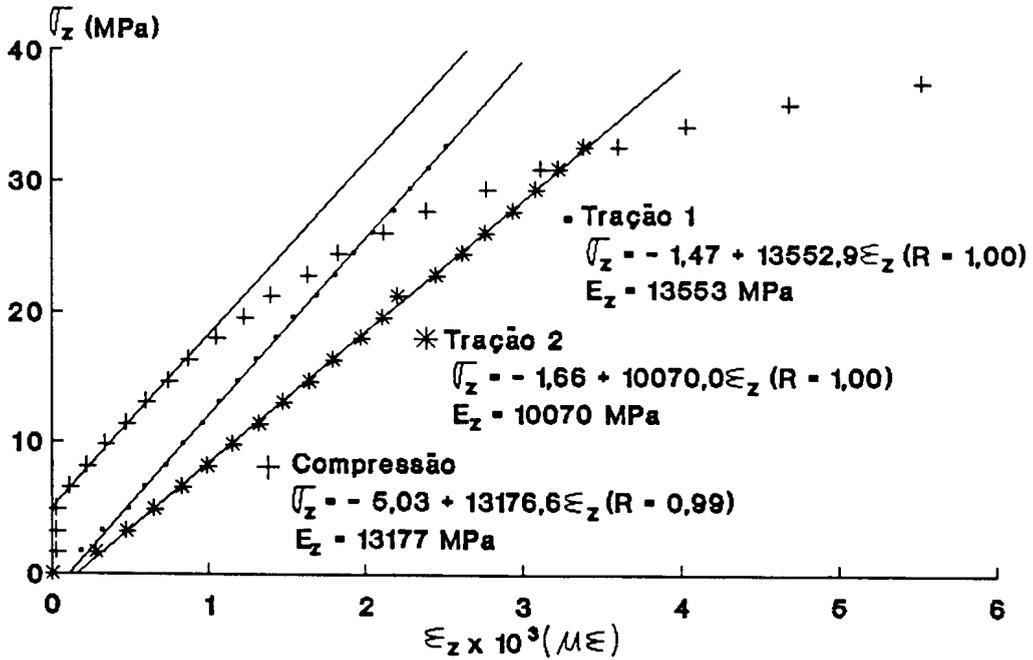
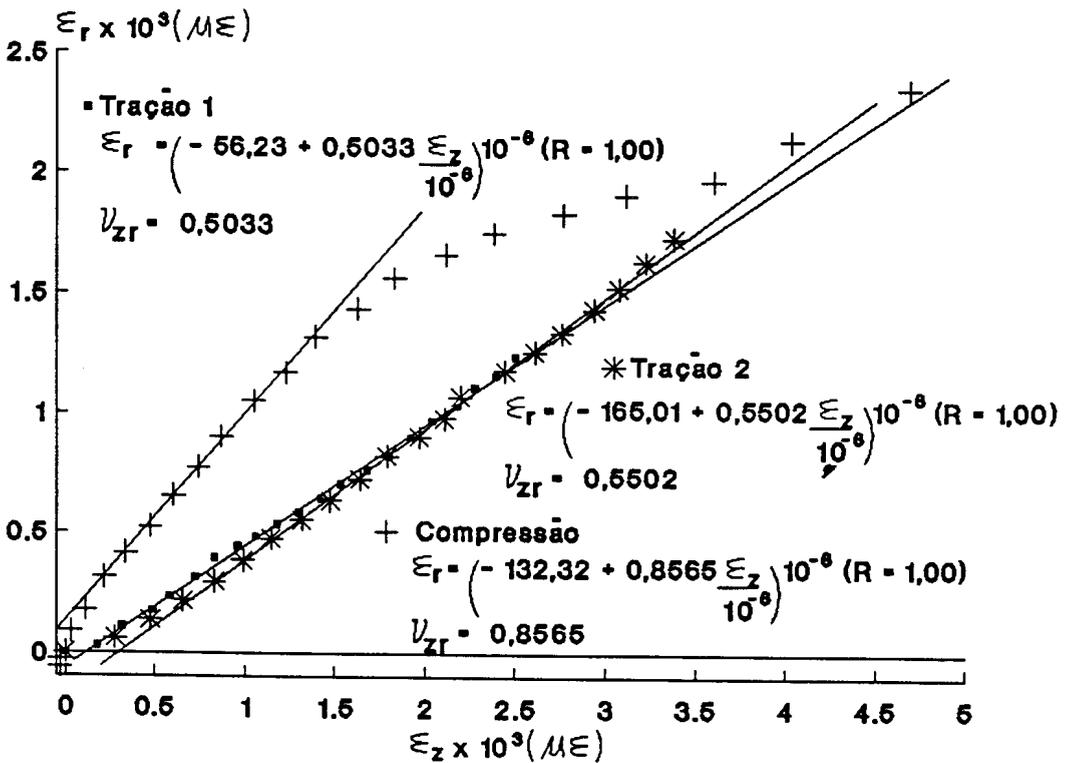


Figura IB5 Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-formação na direção tangencial - deformação na direção longitudinal (b) na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*



• Tração 1 - Somente colada a grade do extensômetro  
 \* Tração 2 - Corpo de prova mais curto

(a)



(b)

Figura IB6 Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-  
 formação na direção radial - deformação na direção longitudinal (b) na  
 madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

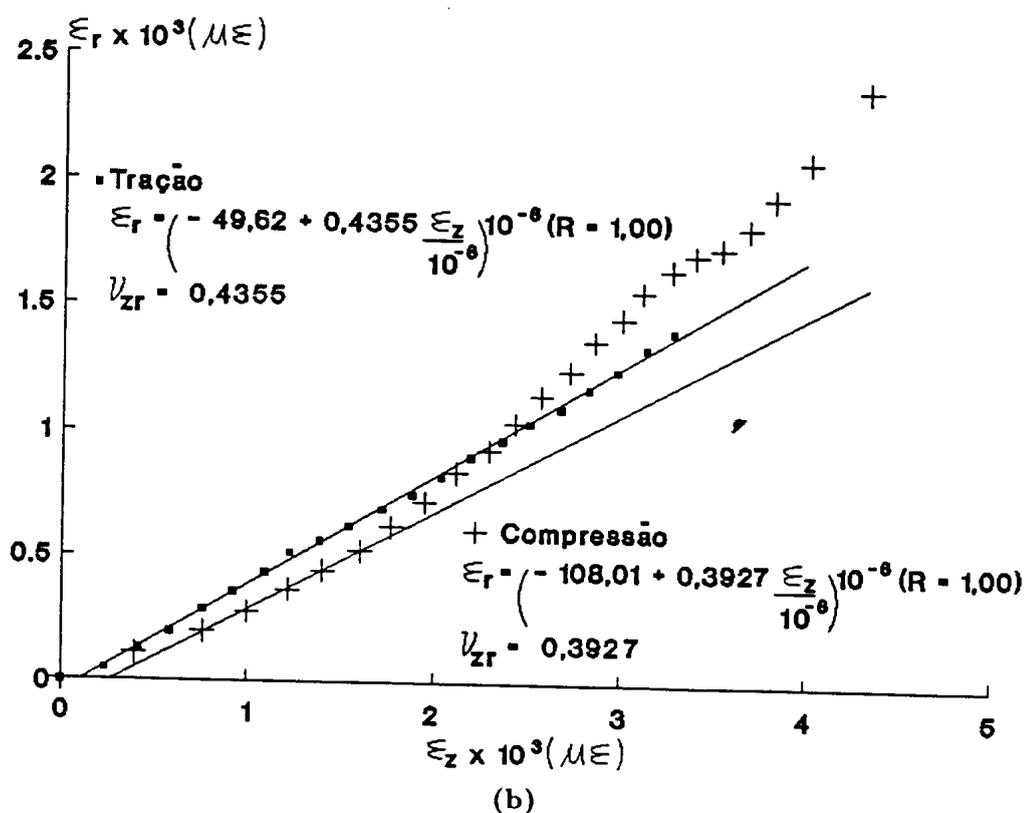
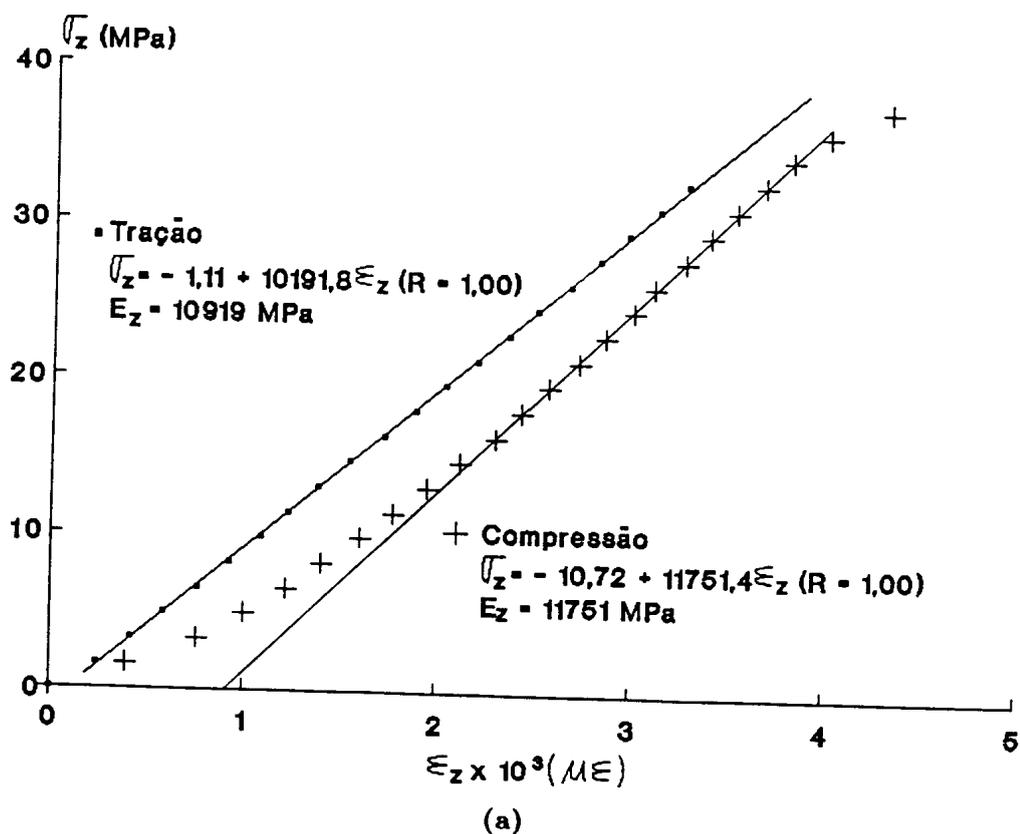


Figura IB7 Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-formação na direção radial - deformação na direção longitudinal (b) na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

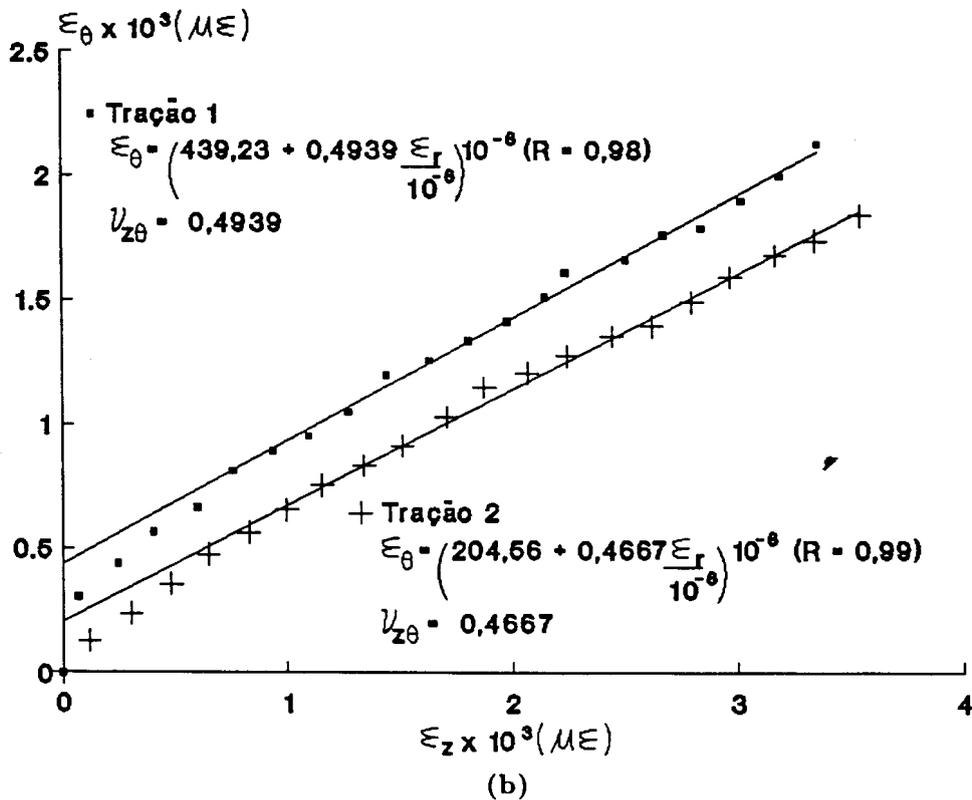
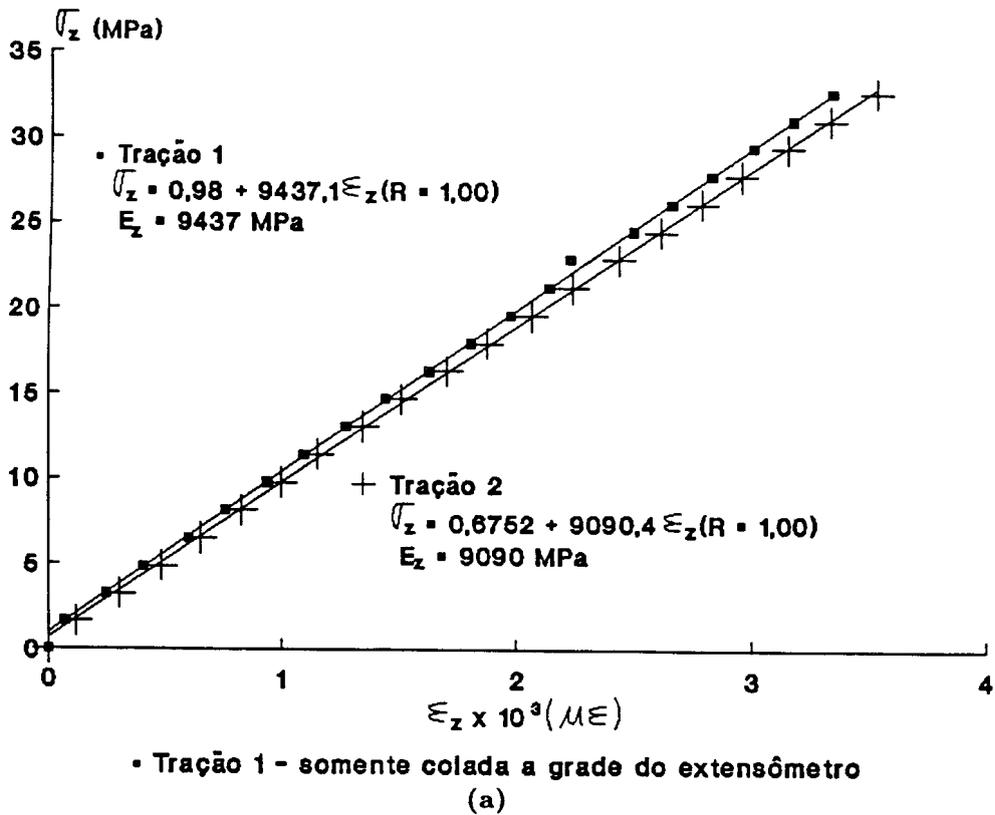


Figura I<sub>B8</sub> Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e deformação na direção tangencial - deformação na direção longitudinal (b) na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

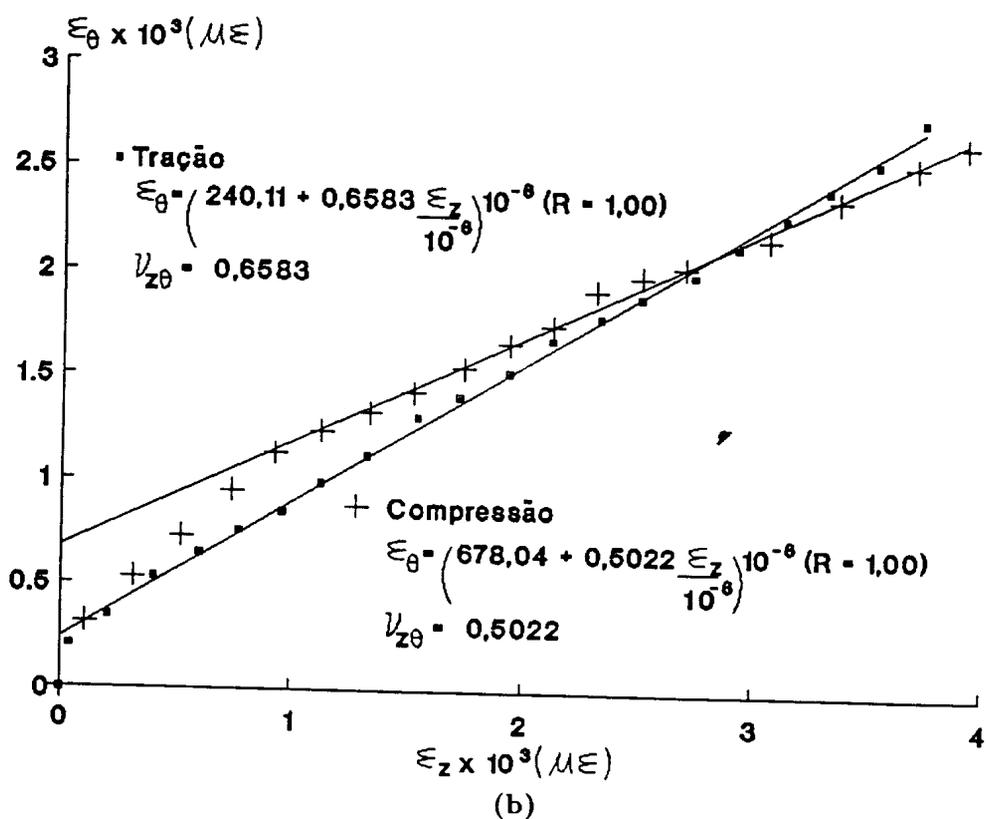
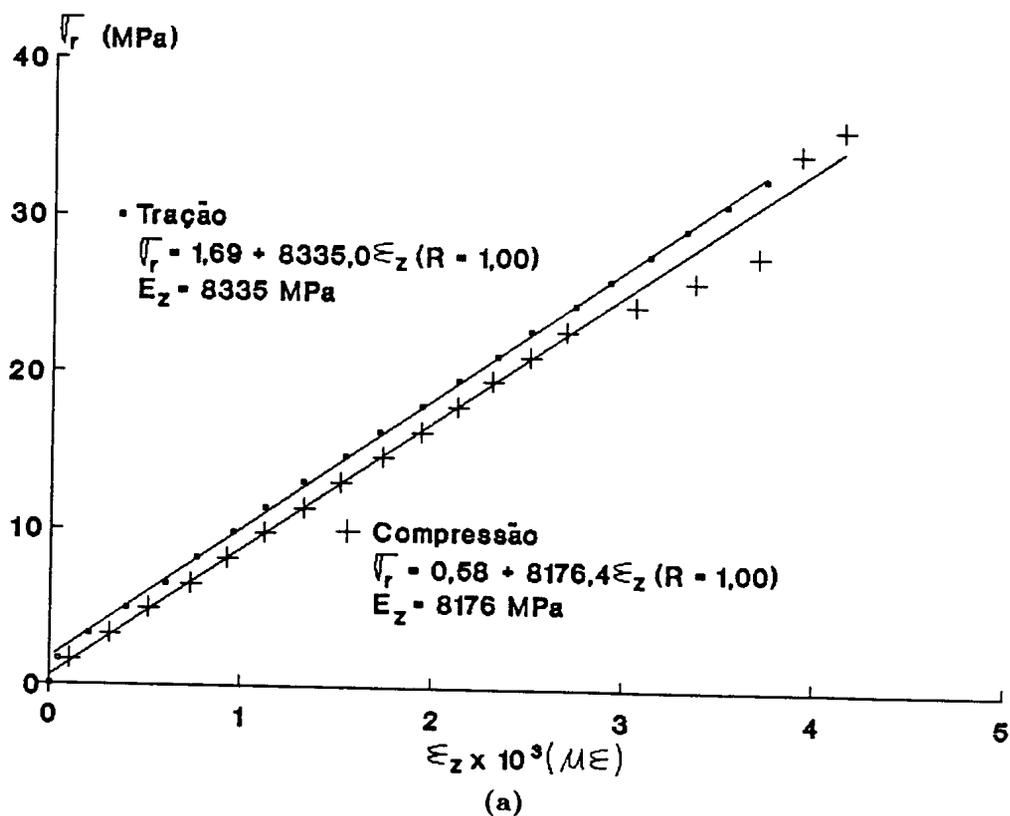


Figura IB9 Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-  
 formação na direção tangencial - deformação na direção longitudinal (b)  
 na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

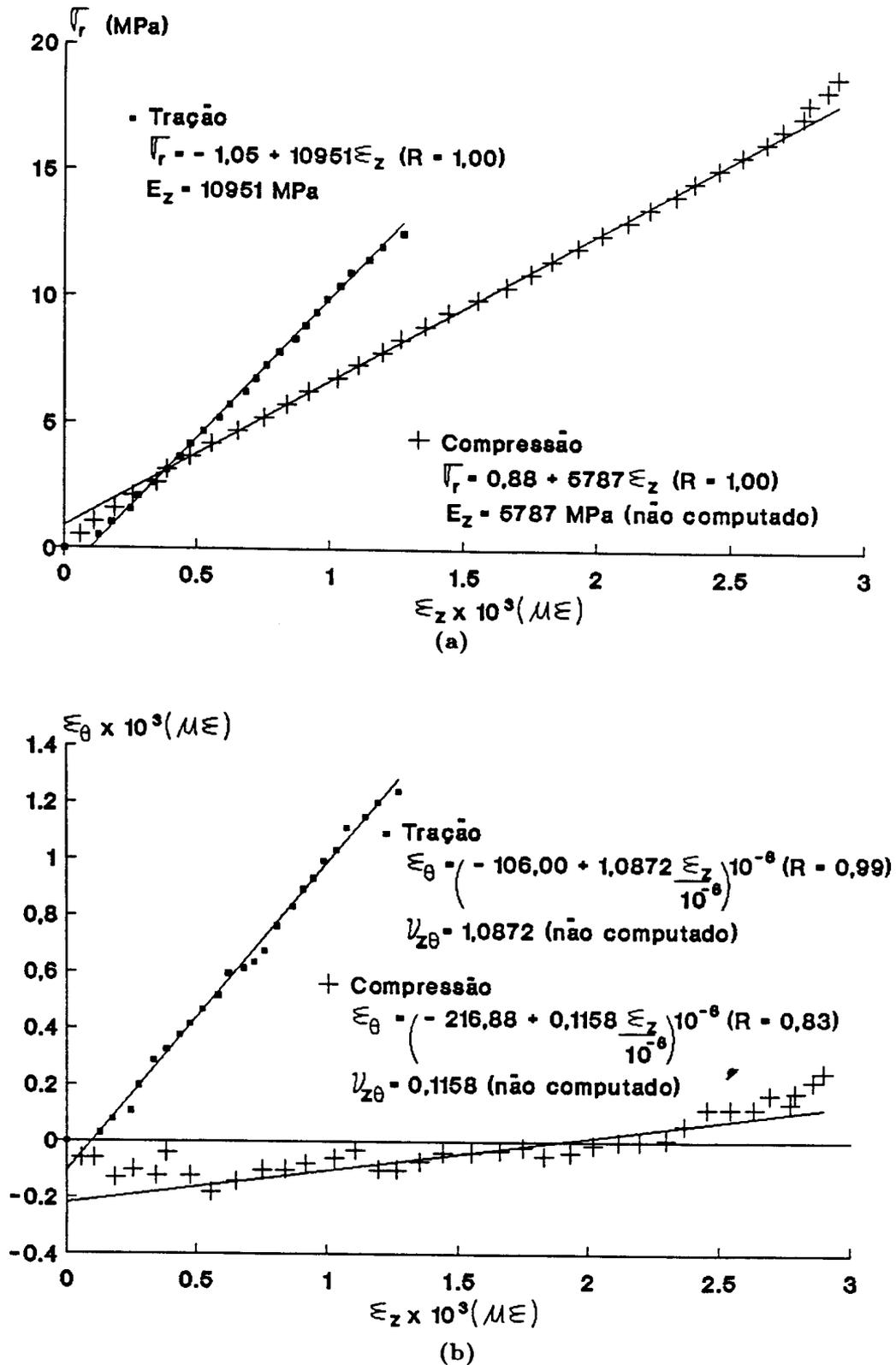
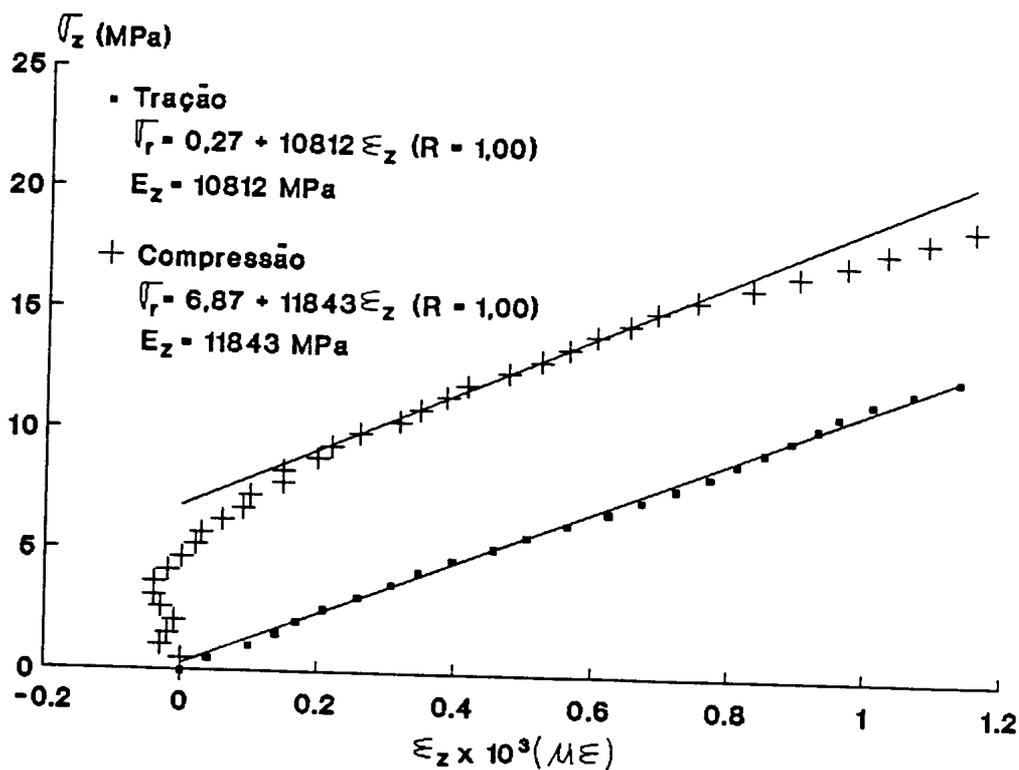
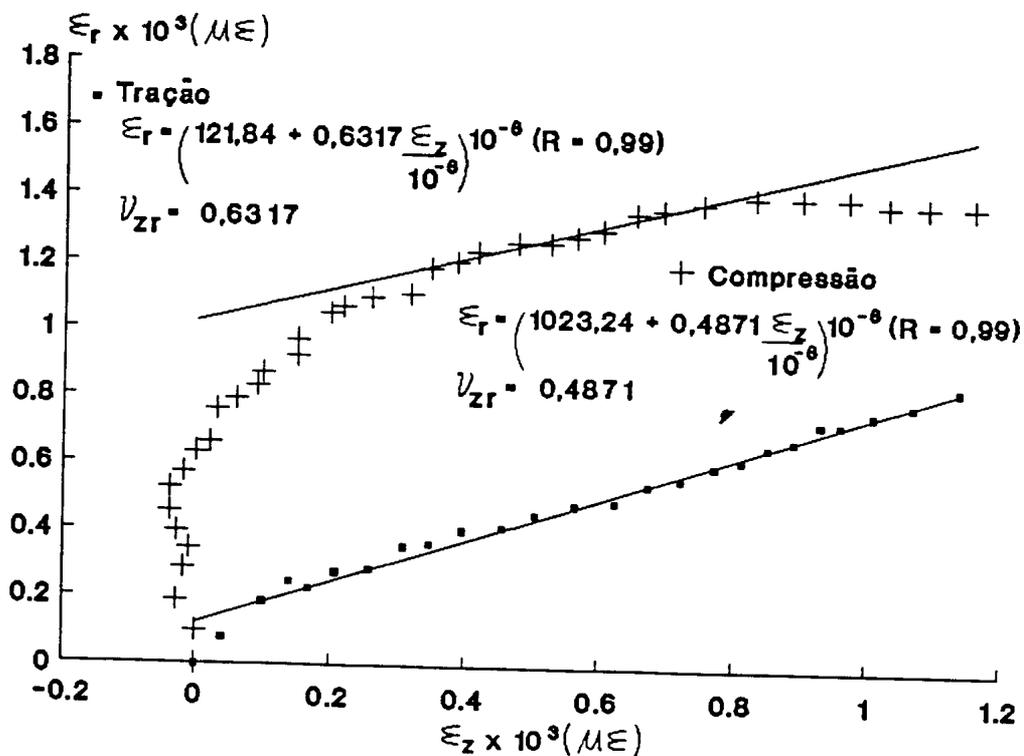


Figura IB10 Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-  
 formação na direção tangencial - deformação na direção longitudinal (b)  
 na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*



(a)



(b)

Figura IB11 Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-  
 formação na direção radial - deformação na direção longitudinal (b) na  
 madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

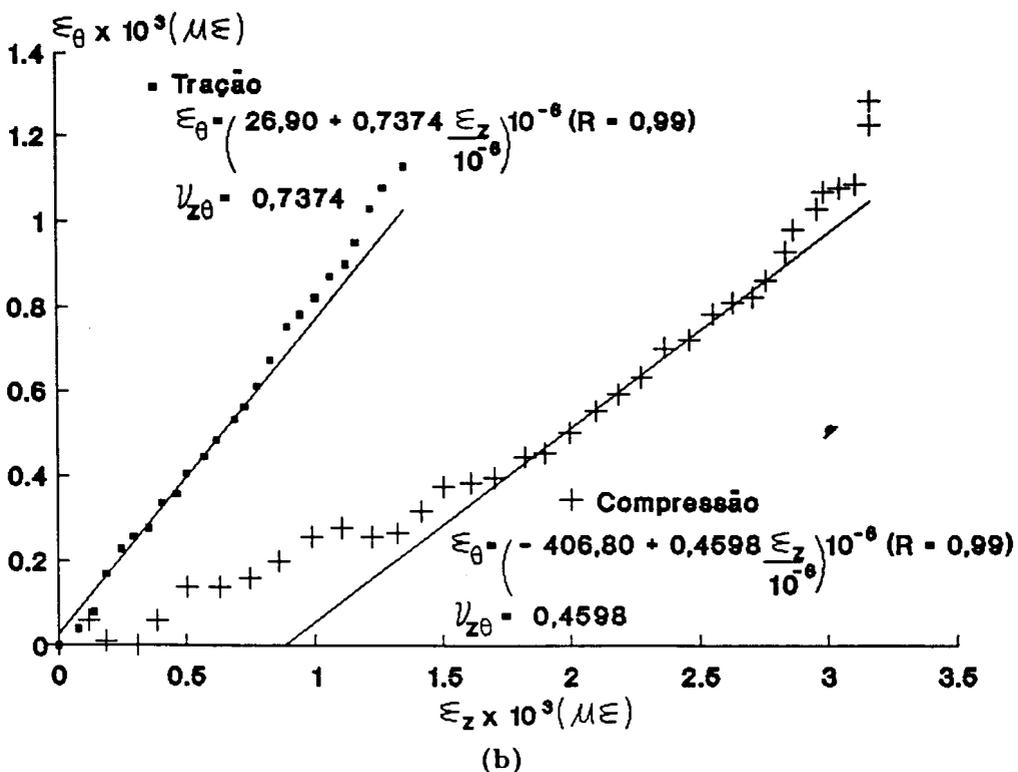
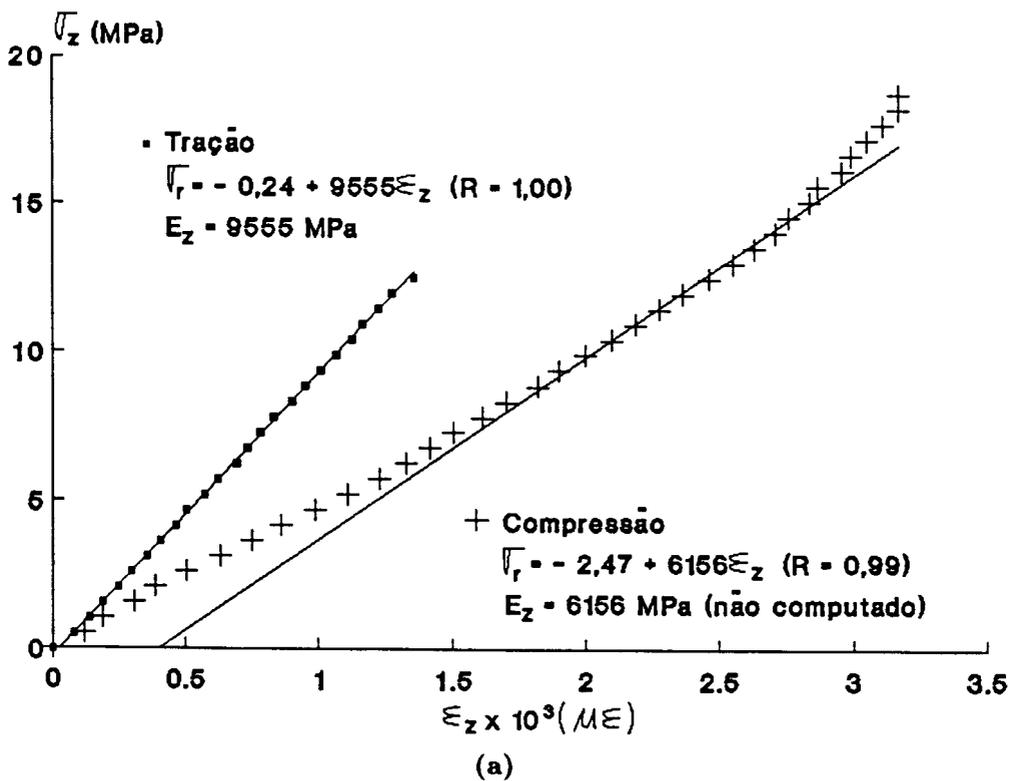


Figura I<sub>B12</sub> Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-  
 formação na direção tangencial - deformação na direção longitudinal (b)  
 na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

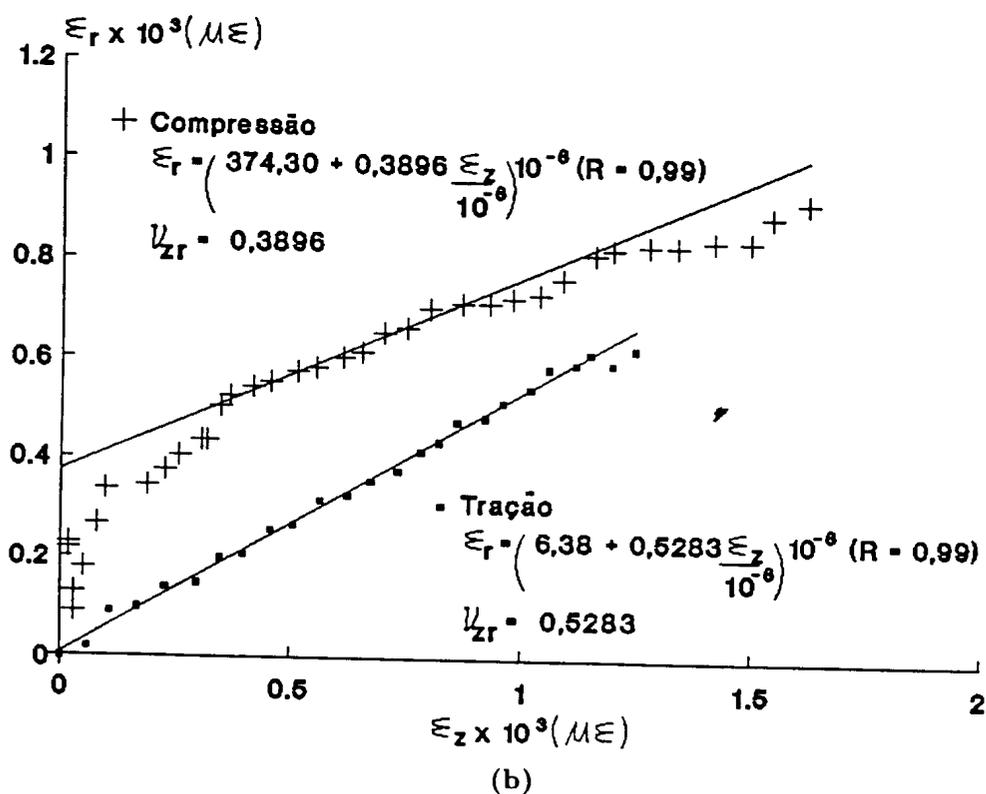
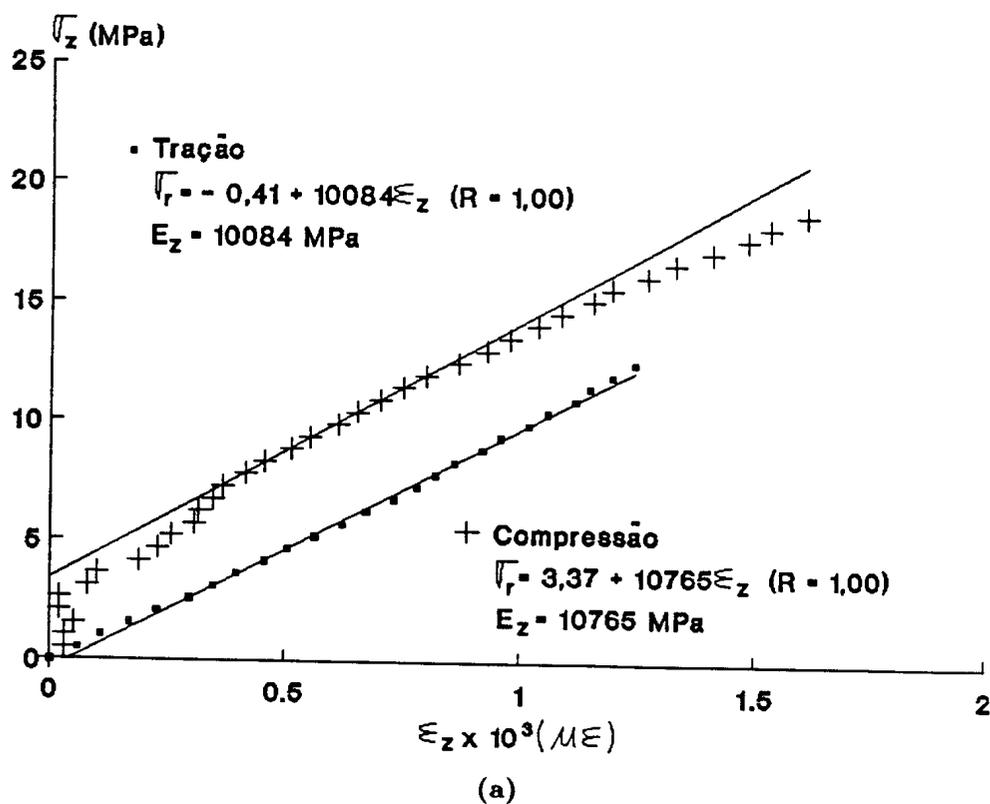


Figura IB13 Diagramas tensão-deformação ambos na direção longitudinal (a) e de-  
 formação na direção radial - deformação na direção longitudinal (b) na  
 madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

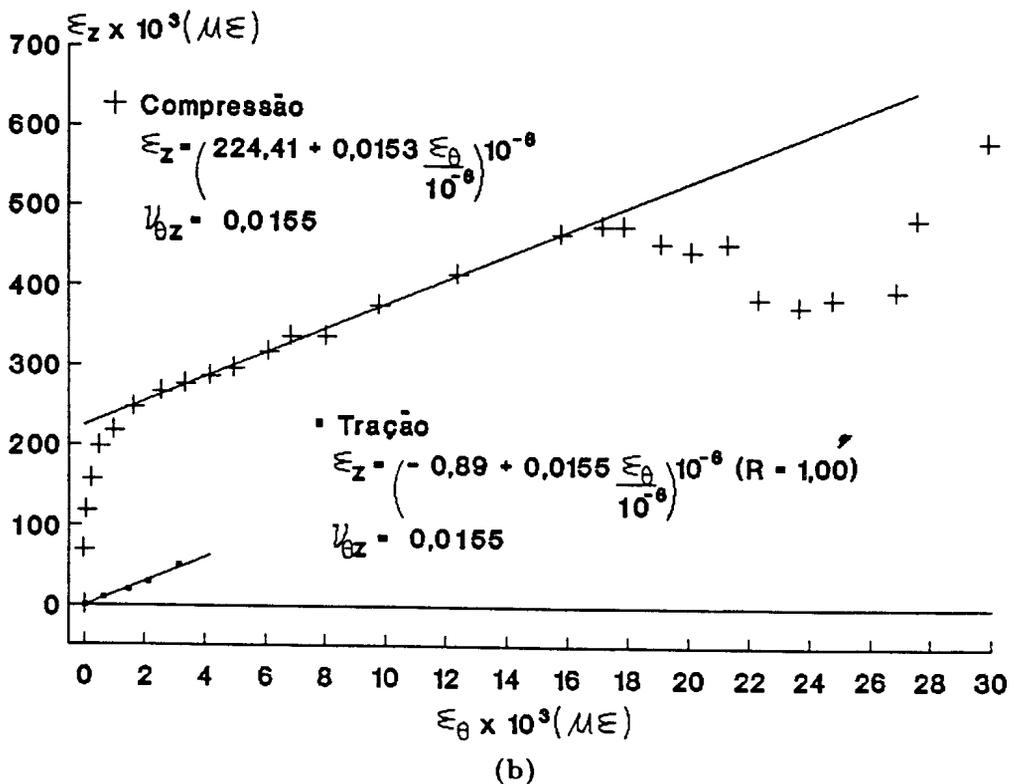
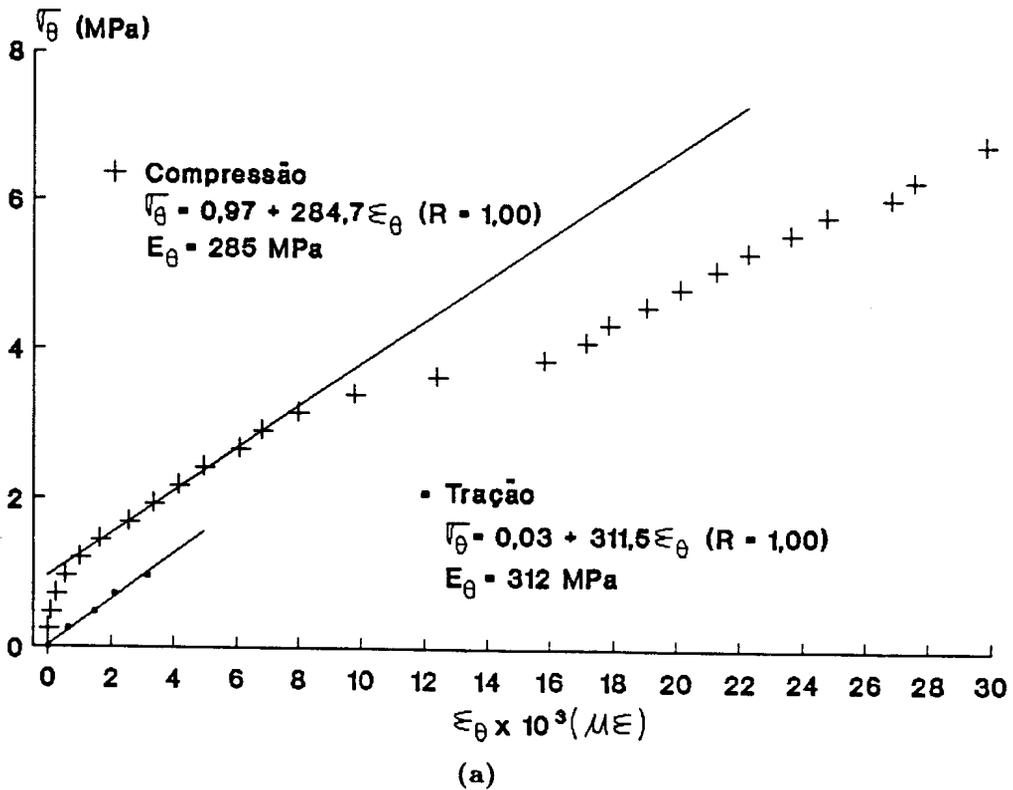


Figura IB14 Diagramas tensão-deformação ambos na direção tangencial (a) e de-  
formação na direção longitudinal - deformação na direção longitudinal  
(b) na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

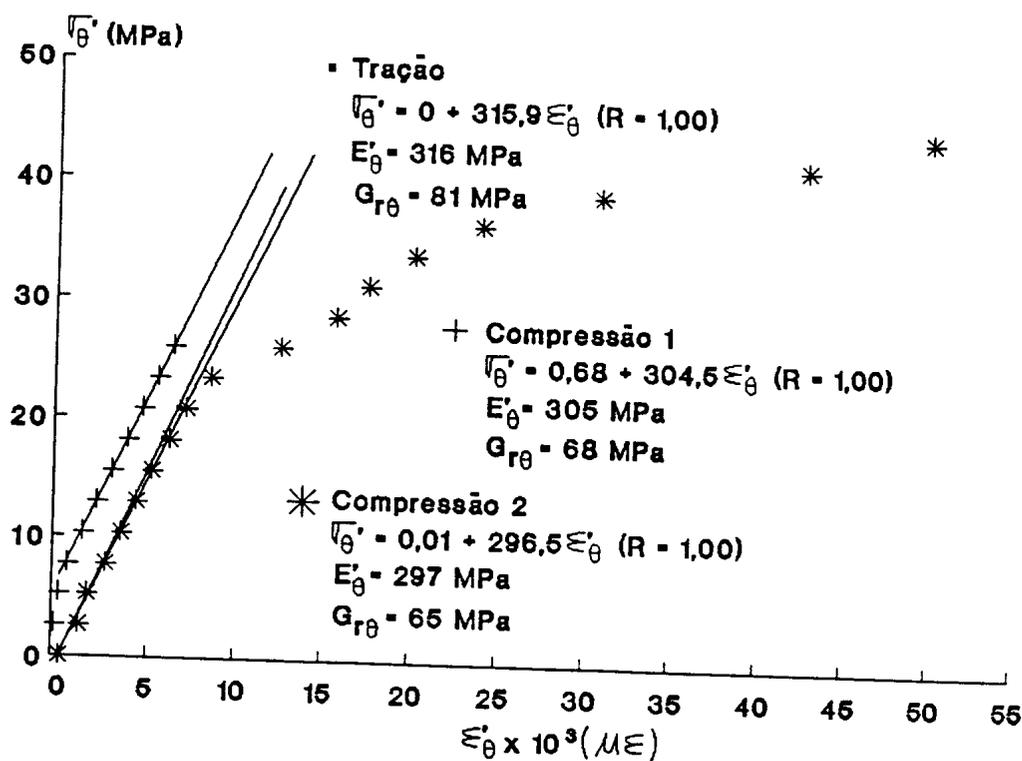


Figura IB15 Diagramas tensão-deformação ambos na direção  $\theta'$  na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

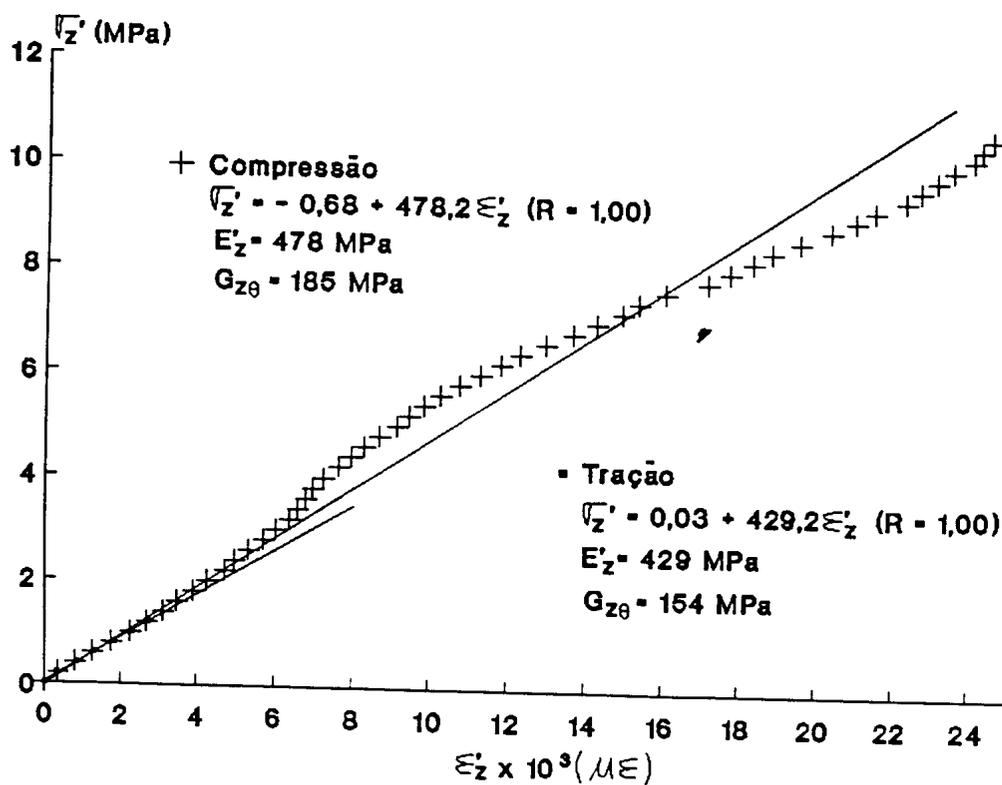


Figura IB16 Diagramas tensão-deformação ambos na direção  $z'$  na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

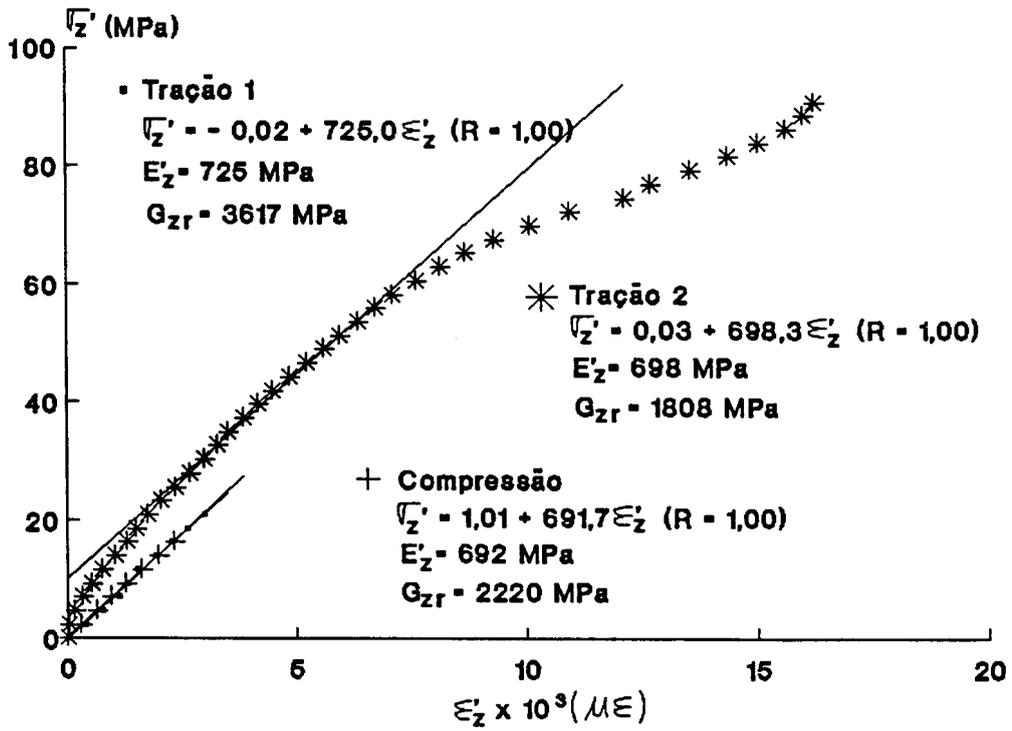


Figura IB17 Diagramas tensão-deformação ambos na direção  $z'$  na madeira úmida de *Eucalyptus grandis*

Tabela IB<sub>1</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Radial		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 11		Tangencial: 1,161		Longitudinal: 3,466	
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Radial		Longitudinal	
Tração 1 / Tração 2	0	0	/	0	0 / 0
	100	270	/	535	-5 / 0
	200	550	/	1060	-10 / 0
	300	780	/	1490	-10 / -10
	400	1000	/	1810	-15 / -20
	500	1350	/	2150	-15 / -30
	600	1500	/		-20 /
	700	1780	/		-20 /

Tração 1 - Vinculação do corpo de prova com 1 parafuso

Tração 2 - Vinculação do corpo de prova com 2 parafusos

Tabela IB<sub>2</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Radial		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 11		Tangencial: 3,456		Longitudinal: 0,990	
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Radial	Tangencial		
Tração	0	0	0		
	100	500	-150		
	200	1110	-330		
	300	1305	-500		
	400	1665	-710		
	500	1970	-920		
	600	2370	-1115		
	700	2650	-1380		
	800		-1600		
Compressão	0	0	0		
	500	-1500	2200		
	1000	-5650	4700		
	1500	-13780	9800		
	20000		25900		

Tabela IB3 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Tangencial		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 3,552		Tangencial: 11	Longitudinal: 1,290
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	
		Tangencial	Radial
Tração	0	0	0
	100	220	-130
	200	470	-305
	300	890	-515
	400	1260	-590
	500	1560	-800
	600	1880	-970
Compressão	0	0	0
	500	-1780	690
	1000	-4040	1770
	1500	-7800	3220
	2000	-13500	4890
	2500	-24000	8000
	3000		10700
	3500		13250
	4000		16900
	4500		27000

Tabela IB4 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
Radial: 1,205		Tangencial: 3,637	Longitudinal: 11
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	
		Longitudinal	Tangencial
Tração / Compressão	0	0 / 0	0 / 0
	500	25 / -140	120 / 115
	1000	55 / -255	-225 / 225
	1500	95 / -370	-330 / 335
	2000	140 / -460	-390 / 420
	2500	195 / -565	-430 / 550
	3000	240 / -660	-490 / 640
	3500	295 / -755	-510 / 730
	4000	350 / -840	-550 / 800
	4500	410 / -930	-600 / 875
	5000	450 / -1015	-605 / 925
	5500	485 / -1105	-625 / 980
	6000	525 / -1175	-685 / 1030
	6500	580 / -1260	-740 / 1095
	7000	625 / -1330	-785 / 1140
	7500	/ -1420	-830 / 1185
	8000	/ -1485	/ 1230
	8500	/ -1570	/ 1280
	9000	/ -1660	/ 1320
	9500	/ -1755	/ 1385
	10000	/ -1920	/ 1450
	10500	/ -2070	/ 1590
	11000	/ -2340	/ 1815
	11500	/ -3020	/ 2430

Tabela IB5 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98										
		Dimensão do corpo de prova (cm)										
		Radial: 1,180		Tangencial: 3,567		Longitudinal: 30/20/6						
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )										
		Longitudinal			Tangencial							
Tração 1	0	0	/	0	/	0	/	0	/	0		
/ Tração 2	500	115	/	45	/	-10	/	-20	/	0	/	70
/ Compressão	1000	210	/	140	/	-50	/	-75	/	-10	/	140
	1500	285	/	235	/	-100	/	-50	/	-30	/	210
	2000	370	/	310	/	-170	/	-80	/	-55	/	240
	2500	455	/	380	/	-230	/	-130	/	-75	/	290
	3000	540	/	435	/	-290	/	-190	/	-105	/	350
	3500	600	/	480	/	-350	/	-215	/	-100	/	385
	400	565	/	510	/	-415	/	-170	/	-100	/	425
	4500	575	/	550	/	-475	/	-160	/	-85	/	465
	5000	610	/	575	/	-535	/	-130	/	-90	/	520
	5500		/		/	-600	/		/		/	550
	6000		/		/	-660	/		/		/	585
	6500		/		/	-720	/		/		/	625
	7000		/		/	-790	/		/		/	660
	7500		/		/	-860	/		/		/	680
	8000		/		/	-930	/		/		/	710
	8500		/		/	-990	/		/		/	740
	9000		/		/	-1065	/		/		/	760
	9500		/		/	-1135	/		/		/	750
	10000		/		/	-1210	/		/		/	790
	10500		/		/	-1285	/		/		/	800
	11000		/		/	-1360	/		/		/	790
	11500		/		/	-1440	/		/		/	795
	12000		/		/	-1525	/		/		/	840
	12500		/		/	-1605	/		/		/	855
	13000		/		/	-1685	/		/		/	840
	14000		/		/	-1755	/		/		/	815
	14500		/		/	-1840	/		/		/	790
	15000		/		/	-1970	/		/		/	790
	15500		/		/	-2260	/		/		/	940
	16000		/		/	-2350	/		/		/	1120
	16500		/		/	-3060	/		/		/	1540
	17000		/		/	-4140	/		/		/	1850
	17500		/		/	-4800	/		/		/	2800

Tabela IB6 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98								
		Dimensão do corpo de prova (cm)								
		Radial: 2,972		Tangencial: 1,042		Longitudinal: 30/20/5				
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )								
		Longitudinal			Radial					
Tração 1	0	0	/	0	/	0	/	0	/	0
/ Tração 2	500	90	/	140	/	15	/	-15	/	-30
/ Compressão	1000	160	/	240	/	15	/	-55	/	-70
	1500	245	/	330	/	-15	/	-90	/	-110
	2000	295	/	420	/	-55	/	-120	/	-150
	2500	365	/	500	/	-110	/	-160	/	-195
	3000	420	/	580	/	-170	/	-200	/	-240
	3500	485	/	665	/	-240	/	-225	/	-280
	4000	535	/	745	/	-305	/	-245	/	-320
	4500	595	/	830	/	-375	/	-270	/	-365
	5000	655	/	905	/	-440	/	-295	/	-415
	5500	720	/	995	/	-530	/	-325	/	-455
	6000	775	/	1065	/	-620	/	-355	/	-495
	6500	850	/	1110	/	-705	/	-385	/	-540
	7000	910	/	1235	/	-825	/	-415	/	-595
	7500	970	/	1320	/	-925	/	-455	/	-635
	8000	1030	/	1395	/	-1070	/	-490	/	-675
	8500	1100	/	1485	/	-1205	/	-520	/	-725
	9000	1150	/	1555	/	-1400	/	-560	/	-770
	9500	1210	/	1630	/	-1575	/	-585	/	-825
	10000	1265	/	1710	/	-1820	/	-625	/	-875
	10500		/		/	-2040	/		/	
	11000		/		/	-2370	/		/	
	11500		/		/	-2790	/		/	

Tração 1 - somente colada a grade do extensômetro

Tabela I<sub>B7</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 2,972		Tangencial: 1.042		Longitudinal: 30/8	
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Longitudinal		Radial	
Tração / Compressão	0	0	/	0	0 / 0
	500	120	/	-200	-25 / 55
	1000	210	/	-385	-65 / 100
	1500	295	/	-505	-100 / 140
	2000	385	/	-615	-145 / 185
	2500	465	/	-710	-180 / 225
	3000	550	/	-810	-220 / 265
	3500	620	/	-895	-260 / 315
	4000	700	/	-985	-285 / 365
	4500	780	/	-1070	-315 / 425
	5000	870	/	-1160	-350 / 470
	5500	950	/	-1230	-380 / 525
	6000	1030	/	-1300	-415 / 580
	6500	1110	/	-1380	-455 / 630
	7000	1195	/	-1445	-490 / 690
	7500	1270	/	-1520	-525 / 735
	8000	1355	/	-1575	-555 / 790
	8500	1430	/	-1655	-595 / 835
	9000	1505	/	-1720	-630 / 865
	9500	1585	/	-1790	-675 / 880
	10000	1660	/	-1865	-710 / 920
	10500		/	-1935	/ 980
	11000		/	-2030	/ 1055
	11500		/	-2190	/ 1200

Tabela I<sub>B8</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 1,027		Tangencial: 2,983		Longitudinal: 30	
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Longitudinal		Tangencial	
Tração 1 / Tração 2	0	0	/	0	0 / 0
	500	35	/	60	-155 / -65
	1000	125	/	155	-222 / -120
	1500	205	/	245	-285 / -180
	2000	305	/	330	-335 / -240
	2500	385	/	420	-410 / -285
	3000	475	/	505	-450 / -330
	3500	555	/	585	-480 / -380
	4000	645	/	680	-530 / -420
	4500	730	/	765	-605 / -460
	5000	825	/	865	-635 / -520
	5500	915	/	950	-675 / -580
	6000	1000	/	1045	-715 / -610
	6500	1085	/	1135	-765 / -645
	7000	1130	/	1235	-815 / -685
	7500	1265	/	1325	-840 / -705
	8000	1350	/	1415	-890 / -755
	8500	1435	/	1500	-905 / -805
	9000	1525	/	1600	-960 / -850
	9500	1610	/	1690	-1010 / -880
	10000	1695	/	1790	-1075 / -930

Tração 1 - somente colada a grade do extensômetro

Tabela I<sub>B9</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 1.027		Tangencial: 2,983		Longitudinal: 20/5	
Ensaio	Carga	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
	(N)	Longitudinal		Tangencial	
Tração / Compressão	0	0	/	0	0
	500	20	/	-55	-105 / 160
	1000	105	/	-160	-175 / 270
	1500	205	/	-265	-270 / 370
	2000	305	/	-375	-330 / 480
	2500	390	/	-470	-385 / 570
	3000	485	/	-570	-430 / 625
	3500	570	/	-675	-500 / 670
	4000	670	/	-770	-565 / 720
	4500	780	/	-880	-660 / 780
	5000	870	/	-980	-710 / 840
	5500	980	/	-1075	-770 / 885
	6000	1075	/	-1170	-850 / 970
	6500	1180	/	-1270	-905 / 1005
	7000	1270	/	-1365	-955 / 1030
	7500	1385	/	-1550	-1010 / 1100
	8000	1480	/	-1705	-1080 / 1195
	8500	1585	/	-1875	-1150 / 1280
	9000	1680	/		-1220 /
	9500	1790	/		-1285 /
	10000	1890	/		-1390 /
	10500		/	-1985	/ 1330
	11000		/	-2100	/ 4050

Tabela IB10 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 3,100		Tangencial: 3,092		Longitudinal: 30/9	
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Longitudinal		Tangencial	
Tração / Compressão	0	0	/	0	0 / 0
	500	65	/	-30	-15 / -30
	1000	90	/	-55	-40 / -30
	1500	125	/	-95	-55 / -65
	2000	140	/	-130	-100 / -50
	2500	170	/	-175	-145 / -60
	3000	195	/	-195	-165 / -20
	3500	220	/	-240	-190 / -60
	4000	240	/	-280	-210 / -90
	4500	265	/	-330	-235 / -70
	5000	295	/	-380	-260 / -50
	5500	315	/	-425	-300 / -50
	6000	345	/	-465	-310 / -40
	6500	365	/	-520	-320 / -30
	7000	385	/	-560	-340 / -15
	7500	410	/	-605	-385 / -50
	8000	440	/	-640	-420 / -50
	8500	460	/	-685	-450 / -35
	9000	480	/	-730	-470 / -20
	9500	500	/	-785	-500 / -20
	10000	525	/	-840	-520 / -15
	10500	545	/	-885	-560 / -10
	11000	580	/	-925	-580 / -25
	11500	605	/	-975	-605 / -20
	12000	645	/	-1020	-625 / 5
	12500		/	-1070	/ 0
	13000		/	-1110	/ 0
	13500		/	-1160	/ 5
	14000		/	-1195	/ 30
	14500		/	-1240	/ 60
	15000		/	-1285	/ 60
	15500		/	-1330	/ 60
	16000		/	-1360	/ 85
	16500		/	-1400	/ 70
	17000		/	-1410	/ 90
	17500		/	-1445	/ 110
	18000		/	-1465	/ 125

Tabela IB11 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 3,100		Tangencial: 3,092		Longitudinal: 30/9	
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Longitudinal		Radial	
Tração / Compressão	0	0	/	0	0 / 0
	500	20	/	0	-40 / 50
	1000	50	/	15	-95 / 95
	1500	70	/	10	-125 / 145
	2000	85	/	5	-115 / 175
	2500	105	/	15	-140 / 200
	3000	130	/	20	-145 / 230
	3500	155	/	20	-180 / 265
	4000	175	/	10	-185 / 290
	4500	200	/	0	-205 / 320
	5000	230	/	-10	-210 / 335
	5500	255	/	-15	-230 / 385
	6000	285	/	-30	-245 / 400
	6500	315	/	-45	-250 / 420
	7000	340	/	-50	-275 / 440
	7500	365	/	-75	-285 / 465
	8000	390	/	-75	-305 / 490
	8500	410	/	-100	-315 / 530
	9000	430	/	-110	-335 / 540
	9500	450	/	-130	-345 / 555
	10000	470	/	-160	-370 / 560
	10500	485	/	-175	-370 / 600
	11000	510	/	-195	-385 / 610
	11500	540	/	-210	-400 / 625
	12000	575	/	-240	-425 / 640
	12500		/	-265	/ 640
	13000		/	-285	/ 650
	13500		/	-305	/ 660
	14000		/	-330	/ 685
	14500		/	-350	/ 690
	15000		/	-380	/ 700
	15500		/	-420	/ 710
	16000		/	-455	/ 710
	16500		/	-490	/ 710
	17000		/	-520	/ 700
	17500		/	-550	/ 700
	18000		/	-585	/ 700

Tabela IB12 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 3,100		Tangencial: 3,092		Longitudinal: 20/5	
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Longitudinal		Tangencial	
Tração /	0	0	0	0	0
Compressão	500	40	-60	-20	30
	1000	70	-95	-40	5
	1500	95	-155	-85	0
	2000	125	-195	-115	30
	2500	150	-255	-130	70
	3000	180	-320	-140	70
	3500	205	-380	-170	80
	4000	235	-435	-180	100
	4500	255	-500	-205	130
	5000	290	-560	-225	140
	5500	315	-620	-245	130
	6000	350	-670	-270	135
	6500	370	-715	-285	160
	7000	395	-760	-310	190
	7500	420	-815	-340	195
	8000	455	-860	-380	200
	8500	480	-920	-395	225
	9000	510	-960	-415	230
	9500	540	-1010	-440	255
	10000	570	-1060	-455	280
	10500	590	-1105	-480	300
	11000	620	-1150	-520	320
	11500	645	-1195	-545	355
	12000	685	-1245	-570	365
	12500		-1290		395
	13000		-1330		410
	13500		-1370		415
	14000		-1395		435
	14500		-1435		470
	15000		-1450		495
	15500		-1495		520
	16000		-1510		540
	16500		-1540		545
	17000		-1570		550
	17500		-1600		620
	18000 / 23000		-1600 / -1740		650 / 875
	18500 / 23500		-1615 / -1770		685 / 905
	19000 / 24000		-1630 / -1775		710 / 925
	19500 / 24500		-1650 / -1810		730 / 940
	20000 / 25000		-1655 / -1830		770 / 945
	20500 / 25500		-1680 / -1885		805 / 940
	21000 / 26000		-1680 / -1950		815 / 930
	21500 / 26500		-1710 / -1710		820 / 910
	22000 / 27000		-1715 / -2270		820 / 930
	22500 / 27500		-1735 / -2800		845 / 2000

Tabela IB13 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Longitudinal		Fator gage: 1.98			
Dimensão do corpo de prova (cm)		Radial: 3,100 Tangencial: 3.092 Longitudinal: 20/5			
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Longitudinal		Radial	
Tração /	0	0	0	0	0
Compressão	500	30	-15	-10	45
	1000	55	-15	-45	65
	1500	85	-25	-50	90
	2000	115	-10	-70	110
	2500	150	-10	-75	115
	3000	175	-40	-100	135
	3500	200	-50	-105	170
	4000	230	-95	-130	175
	4500	255	-115	-135	190
	5000	285	-130	-160	205
	5500	315	-155	-165	220
	6000	340	-160	-180	220
	6500	370	-175	-190	255
	7000	395	-185	-210	265
	7500	415	-210	-220	275
	8000	435	-230	-240	280
	8500	465	-260	-245	290
	9000	485	-280	-260	295
	9500	515	-310	-275	305
	10000	535	-330	-295	310
	10500	565	-355	-300	330
	11000	580	-380	-310	335
	11500	605	-405	-300	355
	12000	630	-440	-315	360
	12500		-470		360
	13000		-495		365
	13500		-525		370
	14000		-550		385
	14500		-585		410
	15000		-605		415
	15500		-645		420
	16000		-675		420
	16500		-715		425
	17000		-755		425
	17500		-780		450
	18000 / 23000		-820 / -1185		465 / 540
	18500 / 23500		-850 / -1210		485 / 545
	19000 / 24000		-885 / -1225		490 / 550
	19500 / 24500		-930 / -1250		495 / 540
	20000 / 25000		-960 / -1265		500 / 530
	20500 / 25500		-1000 / -1290		520 / 500
	21000 / 26000		-1030 / -1310		525 / 500
	21500 / 26500		-1060 / -1335		525 / 520
	22000 / 27000		-1100 / -1400		530 / 515
	22500 / 27500		-1145 / -1600		535 / 1800

Tabela I<sub>B14</sub> Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: Tangencial		Fator gage: 1,98			
Dimensão do corpo de prova (cm)					
Radial: 1,166		Tangencial: 11/3.5		Longitudinal: 3,540	
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )			
		Tangencial		Longitudinal	
Tração / Compressão	0	0	/	0	0 / 0
	100	320	/	15	-5 / 35
	200	740	/	-30	-10 / 60
	300	1060	/	-120	-15 / 80
	400	1580	/	-260	-25 / 100
	500		/	-500	/ 110
	600		/	-820	/ 125
	700		/	-1300	/ 135
	800		/	-1700	/ 140
	900		/	-2100	/ 145
	1000		/	-2500	/ 150
	1100		/	-500	/ 110
	1200		/	-820	/ 125
	1300		/	-1300	/ 135
	1400		/	-1700	/ 140
	1500		/	-2100	/ 145
	1600		/	-2500	/ 150
	1700		/	-500	/ 110
	1800		/	-820	/ 125
	1900		/	-1300	/ 135
	2000		/	-1700	/ 140
	2100		/	-2100	/ 145
	2200		/	-2500	/ 150
	2300		/	-500	/ 110
	2400		/	-820	/ 125
	2500		/	-1300	/ 135
	2600		/	-1700	/ 140
	2800		/	-2100	/ 145
	3000		/	-2500	/ 150
	3200		/	-500	/ 110
	3400		/	-820	/ 125
	3600		/	-1300	/ 135
	3800		/	-1700	/ 140
	4000		/	-2100	/ 145

Tabela IB15 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: $\theta'$ (a = 3,554 b = 1,700) cm		Fator gage: 1,98		
Dimensão do corpo de prova (cm)				
r': 11/3,5/3,5 $\theta'$ : 3,554 Longitudinal: 1,080				
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )		
		$\theta'$ (Tração)	$\theta'$ (Compressão 1)	$\theta'$ (Compressão 2)
Tração	0	0	0	0
Compressão 1	100	415	170	-530
Compressão 2	200	830	60	-770
	300	1250	-180	-1300
	400	1665	-600	-1720
	500	2075	-1000	-2150
	600	2485	-1440	-2600
	700	2920	-1900	-3120
	800	3335	-2330	-3570
	900		-2755	-4300
	1000		-3190	-6300
	1100			-7950
	1200			-8840
	1300			-10200
	1400			-12140
	1500			-15620
	1600			-21800
1700			-25500	

Tabela IB16 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: $z'$ ( $a = 3,919$ $b = 4,146$ ) cm		Fator gage: 1.98	
Dimensão do corpo de prova (cm)			
radial: 1.274 $\theta'$ : 3.919 $z'$ : 11			
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )	
		$z'$ (Tração)	$z'$ (Compressão)
Tração / Compressão	0	0	0
	100	165	-175
	200	425	-405
	300	665	-645
	400	930	-885
	500	1150	-1135
	600	1370	-1360
	700		-1570
	800		-1750
	900		-1960
	1000		-2145
	1100		-2365
	1200		-2500
	1300		-2676
	1400		-2870
	1500		-3030
	1600		-3205
	1700		-3310
	1800		-3415
	1900		-3505
	2000		-3655
	2100		-3840
	2200		-4000
	2300		-4160
	2400		-4365
	2500		-4590
	2600		-4765
	2700		-4945
	2800		-5165
	2900		-5420
	3000		-5690
	3100		-5950
	3200		-6195
	3300		-6540
	3400		-6900
	3500		-7205
	3600		-7540
	3700		-7750
	3800		-8100
	3900		-8650
	4000		-8940
	4100		-9250
	4200		-9500
	4300		-9870
	4400		-10270
	4500		-10850
	4600		-10850
	4700		-11250
	4800 / 5100		-11455 / -12150
	4900 / 5200		-11675 / -12255
	5000 / 5300		-11880 / -12400

Tabela IB17 Dados de ensaios de corpos de prova úmidos de *Eucalyptus grandis*

Direção da carga: $z'$ ( $a = 3,910$ $b = 2,323$ ) cm Fator gage: 1,98				
Dimensão do corpo de prova (cm)				
$r'$ : 3,910 Tangencial: 3.919 $z'$ : 11/8,5/3,5				
Ensaio	Carga (N)	Extensômetro ( $\mu\epsilon$ )		
		$z'$ (Tração 1)	$z'$ (Tração 2)	$z'$ (Compressão)
Tração 1	0	0	0	0
Tração 2	100	180	145	-5
Compressão	200	375	315	-65
	300	565	475	-155
	400	645	640	-255
	500	765	805	-380
	600	970	1000	-520
	700	1140	1175	-655
	800	1320		-750
	900	1500		-880
	1000			-1030
	1100			-1180
	1200			-1340
	1300			-1505
	1400			-1645
	1500			-1766
	1600			-1935
	1700			-2105
	1800			-2260
	1900			-2450
	2000			-2645
	2100			-2826
2200			-3006	
2300			-3200	
2400			-3390	
2500			-3580	
2600			-3850	
2700			-4100	
2800			-4380	
2900			-4700	
3000			-5090	
3100			-5530	
3200			-6120	
3300			-6420	
3400			-6850	
3500			-7250	
3600			-7590	
3700			-7900	
3800			-8080	
3900			-8200	
4000			-7000	
4100			-6500	
4200			-5800	

**ANEXO II**

Programas elaborados para plotarem-se as Figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8

ANEXO II<sub>A</sub>

## Programa para a TEORIA DE KUBLER

parâmetros utilizados:

Nº de árvores = 4

Diâmetros das árvores = 20, 40, 60 e 80 centímetros

Nº de incrementos de crescimentos = 100

Nº de subincrementos de crescimentos = 5

Deformação long. perif. pot. = - 1023,35  $\mu\epsilon$

Deformação tang. perif. pot. = 1076,10  $\mu\epsilon$

Módulo de elasticidade longitudinal = 9974 MPa

Módulo de elasticidade tangencial = 313 MPa

```

1 CLS
10 OPEN "O", # 1, "KUBLER.PRN"
20 DIM DARV(NA): DIM RE(NA): DIM NINCR(NA): DIM NSINCR(NA): DIM AZ(NA):
DIM AT(NA): DIM EZ(NA): DIM ET (NA): DIM TZP(NA): DIM TTP(NA): DIM
INCR(NA): DIM SINCR(NA): DIM R(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM TR(NA,(NINCR
+ NSINCR)): DIM TT(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM TZ(NA,(NINCR + NSINCR))
30 INPUT "N.o de arvores = ", NA
40 FOR I=1 TO NA
50 PRINT: PRINT " ARVORE ", I :PRINT
60 INPUT "Diametro (em cm) = ", DARV(I)
70 INPUT "N.o de incrementos de crescimento = ", NINCR(I)
80 INPUT "N.o de subincrementos de crescimento = ", NSINCR(I)
90 INPUT "Deformacao long. perif. pot. (em microdeformacoes) = ", AZ(I)
100 INPUT "Deformacao tang. perif. pot. (em microdeformacoes) = ", AT(I)
110 INPUT "Modulo de elasticidade longitudinal (em Mpa) = ", EZ(I)
120 INPUT "Modulo de elasticidade tangencial (em Mpa) = ", ET(I) :PRINT
130 NEXT I
140 FOR I=1 TO NA
150 TZP(I) = - AZ(I) * (10 ^ -6) * EZ(I)
160 TTP(I) = - AT(I) * (10 ^ -6) * ET(I)
170 RE(I) = DARV(I) / 2
180 INCR(I) = RE(I) / NINCR(I)
190 SINCR(I) = INCR(I) / NSINCR(I)
200 R(I,0) = 0
210 PRINT "   Diametro de "; DARV(I); " cm "
220 LPRINT: LPRINT "           ARVORE ", I,
230 PRINT #1,: PRINT #1,"           ARVORE ", I,: PRINT #1,
240 LPRINT: LPRINT,"Diametro = " DARV(I) " cm"
250 LPRINT,"Deformacao long. perif. pot. = " AZ(I) " microdeformacoes"
260 LPRINT,"Deformacao tang. perif. pot. = " AT(I) " microdeformacoes"
270 LPRINT,"Modulo de elasticidade longitudinal = " EZ(I) " Mpa"
280 LPRINT,"Modulo de elasticidade tangencial = "ET(I)" Mpa"
290 PRINT: PRINT "   r       tr       tt       tz "
300 PRINT #1,"   r       tr       tt       tz ": PRINT #1,
310 LPRINT: LPRINT "   r       tr       tt       tz"
320 FOR J=1 TO NSINCR(I)
330 R(I,J) = R(I,(J-1)) + SINCR(I)
340 GOSUB 410
350 NEXT J
360 FOR J=(NSINCR(I)+1) TO (NINCR(I) + NSINCR(I) - 1)

```

```
370 R(I,J) = R(I,(J-1)) + INCR(I)
380 GOSUB 410
390 NEXT J: PRINT
400 NEXT I: END
410 TZ(I,J) = TZP(I) * (1 + 2 * LOG (R(I,J) / RE(I)))
420 TT(I,J) = TTP(I) * (1 + LOG (R(I,J) / RE(I)))
430 TR(I,J) = TTP(I) * LOG (R(I,J) / RE(I))
440 I$ = " ###.## #####.### #####.### #####.###"
450 PRINT USING I$; R(I,J); TR(I,J); TT(I,J); TZ(I,J)
460 LPRINT, USING I$; R(I,J); TR(I,J); TT(I,J); TZ(I,J)
470 PRINT #1, USING I$; R(I,J); TR(I,J); TT(I,J); TZ(I,J)
480 RETURN
```

ANEXO II<sub>B</sub>

## Programa para a TEORIA DE ARCHER &amp; BYRNES

parâmetros utilizados:

Nº árvores = 4

Diâmetro das árvores = 20, 40, 60 e 80 centímetros

Nº de incrementos de crescimento = 100

Nº de subincrementos de crescimento = 5

Raio da medula = 0,1 centímetros

Deformação tang. perif. pot. = 1076,10  $\mu\epsilon$

Módulo de elasticidade tangencial = 313 MPa

Deformação long. perif. pot. = - 1023,35  $\mu\epsilon$

Módulo de elasticidade longitudinal = 9974 MPa

Modulo de elasticidade radial = 435 MPa

$\nu_{zr} = 0,5110$

$\nu_{rz} = 0,0214$

$\nu_{z\theta} = 0,5527$

$\nu_{\theta z} = 0,0195$

```

1 CLS
10 OPEN "O",#1, "ARCHER.PRN"
20 DIM DARV(NA): DIM NINCR(NA): DIM INCR(NA): DIM NSINCR(NA): DIM
SINCR(NA): DIM A(NA): DIM AT(NA): DIM ET(NA): DIM AZ(NA): DIM EZ(NA):
DIM ER(NA): DIM NIRZ(NA): DIM NIZR(NA): DIM NIZT(NA): DIM NITZ(NA):
DIM RE(NA): DIM R(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM L(NA): DIM TR1(NA,(NINCR
+ NSINCR)): DIM TR2(NA): DIM TR3(NA): DIM TR4(NA): DIM TR5(NA): DIM
TR6(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM TR7(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM TR(NA,(NINCR
+ NSINCR)): DIM TT1(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM TT2(NA,(NINCR + NSINCR)):
DIM TT(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM TZ1(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM TZ(NA,
(NINCR + NSINCR))
30 INPUT "N.o arvores = ", NA
40 FOR I=1 TO NA
50 PRINT : PRINT "          ARVORE ",I :PRINT
60 INPUT "Diametro (em cm) = ", DARV(I)
70 INPUT "N.o de incrementos de crescimento = ", NINCR(I)
80 INPUT "N.o de subincrementos de crescimento = ", NSINCR(I)
90 INPUT "Raio da medula (em cm) = ",A(I)
100 INPUT "Deformacao tang. perif. pot. (em microdeformacoes) = ",AT(I)
110 INPUT "Modulo de elasticidade tangencial (em MPa) = ",ET(I)
120 INPUT "Deformacao long. perif. pot. (em microdeformacoes) = ",AZ(I)
130 INPUT "Modulo de elasticidade longitudinal (em MPa) = ",EZ(I)
140 INPUT "Modulo de elasticidade radial (em MPa) = ",ER(I)
150 INPUT "NIrz = ", NIRZ(I)
160 INPUT "NIzr = ".NIZR(I)
170 INPUT "NIzt = ".NIZT(I)
180 INPUT "NItz = ".NITZ(I)
190 NEXT I
200 FOR I=1 TO NA
210 L(I) = SQR((1-NIZR(I) * NIRZ(I)) / (1 - NIZT(I) * NITZ(I)) * ET(I) / ER(I))
220 RE(I) = DARV(I) / 2
230 INCR(I) = RE(I) / NINCR(I)
240 SINCR(I) = INCR(I) / NSINCR(I)
250 PRINT: PRINT "          Diametro de "; DARV(I); " cm"
260 LPRINT "          ARVORE : ",I,
270 PRINT #1,: PRINT #1, "          ARVORE ".I,
280 LPRINT : LPRINT."Diametro = ", DARV(I); " cm"
290 LPRINT,"Raio da medula = " A(I) " cm"
300 LPRINT "Deformacao tang. perif. pot. = " AT(I) " microdeformacoes"
310 LPRINT "Modulo de elasticidade tangencial = " ET(I) " MPa"
320 LPRINT "Deformacao long. perif. pot. = " AZ(I) " microdeformacoes"

```

```

330 LPRINT "Modulo de elasticidade longitudinal = " EZ(I) " MPa"
340 LPRINT "NIRz = " NIRZ: LPRINT "NlZr = " NIZR
350 LPRINT "NIzt = " NIZT
360 LPRINT "Nitz = " NITZ
370 PRINT :PRINT "    r      tr      tt      tz"
380 PRINT #1,:PRINT #1,"    r      tr      tt      tz"
390 LPRINT :LPRINT "    r      tr      tt      tz"
400 FOR J=1 TO NSINCR(I)
410 R(I,J) = R(I,(J-1)) + SINCR(I)
420 GOSUB 490
430 NEXT J
440 FOR J=(NSINCR(I)+1) TO (NINCR(I) + NSINCR(I) - 1)
450 R(I,J) = R(I,(J-1)) + INCR(I)
460 GOSUB 490
470 NEXT J
480 NEXT I: END
490 TR1(I,J) = R(I,J) ^ (L(I) - 1) * (1 - (A(I) / R(I,J)) ^ (2 * L(I))) * (ET(I) / (1 - NIZT(I)
* NITZ(I)))
500 TR2(I) = (- 2 * (NIZR(I) - NIZT(I))) / (1 - L(I) ^ 2)
510 TR3(I) = ((NIZT(I) * AZ(I) + AT(I)) * ET(I)) / (1 - NIZT(I) * NITZ(I)) * ((NIZR(I)
+ L(I) * NIZT(I)) / (L(I) + 1) - NIZT(I) - AZ(I) * EZ(I)
520 TR4(I) = ((NIZR(I) - NIZT(I)) * ET(I)) / ((1 - NIZT(I) * NITZ(I)) * (1 - L(I) ^ 2)) *
((1 - L(I)) * (NIZR(I) - NIZT(I))) / (L(I) + 1) + EZ(I)
530 TR5(I) = NIZT(I) * AZ(I) + AT(I)
540 TR6(I,J) = (RE(I) ^ (-L(I) + 1) - R(I,J) ^ (-L(I) + 1)) / (-L(I) + 1)
550 TR7(I,J) = -(2 * (NIZR(I) - NIZT(I)) * ET(I)) / ((1 - NIZT(I) * NITZ(I)) * (1 - L(I)
^ 2)) * (1 - (A(I) / R(I,J)) ^ (L(I) + 1))
560 TR(I,J) = TR1(I,J) * (TR2(I) * (TR3(I) / TR4(I)) + TR5(I)) * TR6(I,J) + TR7(I,J) *
(TR3(I) / TR4(I)) * LOG(R(I,J) / RE(I))
570 TT1(I,J) = +L(I) * R(I,J) ^ (L(I) - 1) * (1 + (A(I) / R(I,J)) ^ (2 * L(I))) * (ET(I) / (1 -
NIZT(I) * NITZ(I)))
580 TT2(I,J) = -(2 * (NIZR(I) - NIZT(I)) * ET(I)) / ((1 - NIZT(I) * NITZ(I)) * (1 - L(I)
^ 2)) * (1 + L(I) * (A(I) / R(I,J)) ^ (L(I) + 1))
590 TT(I,J) = -((NIZT(I) * AZ(I) + AT(I)) * ET(I)) / (1 - NIZT(I) * NITZ(I)) + TT1(I,J)
* (TR2(I) * (TR3(I) / TR4(I)) + TR5(I)) * TR6(I,J) + TT2(I,J) * (TR3(I) / TR4(I)) *
LOG(R(I,J) / RE(I))
600 TZ1(I,J) = -AZ(I) * EZ(I) + NIZR(I) * TR(I,J) + NIZT(I) * TT(I,J)
610 TZ(I,J) = TZ1(I,J) + 2 * EZ(I) * (TR3(I) / TR4(I)) * LOG(R(I,J) / RE(I))
620 I$ = " ###.# #####.###  #####.###
#####.### "
630 PRINT USING I$; R(I,J); TR(I,J); TT(I,J); TZ(I,J)
640 LPRINT USING I$; R(I,J); TR(I,J); TT(I,J); TZ(I,J)
650 PRINT #1, USING I$; R(I,J); TR(I,J); TT(I,J); TZ(I,J)
660 RETURN

```

ANEXO II<sub>C</sub>

Programa para a TEORIA DE GILLIS & HSU

parâmetros utilizados:

Nº árvores = 4

Diâmetros das árvores = 20, 40, 60 e 80 centímetros

Nº de incrementos de crescimento = 100

Nº de subincrementos de crescimento = 5

Raio da medula = 1,0; 2,0; 3,0 e 4,0 centímetros

Deformacao long. perif. pot. = 1023,35  $\mu\epsilon$

Modulo de elasticidade longitudinal = 9974 MPa

```

1 CLS
10 OPEN "o",#1, "GILLIS.PRN"
20 DIM DARV(NA): DIM RE(NA): DIM NINCR(NA): DIM INCR(NA): DIM NSINCR(NA):
DIM SINCR(NA): DIM A(NA): DIM AZ(NA): DIM EZ(NA): DIM TZP(NA): DIM
TZ(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM R(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM AA(NA)
30 INPUT "N.o arvores = ", NA
40 FOR I=1 TO NA
50 PRINT: PRINT "      ARVORE ",I :PRINT
60 INPUT "Diametro (em cm) = ", DARV(I)
70 INPUT "N.o de incrementos de crescimento = ", NINCR(I)
80 INPUT "N.o de subincrementos de crescimento = ",NSINCR(I)
90 INPUT "Raio da medula (em cm) = ",AA(I)
100 INPUT "Deformacao long. perif. pot. (em microdeformacoes) = ",AZ(I)
110 INPUT "Modulo de elasticidade longitudinal (em MPa) = ".EZ(I)
120 NEXT I
130 FOR I=1 TO NA
140 TZP(I) = -AZ(I) * (10 ^-6) * EZ(I)
150 RE(I) = DARV(I) / 2
160 INCR(I) = RE(I) / NINCR(I)
170 SINCR(I) = INCR(I) / NSINCR(I)
180 R(I,0) = 0
190 PRINT :PRINT " Diametro de ". DARV(I); " cm"
200 LPRINT " ARVORE ",I,
210 PRINT #1, " ARVORE ",I,
220 LPRINT: LPRINT,"Diametro = ", DARV(I); " cm"
230 LPRINT,"Raio da medula = " AA(I) " cm"
240 LPRINT,"Deformacao long. perif. pot. = " AZ(I) " em microdeformacoes"
250 LPRINT,"Modulo de elasticidade longitudinal = " EZ(I) " em MPa"
260 PRINT: PRINT "      r      tz":PRINT
270 LPRINT: LPRINT "      r      tz":PRINT
280 PRINT #1,: PRINT #1, "      r      tz":PRINT #1,
290 GOSUB 100
300 FOR J=1 TO NSINCR(I)
310 R(I,J) = R(I,(J-1)) + SINCR(I)
320 GOSUB 390
330 NEXT J
340 FOR J=(NSINCR(I)+1) TO (NINCR(I) + NSINCR(I) - 1)
350 R(I,J)= R(I,(J-1)) + INCR(I)
360 GOSUB 390
370 NEXT J

```

```
380 NEXT I:END
390 IF R(I,J) <= AA(I) THEN GOSUB 500 ELSE GOSUB 600
400 I$ = "   ###.##      #####.###"
410 PRINT USING I$; R(I,J); TZ(I,J)
420 LPRINT USING I$; R(I,J); TZ(I,J)
430 PRINT #1, USING I$; R(I,J); TZ(I,J)
440 RETURN
500 TZ(I,J) = -TZP(I) * (RE(I) / AA(I)) * (1 - AA(I) / RE(I))
510 RETURN
600 TZ(I,J) = -TZP(I) * (RE(I) / AA(I)) * (AA(I) / R(I,J) - 2 * AA(I) / RE(I) + (AA(I) / RE(I)) ^2) / (1 - AA(I) / RE(I))
610 RETURN
```

ANEXO II<sub>D</sub>

## Programa para a TEORIA DE POST

parâmetros utilizados:

Nº arvores = 4

Diâmetro das árvores = 20, 40, 60 e 80 centímetros

Nº de incrementos de crescimento = 100

Nº de subincrementos de crescimento = 5

Raio da medula = 0,1 centímetros

Deformação no lim. de proporç. =  $3320 \mu\epsilon$

Deformação long. perif. pot. =  $- 1023,35 \mu\epsilon$

Módulo de elasticidade longitudinal = 9974 MPa

```

1 CLS
10 OPEN "O",#1, "POST.PRN"
20 DIM EZINEL(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM DEFO(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM
TENS(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM R(NA,(NINCR + NSINCR)): DIM A(NA): DIM
NINCR(NA): DIM INCR(NA): DIM DARV(NA): DIM TZP(NA): DIM DEFPROP(NA):
DIM DPROP(NA): DIM EZ(NA): DIM NUM(NA): DIM DENOM(NA): DIM AZ(NA)
30 INPUT "N.o de arvores = ",NA
40 FOR I=1 TO NA
50 PRINT: PRINT "      ARVORE ", I: PRINT
60 INPUT "Diametro (em cm) = ",DARV(I)
70 INPUT "N.o de incrementos de crescimento = ",NINCR(I)
80 INPUT "Raio da medula (em cm) = ", A(I)
90 INPUT "Deformacao no lim. de propor. (em microdeformacoes) = ",DPROP(I)
100 INPUT "Deformacao long. perif. pot. (em microdeformacoes) = ",AZ(I)
110 INPUT "Modulo de elasticidade longitudinal (em MPa) = ",EZ(I)
120 NEXT I
130 FOR I=1 TO NA
140 TZP(I) = -AZ(I) * (10 ^-6) * EZ(I)
150 DEFPROP(I) = DPROP(I) * (10 ^-6)
160 PRINT: PRINT "      ARVORE " I : PRINT
170 LPRINT: LPRINT "      ARVORE " I : LPRINT
180 PRINT #1,: PRINT #1, "      ARVORE " I : PRINT #1,
190 LPRINT: LPRINT,"Diametro = ", DARV(I); " cm"
200 LPRINT,"Raio da medula = " A(I) " cm"
210 LPRINT,"Deformacao no lim. de propor. = " DPROP(I) " microdeformacoes"
220 LPRINT,"Deformacao long. perif. pot. = " AZ(I) " microdeformacoes"
230 LPRINT,"Modulo de elasticidade longitudinal = " EZ(I) " MPa"
240 PRINT: PRINT "      r      DEF      E      TENS"
250 LPRINT: LPRINT "      r      DEF      E      TENS"
260 PRINT #1,: PRINT #1,"      r      DEF      E      TENS"
280 INCR(I) = ((DARV(I) / 2) - A(I)) / NINCR(I)
290 EZINEL(I,1) = EZ(I)
300 R(I,1) = A(I)
310 DEFO(I,1) = 0
320 FOR K=2 TO NINCR(I)
330 EZINEL(I,K) = EZ(I)
340 NUM(I) = ((A(I) + (K - 1) * INCR(I)) ^2 - (A(I) + (K - 2) * INCR(I)) ^2) * TZP(I)
350 DENOM(I) = 0
360 FOR J=2 TO K
370 DENOM(I) = DENOM(I) + ((A(I) + (J - 1) * INCR(I)) ^2 - (A(I) + (J - 2) * INCR(I))
^2)*EZINEL(I,J)

```

```

380 NEXT J
390 DENOM(I) = DENOM(I) + A(I) ^2 * EZINEL(I,1)
400 DEFO(I,K) = NUM(I) / DENOM(I)
410 FOR J=1 TO K-1
420 DEFO(I,J) = DEFO(I,J) - DEFO(I,K)
430 NEXT J
440 DEFO(I,K) = TZP(I) / EZINEL(I,K) - DEFO(I,K)
450 FOR J=1 TO K
460 IF ABS(DEFO(I,J)) <=DEFPROP(I) THEN GOSUB 600 ELSE GOSUB 700
470 NEXT J
480 R(I,K) = R(I,K-1) + INCR(I)
490 NEXT K
500 FOR K=1 TO NINCR(I)
510 I$ = " ###.# #####.### #####.###
#####.###"
520 PRINT USING I$; R(I,K), DEFO(I,K), EZINEL(I,K), TENS(I,K)
530 LPRINT USING I$; R(I,K), DEFO(I,K), EZINEL(I,K), TENS(I,K)
540 PRINT #1, USING I$; R(I,K), DEFO(I,K), EZINEL(I,K), TENS(I,K)
550 NEXT K
560 NEXT I
570 END
600 EZINEL(I,J) = EZ(I)
610 TENS(I,J) = DEFO(I,J) * EZINEL(I,J)
620 RETURN
700 EZINEL(I,J) = 8,6 / (ABS(DEFO(I,J)) - .0026) ^.9
710 TENS(I,J) = -65,6 * (ABS(DEFO(I,J)) - .0026) ^.1
720 RETURN

```

ANEXO II<sub>E</sub>

## Programa para a TEORIA PARABÓLICA PROPOSTA

parâmetros utilizados:

Nº árvores = 4

Diâmetro das árvores = 20, 40, 60 e 80 centímetros

Nº de incrementos de crescimento = 100

Nº de subincrementos de crescimento = 5

Tensão no lim. de resist. a compr. paral. = 30 MPa

Deformação long. perif. pot. = - 1023,35  $\mu\epsilon$

Módulo de elasticidade longitudinal = 9974 MPa

```

1 CLS
10 OPEN "o",#1,"PARAB.PRN"
20 DIM DARV(NA): DIM RE(NA): DIM NINCR(NA): DIM INCR(NA): DIM NSINCR(NA):
DIM SINCR(NA): DIM AZ(NA): DIM EZ(NA): DIM TC(NA): DIM TZP(NA): DIM
TZ(NA,(NINCR + NSINCR)):DIM R(NA,(NINCR + NSINCR))
30 INPUT "N.o arvores = ", NA
40 FOR I=1 TO NA
50 PRINT: PRINT " ARVORE ".I :PRINT
60 INPUT "Diametro (em cm) = ", DARV(I)
70 INPUT "N.o de incrementos de crescimento = ", NINCR(I)
80 INPUT "N.o de subincrementos de crescimento = ",NSINCR(I)
90 INPUT "Tensao no lim. de resist. a compr. paral. (em MPa) = ",TC(I)
100 INPUT "Deformacao long. perif. pot. (em microdeformacoes) = ",AZ(I)
110 INPUT "Modulo de elasticidade longitudinal (em MPa) = ",EZ(I)
120 NEXT I
140 FOR I=1 TO NA
150 TZP(I) = -AZ(I) * (10 ^-6) * EZ(I)
160 RE(I) = DARV(I) / 2
170 INCR(I) = RE(I) / NINCR(I)
180 SINCR(I) = INCR(I) / NSINCR(I)
190 R(I,0) = 0
200 PRINT :PRINT "      Diametro de ". DARV(I); " cm"
210 LPRINT "      ARVORE ".I,
220 PRINT #1,: PRINT #1,"      ARVORE ".I,
230 LPRINT: LPRINT,"Diametro = ". DARV(I); " cm"
240 LPRINT "Tensao no lim. de resist. a compr. paral. = " TC " em MPa"
250 LPRINT,"Deformacao long. perif. pot. = " AZ(I) " em microdeformacoes"
260 LPRINT,"Modulo de elasticidade longitudinal = " EZ(I) " em MPa"
270 PRINT: PRINT "      r      tz":PRINT
280 LPRINT: LPRINT "      r      tz":PRINT
290 PRINT #1,: PRINT #1,"      r      tz":PRINT #1,
300 GOSUB 400
310 FOR J=1 TO NSINCR(I)
320 R(I,J) = R(I,(J-1)) + SINCR(I)
330 GOSUB 400
340 NEXT J
350 FOR J=(NSINCR(I)+1) TO (NINCR(I) + NSINCR(I) - 1)
360 R(I,J) = R(I,(J-1)) + INCR(I)
370 GOSUB 400
380 NEXT J

```

```
390 NEXT I:END
400 TZ(I,J) = -TC(I) + 3 * (TC(I) - TZP(I)) * R(I,J) / RE(I) + (4 * TZP(I) - 2 * TC(I))
* (R(I,J) / RE(I)) ^2
410 I$ = "   ###.##   #####.###"
420 PRINT USING I$; R(I,J); TZ(I,J)
430 LPRINT USING I$; R(I,J); TZ(I,J)
440 PRINT #1, USING I$; R(I,J); TZ(I,J)
450 RETURN
```

ANEXO II<sub>F</sub>

## Programa para a TEORIA LINEAR PROPOSTA

parâmetros utilizados:

Nº árvores = 4

Diâmetro das árvores = 20, 40, 60 e 80 centímetros

Nº de incrementos de crescimento = 100

Nº de subincrementos de crescimento = 5

Deformação long. perif. pot. = - 1023,35  $\mu\epsilon$

Módulo de elasticidade longitudinal = 9974 MPa

```

1 CLS
10 OPEN "o",#1, "LINEAR.PRN"
10 DIM DARV(NA): DIM RE(NA): DIM NINCR(NA): DIM INCR(NA): DIM NSINCR(NA):
DIM SINCR(NA): DIM AZ(NA): DIM EZ(NA): DIM TZP(NA): DIM TZ(NA,(NINCR +
NSINCR)): DIM R(NA,(NINCR + NSINCR))
20 INPUT "N.o arvores = ", NA
30 FOR I=1 TO NA
40 PRINT: PRINT " ARVORE ",I :PRINT
50 INPUT "Diametro (em cm) = ", DARV(I)
60 INPUT "N.o de incrementos de crescimento = ", NINCR(I)
70 INPUT "N.o de subincrementos de crescimento = ",NSINCR(I)
80 INPUT "Deformacao long. perif. pot. (em microdeformacoes) = ",AZ(I)
90 INPUT "Modulo de elasticidade longitudinal (em MPa) = ",EZ(I)
100 NEXT I
110 FOR I=1 TO NA
120 TZP(I) = -AZ(I) * (10 ^-6) * EZ(I)
130 RE(I) = DARV(I) / 2
140 INCR(I) = RE(I) / NINCR(I)
150 SINCR(I) = INCR(I) / NSINCR(I)
160 R(I,0) = 0
170 PRINT :PRINT "      Diametro de ", DARV(I); " cm"
180 LPRINT "      ARVORE ",I,
190 PRINT #1,: PRINT #1, "      ARVORE ",I,
200 LPRINT: LPRINT,"Diametro = ", DARV(I); " cm"
210 LPRINT,"Deformacao long. perif. pot. = " AZ(I) " em microdeformacoes"
220 LPRINT,"Modulo de elasticidade longitudinal = " EZ(I) " em MPa"
230 PRINT: PRINT "      r      tz": PRINT
240 LPRINT: LPRINT "      r      tz": PRINT
250 PRINT #1,: PRINT #1, "      r      tz": PRINT #1,
260 GOSUB 360
270 FOR J=1 TO NSINCR(I)
280 R(I,J) = R(I,(J-1)) + SINCR(I)
290 GOSUB 360
300 NEXT J
310 FOR J = (NSINCR(I)+1) TO (NINCR(I) + NSINCR(I) - 1)
320 R(I,J) = R(I,(J-1)) + INCR(I)
330 GOSUB 360
340 NEXT J
350 NEXT I:END
360 TZ(I,J) = TZP * (- 2 + 3 * R(I,J) / RE(I))

```



```
370 I$ = "    ###.##    #####.###"  
380 PRINT USING I$; R(I,J); TZ(I,J)  
390 LPRINT USING I$; R(I,J); TZ(I,J)  
400 PRINT #1, USING I$; R(I,J); TZ(I,J)  
410 RETURN
```

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARCHER, R. R. & BYRNES, F. E. On the distribution of tree growth stresses - Part I: an anisotropic plane strain theory. WOOD SCIENCE and TECHNOLOGY, New York, 8(3): 184-96, 1974.
- ARCHER, R. R. Growth stresses and strains in trees. Berlin, Springer, 1986. 240p.
- BOYD, J. D. Tree growth stresses I: growth stress evaluation. AUSTRALIAN JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCH, Melbourne, 3: 270-93, 1950.
- BOYD, J. D. Tree growth stresses II: The development of shakes and other visual failures in timber. AUSTRALIAN JOURNAL APPLIED SCIENCE, Melbourne, 1: 296-312, 1950.
- BOYD, J. D. Tree growth stresses III: The origin of growth stresses: AUSTRALIAN JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCH, Melbourne, 3: 294-309, 1950.
- DINWOODIE, J. M. Growth stresses in timber: a review of literature. FORESTRY, London, 39: 162-70, 1966.
- FERRAND, J. C. Recherche des solutions pratiques à apporter aux problèmes posés par les contraintes de croissance des arbres forestiers. Lorraine, 1981. (Tese - Doutoramento - Institut National Polytechnique).
- FERRAND, J. C. Etude des contraintes de croissance: première partie: méthode de mesure sur carottes de sondage. ANNALES DES SCIENCES FORESTIÈRES, Paris, 39(2): 109-42, 1982a.
- FERRAND, J. C. Un capteur d'extensométrie miniature à deux voies. ANNALES DES SCIENCES FORESTIÈRES, Paris, 39(2): 143-49, 1982b.
- FERRAND, J. C. Etude des contraintes de croissance: deuxième partie: variabilité en forêt des contraintes de croissance du hêtre (*Fagus Sylvatica* L.). ANNALES DES SCIENCES FORESTIÈRES, Paris, 39(3): 187-217, 1982c.

- FERRAND, J. C. Etude des contraintes de croissance III - *Eucalyptus delegatensis* et *Eucalyptus nitens*: influence de la sylviculture et de la station. ANNALES DES SCIENCES FORESTIÈRES, Paris, 39(4): 355-77, 1982d.
- FUSCO, P. B. - Caracterização da deformabilidade na elasticidade linear. São Paulo, Politécnic/USP, 1989. 45p.
- GILLIS, P. P. Theory of growth stresses. HOLZFORSCHUNG, 27(6): 197-207, 1973.
- GILLIS, P. P. & HSU, C. H. An elastic, plastic theory of longitudinal growth stresses. WOOD SCIENCE and TECHNOLOGY, New York, 13(2): 97-115, 1979.
- GIORDANO, G; CURRO, F. P. & GHISI, G. Contribution to the study of internal stresses in the wood of *Eucalyptus*. WOOD SCIENCE and TECHNOLOGY, New York, 3(1): 1-13, 1969.
- GUÉNEAU, P. & KIKATA, Y. Contraintes de croissance. BOIS ET FORÊTS DES TROPIQUES, Nogent-Sur-Marne, 149: 21-30. mai-jun. 1973.
- GUÉNEAU, P. Contraintes de croissance. CAHIERS SCIENTIFIQUES, Nogent-Sur-Marne, 3: 1-52, jun. 1973
- GUÉNEAU, P. & SAURAT, J. Growth stresses: forest measurements. Nancy, Centre Technique du Bois, 1974. 115 p.
- GUÉNEAU, P. & SAURAT, J. Growth stresses in beech. WOOD SCIENCE and TECHNOLOGY, New York, 10(2) 111-123, 1976.
- JACOBS, M. R. The fibre tension of woody stems with special reference to the genus *Eucalyptus*. Canberra, Commonwealth Government Printer, 1938. 39p.
- JACOBS, M. R. Further studies on fibre tension. Canberra, Commonwealth Government Printer, 1939. 36p.
- JACOBS, M. R. The growth stresses of woody stems. Canberra, Commonwealth Government Printer, 1945. 67p.
- KIKATA, Y. Growth stress of tropical wood. WOOD INDUSTRY, 29(3): 17-9, 1974.

- KIKATA, Y. Growth stress of tropical wood II. WOOD INDUSTRY, 29(5): 16-9.
- KOLLMANN, F. F. P. & COTÉ Jr, W. A. Principles of Wood Science and Thechnology, New York. Springer Verlag. v.1.
- KUBLER, H. Studien über wachstumsspannungen des holzes: Erste mitteilung: die ursache der wachstumsspannungen und die spannungen quer zur faserrichtung. HOLZ ALS ROH-UND WERKSTOFF, 17: 1-9, 1959.
- KUBLER, H. Studies on growth stresses in trees - Part I: The origin of growth stresses and the stresses in transverse direction. Commonwealth scientific and industrial research organization, 1959. 26p.
- KUBLER, H. Studien über wachstumsspannungen des holzes: Zweite mitteilung: die spannungen in faserrichtung. HOLZ ALS ROH-UND WERKSTOFF, 17(2): 44-54, 1959.
- KUBLER, H. Studies on growth stresses in trees - Part II: Longitudinal stresses. Commonwealth scientific and industrial research organization, 1959. 36p.
- KUBLER, H. Studies on growth stresses in trees - Part III: Effect of heat treatment on the dimensions of green wood. HOLZ ALS ROH-UND WERKSTOFF, 17(3): 77-86. mar. 1959.
- KUBLER, H. Growth stresses in trees and related wood properties. FOREST PRODUCTS ABSTRACTS, 10(3): 61-119, 1987.
- LEKHNITSKII, S. G. Theory of elasticity of an anisotropic body. Moscow, Mir Publishers, 1981. 430p.
- MALAN, F. S. Studies on the phenotypic variation in growth stress intensity and its association with tree and wood properties of South African grown *Eucalyptus grandis* (Hill Ex Maiden). Stellenbosch, 1984. 272p (Tese - Doutoramento - US/SA).
- MARIAUX, A & VITALIS-BRUN. A. Structure fine du bois de wapa in relation avec les contraintes de croissance. BOIS ET FORÊTS DES TROPIQUES, Nogent-Sur-Marne. 199: 43-56. 1983.

- MARTLEY, J. F. Theoretical calculations of the pressure distribution on the basal section of a tree. *FORESTRY*, London, 2(1): 39-72, 1928.
- NICHOLSON, J. E. A rapid method for estimating longitudinal growth stresses in logs. *WOOD SCIENCE and TECHNOLOGY*, New York, 5(1): 40-48, 1971.
- NICHOLSON, J. E. Growth stress differences in Eucalyptus. *FOREST SCIENCE*, Washington, 19(3): 169-74, set. 1973.
- POLGE, H. & THIERCELIN, F. Growth stress appraisal through increment core measurement. *WOOD SCIENCE*, Madison, 12(2): 86-92, jun. 1979.
- POLGE, H. Influence des éclaircies sur les contraintes de croissance du hêtre. *ANNALES DES SCIENCES FORESTIÈRES*. Paris, 38(4): 407-23, 1981.
- POLGE, H. Growth stresses in forest trees. *COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADEMIE D'AGRICULTURE DE FRANCE*, 68(17): 1307-16, 1982.
- POST, I. L. An investigation of the longitudinal growth stresses in trees. New York, 1979. 108p (Tese - Doutoramento - SUNY/USA).
- POST, I. L. et alii. An estension of Jacob's method for measuring residual growth strains in logs. *WOOD SCIENCE and TECHNOLOGY*.
- POST, I. L. An incremental longitudinal growth stress distribution model. *HOLZFORSCHUNG*, 33(4): 107-11, 1979.
- SASAKI, Y.; OKUYAMA, T. & KIKATA, Y. The evolution process of the growth stress in the tree: the surface stresses on the tree. *MOKUZAI GAKKAISHI*, 27: 270-6, 1978.
- TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N. Theory of elasticity. New York, 3<sup>a</sup>ed., McGraw-Hill, 1970. 567 p.
- TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N. Teoria da elasticidade. Rio de Janeiro, 3<sup>a</sup>ed., Guanabara Dois, 1980. 545p.
- WILHELMY, V. & KUBLER, H. Stresses and checks in log ends from relieved growth stresses. *WOOD SCIENCE*, Madison, 6(2): 136-42, 1973.

VENDHAN, C. P. & ARCHER, R. R. Relief of growth stresses in diametrical planks.

HOLZFORSCHUNG, 31(3): 90-6, 1977.

YAO, J. Relationships between height and growth stress within and among White Ash,

Water Oak, and Shagbark Hickory. WOOD SCIENCE, Madison, 11(4): 246-51,

ABR. 1979.