MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I - 2023
Lista 10

1. Aplicações da Integral

1. Determine a área da região delimitada

a) pelos gráficos de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{5}$ e as retas $x = 0$ e $x = 3$;

b) pelos gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$ e as retas $x = -1$ e $x = 1$;

c) pelos gráficos de $f(x) = \dfrac{\ln x}{4}$ e $g(x) = -\ln x$ e as retas $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$;

d) pelos gráficos de $f(x) = xe^x$ e $g(x) = xe^{x^2}$ e as retas $x = 0$ e $x = 2$.

2. Esboce a região A e calcule a sua área:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 4,\ \ y \leq 12 - 3x^2 \ \text{ e } \ y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$

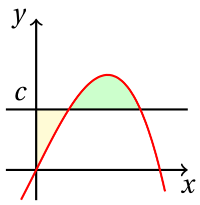
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1,\ \ y \leq x + 1 \ \text{ e } \ y \geq -x^2 - 3x - 2\}$

3. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a, b > 0$.

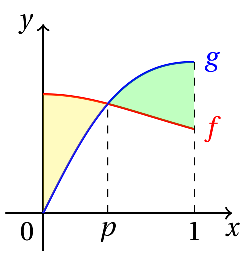
4. Determine $m > 0$ para que a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$ e pela reta $y = mx$ seja igual a 4.

5. Calcule a área da região delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto $(-1, 0)$.

6. A reta horizontal $y = c$ intercepta a curva $y = 2x - 3x^3$ no primeiro quadrante como mostra a figura. Determine c para que as áreas das duas regiões sombreadas sejam iguais.



7. **(MAT0121 - Rec 2021)** Sejam $f(x) = \dfrac{m}{\sqrt{1+x^2}}$ e $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, onde $m > 0$ é constante. Determine m de modo que as áreas das duas regiões sombreadas na figura abaixo sejam iguais.



8. Seja $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [-1, 3]$. Considere as regiões $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \geq f(x)\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \leq x^2 + 3\}$. Sabendo que a área de $A \cap B$ é igual a 23, determine $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$.

9. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

10. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \cosh x$, $-3 \le x \le 4$.

11. Determine o comprimento da astroide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

12. Determine os volumes dos sólidos obtidos pelas rotações, em torno do eixo Ox, das regiões:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le xy \le 2,\ x^2 + y^2 \le 5 \text{ e } x > 0\}$

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \text{ e } e^{-x} \le y \le e^x\}$

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \le 1 \text{ e } 1/x \le y \le 4/x^2\}$

13. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \le y \le e^x + 4\}$ em torno da reta $y = 2$.

14. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

15. **(MAT0121 - P1 2021 - Adaptada)** Seja A a região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x}$ e as retas $x = 1$ e $x = 2$.

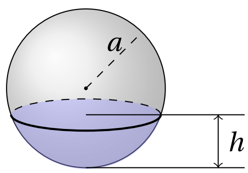
a) Calcule a área de A.

b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Ox, de A.

c) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Oy, de A.

16. O disco $x^2 + y^2 \le a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $0 < a < b$, para gerar um sólido com a forma de um pneu, chamado *toro*. Calcule seu volume.

17. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $0 < h \le a$, de uma esfera de raio $a > 0$.



18. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove que o volume do anel depende de h, mas não de R.