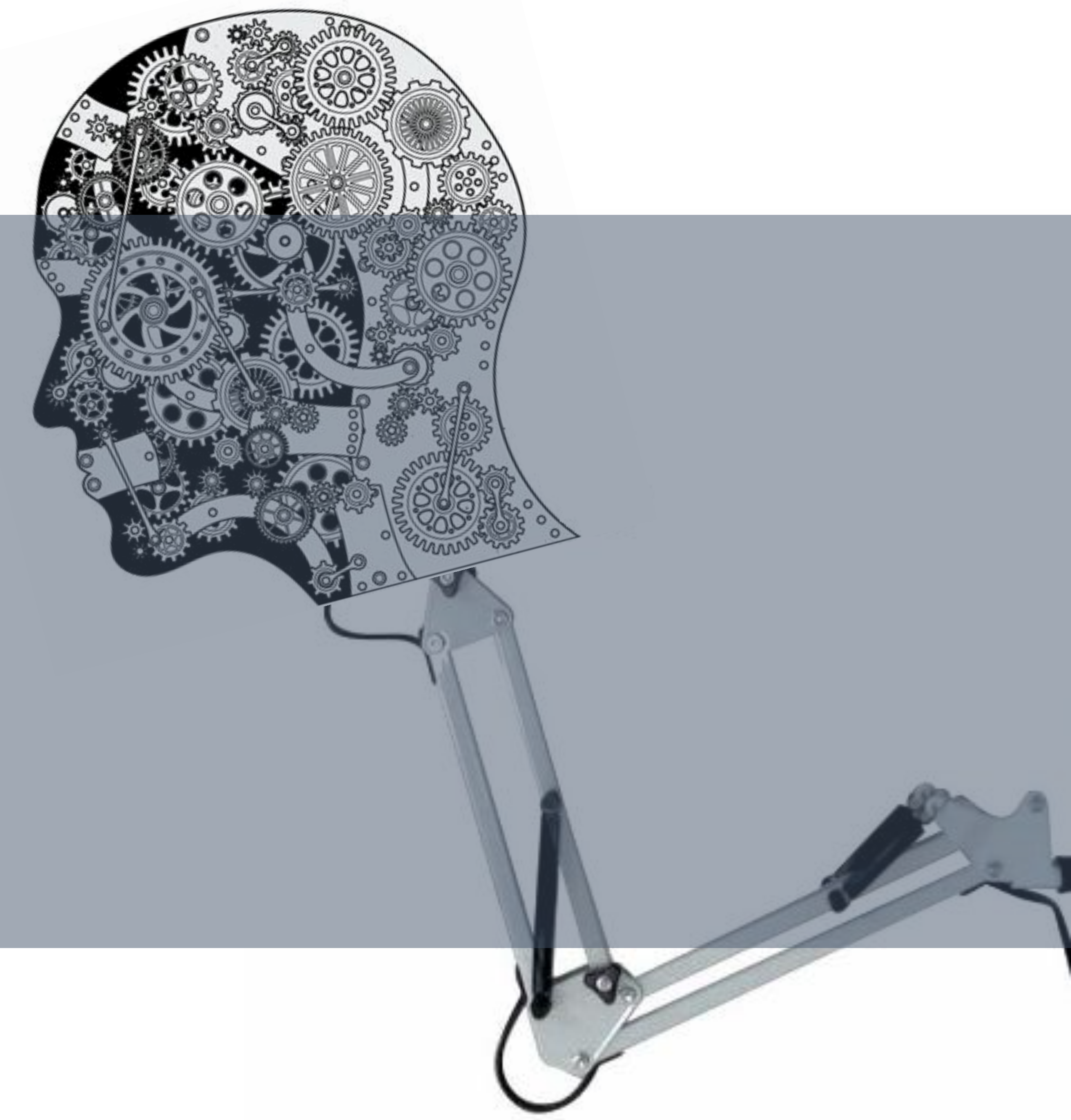
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Mecânica

# SEM 104 - Mecanismos

Prof. Rodrigo Nicoletti

## AULA 10 – Dinâmica

### Método das Potências e de Lagrange



# Dinâmica de Mecanismos

## Método de Newton-Euler

*i)* Calcula TODAS as forças atuantes no mecanismo ➡ **Dimensionamento da Estrutura**

*ii)* Calcula potência necessário para o acionamento do mecanismo ➡ **Dimensionamento do Motor**


**Método das Potências**

**Método de Lagrange**

# Método das Potências

# Método das Potências

Pela conservação da energia:

$$\sum Pot_{forças\ externas} + \sum Pot_{forças\ de\ reação} = \sum Pot_{forças\ de\ inércia}$$

Entretanto, **FORÇAS DE REAÇÃO NÃO REALIZAM TRABALHO**, porque o trabalho realizado por uma força é cancelado pelo trabalho realizado por sua reação.

Assim:

$$\sum Pot_{forças\ de\ reação} = 0$$

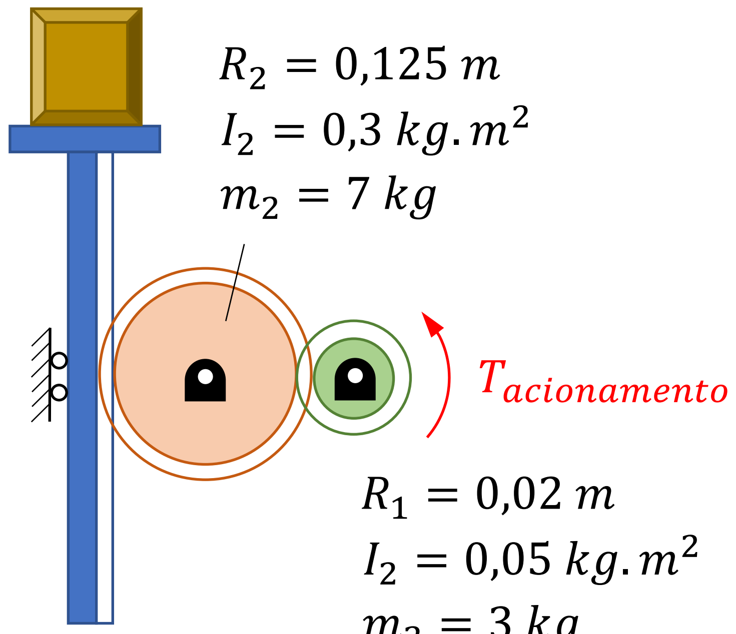
Portanto:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum Pot_{forças\ externas} = \sum Pot_{forças\ de\ inércia} \\ \Downarrow \\ \sum \vec{F} \cdot \vec{v} + \sum \vec{M} \cdot \vec{\omega} = \sum m\vec{a} \cdot \vec{v} + \sum I\vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}\end{gathered}}$$

# Método das Potências

$m_4 = 20\ kg$

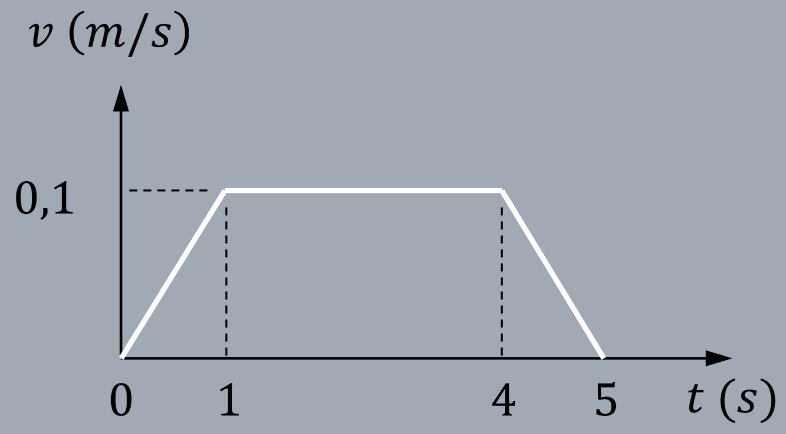
$R_2 = 0{,}125\ m$
$I_2 = 0{,}3\ kg.m^2$
$m_2 = 7\ kg$



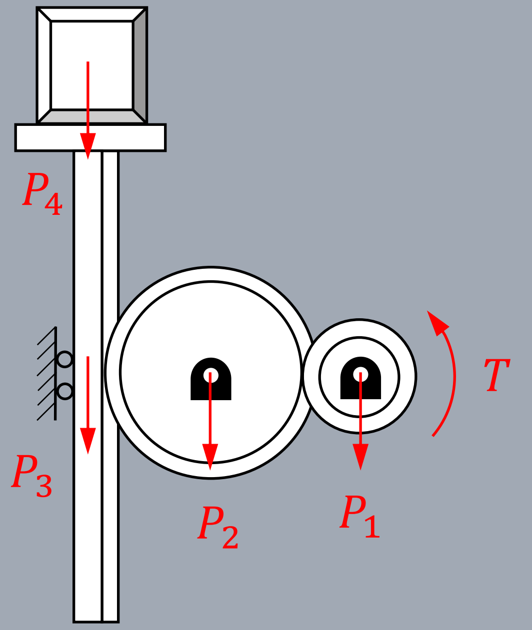

$R_1 = 0{,}02\ m$
$I_2 = 0{,}05\ kg.m^2$
$m_2 = 3\ kg$

$m_3 = 5\ kg$

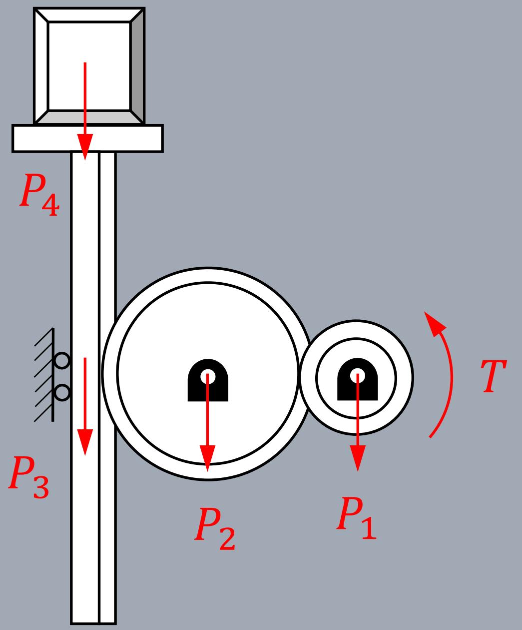
Determine a **potência necessária** para elevar a carga de acordo com o perfil de velocidade:




1) <u>Identifique todas as Forças Externas no mecanismo</u>



# Método das Potências




2) Aplique a equação das potências

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{v} + \sum \vec{M} \cdot \vec{\omega} = \sum m\vec{a} \cdot \vec{v} + \sum I\vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}$$

Assim: $$T\omega_1 - P_3 v_3 - P_4 v_4 = I_1\alpha_1\omega_1 + I_2\alpha_2\omega_2 + m_3 a_3 v_3 + m_4 a_4 v_4$$

Mas: $$v_4 = v_3$$

$$a_4 = a_3$$

$$R_1\omega_1 = -R_2\omega_2 \;\Rightarrow\; \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_2}$$

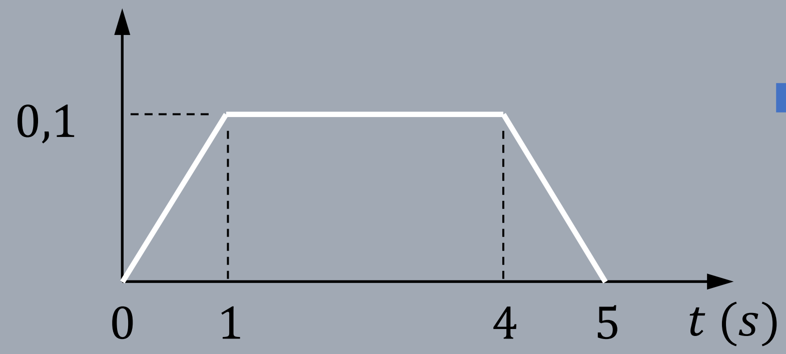
$$v_3 = -R_2\omega_2 = R_1\omega_1 \;\Rightarrow\; \frac{v_3}{\omega_1} = R_1$$

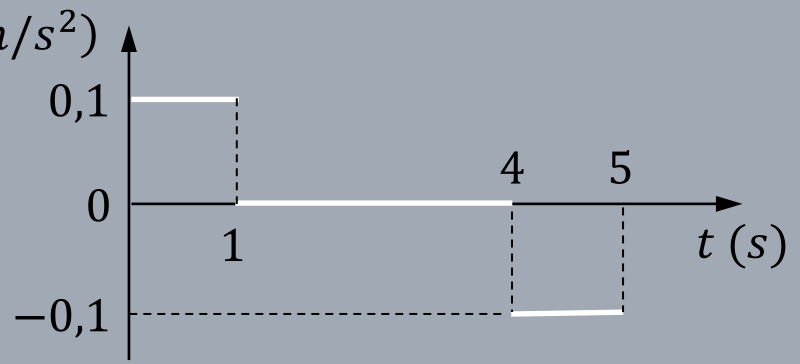
Portanto: $$\boxed{T = I_1\alpha_1 - \frac{R_1}{R_2} I_2\alpha_2 + R_1(m_3 + m_4)(a_3 + g)}$$

Vem do perfil de velocidade desejado !!!

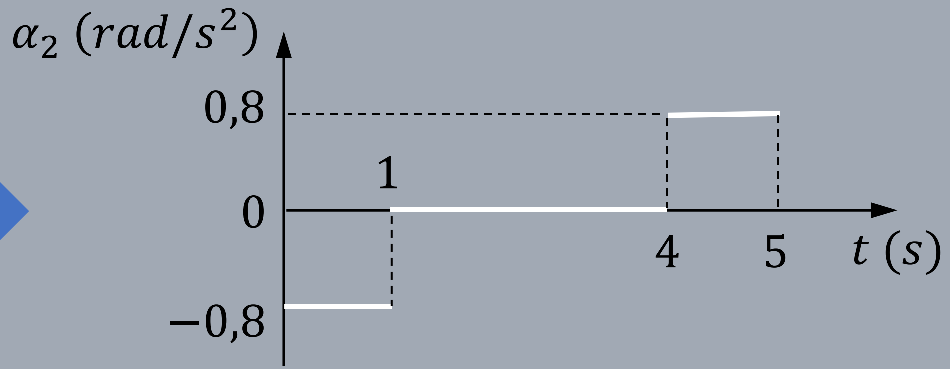
# Método das Potências

Sabendo-se que:

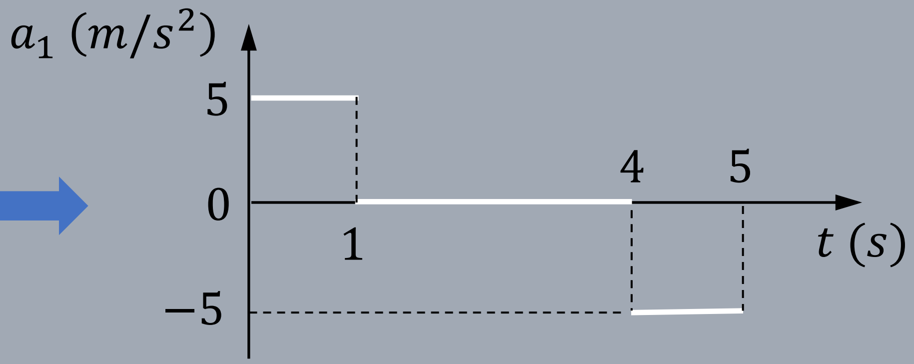



$$v_3 = -R_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -R_2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{a_3}{R_2}$$



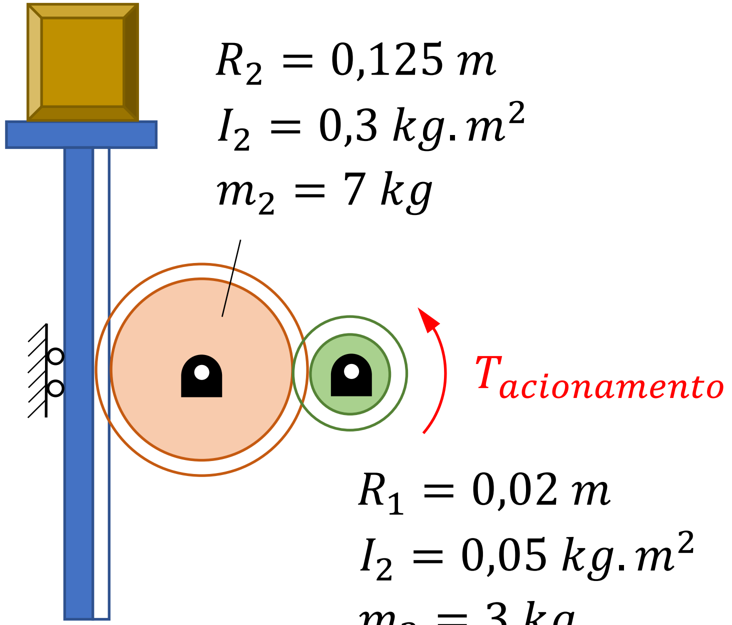

$$R_1\omega_1 = -R_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = -\frac{R_2}{R_1}\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{R_2}{R_1}\alpha_2$$



# Método das Potências

$m_4 = 20\ kg$

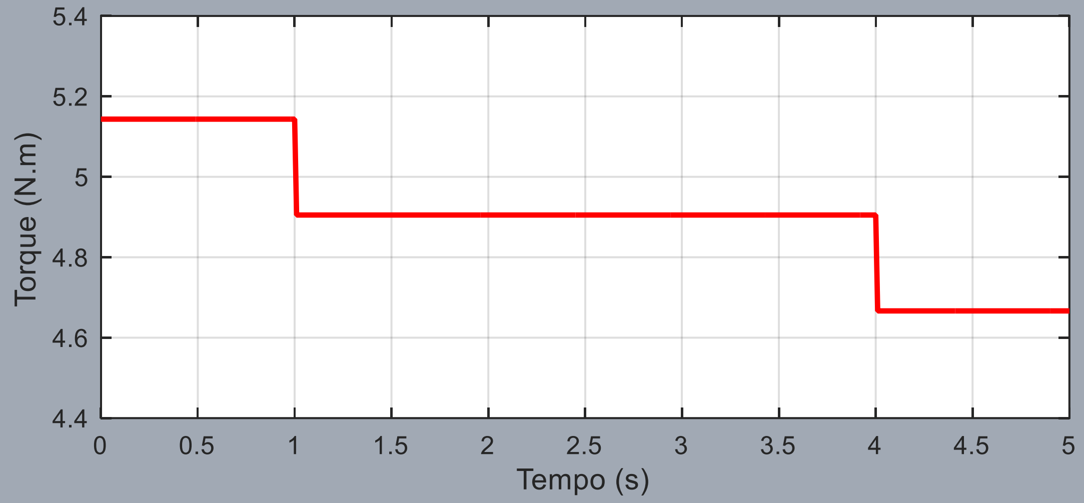
$R_2 = 0{,}125\ m$
$I_2 = 0{,}3\ kg.m^2$
$m_2 = 7\ kg$




$R_1 = 0{,}02\ m$
$I_2 = 0{,}05\ kg.m^2$
$m_2 = 3\ kg$

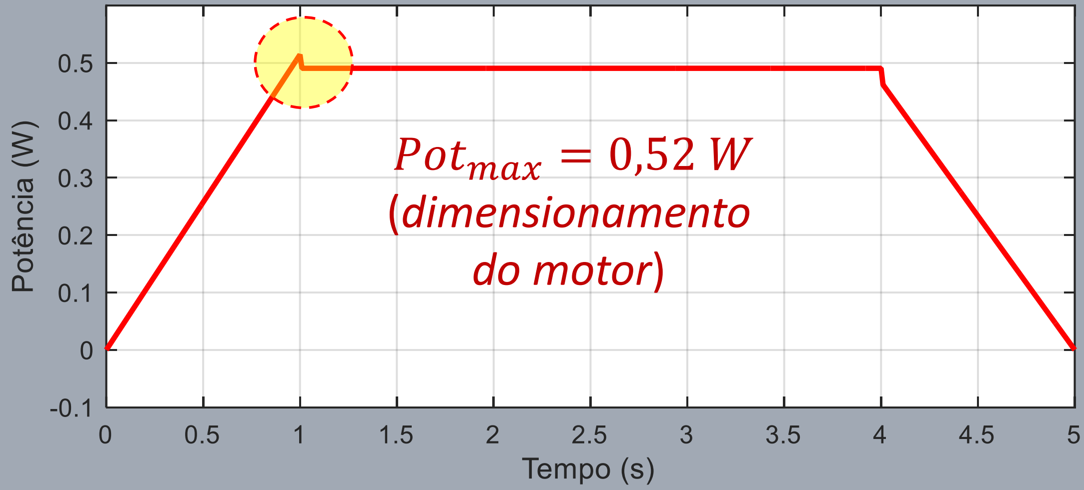
$m_3 = 5\ kg$

Colocando as equações no Matlab/Octave:




Calculando-se a Potência:

$$Pot = T.\omega_1 = T\frac{v_3}{R_1}$$

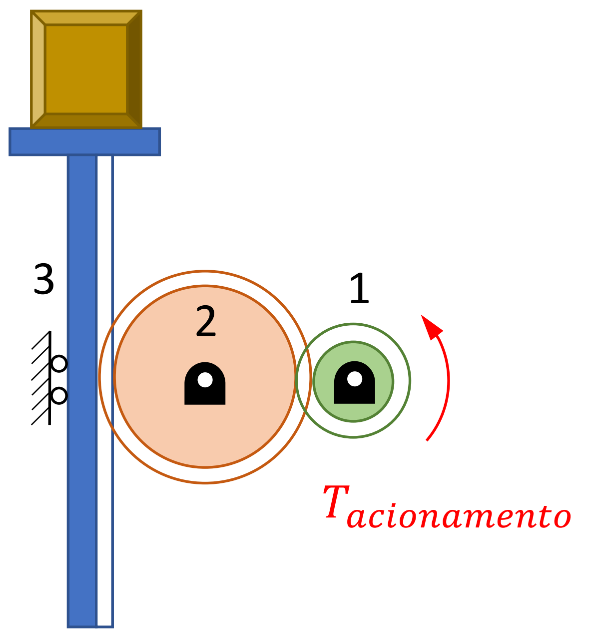


# Eficiência do Engrenamento

**TODO ENGRENAMENTO POSSUI UMA CERTA EFICIÊNCIA !!!**

$$\boxed{Pot_{saída} = \eta . Pot_{entrada}}$$

Normalmente, a **faixa de eficiência** é de: $0{,}9 \leq \eta \leq 0{,}99$




Assim, para o caso em estudo:

$$\left.\begin{aligned} Pot_3^{max} &= \eta_{23} . Pot_2^{max} \\ Pot_2^{max} &= \eta_{12} . Pot_{MOTOR}^{max} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{Pot_{MOTOR}^{max} = \frac{Pot_3^{max}}{\eta_{12} . \eta_{23}}}$$

Considerando eficiência nos engrenamentos de 0,95:

$$Pot_{MOTOR}^{max} = \frac{0{,}52}{0{,}95 . 0{,}95} \Rightarrow \boxed{Pot_{MOTOR}^{max} = 0{,}58\ W}$$

**12% maior !!!**

# Método das Potências

1) <u>Identifique todas as Forças Externas no mecanismo</u>

2) <u>Aplique a equação das potências</u>

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{v} + \sum \vec{M} \cdot \vec{\omega} = \sum m\vec{a} \cdot \vec{v} + \sum I\vec{\alpha} \cdot \vec{\omega}$$

3) <u>Determine a potência necessária para o acionamento do mecanismo</u>

Observe que **engrenamentos e atrito tendem a reduzir a potência final** do mecanismo (*exige mais potência do motor*)

# Método de Lagrange

# Método de Lagrange

A Equação de Lagrange é baseada na energia do sistema:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{q}}\right)-\frac{dE_c}{dq}+\frac{dE_p}{dq}=Q}$$

Onde: $q$ é um grau de liberdade do mecanismo

$E_c$ é a Energia Cinética total do mecanismo

$$E_C=\sum\frac{1}{2}mv^2+\sum\frac{1}{2}I\omega^2$$

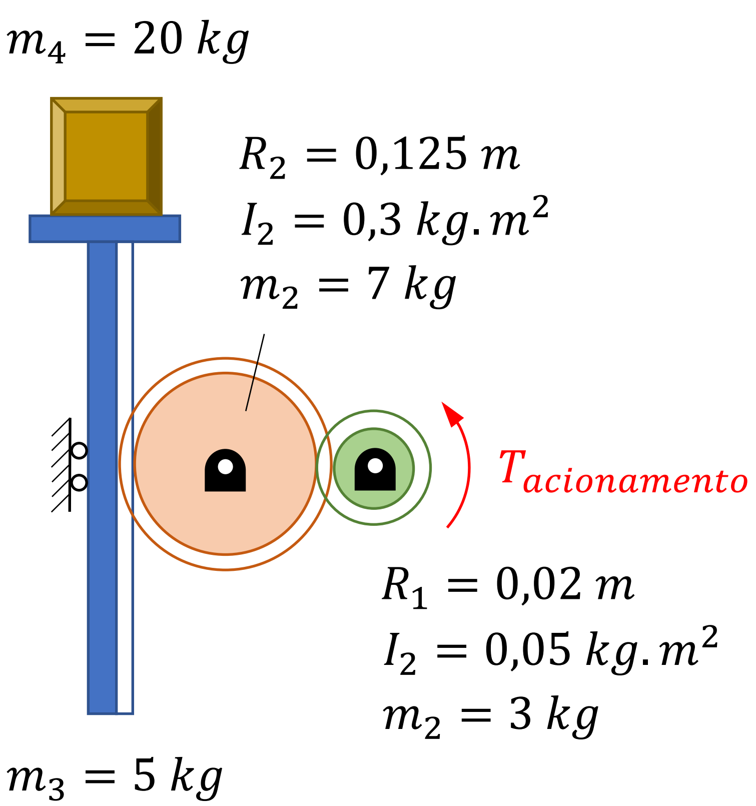
$E_p$ é a Energia Potencial total do mecanismo

$$E_p=\sum mgh+\sum\frac{1}{2}kx^2+\sum\frac{1}{2}k_t\theta^2+\sum\cdots$$

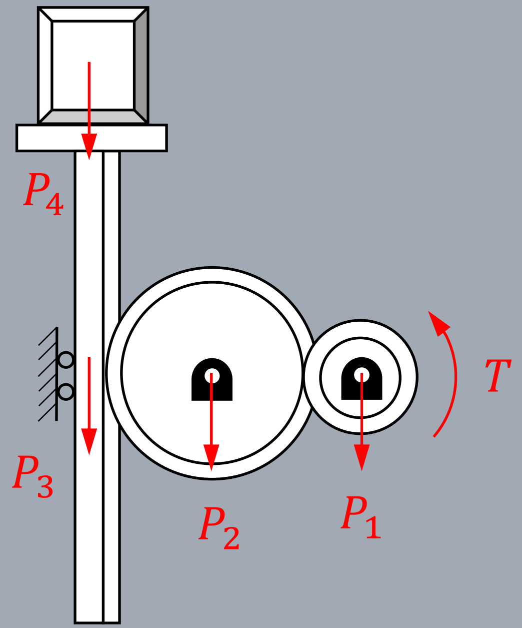
$Q$ é a força/momento externo que atua na direção do grau de liberdade $q$

$$Q=\sum F_q+\sum M_q$$

# Método de Lagrange




1) Identifique todas as Forças Externas no mecanismo

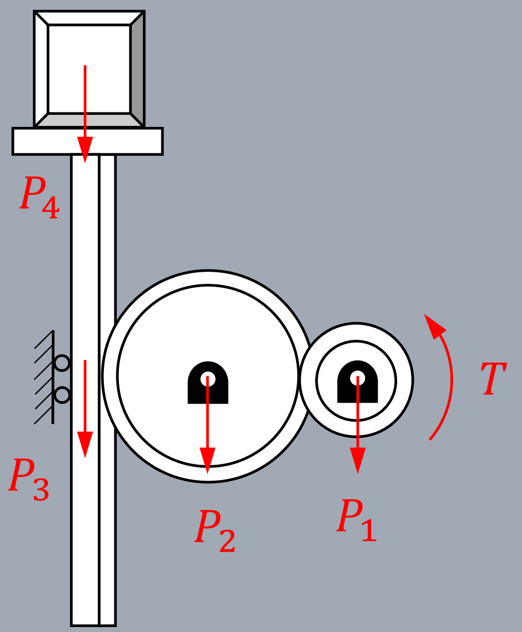



2) Escolha a coordenada generalizada (Grau de Liberdade)

Considerando que o motor está montado na roda 1, pode-se escolher o deslocamento desta roda como coordenada generalizada:

$$\boxed{q = \theta_1}$$

# Método de Lagrange




3) Determine as energias do sistema e as forças generalizadas

**ENERGIA CINÉTICA**

$$E_c = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2$$

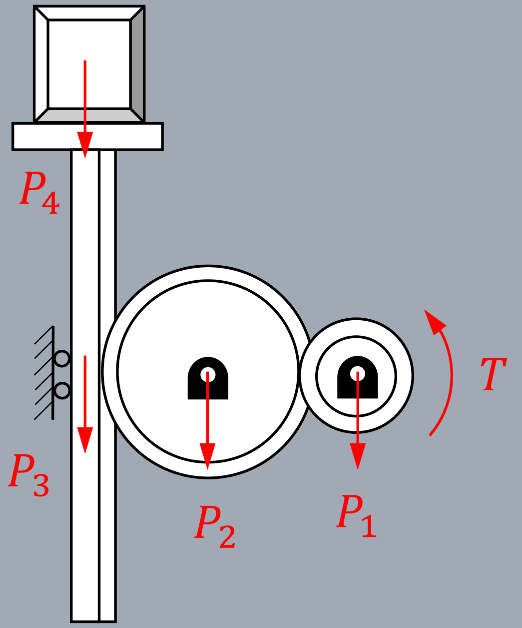
Sabendo-se que: $\omega_2 = -\frac{R_1}{R_2}\omega_1$

$$v_3 = R_1 \omega_1 = v_4$$

Pode-se escrever a Energia Cinética em função de $\omega_1 = \dot{\theta}_1$:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 R_1^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_4 R_1^2 \omega_1^2}$$

# Método de Lagrange




## ENERGIA POTENCIAL

$$E_p = m_3 g h_3 + m_4 g h_4$$

Sabendo-se que: $h_3 = -R_2\theta_2 = R_1\theta_1 = h_4$

Pode-se escrever a Energia Potencial em função de $\theta_1$:

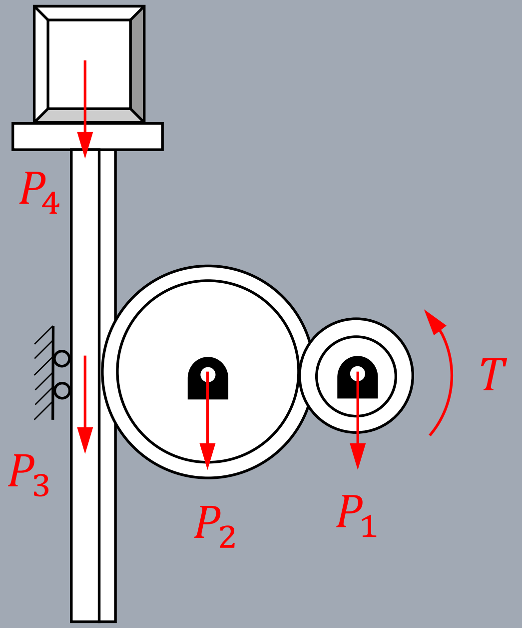
$$\boxed{E_p = m_3 g R_1 \theta_1 + m_4 g R_1 \theta_1}$$

## FORÇAS GENERALIZADAS

O torque de acionamento atua na direção de $\theta_1$:

$$\boxed{Q = T}$$

# Método de Lagrange




4) Substitua as expressões na Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{q}}\right) - \frac{dE_c}{dq} + \frac{dE_p}{dq} = Q$$

Isto resulta em:

$$\boxed{T = I_1\alpha_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 I_2\alpha_1 + R_1^2(m_3+m_4)\alpha_1 + R_1(m_3+m_4)g}$$

Observe que: $-\frac{R_1}{R_2}\alpha_1 = \alpha_2$ $\quad R_1\alpha_1 = a_3$

Pode-se rescrever a expressão:

$$\boxed{T = I_1\alpha_1 - \frac{R_1}{R_2} I_2\alpha_2 + R_1(m_3+m_4)a_3 + R_1(m_3+m_4)g}$$

**MESMA EXPRESSÃO QUE A OBTIDA PELO MÉTODO DAS POTÊNCIAS !!!**

# Método de Lagrange

1) Identifique todas as Forças Externas no mecanismo

2) Escolha a coordenada generalizada $q$ (Grau de Liberdade)

3) Determine as energias do sistema e as forças generalizadas

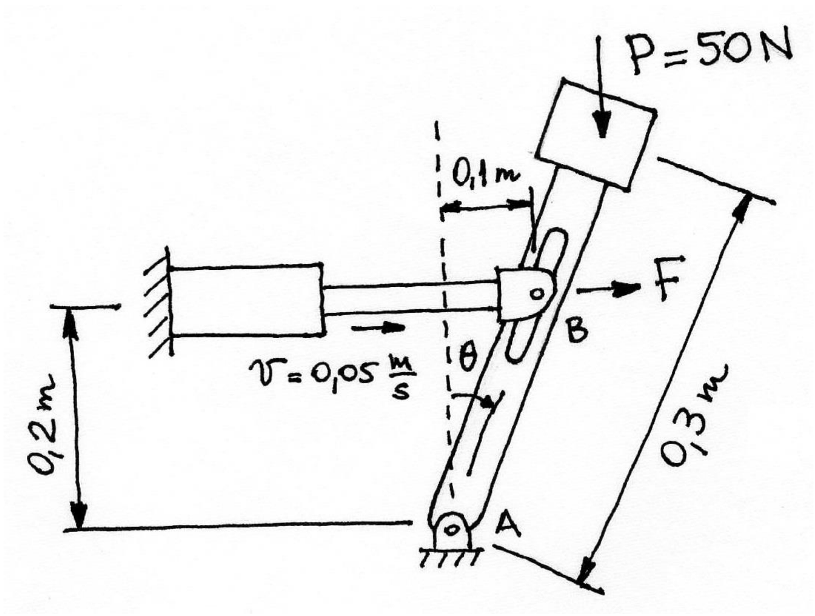
4) Substitua as expressões na Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{q}}\right) - \frac{dE_c}{dq} + \frac{dE_p}{dq} = Q$$

5) Determine a potência necessária para o acionamento do mecanismo

Observe que **engrenamentos e atrito tendem a reduzir a potência final** do mecanismo (*exige mais potência do motor*)

# Tarefa




$$m_B = 1\ kg$$
$$a_B = 0{,}01\ m/s^2$$

Determine a **potência necessária** para acionar este mecanismo neste instante, usando:

**1) Método das Potências**

**2) Método de Lagrange**

Dúvidas ???

**Utilize o FÓRUM no eDisciplinas !**

edisciplinas.usp.br