

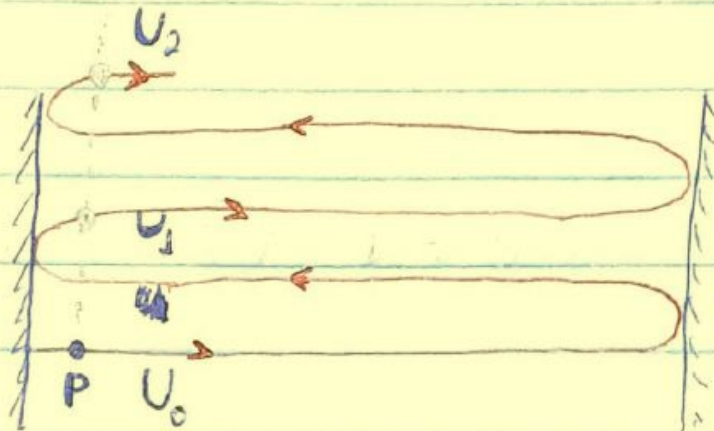
Microcavidades

Parte 2

Largura espectral da ressonância - Perdas

Qdo há perdas a cond. de ressonância é relaxada

Vejamos



campo da
onda inicial de
magnitude U_0

Considerando que os espelhos tem refletividade r

$$U_1 = r^2 e^{i\phi} U_0$$

$$U_1 = R e^{-i\phi} U_0$$

coef. de reflexão dos dois
espelhos

$$R = r^2$$

$$U_2 = (R e^{-i\phi})^2 U_0$$

⋮

chamando $h = r e^{-i\phi}$ (fator de atenuação por volta)

e lembrando

$$\phi = K 2d$$

Pela superposição temos

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots = U_0 + hU_0 + h^2U_0 + \dots = U_0 \underbrace{(1 + h + h^2 + \dots)}_{PG}$$

$$U = \frac{U_0}{1-h}$$

A intensidade da luz no visor é

$$I = |V|^2 = \frac{|V_0|^2}{|1 - R e^{-i\phi}|^2} = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$$

c/

$$I_0 = |V_0|^2$$

Teremos $I_{\max}$ qdo $\cos \phi = 1$ ($\phi = 2\pi m \Rightarrow$ cond. ressonância)
Neste caso

$$I_{\max} = \frac{I}{1 + R^2 - 2R} = \frac{I_0}{(1 - R)^2}$$

Após alguns álgebra, podemos escrever:

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

onde

$$F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R}$$

Finesse do
ressonador

Usando agora

$$\phi = 2kd = \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{4\pi r_f d}{c}$$

Podemos escrever I em termos de $r_f \Rightarrow I(r_f)$

$$I(r_f) = \frac{I_{\max}}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi r_f}{r_f}\right)}$$

$$c/ \quad r_f = \frac{c}{2d}$$

⊕ I_{max} é obtido qdo o segundo termo no denominador é zero, ou seja,

$$\sqrt{l} = m \sqrt{l_F}$$

c/ $m = 1, 2, \dots$

MAS RESSONÂNCIAS

* $I_{\min}$ é obtido qdo o denominador é máximo,
ou seja,

$$\sin^2\left(\frac{\pi r}{r_F}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi r}{r_F}\right) = \pm 1$$

$$\frac{\pi r}{r_F} = (2m+1) \frac{\pi}{2}$$

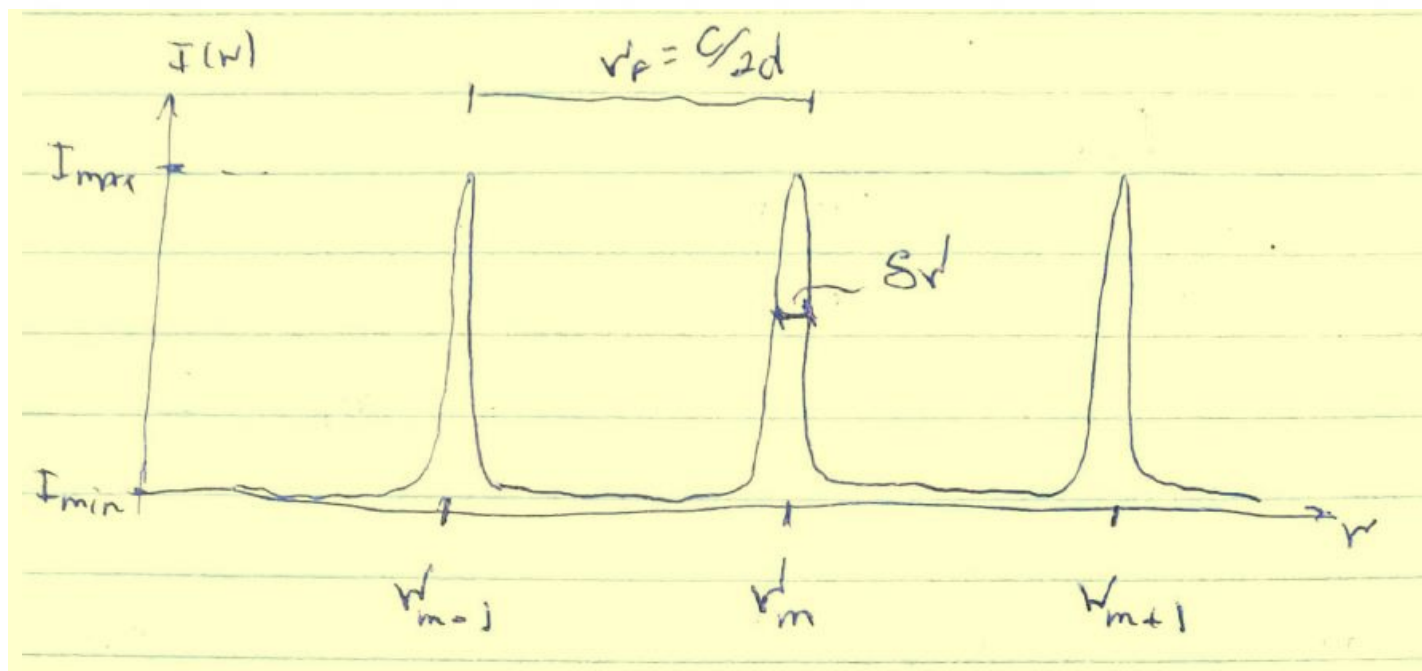


$$r = r_F \left(m + \frac{1}{2}\right)$$

nos pontos
intermediários
entre as
resonâncias

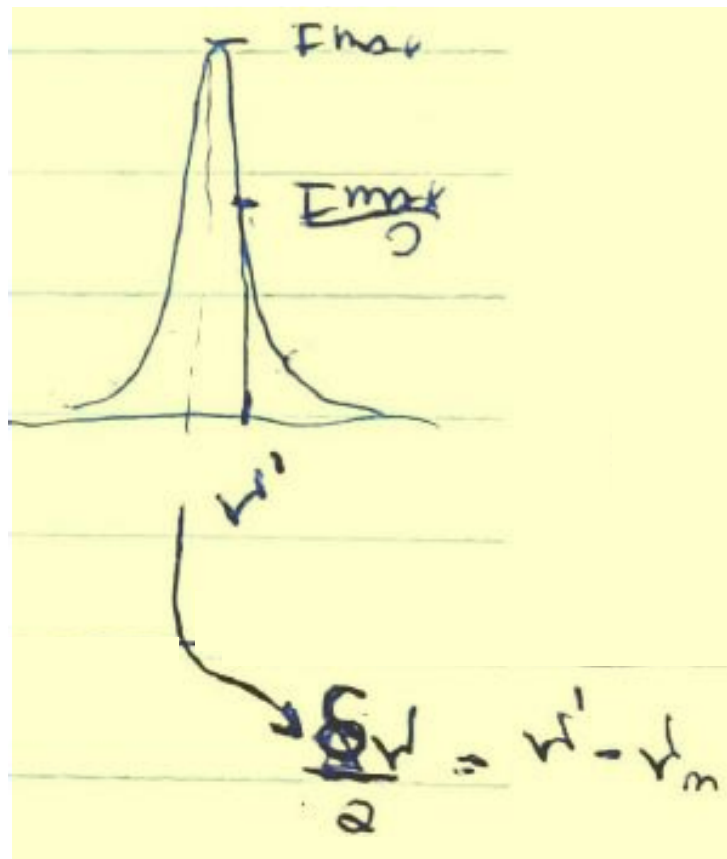
$$I_{\min} = \frac{I_{\max}}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2}$$

O gráfico de $I(r)$ é



Se F é grande ($F \gg 1$), os picos ficam mais estreitos e $I_{\min}/I_{\max}$ é pequeno

Para o caso de FWHM do pico ressonante, temos



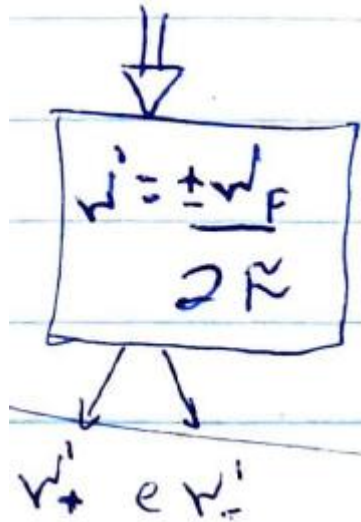
$$I = \frac{I_{max}}{2} = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi w'}{w_F}\right)}$$

$$1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi w'}{w_F}\right) = 2$$

$$\sin\left(\frac{\pi w'}{w_F}\right) = \pm \frac{\pi}{2F} \approx \frac{\pi w'}{w_F}$$

$$\begin{array}{l} \sin \theta \approx \theta \\ w_F \gg w' \end{array}$$

$$\sin\left(\frac{\pi \omega'}{\omega_F}\right) = \pm \frac{\pi}{2K} \approx \frac{\pi \omega'}{\omega_F}$$



Logo A largura

$$\delta \omega = \frac{\omega_F}{K}$$

$$\omega'_+ - \omega'_-$$

$$\approx \frac{\omega_F}{K}$$

$$S_v = \frac{v_F}{n}$$

- válida pr $\tilde{F} \gg 1$

- a medida que a perda
diminui, $\tilde{F}$
aumenta e S_v diminui

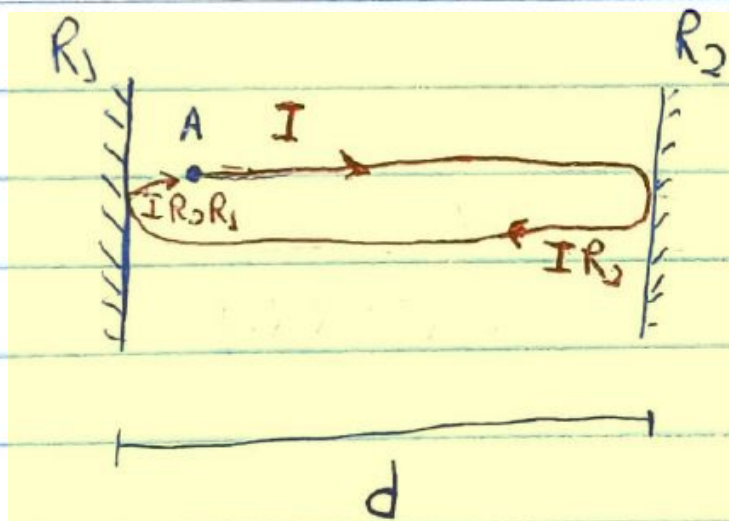
Fontes de Perdas

- 1) reflexão não ideal das espelhas
- 2) Absorção e espalhamento que ocorre no meio entre as espelhas

Tempo de vida do fóton na cavidade

- relação entre largura da linha da ressonância e as perdas no ressonador podem ser interpretadas como uma manifestação do tempo de vida do fóton na cavidade

- Consideremos cavidade passiva (sr ganho)



por simplicidade $n=1$

Pr generalizar e
so fazer

$$C \rightarrow C/n$$

A perda em uma volta (devido aos espelhos) é refletida na perda de intensidade em uma volta

$$\Delta I = I(t + \Delta t) - I(t) \quad \text{onde} \quad \Delta t = 2L/c$$

$$\Delta I = I(t) R_1 R_2 - I(t) = I(t) [R_1 R_2 - 1]$$

A taxa de variação de intensidade é

$$\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \frac{I(t) [R_1 R_2 - 1]}{\left(\frac{2L}{c}\right)}$$

Como em geral as refletividades dos espelhos são altas, a perda fracionária por volta é $\ll 1$, podemos fazer

$$\frac{dI}{dt} = - \frac{c [E R_1 R_2 + 1]}{2L} I(t)$$

cuya solución es

$$I(t) = I_0 e^{-\left(\frac{c [E R_1 R_2 + 1]}{2L}\right) t} = I_0 e^{-t/\tau_c}$$

intensidad de
decaí
exponencialmente

com

$$\bar{\tau}_c = \frac{2L}{c(1 - R_1 R_2)}$$

↳ Tempo de vida do fóton
↳ Tempo da cavidade

Esse $\bar{\tau}_c$ é usado p/ medir refletividade de cavidades, medindo, por exemplo, a queda

$$I(t) = I_0 e^{-t/\bar{\tau}_c}$$

Ainda costumasse observar que

$$\frac{(1 - R_1 R_2)}{2L} = \alpha_r$$


que é a perda por
volta da cavidade

Desta forma

$$\tau_c = \frac{1}{c\alpha_r}$$

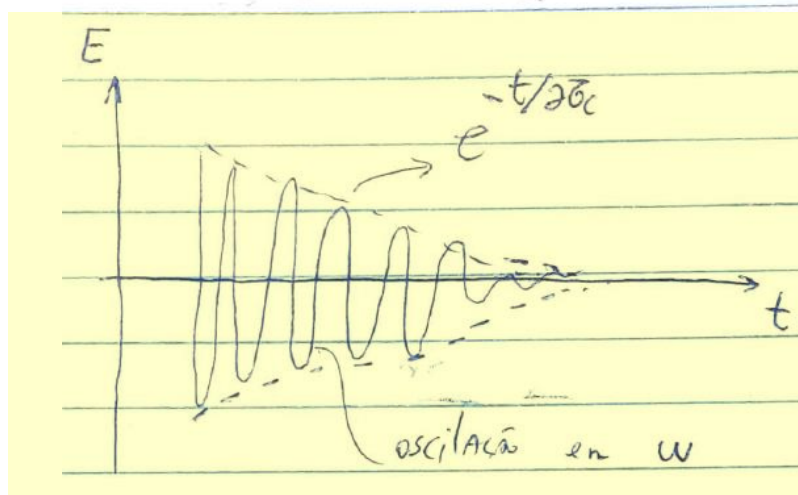
Portanto $c\alpha_r$ representaria uma perda por unidade de tempo, que definiria um tempo característico de decaimento

A dependência de $E(t)$ é dada por

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau_c} \cos(\omega t)$$

pois $E \propto \sqrt{I(t)}$

$$I = I_0 e^{-t/\tau_c}$$



Pelo P. Transf. de Fourier (pode-se demonstrar) que
pr este tipo de decaimento, a relação de incerteza

$$\Delta \omega_{FWHM} \bar{\sigma}_c \approx 1$$

como

$$\Delta \omega_{FWHM} = \frac{\Delta \omega_{FWHM}}{2\pi}$$

Logo

$$\bar{\sigma}_c \approx \frac{1}{\Delta \omega_{FWHM}} = \frac{1}{2\pi \Delta \omega_{FWHM}} \Rightarrow \Delta \omega_{FWHM} = \frac{1}{2\pi \bar{\sigma}_c}$$

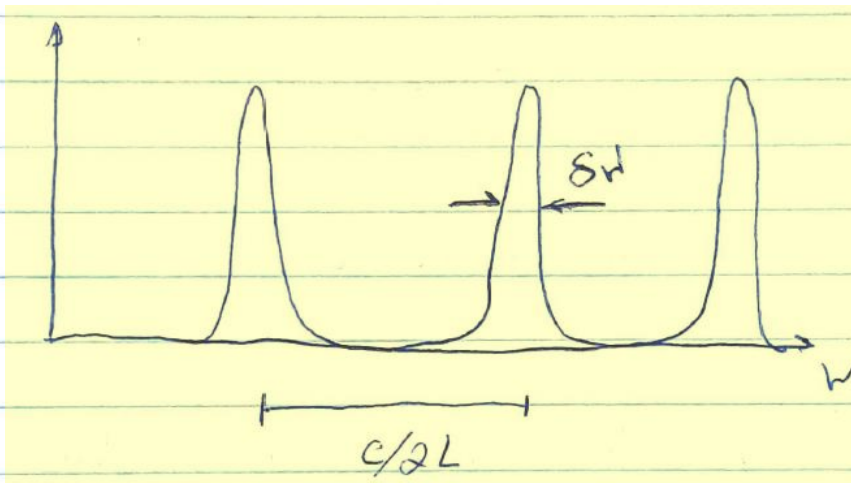
$\delta\omega$

$$\Delta\omega_{FWHM} = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{2L} (1 - R_1 R_2) = \frac{1}{2\pi} c \alpha_r$$

Para manter notação com eqs anteriores

$$\Delta\omega_{FWHM} = \delta\omega = \frac{c\alpha_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau_c}$$

Largura
espectral do
modo



- O fato de que

$$\delta \nu \tau_c = \frac{1}{2\pi}$$

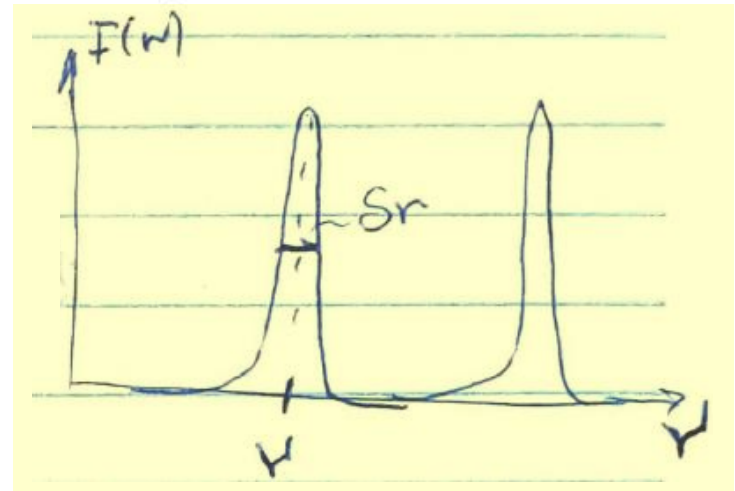
O Alargamento da ressonância é uma consequência do decaimento da energia óptica devido as perdas do ressonador

Fator de Qualidade = Q

Analogamente ao oscilador harmônico, usa-se a mesma terminologia para descrever a largura da ressonância no caso de um ressonador óptico

O fator de qualidade Q é definido como

$$Q \equiv \frac{\omega}{\Delta\omega}$$



que pode ser reescrito como

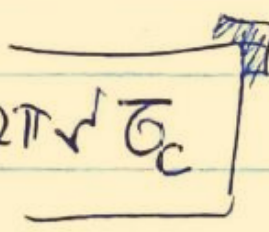
$$Q = \frac{\sqrt{2\pi} 2L}{(1 - R_1 R_2) c} = \frac{4\pi L}{\lambda (1 - R_1 R_2)}$$

Observações

1) $Q \uparrow \Rightarrow R \uparrow$ (maior refletividade)

2) $Q \uparrow \Rightarrow L \uparrow$

Finalmente

$$Q \equiv \frac{\omega}{8\nu} = \frac{\omega}{\left(\frac{1}{2\pi\tau_c}\right)} = 2\pi\omega\tau_c$$


quanto maior o tempo de vida do fóton maior Q (mais voltas o fóton dá na cavidade)

$$Q \uparrow \Rightarrow \uparrow \tau_c$$

⊛ Revisitando o fator de qualidade - Q

Outra forma de definir Q

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia Armazenada}}{\text{energia perdida por ciclo}}$$

Como vimos antes, a energia Armazenada é perdida a uma taxa $C\alpha_r$ (por unidade de tempo)

Logo, num ciclo $T_0 = \frac{1}{r_0}$

A energia armazenada e perdida numa
taxa

$$C \alpha_r \times T_0 = C \alpha_r / r_0 \text{ (ciclo)}$$

$G_n \text{ km}$

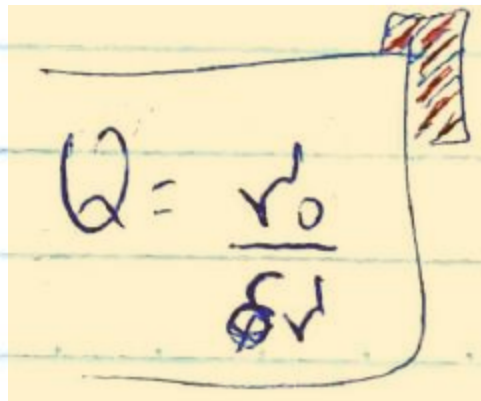
$$Q = \frac{2\pi r_0}{c \alpha_r}$$

$$Q = 2\pi \frac{V_0}{V_0 \frac{c \alpha_r}{r_0}} = \frac{2\pi r_0}{c \alpha_r}$$

MAS como

$$Sv = \frac{Cdr}{2\pi}$$

então


$$Q = \frac{v_0}{\phi v}$$

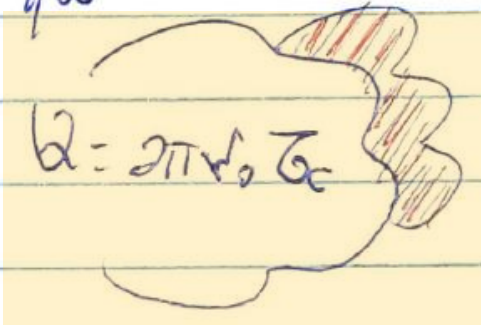
mesma expressão
de antes

Ainda, como

$$Q = \frac{2\pi\nu_0}{\Delta\nu_r}$$

$$\text{e } \tau_c = \frac{1}{\Delta\nu_r}$$

Temos que


$$Q = 2\pi\nu_0 \tau_c$$

maior tempo de
fóton no ressonador
maior é o Q

O Fator de Qualidade Q pode ser ainda relacionado a Finesse F fazendo

$$Q = \frac{n_0}{S\sqrt{}}$$

mas vimos antes que

$$S\sqrt{=} \frac{n_0}{F}$$

Logo

$$Q = \frac{n_0}{\frac{n_0}{F}} \pi$$

Revisitando A Finesse - F

Uma maneira mais prática de entender F

↳ é o parâmetro que dá a largura do modo em comparação ao espaçamento entre modos

$$F = \frac{\text{espaçamento entre modos}}{\text{largura dos modos}} = \frac{c/2d}{\Delta \nu}$$

vimos

que

$$S_r \approx \frac{1}{2\pi} (1 - R_1 R_2) \frac{c}{\partial d}$$

Logo

$$F = \frac{\cancel{c}}{\cancel{\partial d}} \frac{2\pi}{\cancel{c} (1 - R_1 R_2) \cancel{\partial d}} = \frac{2\pi}{(1 - R_1 R_2)}$$

note que F n̄ depende
do tamanho da cavidade d ,
Apenas da refletividade

Como vimos a pouco

$$Q = \frac{v_0}{v_F} F \quad \text{para um dado modo } m \quad v_0 = m v_F$$

então

$$Q = m F$$


na verdade

Q , F e SW são maneiras
equivalentes de descrever a
largura espectral dos modos
de uma unidade.

Fim