EDO LINEAR DE 1ª ORDEM HOMOGÊNEA E COM COEFICIENTES CONSTANTES (V)

$$\frac{dy}{dx} = ky \qquad \frac{dy}{dx} - ky = 0$$

$$\boxed{Q(x) = -k} \ \boxed{f(x) = 0}$$

$$y(x) = e^{-\int Q(x)dx}\left[\int f(x)\, e^{\int Q(x)dx} dx + C\right]$$

$$y(x) = e^{-\int -k dx}\left[\int 0\, dx + C\right] = Ce^{kx}$$

PELO MÉTODO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$m = n-1$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} k \cdot a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)a_{n+1} - k a_n\right] x^n = 0$$

- SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL:

$$\left[(n+1) a_{n+1} - k a_n\right] = 0$$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{k a_n}{n+1}}$$ RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$\boxed{n=0}$ $a_1 = \frac{k a_0}{1}$

$\boxed{n=1}$ $a_2 = \frac{k a_1}{2} = \frac{k^2 a_0}{2!}$

$\boxed{n=2}$ $a_3 = \frac{k a_2}{3} = \frac{k^3 a_0}{3!}$

$n=3$ $a_4 = \frac{k a_3}{4} = \frac{k^4 a_0}{4!}$

n	0	1	2	3	4
a_n	a_0	$\frac{k a_0}{1}$	$\frac{k^2 a_0}{2!}$	$\frac{k^3 a_0}{3!}$	$\frac{k^4 a_0}{4!}$

$\rightarrow \boxed{\frac{(k)^n a_0}{n!}}$

- GENERALIZANDO:

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k)^n a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k)^n x^n}{n!} = a_0 e^{kx}}$$

EDO LINEAR DE 1ª ORDEM NÃO-HOMOGÊNEA

$y'(x) + y = 1 + x$

SOLUÇÃO GERAL

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$

$\boxed{m = n-1}$ $\boxed{n = m+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots$

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots}$

$\boxed{n=0}$

$1 \cdot a_1 x^0 + a_0 x^0 = 1$

$\boxed{a_1 + a_0 = 1}$

$\boxed{a_1 = 1 - a_0} \leftrightarrow \boxed{a_0 = 1 - a_1}$

$\boxed{n=1}$

$2 \cdot a_2 x + a_1 x = 1x$

$2a_2 + a_1 = 1$

$\boxed{a_2 = \frac{1 - a_1}{2}} = \boxed{\frac{a_0}{2}}$

$\boxed{n = 2 \to \infty}$

$\sum_{n=2}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = 0$

A SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL:

$(n+1) a_{n+1} + a_n = 0$

$\boxed{a_{n+1} = \frac{-a_n}{n+1}}$

COEFICIENTES:

$\boxed{n=2}$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3.2}$$

$\boxed{n=3}$

$$a_4 = -\frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4.3.2}$$

$\boxed{n=4}$

$$a_5 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{a_0}{5.4.3.2}$$

- GENERALIZANDO (REDEFININDO n):

$n=0\ (x^0)$	$n=1\ (x^1)$	$n=2\ (x^2)$	$n=3\ (x^3)$	$n=4\ (x^4)$	$n=5\ (x^5)$
$\boxed{a_0}$	$\boxed{a_1}$	$\boxed{a_2}$	$\boxed{a_3}$	$\boxed{a_4}$	$\boxed{a_5}$
a_0	$\boxed{1-a_0}$	$\frac{a_0}{2!}$	$-\frac{a_0}{3!}$	$\frac{a_0}{4!}$	$-\frac{a_0}{5!}$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{n!}}$$

$$\boxed{y(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{n!} x^n + x = \boxed{a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} + x}$$

$$\boxed{y(x) = a_0 e^{-x} + x}$$

$\uparrow$

EXPANDIR ALGUNS TERMOS PARA MOSTRAR A IGUALDADE

PROVA:

$$y' = -a_0 e^{-x} + 1$$

$$y' + y = -a_0 e^{-x} + 1 + a_0 e^{-x} + x = \boxed{x+1}$$

OK

EX: MOSTRE QUE A FUNÇÃO:

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + x$$

É SOLUÇÃO DA SEGUINTE EDO:

$$y' + y = 1 + x$$

$$y' = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1}}{n!} + 1$$

$$y' + y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1}}{n!} + 1 + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + x$$

NULO QUANDO $n=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (m+1) x^m}{(m+1)!}$$

$\boxed{m = n-1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1) x^n}{(n+1)!} = \boxed{(-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}}$$

OK

ENTÃO:

$$\boxed{y' + y = 1 + x}$$

EDO ... DE 2ª ORDEM HOMOGÊNEA E COM COEF. NÃO-CONSTANTES (V)

EXERCÍCIO:

RESOLVA A EQUAÇÃO

$$\boxed{y''(x) + 3xy'(x) + 3y(x) = 0}$$

PELO MÉTODO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS.

- EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE 2ª ORDEM HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES NÃO-CONSTANTES.

$$\boxed{y(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots}$$

POTÊNCIAS PARES FICAM COM EXPOENTES PARES

- ASSUMIMOS QUE:

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

- TOMANDO AS DERIVADAS DE $y(x)$:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 0 \cdot a_0 x^{-1} + 1 \cdot a_1 x^0 + 2a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + 4 \cdot a_4 x^3 + \dots$$

$$\boxed{\frac{dy(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}} \qquad y'(x) = 0,\ n=0 \qquad \boxed{\frac{dy(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = 0 + 0 \cdot a_1 x^{-1} + 2 \cdot a_2 x^0 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + \dots$$

$$\boxed{\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}} \qquad y''(x) = 0,\ n=0,1 \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}$$

- REESCREVENDO ESTAS EXPRESSÕES, TROCANDO OS ÍNDICES:

$$\boxed{m = n-1} \quad \boxed{n = m+1} \qquad \frac{dy(x)}{dx} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\boxed{m = n-2} \quad \boxed{n = m+2} \qquad \frac{d^2y(x)}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

• ENTÃO, A EQ. DIF. PODE SER ESCRITA COMO:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}} + \underbrace{3x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \underbrace{3\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_n\right\}x^n = 0$$

• SOLUÇÃO:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_n = 0$$

$$\boxed{a_{n+2}} = -\frac{3\cancel{(n+1)}a_n}{(n+2)\cancel{(n+1)}} = \boxed{\frac{-3a_n}{(n+2)}} \qquad n=0,1,2,3,\dots$$

POR CAUSA DESTA RELAÇÃO DE RECURSÃO VAMOS TER COEFICIENTES SEPARADAMENTE PARA VALORES PARES E ÍMPARES DE n,

• VALORES PARES DE n SÃO ASSOCIADOS ÀS POTÊNCIAS PARES DE x:

$\boxed{n=0}$

$$a_2 = -\frac{3a_0}{2}$$

$\boxed{n=2}$

$$a_4 = -\frac{3a_2}{2^2} = \frac{3^2 a_0}{2^2 \cdot 2}$$

$\boxed{n=4}$

$$a_6 = \frac{-3a_4}{6} = \frac{-3^3 a_0}{2^3 \cdot 3 \cdot 2}$$

$\boxed{n=6}$

$$a_8 = \frac{-3a_6}{2^3} = \frac{3^4 a_0}{2^4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

• ENTÃO:

$$\boxed{a_{2n} = \frac{(-3)^n a_0}{(2)^n n!}}$$

n FOI REDEFINIDO

$$\boxed{n=0,1,2,3,\dots}$$

$$\left\{a_0, \frac{-3a_0}{2\cdot 1}, \frac{3^2 a_0}{2^2\, 2}, \frac{(-3)^3 a_0}{2^3\, 3.2}, \dots\right\}$$

• VALORES ÍMPARES DE n SÃO ASSOCIADOS ÀS POTÊNCIAS ÍMPARES DE x:

$\boxed{n=1}$

$$a_3 = \frac{-3a_1}{3}$$

$\boxed{n=3}$

$$a_5 = \frac{-3a_3}{5} = \frac{3^2 a_1}{3.5}$$

$\boxed{n=5}$

$$a_7 = \frac{-3a_5}{7} = \frac{-(3)^3 a_1}{3.5.7}$$

n FOI REDEFINIDO

$\boxed{n=7}$

$$a_9 = -\frac{3a_7}{9} = \frac{3^4 a_1}{3.5.7.9}$$

• ENTÃO:

$$\boxed{a_{2n+1} = \frac{(-3)^n a_1}{(2n+1)\ldots 7.5.3.1}}$$

$\boxed{n=0,1,2,3,\ldots}$

$$\left\{ a_1, \frac{-3a_1}{3.1}, \frac{3^2 a_1}{5.3.1}, \frac{(-3)^3 a_1}{7.5.3.1}, \ldots \right\}$$

• ENTÃO, PODEMOS CONCLUIR QUE:

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}}$$

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n a_0}{2^n n!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n a_1}{(2n+1)!!} x^{2n+1}}$$

$$\boxed{y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2)^n n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}}$$

ONDE $(2n+1)!! = (2n+1)\ldots 7.5.3.1$