SOLUÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (IV)

- ESTE MÉTODO PODE SER EMPREGADO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-HOMOGÊNEAS OU CUJOS COEFICIENTES NÃO SÃO CONSTANTES

- VAMOS ASSUMIR QUE A FUNÇÃO QUE ESTAMOS PROCURANDO, A SOLUÇÃO DO NOSSO PROBLEMA, TEM A FORMA:

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

$a_n \Rightarrow$ CONSTANTES
$n \Rightarrow$ INTEIROS POSITIVOS

- ASSIM, PRECISAMOS DETERMINAR TODOS OS COEFICIENTES a_n NA EXPANSÃO

O MÉTODO

- VAMOS CONSIDERAR UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE 2ª ORDEM HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES:

$$\boxed{y''(x) + y(x) = 0} \quad (1)$$

- SABEMOS RESOLVER ESTA EQUAÇÃO EXATAMENTE:

$$y(x) = e^{mx}$$
$$m^2 e^{mx} + e^{mx} = 0$$
$$(m^2+1)\, e^{mx} = 0$$
$$m^2 + 1 = 0$$
$$\boxed{m = \pm i}$$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}}$$

OU

$$\boxed{y(x) = c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x}$$

• VAMOS VERIFICAR QUE É POSSÍVEL OBTER A MESMA SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS:

• VAMOS ESCREVER:

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

• PARA SUBSTITUIR ESTA EQUAÇÃO NA EQ. 1 PRECISAMOS DE SUA DERIVADA SEGUNDA:

$$\boxed{y(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots}$$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\left[a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots\right]}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = a_1 \cdot 1 \cdot x^{(1-1)} + a_2 \cdot 2 \cdot x^{(2-1)} + \dots + a_n \cdot n \cdot x^{(n-1)} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{(n-1)}$$

VEJA QUE O TERMO ASSOCIADO COM a_0 É NULO

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{(2-1-1)} + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^{(3-1-1)} + \dots + a_n \cdot n \cdot (n-1) x^{(n-1-1)} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)}$$

VEJA QUE OS TERMOS ASSOCIADOS COM a_0 E a_1 SÃO NULOS

• ENTÃO, REESCREVENDO A EQ. 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

• OBSERVE QUE A PRIMEIRO SOMATÓRIO É NULO PARA $n=0$ E $n=1$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)}}$$

- PODEMOS DEFINIR UM NOVO ÍNDICE NO PRIMEIRO SOMATÓRIO, ISTO É, $m = n-2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m$$

- COMO AS VARIÁVEIS m E n SÃO SOMENTE ÍNDICES DE SOMATÓRIO, PODEMOS TROCAR ESTES ÍNDICES SEM ALTERAR O RESULTADO DO SOMATÓRIO:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

- ENTÃO, PODEMOS ESCREVER A EQ. 1 COMO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

- OU AINDA:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0} \qquad (2)$$

A TROCA DE ÍNDICES SERVE PARA AGRUPAR NO SOMATÓRIO OS COEFICIENTES DE MESMA POTÊNCIA EM x.

- PARA QUE A EQ. 2 SEJA VÁLIDA PARA TODO E QUALQUER VALOR DE x, CADA COEFICIENTE DA SÉRIE DEVE SER IGUAL A ZERO:

$$[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] = 0$$

- ENTÃO, OBTEMOS UMA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA:

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (3)$$

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}}$$

- VEJA QUE PARA VALORES PARES DE n NA EQ. 3

$\boxed{n=0}$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$\boxed{n=2}$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4.3}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{4.3.2}$$

$\boxed{n=4}$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6.5}$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{6.5.4.3.2}$$

- ENTÃO: $\boxed{a_0 = a_0}$

$$\boxed{a_2 = \frac{-a_0}{2!}} \quad \boxed{a_4 = \frac{a_0}{4!}} \quad \boxed{a_6 = -\frac{a_0}{6!}}$$

- ASSIM, GENERALIZANDO PARA OS COEFICIENTES PARES:

$$\boxed{a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0} \quad \boxed{n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty} \quad \left\{a_0, \frac{-a_0}{2!}, \frac{a_0}{4!}, \frac{-a_0}{6!}, \dots\right\}$$

COEFICIENTES DAS POTÊNCIAS PARES DE x

NOTE QUE n FOI REDEFINIDO NESTA EXPRESSÃO

• PARA VALORES ÍMPARES DE n NA EQ. 3:

$\boxed{n=1}$ $a_3 = -\frac{a_1}{3.2}$

$\boxed{n=3}$ $a_5 = -\frac{a_3}{5.4}$

$a_5 = \frac{a_1}{5.4.3.2}$

$\boxed{n=5}$ $a_7 = -\frac{a_5}{7.6}$

$a_7 = -\frac{a_1}{7.6.5.4.3.2}$

• ENTÃO: $\boxed{a_1 = a_1}$

$\boxed{a_3 = -\frac{a_1}{3!}}$ $\boxed{a_5 = \frac{a_1}{5!}}$ $\boxed{a_7 = -\frac{a_1}{7!}}$

• ASSIM, GENERALIZANDO PARA OS COEFICIENTES ÍMPARES:

$$\boxed{a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1}$$

COEFICIENTES DAS POTÊNCIAS ÍMPARES DE x

$\boxed{n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty}$ $\left\{ a_1, \frac{-a_1}{3!}, \frac{a_1}{5!}, \dots \right\}$

n FOI REDEFINIDO NESTA EQUAÇÃO

• ENTÃO, PARA CONHECER A EXPANSÃO COMPLETA, PRECISAMOS SOMENTE DETERMINAR O VALOR DE DUAS CONSTANTES, a_0 E a_1. ISTO É IDÊNTICO AO CASO DA SOLUÇÃO GERAL, ONDE TAMBÉM SÓ PRECISAMOS DE DUAS CONSTANTES.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\text{POT. PARES}) + \sum_{n=0}^{\infty} (\text{POT. ÍMPARES})$$

• DESTA FORMA:

$$\boxed{y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

POTÊNCIAS PARES

POTÊNCIAS ÍMPARES

• SABENDO QUE É POSSÍVEL ESCREVER:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

SÉRIES DE MACLAURIN

E

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}$$

• ENTÃO:

$$\boxed{y(x) = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x}$$

• VEJA QUE PODEMOS MANIPULAR AS EXPANSÕES DA MESMA FORMA QUE AS EQS ORIGINAIS:

$$\boxed{\frac{d \operatorname{sen}(x)}{dx} = \cos(x)} \qquad \boxed{\frac{d \cos(x)}{dx} = -\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = 1 - \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}\cdot 2!} + \frac{\cancel{5}x^4}{\cancel{5}\cdot 4!} - \frac{\cancel{7}x^6}{\cancel{7}\cdot 6!} \cdots = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) = 0 - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot 1!} + \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}\cdot 3!} - \frac{\cancel{6}x^5}{\cancel{6}\cdot 5!} + \cdots = -\operatorname{sen} x$$

• VEJA QUE OS COEFICIENTES DA SÉRIE TENDEM A ZERO QUANDO n TENDE AO INFINITO. ESTA SÉRIE DEVE CONVERGIR, COMO DE FATO ACONTECE.

OS DOIS SOMATÓRIOS SÃO SEPARADOS POIS UM DELES DEPENDE DE a_0 E O OUTRO DEPENDE DE a_1

MOSTRE QUE A FUNÇÃO

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL:

$$y''(x) + y(x) = 0$$

- OBTENDO $y''(x)$:

$$y'(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$y''(x) = \underbrace{a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)(2n-1) x^{2n-2}}{(2n)!}}_{\text{NULO QUANDO } n=0} + \underbrace{a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)(2n) x^{2n-1}}{(2n+1)!}}_{\text{NULO QUANDO } n=0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = n-1 \\ n = m+1 \end{array}}$$

$$y''(x) = a_0 \sum_{n=1} \frac{(-1)^n (2n)(2n-1) x^{2n-2}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=1} \frac{(-1)^n (2n+1)(2n) x^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

$$y''(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (2m+2)(2m+1) x^{2m}}{(2m+2)!} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (2m+3)(2m+2) x^{2m+1}}{(2m+3)!}$$

$$y''(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$y''(x) = -a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{y''(x) - y(x) = 0} \Leftarrow$$

VEJA QUE OS TERMOS QUE APARECEM EM $y''(x)$ E $y(x)$ SÃO IDÊNTICOS EXCETO PELO SINAL.