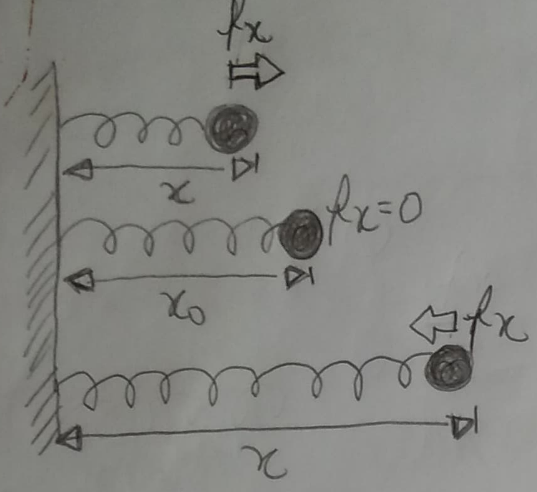
O OSCILADOR HARMÔNICO CLÁSSICO (II)



VAMOS DESPREZAR A FORÇA GRAVITACIONAL E FORÇAS DE ATRITO.

- A MOLA SEGUE A LEI DE HOOKE:

$$\boxed{f_x = -k(x - x_0)}$$

ONDE
- $x = x(t)$, OU SEJA, A POSIÇÃO DO CORPO DE MASSA m É FUNÇÃO DO TEMPO
- $k \Rightarrow$ CONSTANTE DE FORÇA CARACTERISTICA DA MOLA (CTE POSITIVA)
- $x_0 \Rightarrow$ COMPRIMENTO DA MOLA NÃO-DISTORCIDA

- ENTÃO, O DESLOCAMENTO DO CORPO DE MASSA m FAZ A MOLA EXERCER UMA FORÇA SOBRE O CORPO NA DIREÇÃO OPOSTA

- DE ACORDO COM A SEGUNDA LEI DE NEWTON:

$$f_x = m a_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

ONDE
- $a_x \Rightarrow$ ACELERAÇÃO
- $v_x \Rightarrow$ VELOCIDADE

• ENTÃO:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)}$$

• APARENTEMENTE, ESTA EQ. NÃO É HOMOGÊNEA. PORÉM, VAMOS DEFINIR UMA NOVA VARIÁVEL (ξ)

$$\boxed{\xi = x - x_0}$$ ← DESLOCAMENTO COM RELAÇÃO A x_0

• ASSIM:

$\boxed{\xi \Rightarrow CSI}$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi$$

VEJA QUE:

$$\boxed{\frac{d\xi}{dt} = \frac{d(x - x_0)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \cancel{\frac{dx_0}{dt}}^{\,0} = \frac{dx}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

• REESCREVENDO:

DEFININDO:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{k}{m}\xi = \frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0$$

$$\boxed{\xi(t) = e^{nt}}$$ ← SOLUÇÃO PARTICULAR, POIS OS COEFICIENTES SÃO CONSTANTES

$$n^2e^{nt} + \omega^2e^{nt} = 0$$

$$(n^2 + \omega^2)e^{nt} = 0$$

SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL $\boxed{e^{nt} \neq 0}$

• ENTÃO:

$$n^2 + \omega^2 = 0$$

$$\boxed{n} = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\,\omega\sqrt{-1} = \boxed{\pm\, i\,\omega}$$

• SOLUÇÃO GERAL:

$$\boxed{\xi(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}}$$

• COMO:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\boxed{\xi(t) = c_3 \cos(\omega t) + c_4\, \mathrm{sen}(\omega t)}$$

$$\boxed{c_3 = c_1 + c_2} \qquad \boxed{c_4 = i(c_1 - c_2)}$$

TEMOS DUAS CTES DESCONHECIDAS.

• <u>VAMOS SUPOR QUE:</u>

$$\begin{cases} v_x(t=0) = 0 & \text{(O CORPO ESTÁ EM REPOUSO NO INÍCIO)} \\ \text{E} & \\ \xi(t=0) = \xi_0 & \text{(DESLOCAMENTO INICIAL DA MOLA)} \end{cases}$$

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}(t=0) = 0 = \frac{d\xi}{dt}(t=0)} = \boxed{\frac{dx(t=0)}{dt} - \cancel{\frac{dx_0}{dt}}^{\,0}}$$

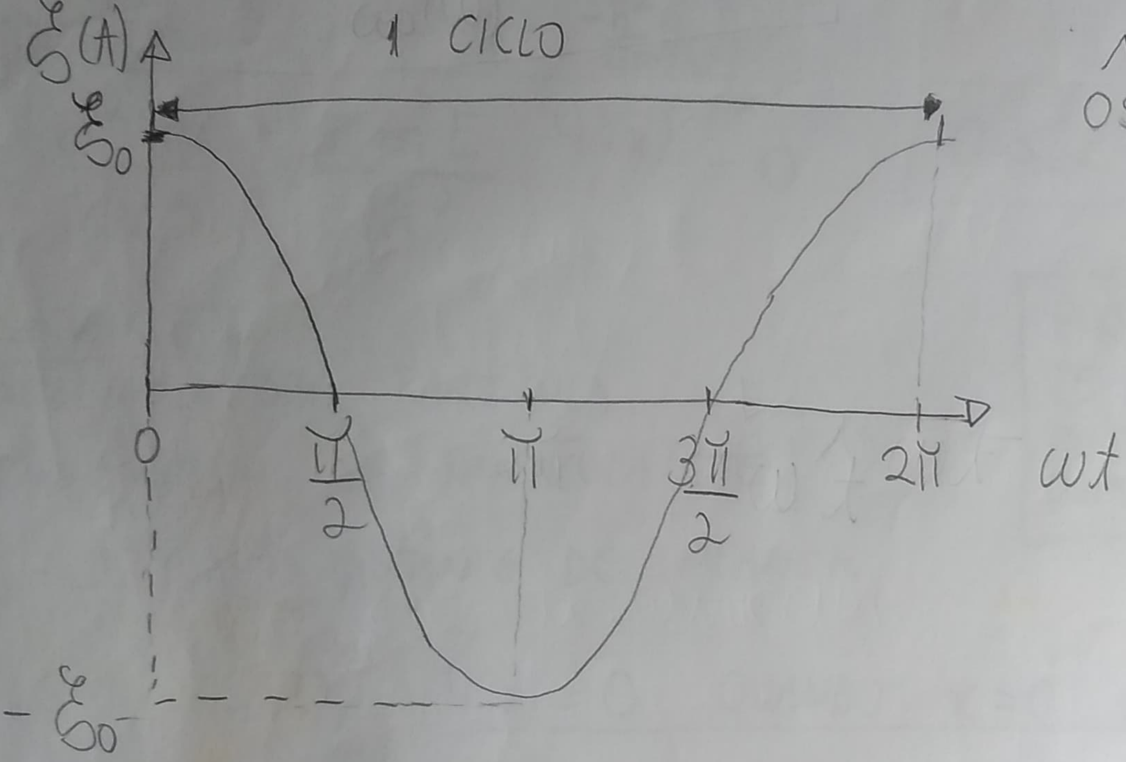
$$\frac{d\xi}{dt} = -c_3 \cdot \omega\, \mathrm{sen}(\omega t) + c_4\, \omega \cos(\omega t)$$

$$\frac{d\xi}{dt}(t=0) = c_4\,\omega = 0 \qquad \boxed{c_4 = 0} \text{ POIS } \boxed{\omega \neq 0}$$

$$\xi(t=0) = \xi_0 = c_3$$

- NESTE CASO:

$$\boxed{\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)}$$



MOVIMENTO OSCILATÓRIO

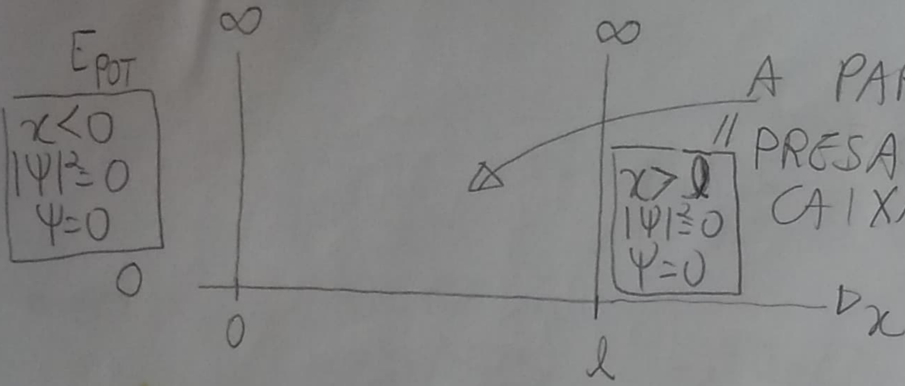
$$\boxed{\text{AMPLITUDE} = \xi_0}$$

FREQUÊNCIA (ν) ⇒ INVERSO DO TEMPO PARA QUE A FUNÇÃO VOLTE PARA O MESMO VALOR (TEMPO DE 1 CICLO)

$\omega t = 2\pi$ ← CONDIÇÃO PARA 1 CICLO

$$\boxed{\nu = \frac{1}{t} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

PARTÍCULA NA CAIXA UNIDIMENSIONAL



A PARTÍCULA ESTÁ "PRESA" DENTRO DA CAIXA.

$\boxed{|\psi|^2 \Rightarrow \text{PROBABILIDADE}}$

- ESTE PROBLEMA SEGUE A SEGUINTE EQUAÇÃO: $\boxed{\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \left(\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \right)}$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \qquad \boxed{0 \leq x \leq l}$$

CONSTANTES:

$m \Rightarrow$ MASSA DA PARTÍCULA

$E \Rightarrow$ ENERGIA DA PARTÍCULA (CTE)

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $h \Rightarrow$ CONSTANTE DE PLANCK

POIS $|\psi|^2 \Rightarrow$ PROBABILIDADE DE ENCONTRAR A PARTÍCULA NOS VÁRIOS PONTOS E ψ DEVE SER CONTÍNUA

- ALÉM DISTO, $\psi(x) = 0$ QUANDO $x = 0$ E $x = l$.
- SOLUÇÃO: $\psi(x) = e^{kx}$, POIS OS COEFICIENTES SÃO CONSTANTES.

$$k^2 e^{kx} + \frac{2mE}{\hbar^2} e^{kx} = 0$$

$$\left(k^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) e^{kx} = 0$$

- SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$m, E, \hbar \Rightarrow$ SÃO TODAS QUANTIDADES POSITIVAS

$$k = \pm\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

- SOLUÇÃO GERAL:

$$\psi(x) = c_1 e^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x}$$

OU

$$\psi(x) = c_3 \cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x\right)$$

- UTILIZANDO AS CONDIÇÕES DE CONTORNO:

① $\psi(x=0) = 0$

$$\psi(x=0) = \boxed{c_3 = 0}$$

② $\psi(x=l) = 0$

$$\psi(x=l) = c_4 \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,l\right) = 0$$

$\boxed{c_4 \neq 0, \text{ PARA EVITAR } \psi(x)=0}$

ISTO SERÁ VERDADEIRO QUANDO:

$$\boxed{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,l = n\pi} \qquad \boxed{n = 1, 2, 3, \ldots}$$

$\boxed{n \neq 0, \text{ PARA EVITAR } \psi(x)=0}$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{n\pi}{l}}$$

②

• ENTÃO:

$$\frac{2mE}{\hbar^2}\ell^2 = n^2\pi^2$$

$$\boxed{E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}} \qquad \boxed{n = 1, 2, 3, \dots}$$

VEJA QUE A ENERGIA É QUANTIZADA.

$$\boxed{\psi_n(x)} = C_\psi \, sen\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\, x\right) = \boxed{C_\psi \, sen \frac{n\pi x}{\ell}}$$

• PARA ENCONTRAR C_ψ:

$$\int_0^\ell \psi_n^2(x)\,dx = 1 \qquad \text{(FUNÇÃO NORMALIZADA)}$$

$$C_\psi^2 \int_0^\ell sen^2 \frac{n\pi x}{\ell}\,dx = C_\psi^2 \frac{\ell}{2} = 1$$

$$\boxed{C_\psi = \sqrt{\frac{2}{\ell}}}$$