NÚMEROS COMPLEXOS

VI

- SÃO NÚMEROS QUE PODEM SER ESCRITOS COMO

$$\boxed{z = x + iy}$$

ONDE $x$ E $y$ SÃO, RESPECTIVAMENTE, AS PARTES REAL E IMAGINÁRIA DE $z$

- OPERAÇÕES

① ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

$$\boxed{z_2 \pm z_1 = (x_2 \pm x_1) + i(y_2 \pm y_1)}$$

EX: $z_1 = 2 + 3i \qquad z_2 = 1 - 4i$

$$z_2 - z_1 = (1-2) + i(-4-3) = \boxed{-1 - 7i}$$

② MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE (C)

$$\boxed{c(z) = cx + icy}$$

EX $2z_1 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3i = \boxed{4 + 6i}$

③ MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS $\boxed{i^2 = -1}$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - 1 y_1 y_2 +$$

$$(x_1 y_2)i + (x_2 y_1)i$$

EX: $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - 4i) = 2 + (3) \cdot (-4) i^2 + 3i - 8i$

$$z_1 z_2 = 2 + 12 - 5i = \boxed{14 - 5i}$$

④ DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

COMPLEXO CONJUGADO DE $z$ ($z^*$): FORMADO PELA SUBSTITUIÇÃO DE $i$ POR $-i$

VEJA QUE $z \cdot z^*$ É UMA QUANTIDADE REAL. $\boxed{z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 + ixy - ixy = x^2+y^2}$

A MAGNITUDE DE UM NÚMERO COMPLEXO É DADA POR:

$$\boxed{|z| = (z \cdot z^*)^{1/2} = (x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{EX: \Psi = f+ig \quad |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = f^2+g^2}$$

QUANTIDADE REAL E POSITIVA

ASSIM, COMO EXEMPLO:

$$\boxed{\frac{z_2}{z_1}} = \frac{1-4i}{2+3i}\left(\frac{2-3i}{2-3i}\right) = \frac{2+12i^2-8i-3i}{4+9} = \boxed{\frac{-10-11i}{13}}$$

$$\times\left(\frac{z_1^*}{z_1^*}\right)$$

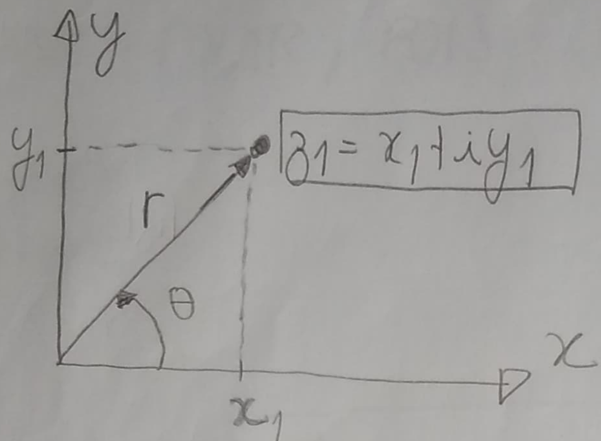
$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\cdot(z_2 \cdot z_1) = z_2^2 = \frac{-10-11i}{13}(14-5i) = \left(-\frac{10}{13} - \frac{11}{13}i\right)(14-5i)$$

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)(z_2 \cdot z_1) = -\frac{10}{13}\cdot 14 - i^2\frac{55}{13} + \frac{50}{13}i - \frac{11 \cdot 14}{13}i = -\frac{195}{13} - \frac{104}{13}i$$

$$z_2^2 = (1-4i)(1-4i) = 1 - i^2 \cdot 16 - 4i - 4i = \boxed{-15-8i}$$

# PLANO COMPLEXO

- COMO NÚMEROS COMPLEXOS CONTÉM UMA PARTE REAL E UMA IMAGINÁRIA PODEMOS REPRESENTAR UM NÚMERO COMPLEXO NUM SISTEMA BIDIMENSIONAL DE COORDENADAS.



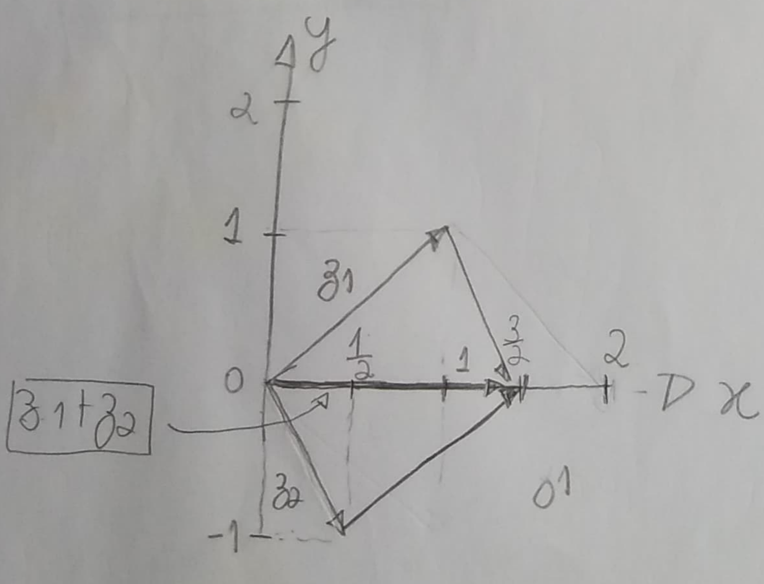

ONDE:

$\boxed{r = |z_1| = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}}$

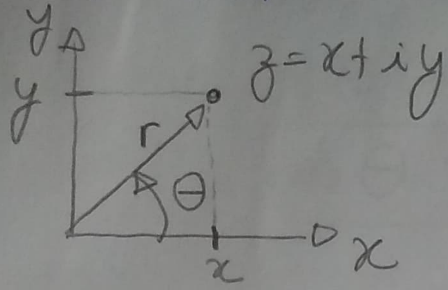
$\boxed{\theta \Rightarrow \text{ARGUMENTO DE } z_1}$

EX: $z_1 = (1 + 1i)$ $\quad z_2 = (\frac{1}{2} - 1i)$

$\boxed{z_1 + z_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5}$ REGRA DO PARALELOGRAMO



# FORMA POLAR




- PODEMOS REPRESENTAR UM NÚMERO COMPLEXO $z$ NA FORMA POLAR, POIS

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

- ASSIM

$$\boxed{z} = x + iy = \boxed{r\cos\theta + i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta} = \boxed{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

ONDE

$$\boxed{r = (x^2 + y^2)^{1/2}}$$

ALÉM DISTO

$$\boxed{\tan\theta = y/x}$$

# FORMA POLAR E A FÓRMULA DE EULER

- SABEMOS QUE

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}$$

- ASSIM

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = re^{i\theta}}$$

- ENTÃO:

$$\boxed{|z| = (z^* z)^{1/2} = \left((re^{-i\theta})(re^{i\theta})\right)^{1/2} = \left(r^2 e^0\right)^{1/2} = r}$$

- MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA POLAR:

$$\boxed{z_1 z_2} = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = \boxed{r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

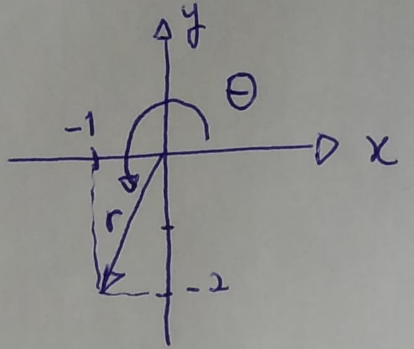
$$\boxed{e^a \cdot e^b = e^{(a+b)}}$$

$$\boxed{\frac{z_2}{z_1}} = \frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \boxed{\frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2-\theta_1)}}$$

$$\boxed{\frac{e^a}{e^b} = e^{(a-b)}}$$

EX 1:

$$z = -1 - 2i \rightarrow z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$




$$\begin{cases} r = (x^2+y^2)^{1/2} = (1+4)^{1/2} = 5^{1/2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-2}{-1} = 2 \end{cases} \qquad \theta = (\tan\theta)^{-1} = 63{,}4^\circ \text{ ou}$$

$$\boxed{\theta = (63{,}4 + 180)^\circ}$$

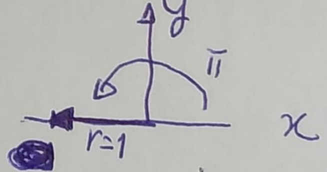
$$\downarrow$$

$$\boxed{\theta = 1{,}35\pi}$$

$$\boxed{z = \sqrt{5}\,(\cos(1{,}35\pi) + i\,\text{sen}(1{,}35\pi))}$$

EX 2:

$$z = 1e^{i\pi}$$




$$\begin{cases} (x^2+y^2)^{1/2} = r \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^{1/2} = 1 \\ \tan\pi = y/x = 0 \end{cases} \qquad \boxed{y = 0}$$

OU AINDA

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$(x^2)^{1/2} = 1$$

$$x = 1 \text{ ou } \boxed{x = -1}$$

R: $\boxed{z = -1}$