

PRO5970 - Lista Lagrangeano

Celma de Oliveira Ribeiro

7 de agosto de 2023

Informações

- Entrega: 13/08 - até 23:59

Exercício 1

Construa um exemplo de um problema de PNL com 3 variáveis, 3 restrições de igualdade e 2 desigualdades. (Pelo menos uma restrição não linear) Para esse problema:

1. Escreva o lagrangeano
2. Escreva o gradiente do lagrangeano e o gradiente das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.
3. Verifique que valem as condições

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = \nabla_x f(x) + \lambda^t \nabla_x h(x) + \mu^t \nabla_x g(x)$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) = \nabla_x h(x)$$

$$\nabla_\mu \mathcal{L}(x, \lambda) = \nabla_x g(x)$$

4. Verifique que no caso em que só temos restrições de igualdade, a condição $\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$, significa que $\nabla_x f(x) = \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla_x h_i(x)$ Interprete graficamente o que significa isso.

Exercício 2

Considere um problema de programação quadrática na forma $\min_x \left\{ \frac{1}{2} x^t Q x \mid Ax = b \right\}$

1. Escreva o Lagrangeano
2. Verifique (em detalhe) como a condição $\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0$ pode ser escrita em função das matrizes Q e A
3. Construa um exemplo (2 variáveis, duas restrições) que não seja trivial, evidentemente e para o qual a função objetivo seja convexa. Para esse exemplo determine um ponto que satisfaz $\nabla \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$. Para esse ponto, \bar{x} é solução do problema quadrático?

Exercício 3

A company is planning to spend 10 on advertising. It costs 3 per minute to advertise on TV and \$1 per minute to advertise on radio. If the firm buys x minutes of TV advertising and y minutes of radio advertising, its revenue is given as $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$. How can the firm maximize its revenue?

Hint:

- Write the optimization problem (in the min form) and the Lagrangian
- Find the partial derivatives and set them = 0
- Solve the resulting system
- Analyse the Hessian
- Conclude about the optimality

Atenção: Há inúmeros exemplos na literatura. Faça detalhadamente o exercício para mostrar que você entendeu o que fez. Ou seja, explique, por exemplo, porque a função é convexa, porque a solução que obteve é solução do problema quadrático