



**EESC • USP**

## SEL0302 – Circuitos Elétricos II

Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação  
Prof. Rogério Andrade Flauzino

SEL0302 – Circuitos Elétricos II  
Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação  
Prof. Rogério Andrade Flauzino

## **CAPÍTULO 2**

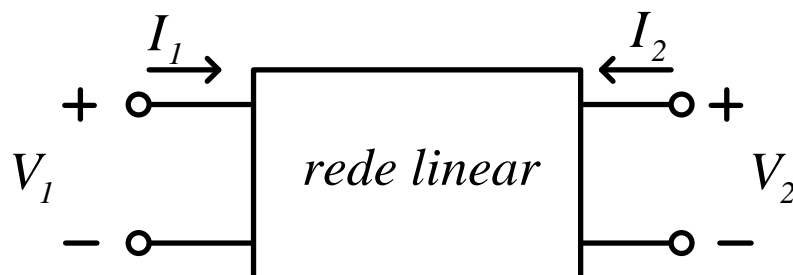
### **QUADRIPOLOS**

## 2.1 – Introdução

- Os quadripolos são dispositivos de duas ou mais portas elétricas.
- São empregados na modelagem de transformadores, transistores, dentre outros sistemas.
- Nesse capítulo será apresentado como obter os parâmetros equivalentes de quadripolos e como fazer o estudo de circuitos elétricos contendo tais abstrações.

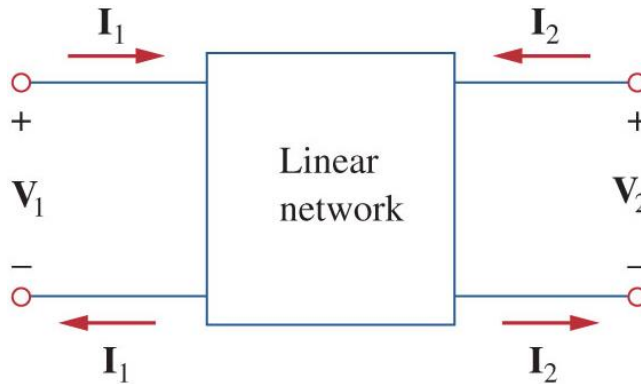
## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

- De forma geral, um quadripolo é representado da seguinte forma:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

- Para se poder modelar uma rede na forma de quadripolos é necessário que todas as porta sejam externas à rede e que:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

- Onde  $V_1$  e  $I_1$  são as grandezas elétricas, tensão e corrente, correspondentes à porta elétrica “1” e  $V_2$  e  $I_2$  são as grandezas elétricas, tensão e corrente, correspondentes à porta elétrica “2”.
- O relacionamento entre essas grandezas pode ser feito de quatro formas diferentes, ou seja:
  - Parâmetros de admitância
  - Parâmetros de impedância
  - Parâmetros híbridos
  - Parâmetros de transmissão

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### A – Parâmetros de Admitância

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros de admitância considera as tensões  $V_1$  e  $V_2$  como sendo variáveis independentes.
- Assim, as correntes do quadripolo são relacionadas às tensões da seguinte forma:
  - $$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$
- Onde  $Y_{11}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_{21}$  e  $Y_{22}$  são os parâmetros de admitância do quadripolo.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### A – Parâmetros de Admitância

- Para se determinar os parâmetros  $Y_{11}$  e  $Y_{21}$  faz-se  $V_2 = 0$ , e assim:
  - $Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$
  - $Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$
- Para se determinar os parâmetros  $Y_{12}$  e  $Y_{22}$  faz-se  $V_1 = 0$ , e assim:
  - $Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$
  - $Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### A – Parâmetros de Admitância

- Para se ter  $V_1$  ou  $V_2$  nula faz-se a inserção de um ramo curto-circuitado na porta correspondente e alimenta-se o circuito pela porta remanescente de forma a se quantificar as grandezas necessárias.
- Em função desse aspecto, os parâmetros de admitância também são conhecidos como parâmetros de curto-circuito.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

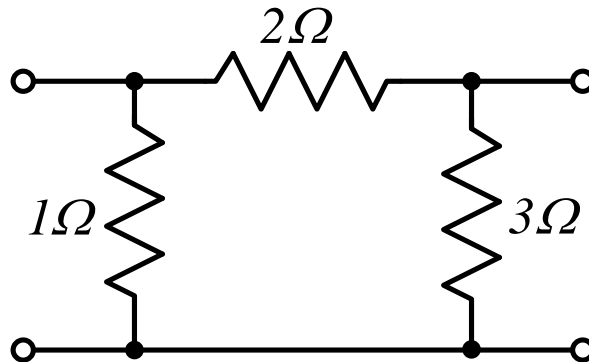
### A – Parâmetros de Admitância

- $Y_{11}$  é a admitância de curto-circuito da porta elétrica “1”;
- $Y_{22}$  é a admitância de curto-circuito da porta elétrica “2”;
- $Y_{12}$  e  $Y_{21}$  são as admitâncias de curto-circuito de transferência.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### A – Parâmetros de Admitância

- Vamos calcular os parâmetros de admitância do seguinte quadripolo:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### A – Parâmetros de Admitância

- **Circuito equivalente**
- Tendo como base o seguinte relacionamento entre as grandezas elétricas do quadripolo:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

- Ou na forma matricial

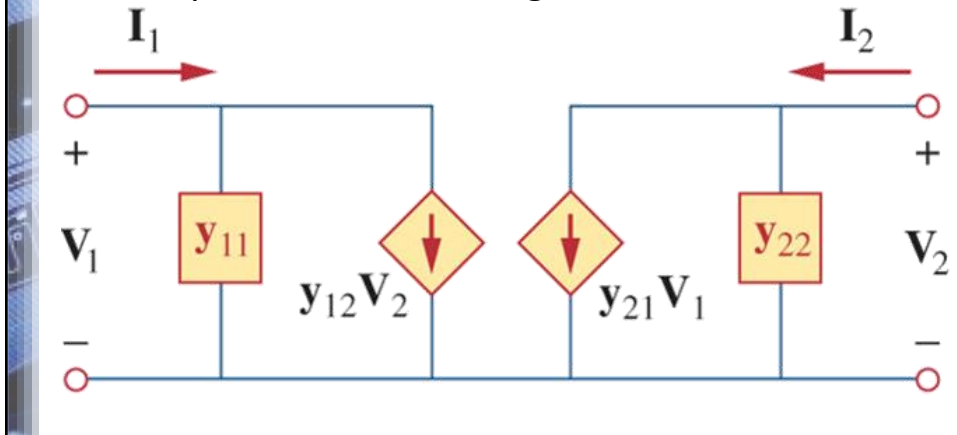
$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- Como poderia ser o circuito equivalente?

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### A – Parâmetros de Admitância

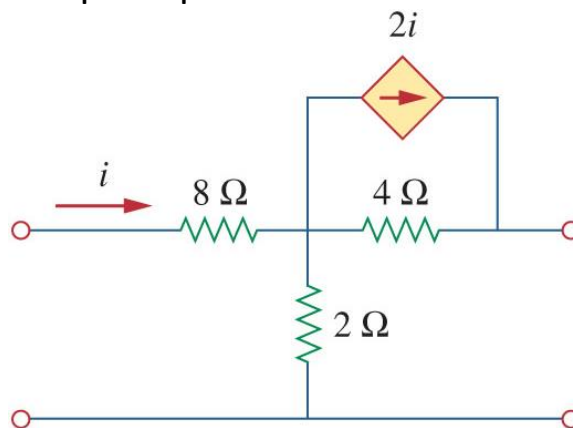
- **Circuito equivalente**
- Uma possibilidade é a seguinte:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### A – Parâmetros de Admitância

- Vamos calcular os parâmetros de admitância do seguinte quadripolo:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### B – Parâmetros de Impedância

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros de impedância considera as correntes  $I_1$  e  $I_2$  como sendo variáveis independentes.
- Assim, as tensões do quadripolo são relacionadas às correntes da seguinte forma:
  - $$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$
- Onde  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$  e  $Z_{22}$  são os parâmetros de impedância do quadripolo.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### B – Parâmetros de Impedância

- Para se determinar os parâmetros  $Z_{11}$  e  $Z_{21}$  faz-se  $I_2 = 0$ , e assim:
  - $Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$
  - $Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$
- Para se determinar os parâmetros  $Z_{12}$  e  $Z_{22}$  faz-se  $I_1 = 0$ , e assim:
  - $Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$
  - $Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### B – Parâmetros de Impedância

- Para se ter  $I_1$  ou  $I_2$  nula faz-se a inserção de um ramo aberto na porta correspondente e alimenta-se o circuito pela porta remanescente de forma a se quantificar as grandezas necessárias.
- Em função desse aspecto, os parâmetros de impedância também são conhecidos como parâmetros de circuito aberto ou parâmetros à vazio.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

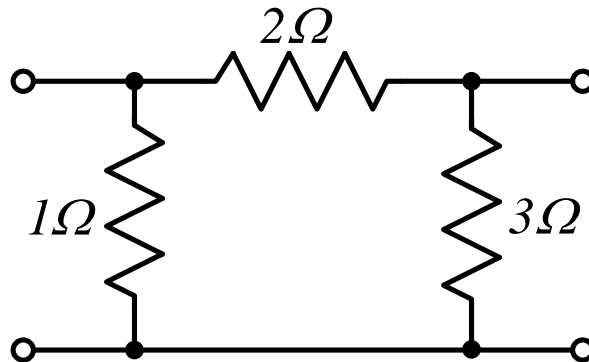
### B – Parâmetros de Impedância

- $Z_{11}$  é a impedância de circuito aberto da porta elétrica “1”;
- $Z_{22}$  é a impedância de circuito aberto da porta elétrica “2”;
- $Z_{12}$  e  $Z_{21}$  são as impedâncias de circuito aberto de transferência.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### B – Parâmetros de Impedância

- Vamos calcular os parâmetros de impedância do seguinte quadripolo:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

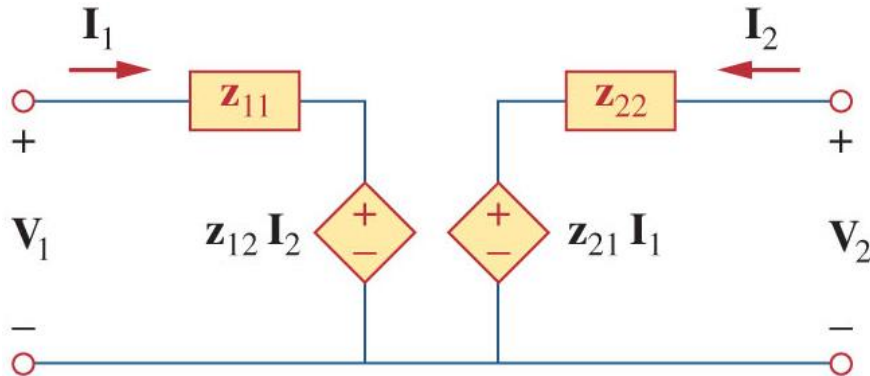
### B – Parâmetros de Impedância

- **Circuito equivalente**
- Tendo como base o seguinte relacionamento entre as grandezas elétricas do quadripolo:
  - $$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$
- Ou na forma matricial
  - $$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$
- Como poderia ser o circuito equivalente?

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### B – Parâmetros de Impedância

- **Circuito equivalente**
- Uma possibilidade é a seguinte:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### B – Parâmetros de Impedância

- **Relacionamento entre parâmetros “Y” e “Z”**
- Os parâmetros de admitância e de impedância se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “H”

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros híbridos considera as grandezas  $V_1$  e  $I_2$  como grandezas independentes.
- Assim, as grandezas  $I_1$  e  $V_2$  se relacionam com  $V_1$  e  $I_2$  da seguinte forma:
  - $$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$
- Onde  $h_{11}$ ,  $h_{12}$ ,  $h_{21}$  e  $h_{22}$  são os parâmetros híbridos do quadripolo.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “H”

- Para se determinar os parâmetros  $h_{11}$  e  $h_{21}$  faz-se  $V_2 = 0$ , e assim:
  - $h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$
  - $h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$
- Para se determinar os parâmetros  $h_{12}$  e  $h_{22}$  faz-se  $I_1 = 0$ , e assim:
  - $h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$
  - $h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “H”

- Para se ter  $V_2$  nula faz-se a inserção de um ramo curto-circuitado na porta correspondente “2”.
- Para se ter  $I_1$  nula faz-se a inserção de um ramo aberto na porta correspondente “1”.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

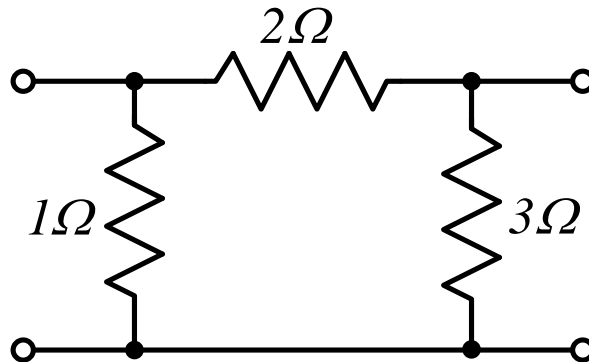
### C – Parâmetros híbridos “H”

- $h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$  Impedância de curto-circuito da porta elétrica “1”;
- $h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$  Ganho de corrente de curto-circuito;
- $h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$  Ganho inverso de tensão ou razão das tensões;
- $h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$  Admitância de circuito aberto da porta elétrica 2;

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “H”

- Vamos calcular os parâmetros híbridos do seguinte quadripolo:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “H”

- **Circuito equivalente**
- Tendo como base o seguinte relacionamento entre as grandezas elétricas do quadripolo:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

- Ou na forma matricial

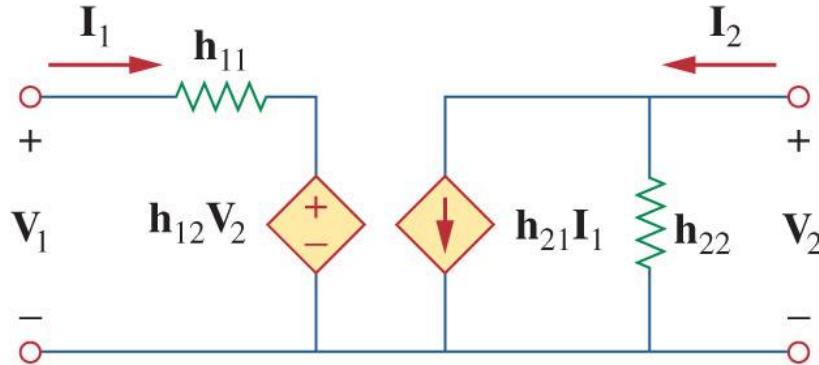
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

- Como poderia ser o circuito equivalente?

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “H”

- **Circuito equivalente**
- Uma possibilidade é a seguinte:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “G”

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros híbridos “g” considera as grandezas  $I_1$  e  $V_2$  como grandezas independentes.
- Assim, as as grandezas  $V_1$  e  $I_2$  são relacionadas às correntes da seguinte forma:

$$\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$$

- Onde  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  e  $g_{22}$  são os parâmetros híbridos do quadripolo.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “G”

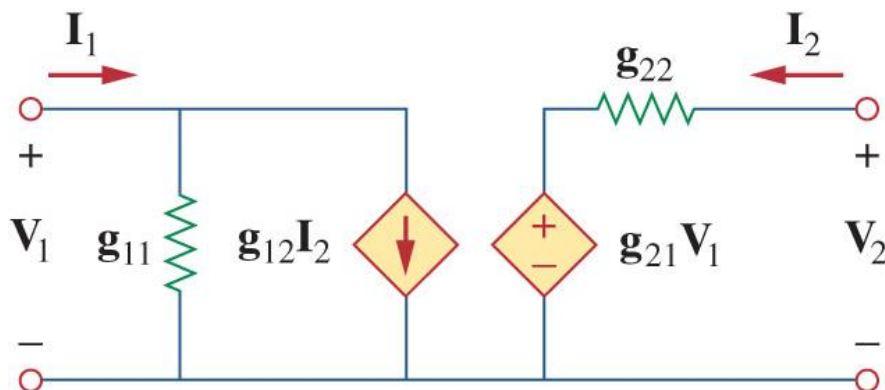
- **Relacionamento entre parâmetros “H” e “G”**
- Os parâmetros híbridos se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### C – Parâmetros híbridos “H”

- **Circuito equivalente**





## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### D – Parâmetros de Transmissão

- A modelagem do quadripolo por meio de parâmetros de transmissão considera as grandezas  $V_2$  e  $I_2$  como grandezas independentes.
- Assim, as grandezas  $V_1$  e  $I_1$  são relacionadas às grandezas da porta elétrica 2 da seguinte forma:
  - $$\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases}$$
- Onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são os parâmetros de transmissão do quadripolo.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### D – Parâmetros de Transmissão

- Para se determinar os parâmetros  $A$  e  $C$  faz-se  $I_2 = 0$ , e assim:
  - $A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$
  - $C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$
- Para se determinar os parâmetros  $B$  e  $D$  faz-se  $V_2 = 0$ , e assim:
  - $B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$
  - $D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### D – Parâmetros de Transmissão

- Para se ter  $I_2$  nula faz-se a inserção de um ramo aberto na porta correspondente “2”.
- Para se ter  $V_2$  nula faz-se a inserção de um ramo curto-circuitado na porta correspondente “2”.

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

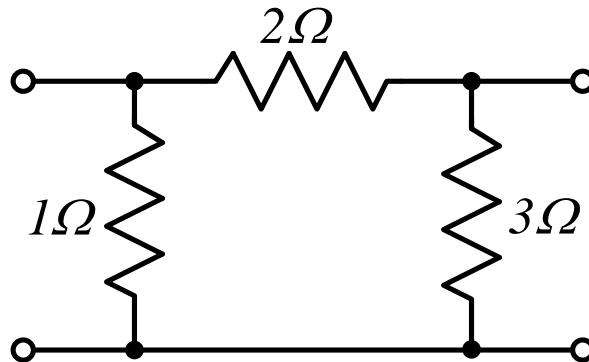
### D – Parâmetros de Transmissão

- $A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$  Ganho inverso de tensão ou razão das tensões;
- $B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$  Impedância de transferência de curto-crcuito;
- $C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$  Admitância de transferência de curto-crcuito;
- $D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$  Ganho inverso de corrente ou razão das correntes;

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### D – Parâmetros de Transmissão

- Vamos calcular os parâmetros de transmissão do seguinte quadripolo:



## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### D – Parâmetros de Transmissão

- **Circuito equivalente**
- Tendo como base o seguinte relacionamento entre as grandezas elétricas do quadripolo:
  - $$\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases}$$
- Ou na forma matricial
  - $$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$
- Como poderia ser o circuito equivalente?

## 2.2 – Parâmetros de Quadripolos

### D – Parâmetros de Transmissão

- **Circuito equivalente**
- Uma possibilidade é realizar a seguinte manipulação:
  - $I_1 = CV_2 + DI_2$
  - $I_2 = \frac{1}{D}I_1 - \frac{C}{D}V_2$
- E ainda
  - $V_1 = AV_2 + BI_2$
  - $V_1 = AV_2 + B\left(\frac{1}{D}I_1 - \frac{C}{D}V_2\right)$
  - $V_1 = AV_2 + \left(\frac{B}{D}I_1 - \frac{BC}{D}V_2\right)$
  - $V_1 = \frac{B}{D}I_1 + \frac{AD-BC}{D}V_2$
- O que resulta em um circuito equivalente igual ao empregado nos parâmetros híbridos.

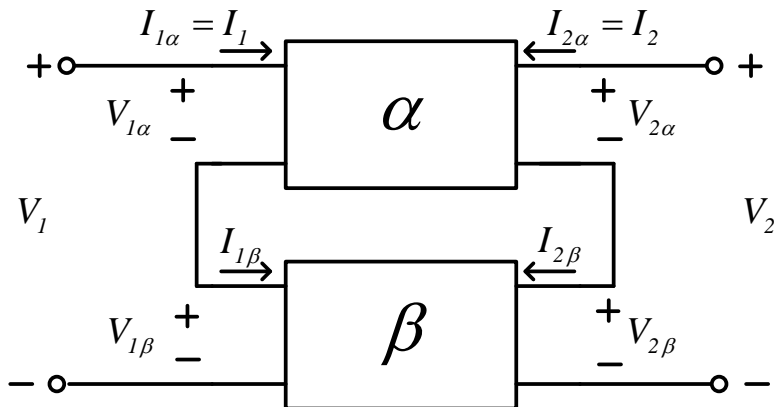
## 2.3 – Associação de quadripolos

- Os quadripolos, além de associarem em série ou em paralelo, podem também se associar em cascata.

## 2.3 – Associação de quadripolos

### A) Associação em série de quadripolos

- Dois quadripolos encontram-se em série quando as correntes nas portas elétricas são idênticas:



## 2.3 – Associação de quadripolos

### A) Associação em série de quadripolos

- Representando os quadripolos por parâmetros de impedância tem-se:

$$\begin{pmatrix} V_{1\alpha} \\ V_{2\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11\alpha} & Z_{12\alpha} \\ Z_{21\alpha} & Z_{22\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1\alpha} \\ I_{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_{1\beta} \\ V_{2\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11\beta} & Z_{12\beta} \\ Z_{21\beta} & Z_{22\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1\beta} \\ I_{2\beta} \end{pmatrix}$$

## 2.3 – Associação de quadripolos

### A) Associação em série de quadripolos

- Dado que:

$$V_1 = V_{1\alpha} + V_{1\beta}$$

$$V_2 = V_{2\alpha} + V_{2\beta}$$

$$I_1 = I_{1\alpha} = I_{1\beta}$$

$$I_2 = I_{2\alpha} = I_{2\beta}$$

## 2.3 – Associação de quadripolos

### A) Associação em série de quadripolos

- Tem-se que:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11\alpha} & Z_{12\alpha} \\ Z_{21\alpha} & Z_{22\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{11\beta} & Z_{12\beta} \\ Z_{21\beta} & Z_{22\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11\alpha} + Z_{11\beta} & Z_{12\alpha} + Z_{12\beta} \\ Z_{21\alpha} + Z_{21\beta} & Z_{22\alpha} + Z_{22\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

## 2.3 – Associação de quadripolos

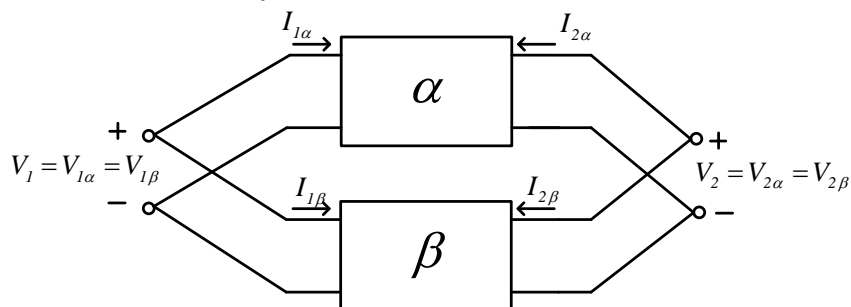
### A) Associação em série de quadripolos

- Portanto, a associação série de dois quadripolos resulta em um quadripolo equivalente cuja matriz de parâmetros de impedância é igual à soma das matrizes de parâmetros de impedância dos quadripolos associados em série

## 2.3 – Associação de quadripolos

### B) Associação paralela de quadripolos

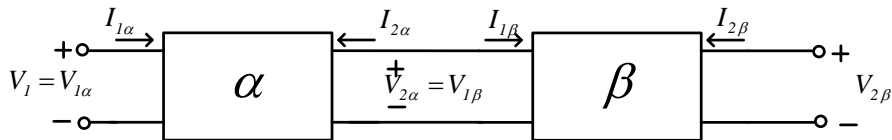
- Dois quadripolos encontram-se em paralelo quando as tensões nas portas elétricas são idênticas:



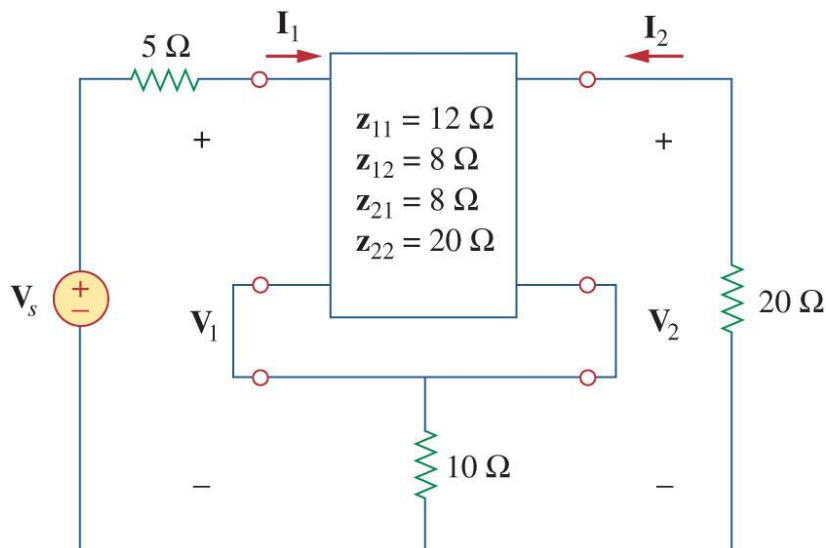
## 2.3 – Associação de quadripolos

### C) Associação em cascata quadripolos

- Dois quadripolos encontram-se em cascata quando a porta elétrica “2” de um dos quadripólos se conecta na porta elétrica “1” do segundo quadripólo.

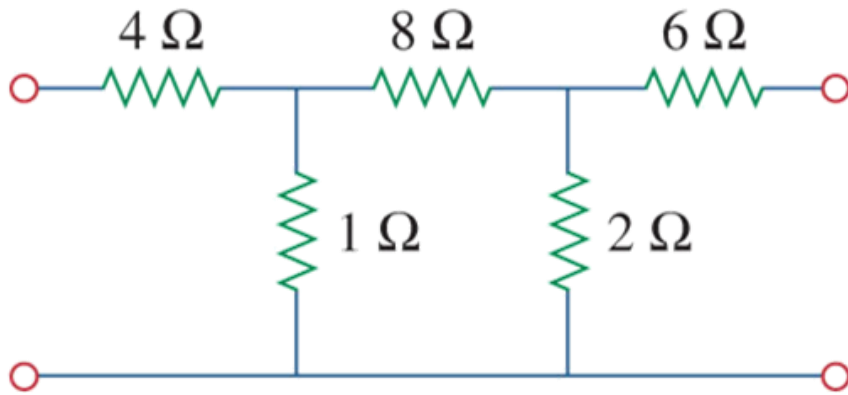


## 2.4 – Exemplos

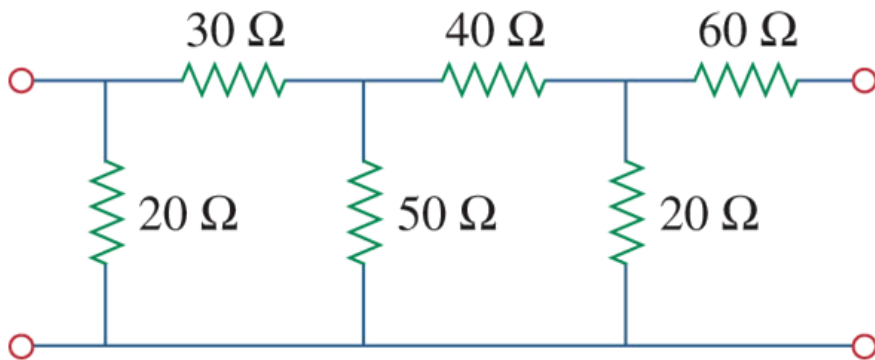




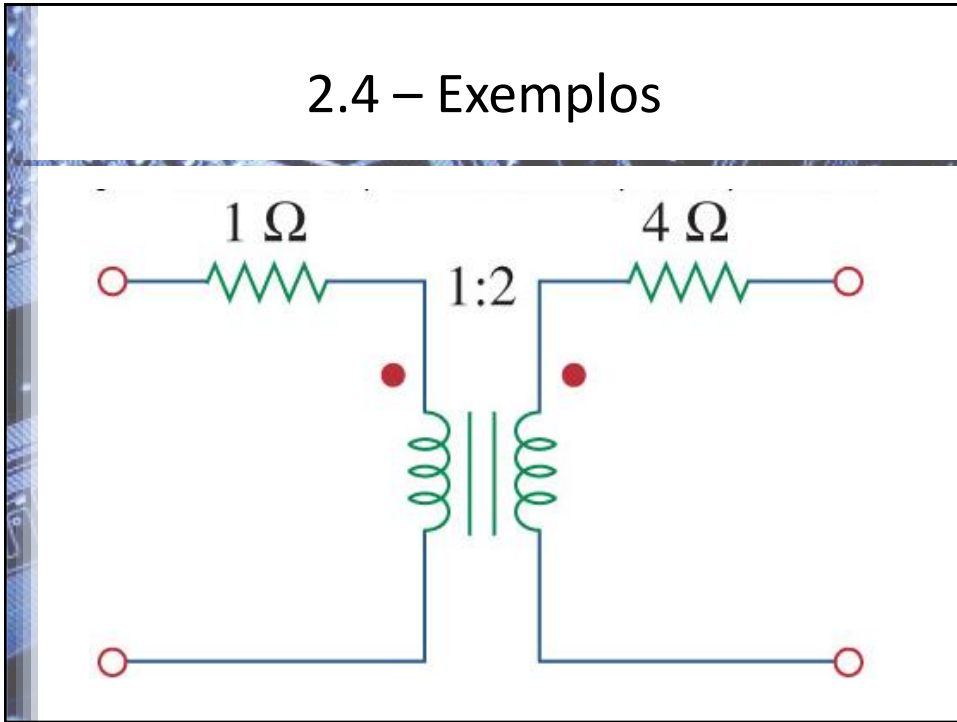
## 2.4 – Exemplos



## 2.4 – Exemplos



## 2.4 – Exemplos



## 2.4 – Exemplos

