UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

Modelagem matemática de sistemas dinâmicos

Profs. Drs. Mauro Spinola e Marcelo Pessôa
mauro.spinola@usp.br / mpessoa@usp.br

As perguntas de hoje

- Como modelar matematicamente os sistemas de controle automático?

Esta aula

- Alguns conceitos
- Função de transferência
- Modelagem de sistemas de controle automático
- Exemplos e exercícios

Alguns conceitos

- **Sistemas lineares**
  - São sistemas para os quais se aplica o princípio da superposição
  - **Princípio da superposição**: a resposta produzida pela aplicação simultânea de duas funções diversas é a soma das respostas individuais.

Alguns conceitos

- **Equação diferencial linear**
  - Os coeficientes são constantes ou somente funções da variável independente.

- **Equação diferencial linear invariante no tempo**
  - É uma equação diferencial linear com coeficientes constantes

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y =$$
$$= b_o x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \ldots + b_{m-1} x^{(1)} + b_m x$$

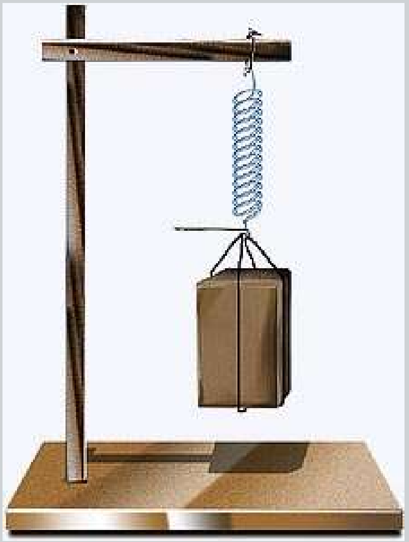
$$n > m$$

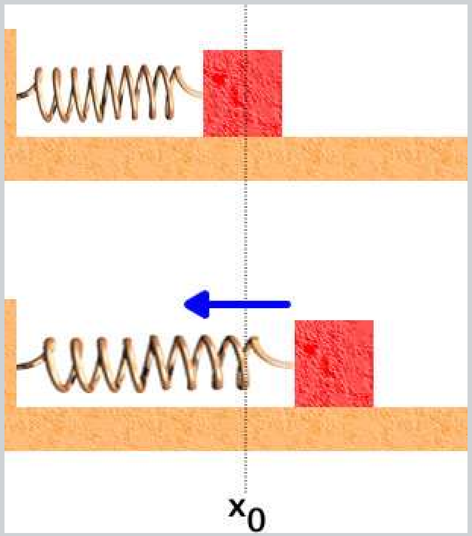
$$a_i , b_i \longrightarrow consts$$

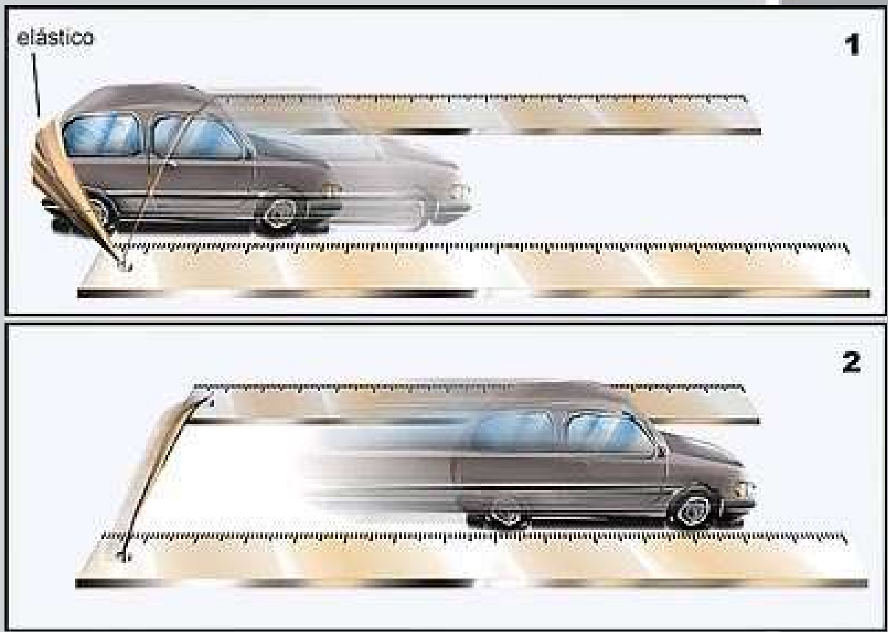
Alguns conceitos

- **Sistemas lineares invariantes no tempo (ou sistemas lineares de coeficientes constantes)**

  - Podem ser descritos por **equações lineares invariantes no tempo**.







Alguns conceitos

- **Sistemas lineares variantes no tempo**
  - Representados por equações lineares cujos coeficientes são funções de tempo.
  - Ex. Sistema de controle de veículo espacial

(a massa varia devido ao consumo de combustível).

Estabilidade dos sistemas de automação

PRO

USP
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

❑ O que é estabilidade de um sistema dinâmico?

- Um sistema de controle está em **equilíbrio** se, na ausência de qualquer distúrbio ou sinal de entrada, a saída permanece no mesmo estado.

- Um sistema de controle linear e invariante no tempo é **estável** se a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial.

Estabilidade dos sistemas de automação

PRO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

- **O que é estabilidade de um sistema dinâmico?**

    - Um sistema de controle linear e invariante é **criticamente estável** se as oscilações do sinal de saída se repetirem de maneira contínua.

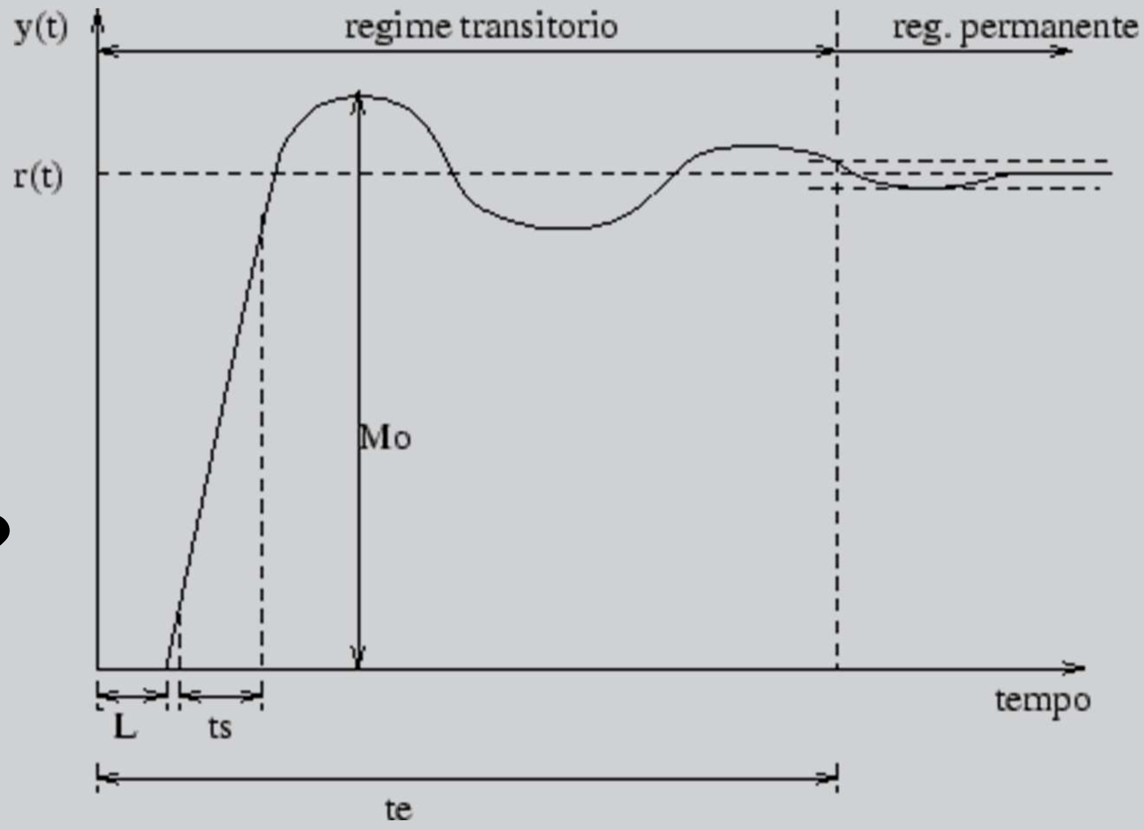
    - Um sistema de controle linear e invariante é **instável** se a saída divergir sem limites a partir do estado de equilíbrio quando o sistema for sujeito a uma condição inicial.

Estabilidade dos sistemas de automação

- **O que é estabilidade de um sistema dinâmico?**
  - Sistemas reais apresentam limitações no crescimento das amplitudes: limitações ou quebra. Quando há proteção, desligam.

Definições de regime transitório e permanente

- O que é regime transitório?
- O que é regime permanente?



Definições de regime transitório e permanente

PRO
USP
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

❑ O que é regime transitório?

- O regime transitório ocorre quando um sistema é sujeito a uma condição inicial ou quando há uma perturbação no funcionamento de regime permanente.

Definições de regime transitório e permanente

❑ **O que é regime permanente?**

- O regime permanente é aquele no qual o sistema de controle está em operação com valores dinâmicos constantes ou cíclicos
  - Por exemplo: um navio ou um avião viajando em linha reta na velocidade cruzeiro

- Um caso particular de regime permanente é o repouso quando todos os parâmetros estiverem sem variação no tempo, sem energia.

Função de transferência

- Transformando uma equação diferencial

$$a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} \Rightarrow a_i s^i Y(s)$$

$$a_i D^i y(t)$$

Função de transferência

❑ Transformando uma equação diferencial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{d\ \ y}{dt} + a_0 y =$$
$$b_n \frac{d^m x}{dt^m} + b_{n-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{d\ \ x}{dt} + b_0 x$$
$$n > m$$

$$a_i, b_i \longrightarrow consts$$

Função de transferência

- Transformando uma equação diferencial

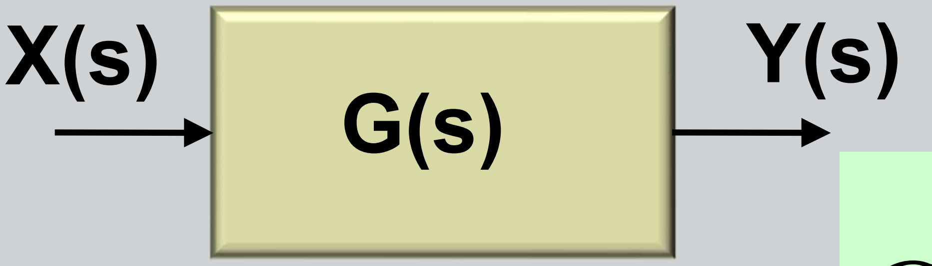
$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_1 s \quad Y(s) + a_0 Y(s)$$
$$= b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \ldots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$Y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) =$$
$$X(s)(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0)$$

G(s) = $\frac{Y(s)}{X(s)}$

Y(s) = G(s)*X(s)

Função de transferência



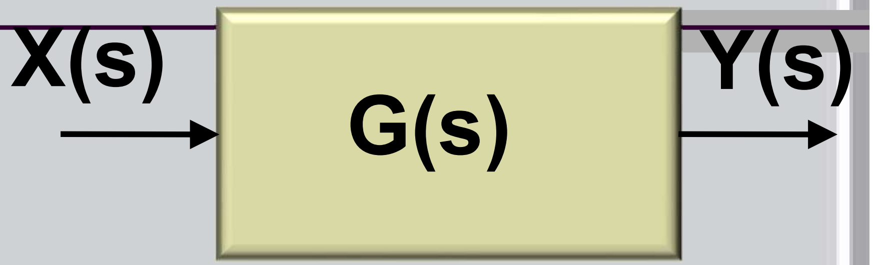
$$G(s) = \frac{\mathrm{L}\,[\text{saída}]}{\mathrm{L}\,[\text{entrada}]}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Y(s) = G(s)*X(s)

PRO
USP UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

Função de transferência



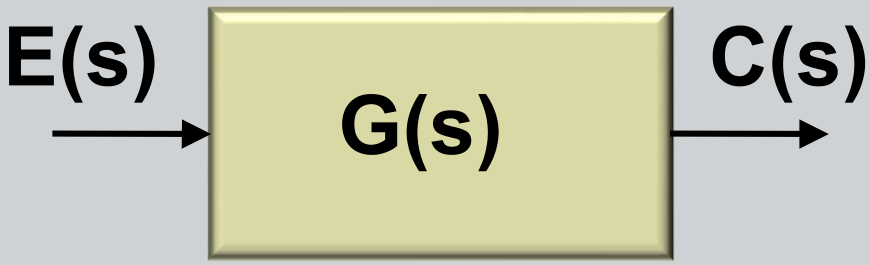
- **Onde quero chegar?**

- Se eu conheço a função de transferência G(s), sei como o sistema se comporta.

- Ao aplicar ao sistema uma entrada X(s)...
- ...consigo calcular a saída Y(s)=X(s).G(s)

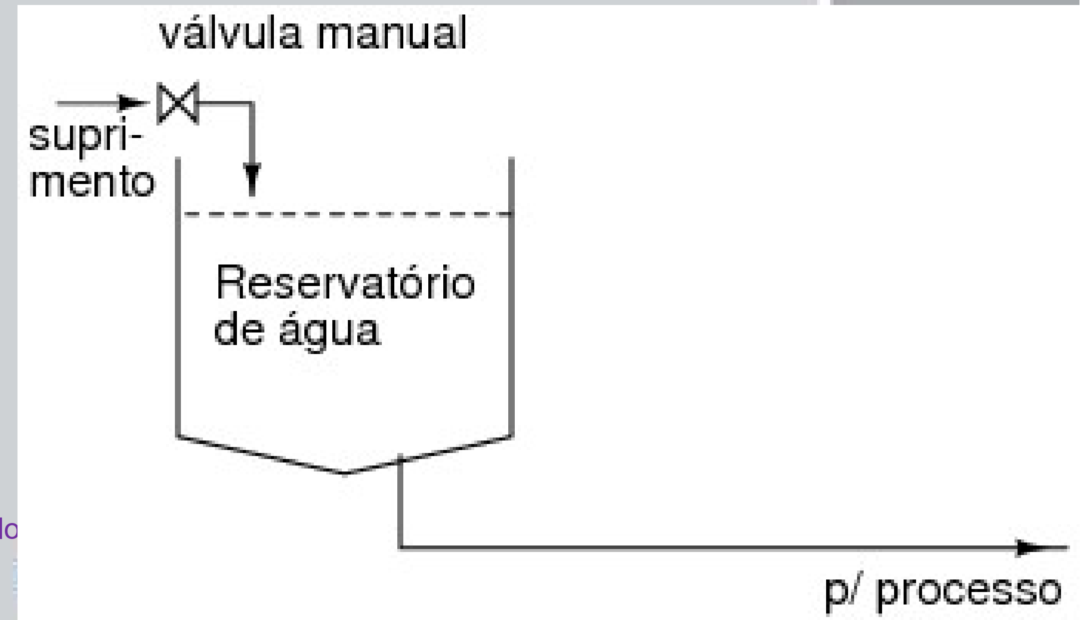
- Se desejar, posso depois obter a resposta no tempo usando a antitransformada Y(s) → y(t)

Função de transferência de sistema de malha aberta

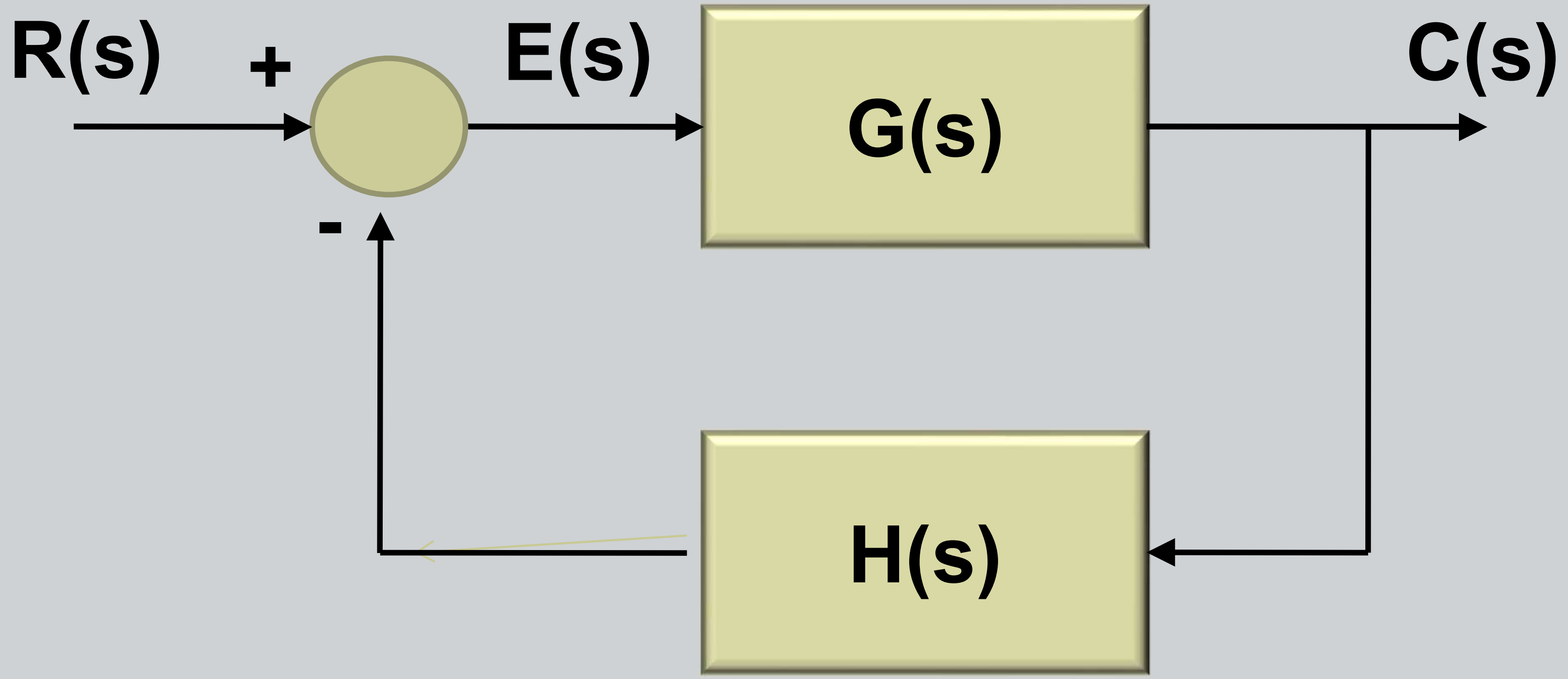


$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$$

$$C(s) = G(s)E(s)$$

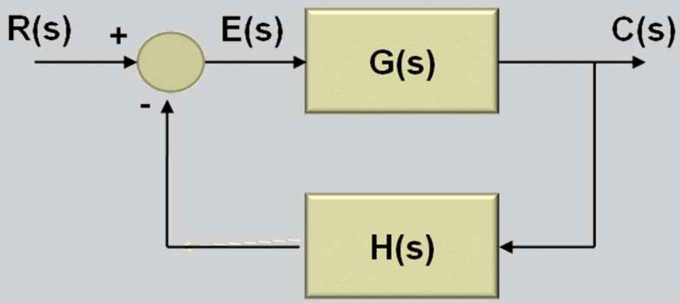


Função de transferência de sistema de malha fechada



Função de transferência de sistema de malha fechada

- Exemplo



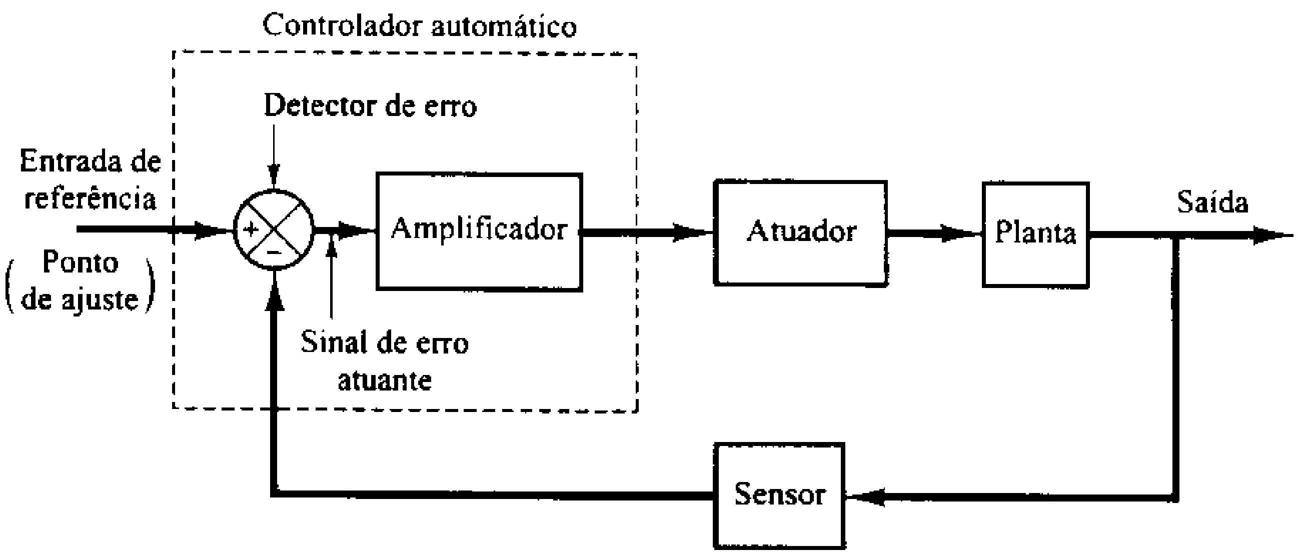


Figura 3.7 Diagrama de blocos de um sistema de controle industrial, que consiste em um controlador automático, um atuador, uma planta e um sensor (elemento de medição).

Função de transferência de sistema de malha fechada

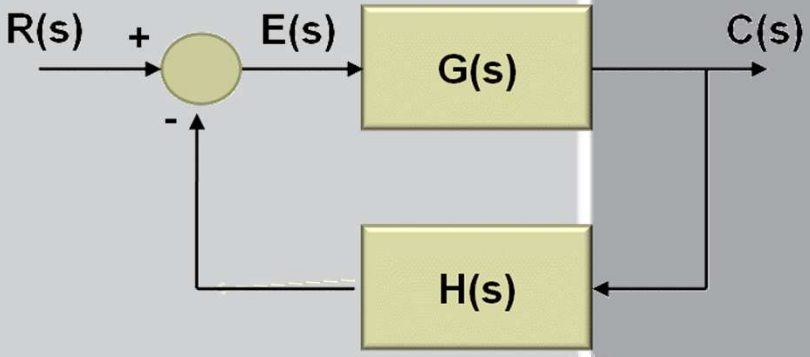
$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

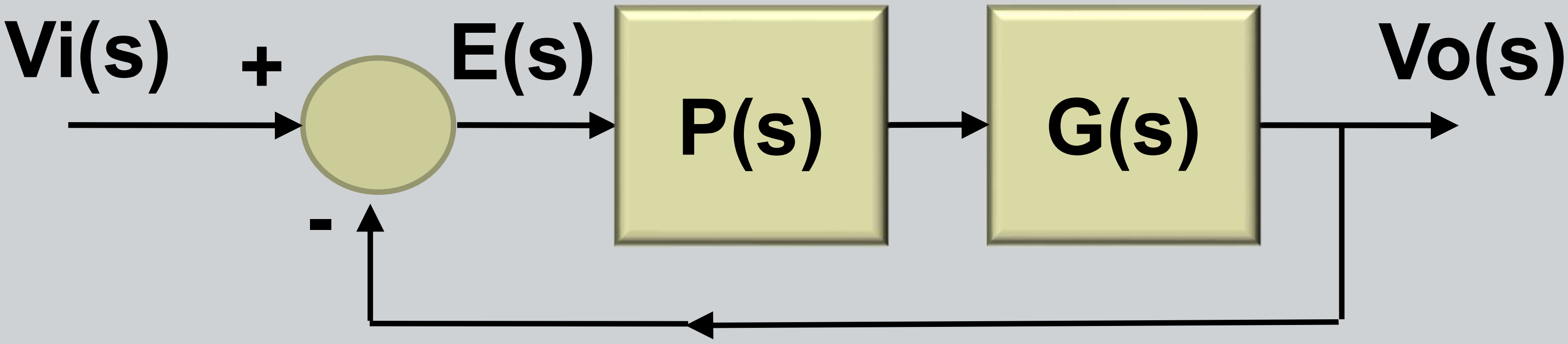
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$



PRO
USP UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

Função de transferência de sistema de malha fechada



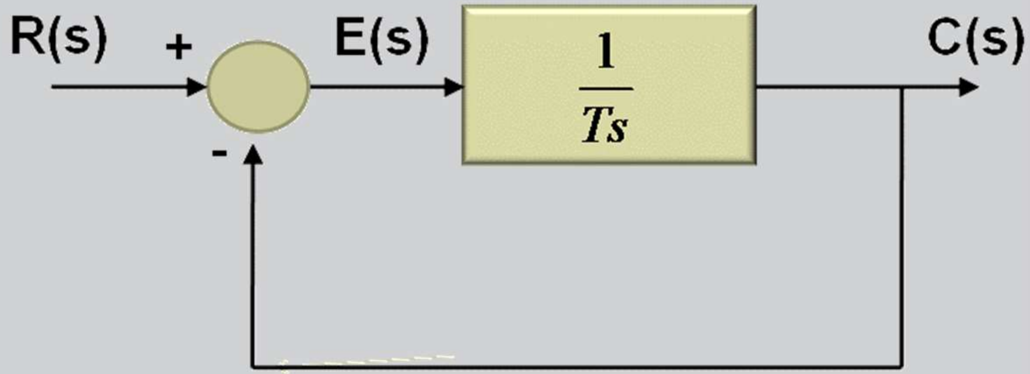
$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)}$$

$$V_o(s) = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)} V_i(s)$$

Sistemas de primeira ordem

- São sistemas representados por equação diferencial de primeira ordem

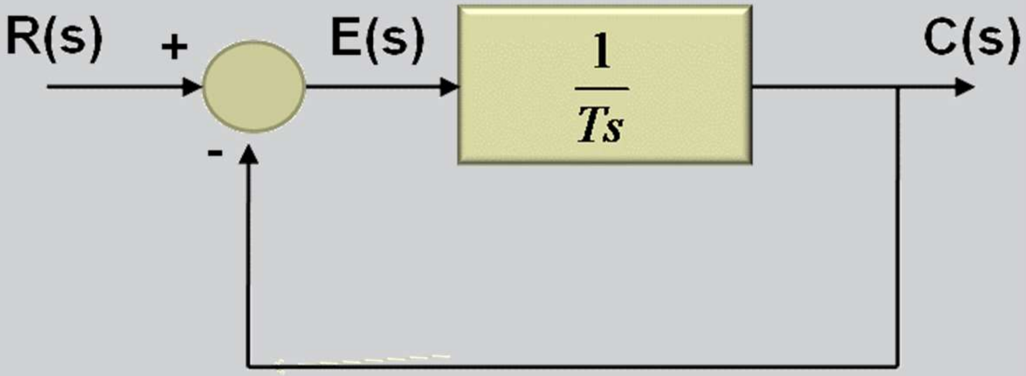
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+Ts}$$



Sistemas de primeira ordem

- Resposta a degrau unitário
- Basta multiplicar por R(s) = 1/s

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+Ts}$$



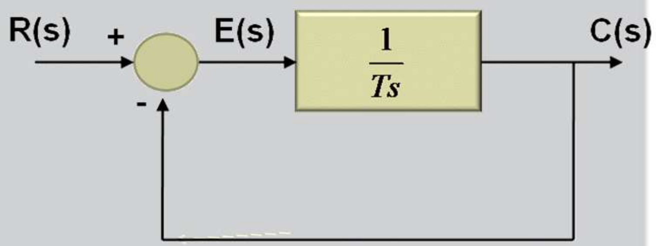
$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{1}{1+Ts}.\frac{1}{s}$$

Sistemas de primeira ordem

- Resposta a degrau
- Expansão em frações parciais

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

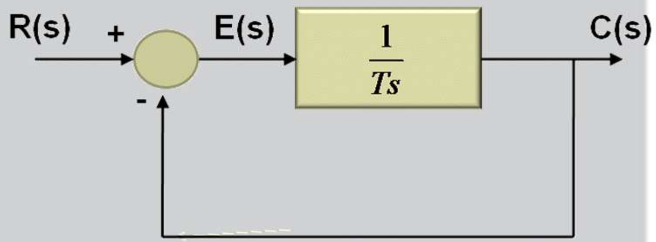


- Qual a resposta no tempo?

Sistemas de primeira ordem

- Qual a resposta ao degrau no tempo?

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

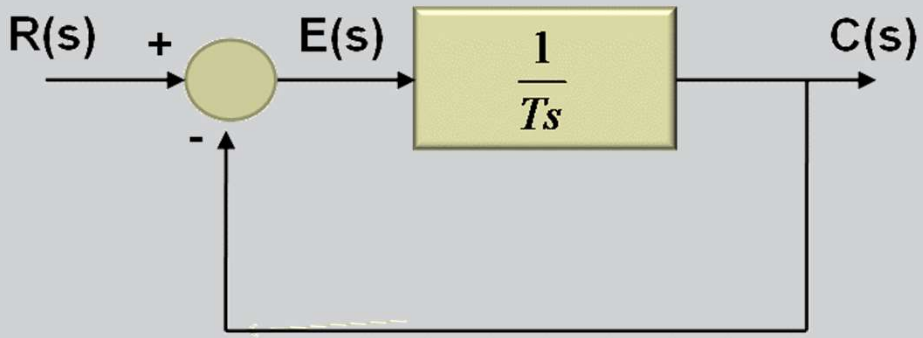


$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

$$t > 0$$

Sistemas de primeira ordem

- Resposta a degrau no Wolfram
- Adotar T = 5 ms (constante de tempo)
- http://www.wolframalpha.com
  - inverse laplace transform (1/s)-1/(s+(1/0.005))



Sistemas de primeira ordem

- Resposta a degrau no Wolfram
- Adotar T = 5 ms (constante de tempo)
- http://www.wolframalpha.com

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{0.005}}\right](t)$$

Result:

$$1-e^{-200t}$$

$$e^{-200.t}\left(e^{200.t}-1.\right)$$

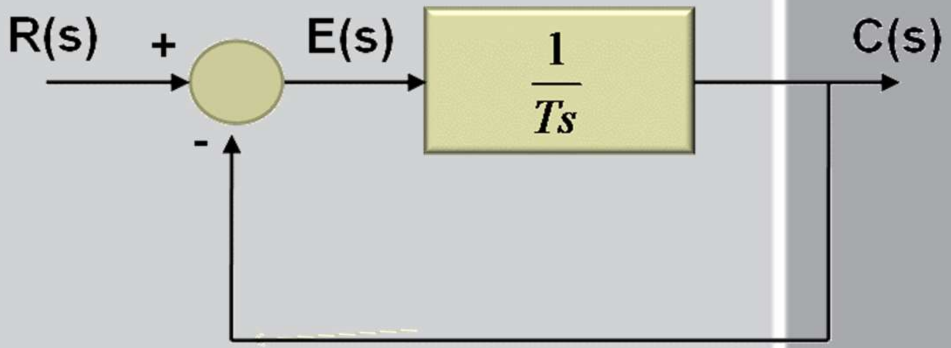
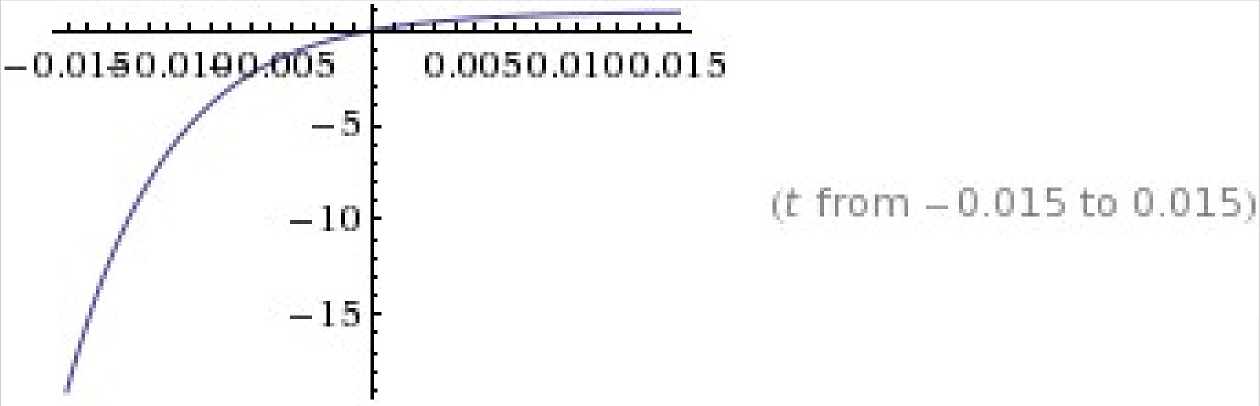
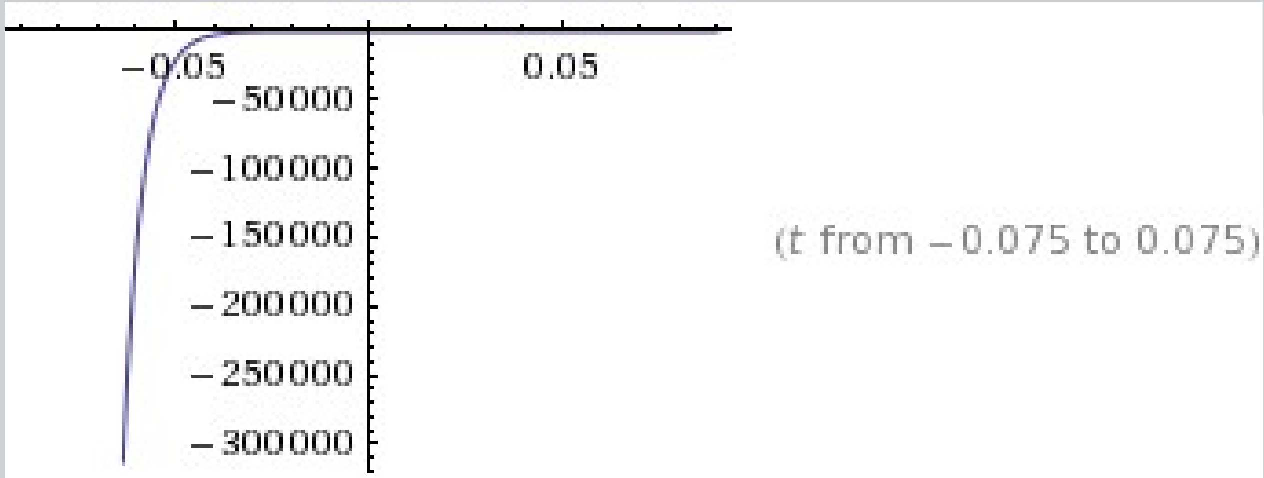


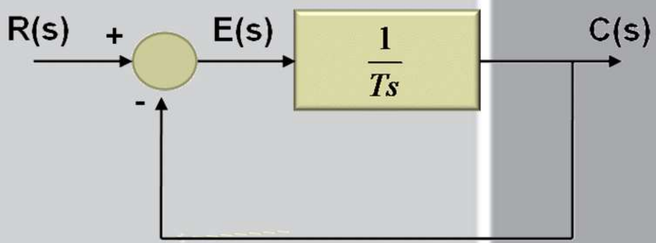
Gráfico ?

Sistemas de primeira ordem

❑ Resposta ao degrau (Wolfram)



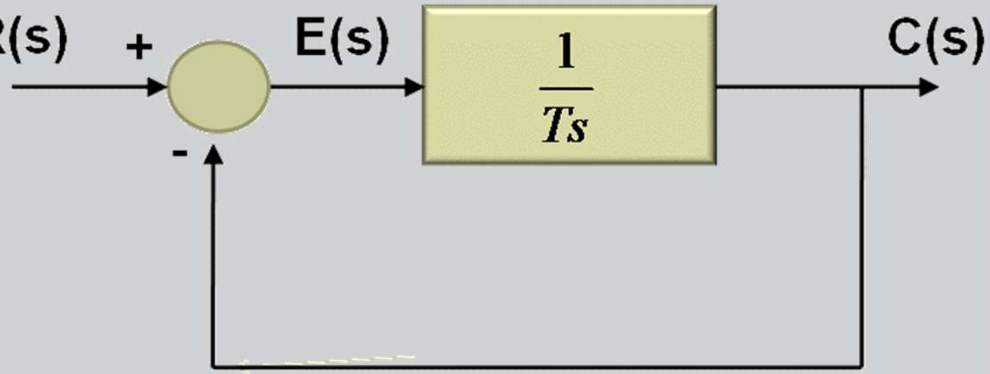




Sistemas de primeira ordem

- Resposta a rampa
- Basta multiplicar por R(s) = $1/s^2$

$$C(s) = \frac{1}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s^2}$$



- calcular a resposta no tempo

$0.005\,(200\,t + e^{-200\,t} - 1)$

Sistemas de primeira ordem

PRO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

❑ Resposta a rampa no Wolfram

- Inverse Laplace transform 1/((1+0.005s)s^2)

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{(1 + 0.005\, s)\, s^2}\right](t)$$

Result:

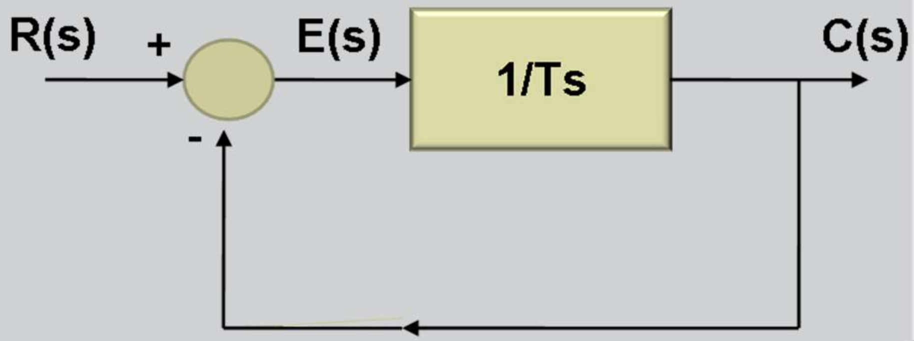
$$t + 0.005\, e^{-200\,t} - 0.005$$

Gráfico ?

Sistemas de primeira ordem

- **Resposta a impulso**
- **Basta multiplicar por R(s) = 1**
  - Inverse Laplace transform 1/(1+s/200)

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$



- **calcular a resposta no tempo**

Sistemas de primeira ordem

❑ Resposta a impulso no Wolfram

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{1+\frac{s}{200}}\right](t)$$

Result:

$$200\, e^{-200\, t}$$

Sistemas de segunda ordem

- Servossistema para controle de posição da saída de um motor com torque T com um elemento de carga com momento de inércia J e viscosidade B

- $T = J\, c''(t) + B\, c'(t)$

- Fazendo a transformada de Laplace:

Sistemas de segunda ordem

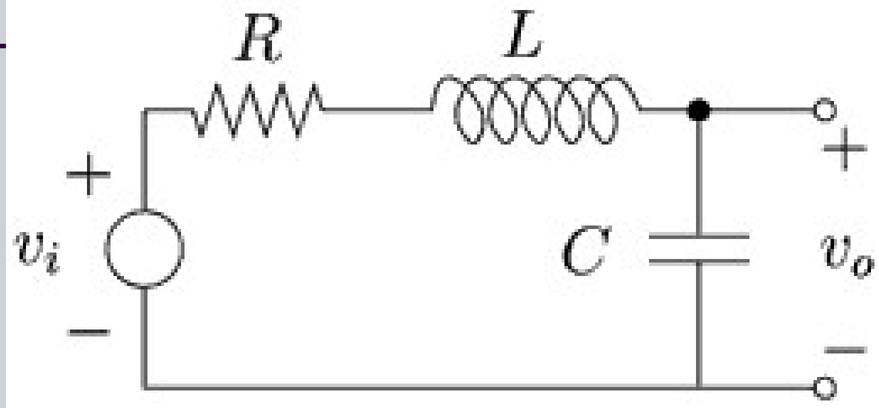
- $T = J\,c''(t) + B\,c'(t)$
- $T(s) = J\,s^2\,C(s) + B\,s\,C(s)$
- $$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$

Sistemas de segunda ordem

- Ao fechar a malha = J c''(t) + B c'(t)
- $$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

Sistemas elétricos e eletrônicos



$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v_i$$

$$\frac{1}{C}\int i(t)dt = v_o$$

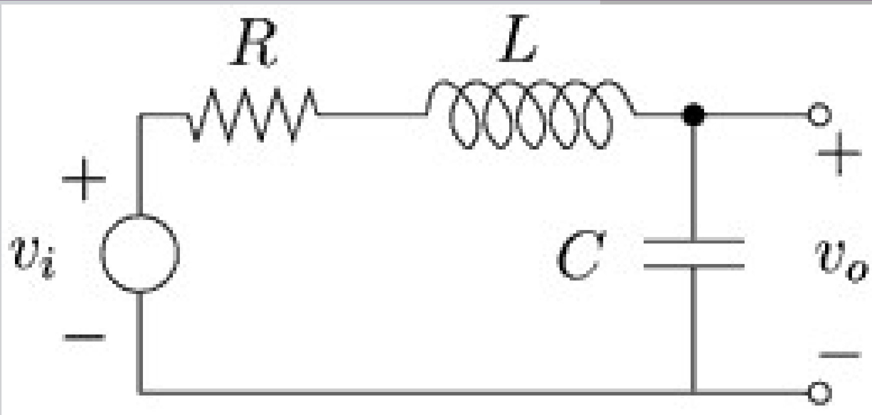
$$RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Abordagem das impedâncias

$$Z_R = R = \frac{V_R(s)}{I(s)}$$



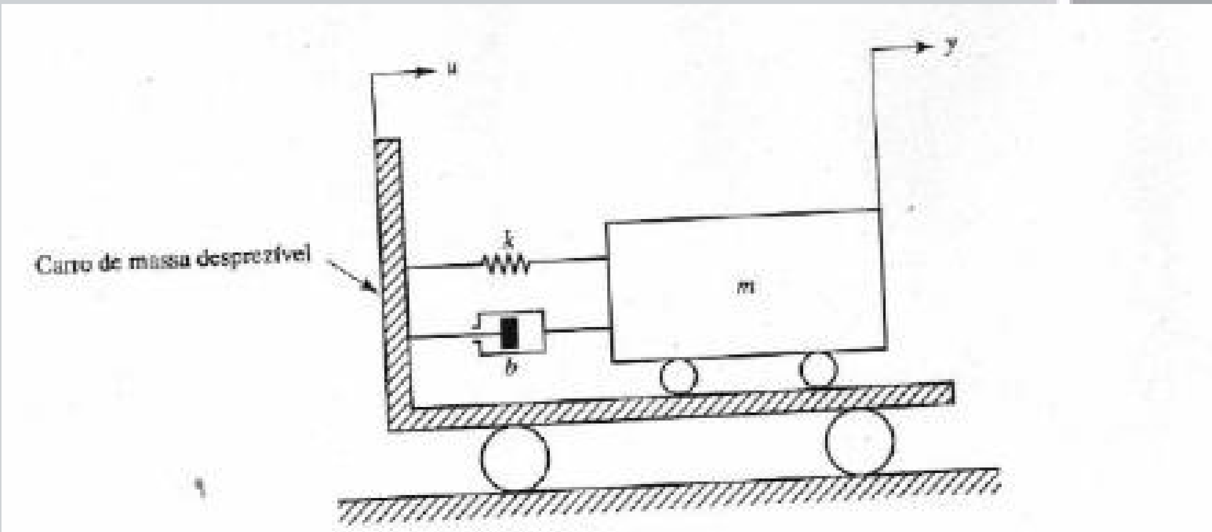
$$Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{V_C(s)}{I(s)}$$

$$Z_L = sL = \frac{V_L(s)}{I(s)}$$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + sL + R}$$

Sistemas mecânicos

- **Sistema massa-mola-amortecimento**
  - Esse sistema pode ser modelado aplicando-se as equações da física referentes à força na massa, na mola e no amortecedor.
  - Após obtida a equação diferencial, aplica-se a transformada de Laplace e é obtida a função de transferência da relação entre o deslocamento da saída Y(s) e o deslocamento da entrada U(s).



Sistemas mecânicos

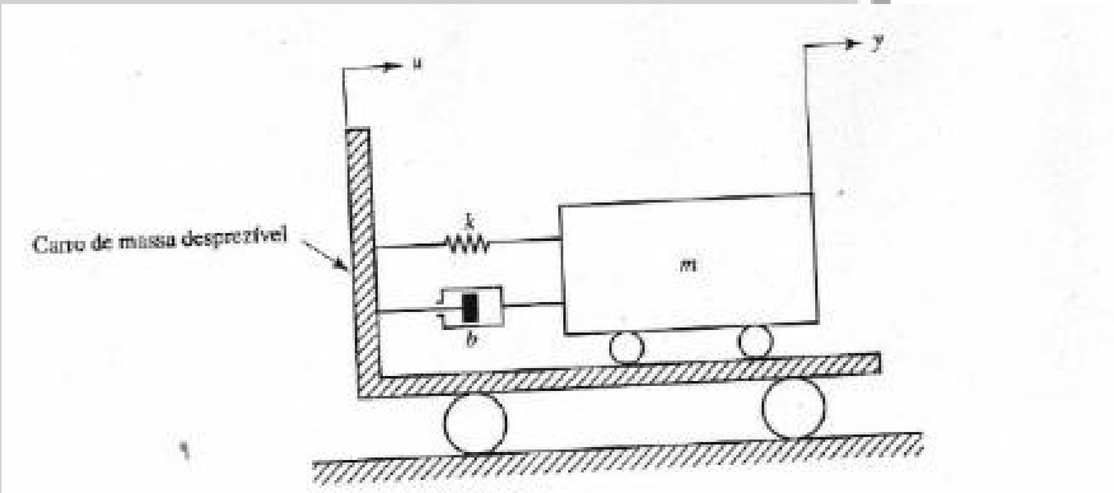
❑ Sistema massa-mola-amortecimento

$$ma = \sum F$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y-u)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k} = \frac{\frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Sistemas mecânicos

- **Sistema massa-mola-amortecimento**
- No caso anterior, trabalhou-se no domínio do tempo e depois da equação diferencial montada é que foi feita a passagem para o Plano s (domínio das frequências)
- Outra forma de fazer a mesma coisa é trabalhar somente no Plano s

Sistemas mecânicos

- As equações da física da massa, da mola e do amortecedor podem ser escritas já no Plano s, ou seja as respectivas transformadas de Laplace:

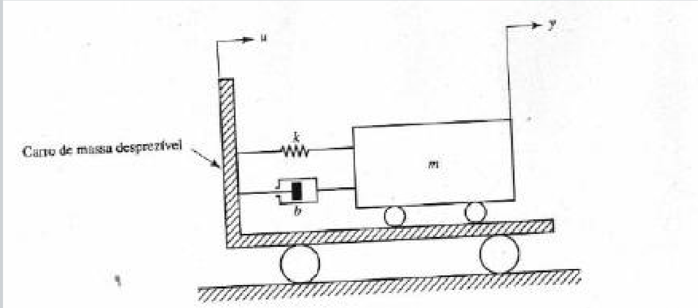
$$massa: F(s) = m.s^2.X(s)$$

$$mola: F_1(s) = k.X(s)$$

$$amortecedor: F_2(s) = b.s.X(s)$$

- Onde F(s) é a força aplicada e X(s) é o deslocamento

Sistemas mecânicos



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

- As forças que são aplicadas na massa se somam:

$$F(s) = -F_1(s) - F_2(s)$$

- A equação fica:

$$ms^2Y(s) = -k[Y(s) - U(s)] - bs[Y(s) - U(s)]$$

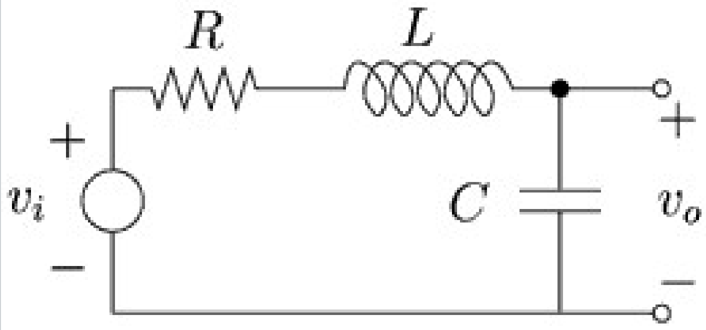
- Retirando-se da expressão a relação ente Y(s) e U(s), fica a mesma expressão anterior

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k} = \frac{\frac{b}{k}s+1}{\frac{m}{k}s^2+\frac{b}{k}s+1} = \frac{\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}$$

Equivalência dos sistemas

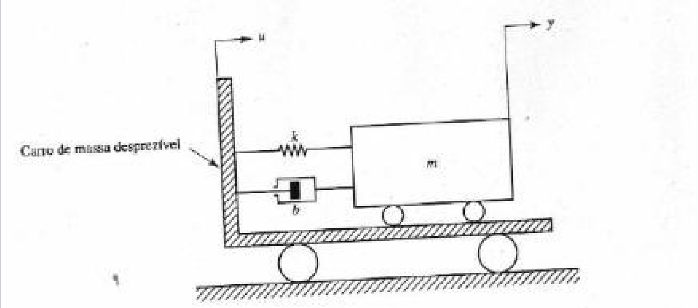
- Circuito elétrico RLC

$$G(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{sRC + 1}{s^2LC + sRC + 1}$$



- Sistema massa-mola

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{b}{k}s + 1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}$$



Equivalência dos sistemas

- Os sistemas são equivalentes

$$RC \approx \frac{b}{k}$$

$$LC \approx \frac{m}{k}$$

$$R \approx b$$

$$L \approx m$$

$$C \approx \frac{1}{k}$$

$$G(s) = \frac{sRC + 1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

$$G(s) = \frac{\frac{b}{k}s + 1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}$$

Utilização do Wolfram

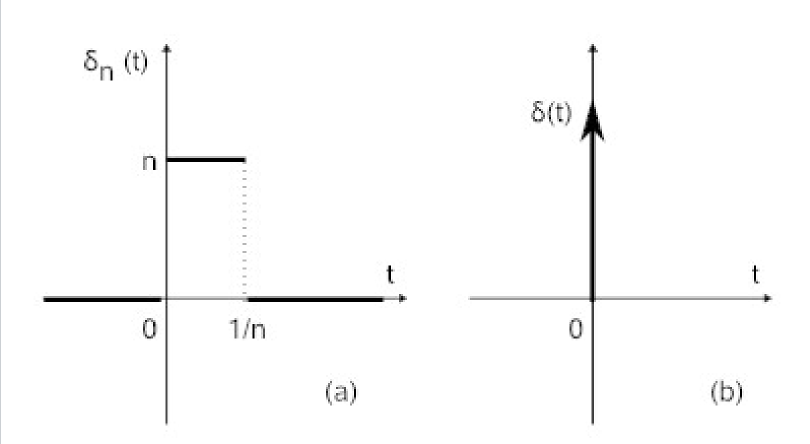
PRO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

- **Wolfram Alpha**
- Utilizar o o Wolfram para resolver as equações e estudar o comportamento dos sistemas
- Circuito RLC com:
  - R=2Ω
  - C=10μF
  - L=1mH

Função de transferência

a) Resposta ao impulso unitário

- Caso particular



$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = 1$$

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$

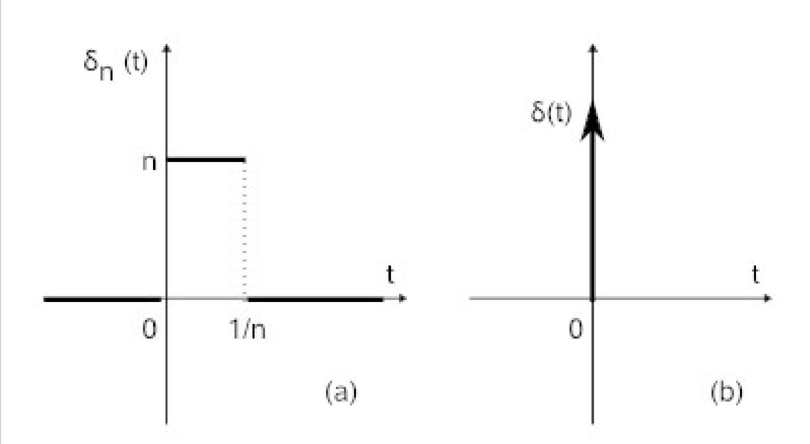
$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)] = g(t)$$

- g(t) é chamada de resposta impulsiva ou função característica do sistema

Função de transferência

a) Resposta ao impulso unitário

- Circuito RLC



$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = 1$$

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$

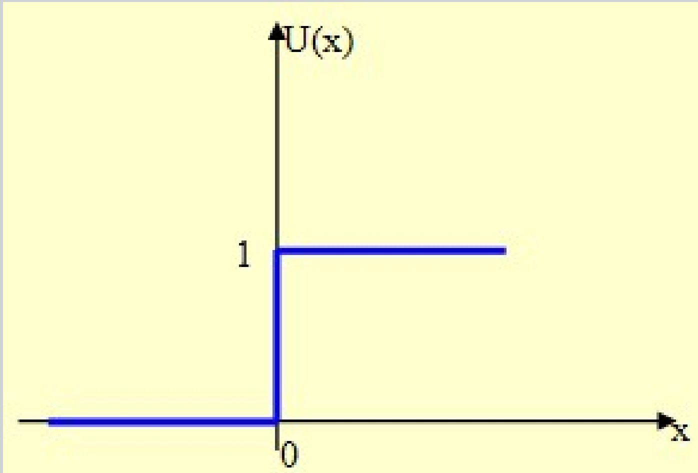
$$Y(s) = \frac{sRC + 1}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{20.10^{-6}s + 1}{10^{-8}s^2 + 20.10^{-6}s + 1}$$

- Fazer no WolframAlpha!

Função de transferência

b) Resposta ao degrau unitário

- Circuito RLC



$$x(t) = 1(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$

$$Y(s) = \frac{sRC+1}{s(s^2LC+sRC+1)} = \frac{20.10^{-6}s+1}{s(10^{-8}s^2+20.10^{-6}s+1)}$$

- Fazer no WolframAlpha!

Função de transferência

b) Resposta a entrada senoidal

- Circuito RLC

$$x(t) = sen(wt)$$

$$X(s) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$

- Utilizar ω=3.000 rd/s
- Aumentar a frequência angular para ω=45.000 rd/s
- Aumentar mais ainda para ω=200.000 rd/s

$$Y(s) = \frac{sRC + 1}{(s^2 + w^2)(s^2 LC + sRC + 1)} = \frac{20.10^{-6} s + 1}{(s^2 + 9.10^6)(10^{-8} s^2 + 20.10^{-6} s + 1)}$$

- Fazer no WolframAlpha!

Controlador proporcional P

- A função de transferência é:

$$P(s) = K_p E(s)$$

- Onde E(s) é a transformada de Laplace do erro
- K_p é a constante proporcional

- em outras palavras, com que intensidade vai ser corrigido o erro

Controlador PI proporcional integrativo

- A função de transferência é:

$$P(s) = (K_p + \frac{K_i}{s})E(s)$$

- Onde E(s) é a transformada de Laplace do erro
- K_p é a constante proporcional
- K_i é a constante de integração

Controlador PD proporcional derivativo

- A função de transferência é:

$$P(s) = (K_p + K_d s)E(s)$$

- Onde E(s) é a transformada de Laplace do erro
- K_p é a constante proporcional
- K_d é a constante de derivação

Controlador PID completo

- A função de transferência é:

$$P(s) = (K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s)E(s)$$

- Onde E(s) é a transformada de Laplace do erro
- K_p é a constante proporcional
- K_i é a constante de integração
- K_d é a constante de derivação

Controladores PID

- Controladores PID são os mais populares no mercado

- Contêm 3 componentes que se somam:
  - Uma proporcional ao erro
  - Uma proporcional à integral do erro
  - Uma proporcional à derivada do erro

Controladores PID

- Usando os mesmos valores do exercício do RLC fazer a realimentação e verificar comportamento na resposta a degrau
- A resposta a degrau de malha aberta apresenta *overshoot* de 80% e 3,5ms de oscilação
- Esse comportamento foi visto no outro exercício
- Com a realimentação o objetivo é minimizar esse comportamento indesejado

Controladores PID

- Fazer K_p=1 e fechar a malha
- Observar *overshoot*
- Observar a oscilação se diminuiu
- Observar o erro de regime permanente

Controladores PID

- Fazer K_p=20 e fechar a malha
- Observar *overshoot*
- Observar a oscilação se diminuiu
- Observar o erro de regime permanente

- Observar que o efeito da realimentação proporcional foi reduzir o erro de regime permanente e forçar para eliminar a oscilação indesejada do sistema

Sintonia de controladores PID

- **[Quadro 3.3] Sintonia de controladores PID: cálculo dos parâmetros de controle segundo o método de Ziegler-Nichols baseado no ganho crítico K_{cr} e no período crítico T_{cr}.**

Tipo de controle	K_p	T_i	T_d
P	$K_{cr} / 2$	∞	0
PI	$K_{cr} / 2,2$	$T_{cr} / 1,2$	0
PID	$K_{cr} / 1,7$	$T_{cr} / 2$	$T_{cr} / 8$

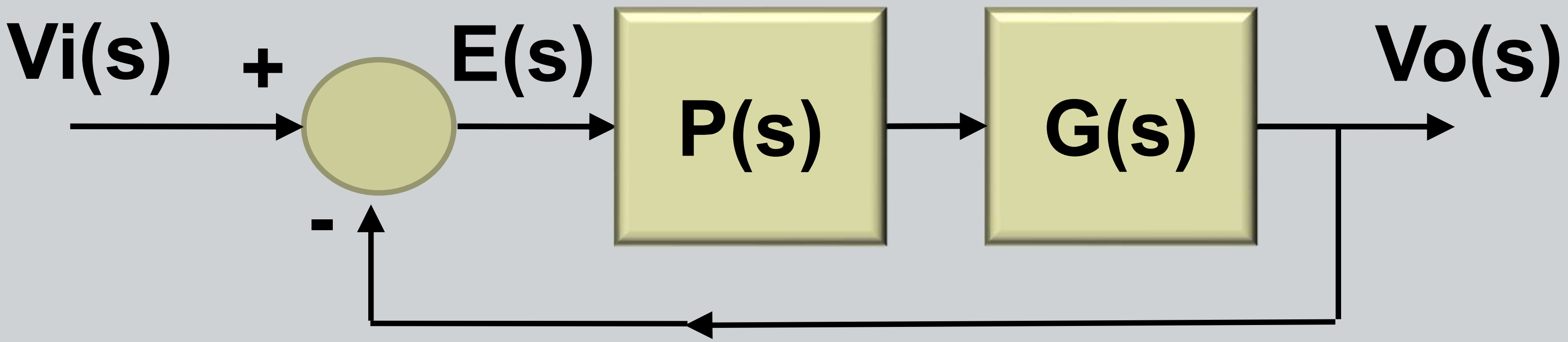
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

Modelagem matemática de sistemas dinâmicos

Profs. Drs. Mauro Spinola e Marcelo Pessôa
mauro.spinola@usp.br / mpessoa@usp.br

Adicional



Adicional – Controle proporcional