[4] – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

PRO3252
Automação e Controle

Mauro de Mesquita Spinola

Marcelo Schneck de Paula Pessôa

EPUSP-PRO

As perguntas de hoje

- Como representar matematicamente sistemas dinâmicos?

[4] – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace

Aula	Conteúdo	Itens
Aula 1	Transformadas de Laplace	4.1, 4.2
Aula 2	Modelagem matemática de sistemas dinâmicos	4.3
Aula 3	Transformadas de Laplace de controladores automáticos	4.4, 4.5, 4.6

[4] – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace

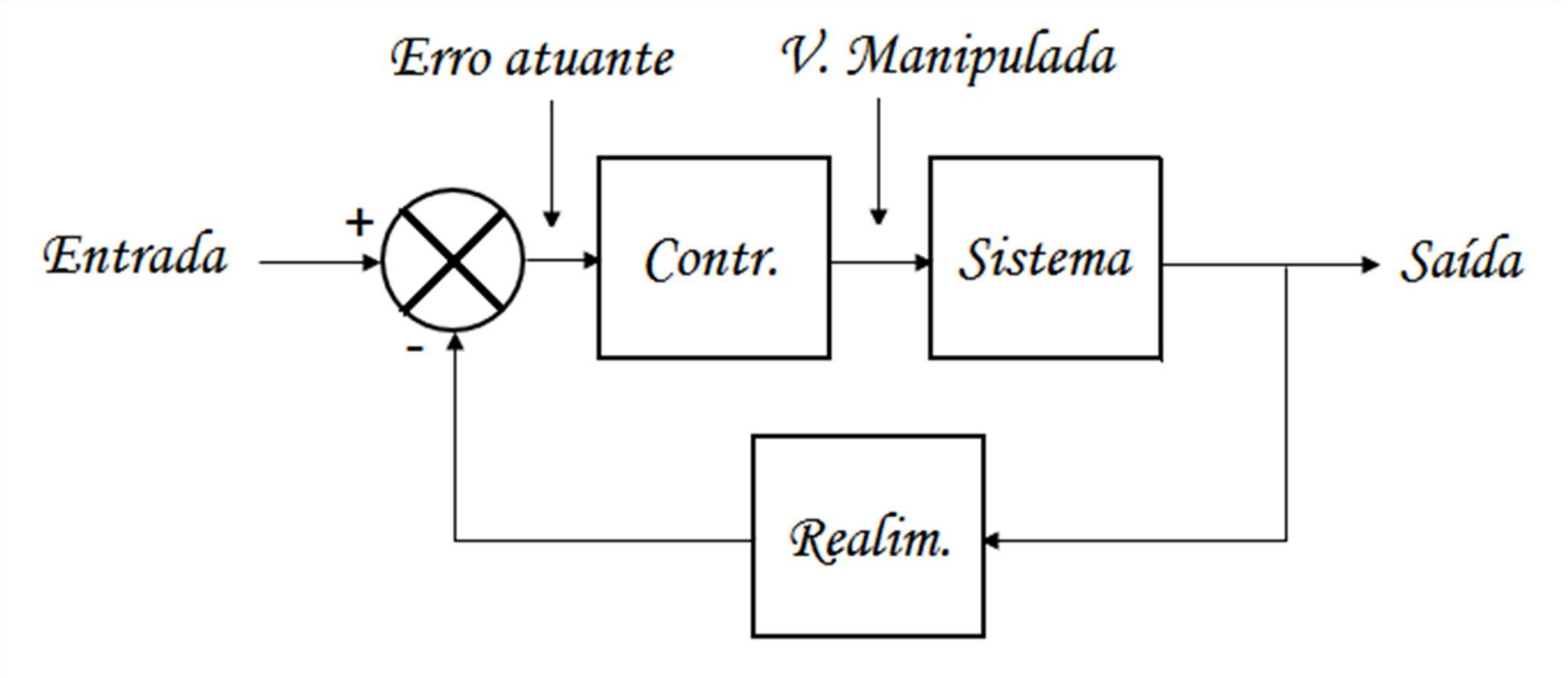
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

❑ Esta aula

- Transformadas de Laplace
- Propriedades da Transformada de Laplace
- Transformada inversa de Laplace
- *Exercícios*

Contexto



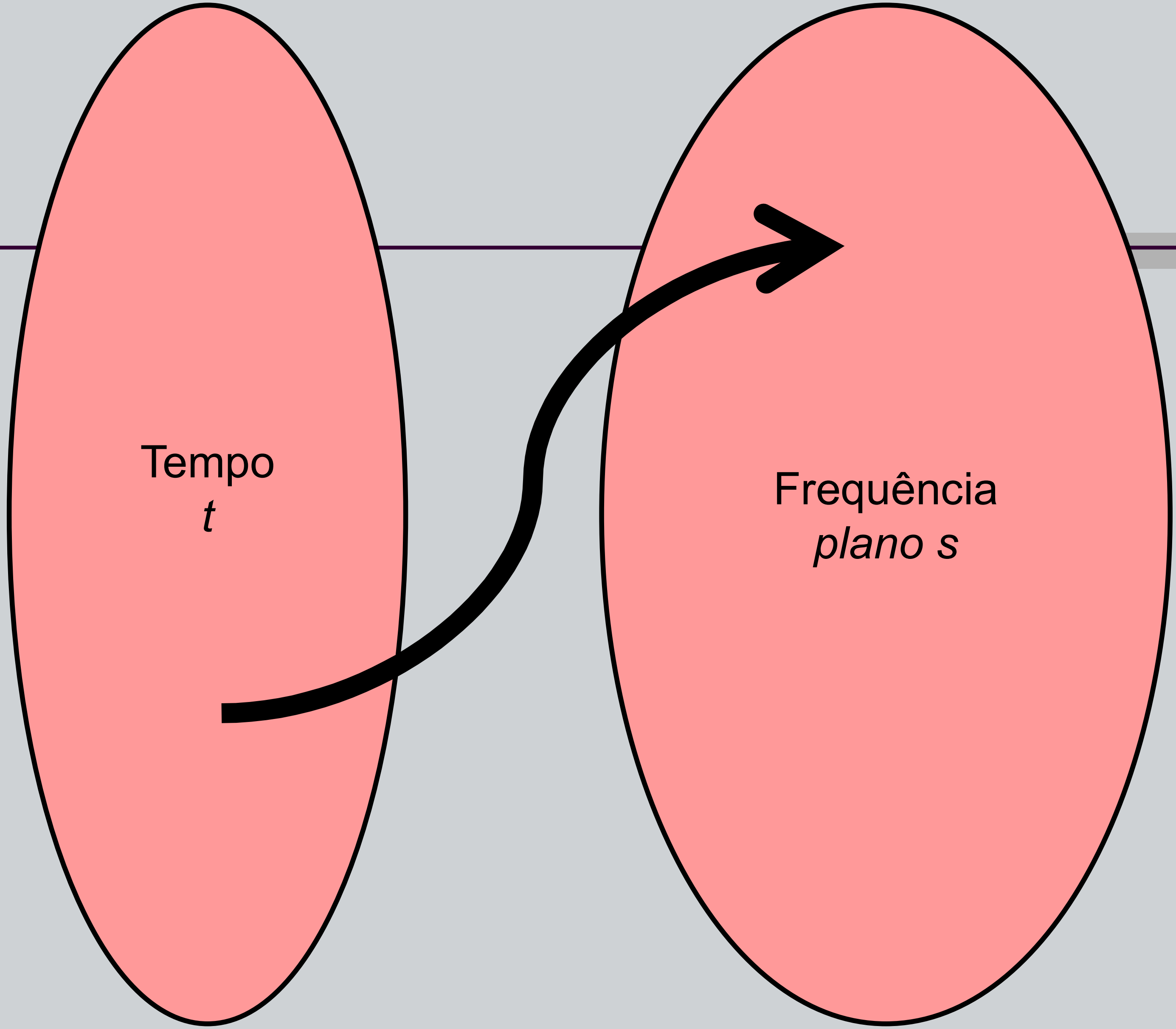
Erro atuante
V. Manipulada
Entrada
+
-
Contr.
Sistema
Saída
Realim.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

4.2

A TRANSFORMADA DE LAPLACE



mapeamento de espaços

Base Matemática – Transformada de Laplace

- **Método operacional que pode ser usado para solução de sistemas de equações diferenciais lineares.**

- **Características da Transformada de Laplace:**
  - Operações como diferenciação e integração podem ser substituídas por **operações algébricas** no plano complexo.
  - A solução da equação diferencial (ED) pode ser encontrada através de uma **tabela de transformadas de Laplace** ou pelo uso de técnicas de expansão em frações parciais.

- **Vantagens:**
  - Permite o uso de **técnicas gráficas** para prever o desempenho de um sistema sem necessidade de resolução do sistema de EDs.

Breve revisão sobre variáveis complexas

- Seja *s* uma variável complexa, que pode ser representada como a soma de uma componente real mais uma componente complexa, na forma:

$$s = \sigma + j\omega$$

Considere a figura 1 que se segue, ilustrando o plano *s* e um ponto representativo

$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$$

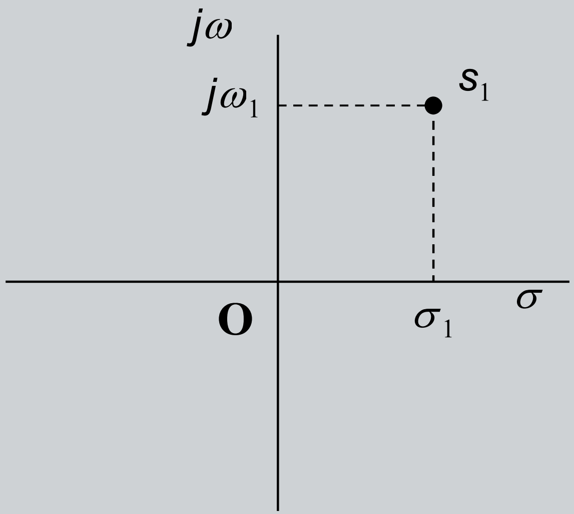


Fig. 1 Plano *s* e um ponto representativo

Breve revisão sobre variáveis complexas

Seja uma função *G* de *s*, com uma parte real e uma parte imaginária, dada por

$G(s) = G_x + jG_y$ onde G_x e G_y reais

Considere o plano complexo mostrado na figura 2 onde é ilustrado o ângulo θ de (G_x+G_y), *G* e suas componentes. O ângulo θ é medido a partir do eixo real positivo e é dado por

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$$

Uma rotação anti-horária é definida como a direção positiva para fins de medição de ângulos.

O módulo da grandeza complexa (G_x+jG_y) é dado por

$$\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

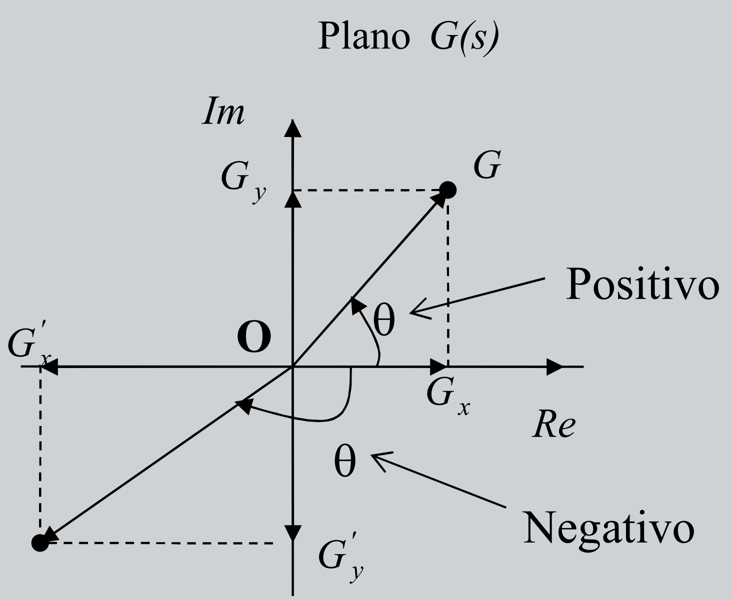


Fig. 2 Plano complexo e duas grandezas complexas representativas

A Transformada de Laplace

Considere as definições:

f(t) é uma função do tempo tal que *f(t)* = 0 para $t < 0$
s é uma variável complexa

A transformada de Laplace de *f(t)* é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

O processo inverso, para achar a f(t) da transformada de Laplace é dado por

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,`ds$$

A Transformada de Laplace

Transformadas de Laplace para algumas funções encontradas com frequência

Exemplo* 1** – Considere a ***função exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \mathcal{P}ara \ t < 0 \\ Ae^{-\alpha . t} & \mathcal{P}ara \ t \geq 0 \end{cases}$$

Onde A e α são constantes. A transformada de Laplace de *f(t)* é dada por

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty Ae^{-\alpha . t} e^{-st}\, dt = A\int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}\, dt$$

$$cuja \quad solução \quad é \quad \frac{A}{s-\alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_0^\infty \quad ou \quad seja$$

$$F(s) = \frac{A}{s+\alpha}$$

A Transformada de Laplace

PRO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

Exemplo 2 – Função degrau

Considere a seguinte função degrau

$$f(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < 0 \\ A & para \quad t > 0 \end{cases}$$

A transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} Ae^{-st}dt = \frac{A}{s}$$

Para $A = 1$ a função degrau é chamada função *degrau unitário,* ocorrendo em $t = t_0$ é frequentemente representada por $u(t-t_0)$ *ou* $1(t-t_0)$.

A função degrau de amplitude A pode ser escrita como $A.1(t-t_0)$. *A transformada de Laplace da função degrau unitário que é definida por*

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \textbf{para} \ t < 0 \\ 1 & \textbf{para} \ t > 0 \end{cases}$$

é dada por

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

Significado físico de uma função degrau em $t = 0$: corresponde a um sinal constante aplicado subitamente ao sistema no instante t=0.

A Transformada de Laplace

Exemplo 3 – ***Função rampa***

Considere a seguinte função rampa: $f(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < 0 \\ At & para \quad t \geq 0 \end{cases}$ ***onde*** A ***é uma constante***

A sua transformada de Laplace é dada por (integrando por partes)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = A\int_0^\infty te^{-st}dt = At\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{Ae^{-st}}{-s}dt = \frac{A}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{A}{s^2}$$

A Transformada de Laplace

Exemplo 4 – Função senoidal
Considere a seguinte função senoidal:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \textbf{para } t < 0 \\ Asen(\omega t) & \textbf{para } t \geq 0 \end{cases}$$

Como

$$e^{j\omega t} = cos\ \omega t + jsen\ \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = cos\ \omega t - jsen\ \omega t$$

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2\,jsen\ \omega t$$

$$sen\ \omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

Portanto a transformada de Laplace pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{A}{2j}\int_0^{\infty}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st}\,dt = \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Similarmente a transformada de Laplace para $f(t)=Acos(\omega t)$ fornece

$$\mathcal{L}\left[A\cos(\omega t)\right] = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

Quadro de transformadas de Laplace

	Função f(t)	Transformada de Laplace F(s) = $\mathcal{L}[f(t)]$
1.	δ(t) Impulso unitário (Delta de Dirac)	1
2.	1(t) ou u(t) Degrau unitário	$\frac{1}{s}$
3.	t Rampa unitária	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n (n inteiro positivo)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{-at} Exponencial	$\frac{1}{s+a}$
6.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8.	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9.	cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10.	e^{-at} sen ωt	$\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$
11.	e^{-at} cos ωt	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
12.	t sen ωt	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
13.	t cos ωt	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

Exercícios

- **Obter a transformada de Laplace das seguintes funções:**
  a. $f(t) = 5$
  b. $f(t) = 5t$
  c. $f(t) = 5e^{-4t}$
  d. $f(t) = 5\ \mathrm{sen}(3t)$

Propriedades da Transformada de Laplace

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

- 1.Linearidade ou homogeneidade
- 2.Aditividade
- 3.Translação no tempo
- 4.Derivação real
- 5.Integração real
- 6.Teorema do valor inicial
- 7.Teorema do valor final
- 8.Derivação complexa
- 9.Multiplicação pela função exponencial
- 10.Mudança de escala no tempo

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 1.Linearidade ou homogeneidade

Seja uma constante independente de *s* e de *t* e seja *f(t)* transformável. Então

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] = \alpha F(s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 2.Aditividade

Se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são ambas transformáveis, aplica-se o princípio da superposição

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \pm \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 3.Translação no tempo

Função transladada: Seja a transformada transladada de Laplace $f(t\text{-}\alpha)1(t\text{-}\ \alpha)$
onde $\alpha \geq 0$

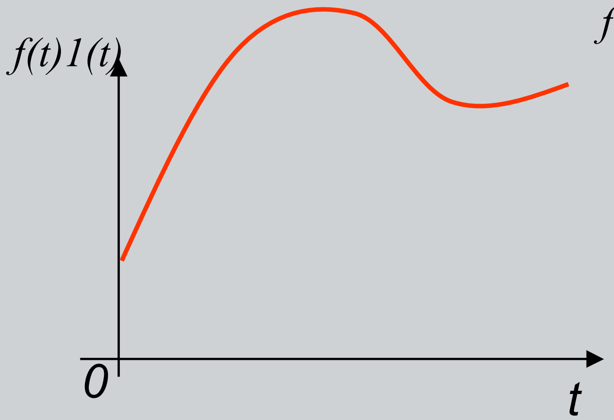


Fig. 3 - Função $f(t)$

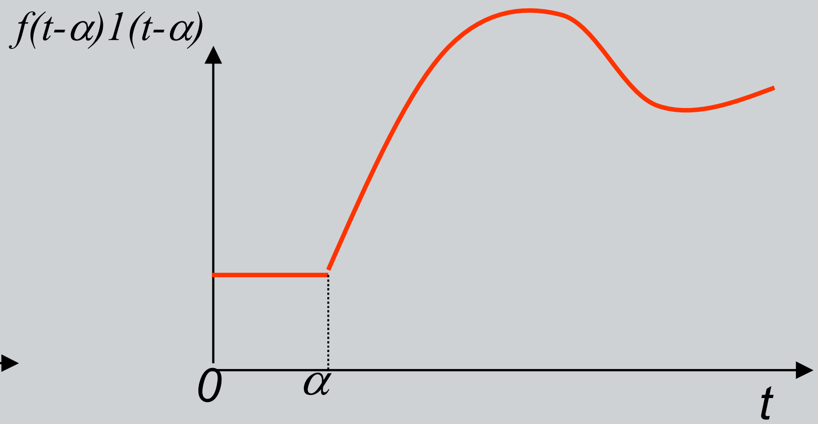


Fig. 4 - Função $f(t\text{-}\alpha)$

Seja $f(t) = 0$ para $t < 0$ e $f(t\text{-}\alpha) = 0$ para $t < \alpha$, representadas nas duas figuras acima

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 3.Translação no tempo (cont.)

$$\int_0^\infty f(t-\alpha)1(t-\alpha)e^{-st}dt = \int_{-\alpha}^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau$$

Como $f(\tau)1(\tau)=0$ para $\tau<0$, podemos trocar o limite inferior de integração de $-\alpha$ para 0

$$\int_{-\alpha}^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau$$

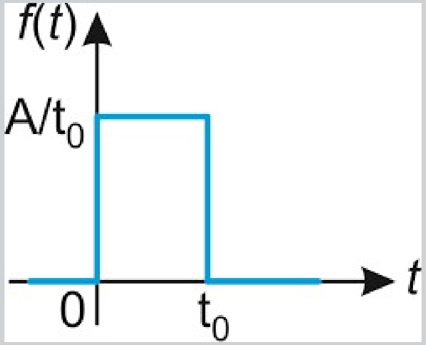
$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}e^{-s\alpha}d\tau = e^{-\alpha s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-\alpha s}F(s)$$

Esta equação mostra que a translação de *f(t)* de um valor de α unidades é equivalente multiplicar *F(s)* por $e^{-\alpha s}$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ Exemplo: Função Pulso

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{t_0} & \mathscr{Para}\ \ 0 < t < t_0 \\ 0 \quad \mathscr{Para}\ \ t < 0\ \ e\ \ t_0 < t \end{cases}$$



onde A e t_0 são constantes. A função pulso aqui pode ser considerada uma função degrau de altura A/t_0 começando em $t=t_0$. Matematicamente:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0)$$

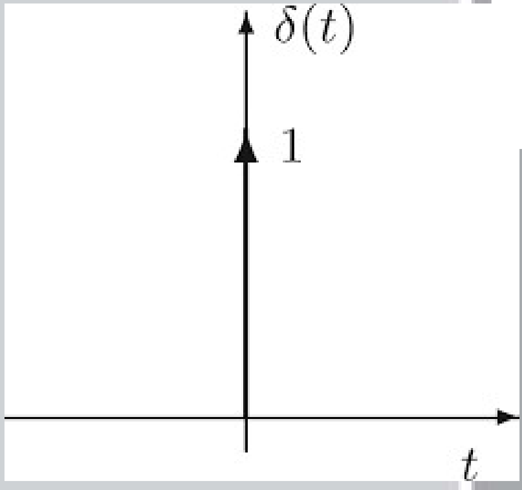
A transformada de Laplace de f(t) é obtida como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} 1(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}(t - t_0)\right] = \frac{A}{st_0} - \frac{A}{st_0} e^{-st_0} = \frac{A}{st_0}(1 - e^{-st_0})$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ Exemplo: Função Impulso

Trata-se de um caso limite especial de uma função pulso



$$f(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{A}{t_0} & Para \quad 0 < t < t_0 \\ 0 & Para \quad t < t_0,\ t_0 < t \end{cases}$$

Como a amplitude da função impulso é $\frac{A}{t_0}$ e a duração é t_0 a área sob o impulso é igual a A. Como a duração t_0 tende a 0, a altura $\frac{A}{t_0}$ tende ao infinito. O tamanho de um impulso é medido pelo sua área.

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ Exemplo: Função Impulso (cont.)

A transformada de Laplace da função impulso *f(t)* pode ser obtida como se segue

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t_0 \to 0} \tfrac{A}{t_0 s}\left(1 - e^{-st_0}\right) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{\frac{d}{dt_0}\left(A\left(1 - e^{-st_0}\right)\right)}{\frac{d}{dt_0}(t_0 s)} = \frac{As}{s} = A$$

Portanto: a transformada de Laplace da função impulso é área sob o impulso. A função impulso cuja $A=1$ denomina-se impulso unitário ou função delta de Dirac. A função impulso unitário, ocorrendo em $t = t_0$, é normalmente indicada por $\delta(t-t_0)$ e satisfaz as seguintes condições:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & para \;\; t \neq t_0 \\ \infty & para \;\; t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1$$

Propriedades da Transformada de Laplace

4.Derivação real

Se a transformada de Laplace de *f(t)* é *F(s)* e se a primeira derivada de *f(t)* com relação ao tempo *Df(t)* é transformável, então

$$\mathcal{L}[Df(t)] == sF(s) - f(0^+)$$

Demostrando, considere:
$$\begin{cases} du = \dfrac{d}{dt} f(t)dt \rightarrow u = f(t) \\ dv = e^{-st}dt \rightarrow v = \dfrac{e^{-st}}{-s} \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty [Df(t)]\frac{e^{-st}}{-s}dt = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty Df(t)e^{-st}dt$$

Note que $\int_0^\infty Df(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[Df(t)]$ ***portanto*** $\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0)$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ Derivação real (cont.)

A transformada da derivada segunda $D^2f(t)$ é

$$\mathcal{L}[D^2f(t)] = s^2F(s)\text{-}sf(0)\text{-}Df(0)$$

onde $Df(0)$ é valor do limite da derivada de $f(t)$ quando a origem $t=0$ é aproximada pela direita. Para demonstrar este caso considere a definição

$$Df(t) = g(t) \quad \textit{portanto} \quad D^2f(t) = Dg(t)$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = g(t)\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty Dg(t)e^{-st}dt \quad \textbf{\textit{ou seja}}$$

$$\mathcal{L}[Dg(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s\mathcal{L}[Df(t)] - Df(0) \quad \textbf{\textit{e como}}$$

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0) \quad \textbf{\textit{tem - se}} \quad \mathcal{L}\left[D^2f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - Df(0)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ Derivação real (cont.)

De forma similar obtém-se a transformada da derivada de ordem *n*, $D^n f(t)$:

$$\mathcal{L}\left[D^n f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - sD^{n-2} f(0) - D^{n-1} f(0)$$

Nota: A transformada inclui as condições iniciais, enquanto que no método clássico as condições iniciais são introduzidas separadamente a fim de se calcular os coeficientes da solução da ED. A demonstração segue a mesma linha da demonstração anterior.

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 5.Integração real

Se a transformada de Laplace de *f(t)* é *F(s)*, sua integral é transformável:

$$\mathcal{L}\left[D^{-1} f(t)\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{D^{-1} f\left(0^{+}\right)}{s}$$

O termo $D^{-1}f(0^{+})$ é igual ao valor da integral na origem, aproximada pela direita

Demonstração:

$$du = \int \frac{d}{dt} f(t) dt \rightarrow \boldsymbol{u} = f(t) \boldsymbol{;}\ dv = e^{-st} \mathbf{dt} \rightarrow \ v = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$\mathcal{L}\left[D^{-1} f(t)\right] = \int_0^{\infty} \left[D^{-1} f(t)\right] e^{-st} dt = \left[D^{-1} f(t)\right] \frac{e^{-st}}{-s} \Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= \frac{1}{s} D^{-1} f(t) \Bigg|_{t=0} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{F(s)}{s} + \frac{D^{-1} f(0)}{s}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ Integração real (cont.)

A transformada da integral envolvendo derivada de segunda ordem é

$$\mathcal{L}\left[D^{-2} f(t)\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{D^{-1} f(0)}{s^2} + \frac{D^{-2} f(0)}{s}$$

Para a integral envolvendo derivadas de ordem *n*

$$\mathcal{L}\left[D^{-n} f(t)\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{D^{-1} f(0)}{s^n} + \cdots + \frac{D^{-n} f(0)}{s}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 6.Teorema do valor inicial

Este teorema permite achar o valor de f(t) em $t = 0^+$. Se a função f(t) e sua primeira derivada são transformáveis, se a transformada de Laplace de f(t) é F(s), e se

$\lim_{s \to \infty} sF(s)$ ***existir, então***

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Este teorema estabelece que o comportamento de *f(t)* nas vizinhanças de *t=0* está relacionado com o comportamento de *sF(s)* nas vizinhanças de $|s| = \infty$. Não há limitações quanto aos polos de *sF(s)*.

Provando o teorema:

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0^+)$$

Neste intervalo, quando $s \to \infty$ Portanto:

Propriedades da Transformada de Laplace

7.Teorema do valor final

Se *f(t)* e *Df(t)* admitem transformada de Laplace, se a transformada de Laplace de *f(t)* é *F(s)* e se existe o limite de *f(t)* quando $t \to \infty$, ou seja

$\lim_{t \to \infty} f(t)$ ***existir, então***

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Este teorema estabelece que o comportamento de *f(t)* nas vizinhanças de $t = \infty$ está relacionado com o comportamento de *sF(s)* nas proximidades de s = 0. Assim é possível é possível obter o valor de f(t) em igual infinito diretamente de F(s). Se *F(s)* possui polos (valores de s para os quais *F(s)* se torna infinito) sobre o eixo imaginário ou no semiplano s da direita, não existe valor final de *f(t)* e o teorema não pode ser aplicado.

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 8.Derivação complexa

Se a transformada de Laplace de *f(t)* é *F(s)*, então $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$

A multiplicação por *t* no domínio real implica a derivação com relação a *s* no domínio de *s*

Exemplo

$$f(t) = e^{-\alpha t}$$

$$\mathrm{L}[tf(t)] = \frac{d}{ds}\mathrm{L}\left[e^{-\alpha t}\right] = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 9.Multiplicação pela função exponencial

Se f(t) é transformável por Laplace, com sua transformada sendo F(s), então a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t} f(t) dt = F(s+\alpha)$$

A multiplicação de *f(t)* por $e^{-\alpha t}$ tem o efeito de substituir *s* por $s+\alpha$. Esta relação é útil para se determinar a transformada de Laplace de funções do tipo $e^{-\alpha t}$ *sen*ωt e $e^{-\alpha t}$ *cos*ωt como mostrado a seguir

$$\mathcal{L}[sen(\omega t)] = \int_0^\infty sen(\omega t) e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = F(s)$$

Considere agora $e^{-\alpha t}$ *sen*ωt

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t} sen(\omega t)\right] = \int_0^\infty sen(\omega t) e^{-(s+\alpha)t} dt = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2} = F(s+\alpha)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ 10.Mudança de escala no tempo

Às vezes numa análise de sistemas físicos ou análise dinâmica muda-se a escala de tempo ou normaliza-se uma dada função do tempo. O resultado normalizado é importante porque pode ser aplicado a diferentes sistemas desde que tenham modelos matemáticos similares. Considere a mudança de escala no tempo dada por

$t \quad para \quad \dfrac{t}{\alpha}$ Então f(t) pode ser escrito em termos da nova escala de tempo de modo que

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-st}dt \quad \textbf{Seja} \quad \frac{t}{\alpha}=t_1 \rightarrow \; t=\alpha t_1 \quad as=s_1 \quad \textbf{então}$$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1t_1}d(\alpha t_1)=\alpha\int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1t_1}dt_1 \;=\alpha F(s_1) \quad \textbf{ou}$$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\alpha F(\alpha s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

❑ Mudança de escala no tempo (cont.)

Considere o exemplo

$$f(t) = e^{-t} \quad \textit{com a mudança de escala} \quad f\left(\frac{t}{5}\right) = e^{-0.2t}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[e^{-t}\right] = F(s) = \frac{1}{s+1}$$

Portanto

Note: $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(\alpha s)$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{5}\right)\right] = \mathcal{L}\left[e^{-0.2t}\right] = 5F(5s) = \frac{5}{5s+1}$$

Este resultado pode ser verificado fazendo-se a transformada de $e^{-0.2t}$

$$\mathcal{L}\left[e^{-0.2t}\right] = \frac{1}{s+0.2} = \frac{5}{5s+1}$$

Transformada inversa de Laplace

O processo de passar de uma expressão com variáveis complexas para o domínio do tempo é chamada transformação inversa e é denotada por $\mathcal{L}^{-1.}$ Matematicamente

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad , t > 0$$

Matematicamente f(t) é determinada a partir de F(s) pela expressão

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

Onde c é a abscissa de convergência, real, escolhida com valor real maior do que as partes reais de todos os pontos singulares de *F(s)*. A integração da equação acima é complicada. Se a F(s) estiver disponível numa tabela de transformadas é fácil determinar *f(t)*. Caso contrário tem-se que usar métodos de expansão para achar *f(t)*

Transformada inversa de Laplace

Método de expansão em frações parciais para determinar transformada inversa de Laplace. Separando a *F(s)* em componentes

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

Se as $F_i(s)$ são conhecidas então

$$\mathcal{L}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{-n}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

onde as f_i são transformadas inversas das $F_i(s)$. Para problemas em controle F(s) é frequentemente representada na forma:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Transformada inversa de Laplace

Considerações sobre os polinômios *A(s)* **e** *B(s)*

- O grau de *B(s)* não é maior do que o grau de *A(s)*.
- E necessário conhecer de antemão as raízes de *A(s)* para se aplicar o método (o método não é aplicado enquanto o denominador não for fatorado).
- A vantagem do método é que as $F_i(s)$ são funções muito simples de *s*. Considere F(s) escrito na forma fatorada:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Onde os p_i z_i são grandezas reais ou complexas.

- É importante que a maior potência de *s* em *A(s)* seja maior do que a maior potência de *s* em *B(s)*.
- Caso o grau de s em *A(s)* não satisfaça a condição acima deve-se dividir os polinômios.

Transformada inversa de Laplace

❑ Expansões em frações parciais quando F(s) tem apenas polos distintos

Se os polos são distintos F(s) pode sempre ser expandida em soma simples de frações parciais

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

Onde *B(s)* e *A(s)* são polinômios em *s*, a_k são constantes chamadas resíduo no polo $s = -p_k$. O valor de a_k pode ser encontrado multiplicando-se ambos os lados desta equação por $(s+p_k)$ e fazendo $s = -p_k$.:

$$\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k) =$$

$$= \frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k) + \frac{a_2}{s+p_2}(s+p_k) + \cdots + \frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}(s+p_n)$$

Transformada inversa de Laplace

❑ Expansões em frações parciais quando F(s) tem apenas polos distintos (cont.)

$$\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k)\right]\Bigg|_{s=-p_k} = a_k$$

Pois, nesse caso, todas as parcelas se anulam, exceto a parcela do polo p_k

Temos que

$$\mathcal{L}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

Como

$$\mathcal{L}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{-n}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

$$f(t) = a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + \cdots + a_n e^{p_n t}, \quad para\ t \geq 0$$

Transformada inversa de Laplace

PRO

USP
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

- **Exercício 1: Determinar a transformada inversa de**

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

- **Fazer já**

Transformada inversa de Laplace

- Determinar a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Expandindo em frações parciais: $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$

Usando a fórmula $\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k)\right]\Bigg|_{s=-p_k} = a_k$

$$a_1 = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+1)\right]\Bigg|_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+2)\right]\Bigg|_{s=-2} = -1$$

Transformada inversa de Laplace

❑ Exercício 1 (cont.)

Vimos que $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}[F(s)] = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{2}{S+1}\right] + \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right]$$

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

Transformada inversa de Laplace

- Exemplo 2: Achar a transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} s^3 & +5s^2 & +9s & +7 & (s+1)(s+2) \\ -s^3 & -5s^2 & -8s & -4 & \hline (s+2) \\ \hline 0 & 0 & s & +3 & \end{array}$$

Portanto

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)} = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Transformada inversa de Laplace

PRO

USP UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

❑ Exemplo 2 (cont.)

Note que o último termo à direita se refere ao exemplo anterior

Então $$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s] + 2\mathcal{L}^{-1}[1] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]$$

Cuja solução é

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

A transformada de Laplace do impulso unitário e do de sua derivada são respectivamente 1 e s. Portanto:

Portanto $$f(t) = D\delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}$$

Pontos Ordinários e Singulares - Polos e Zeros

- **Pontos no plano s em que a função G(s) é *analítica* são chamados de pontos *ordinários*. Os pontos do plano s em que a função G(s) não é *analítica* são chamados pontos *singulares*.**
- ***Polos* são *pontos singulares* nos quais a função G(s) ou suas derivadas se aproximam do infinito**
- **Exemplo:** $G(s)=\dfrac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)^2}$ Tem polos em $s = -p_1$ e $s = -p_2$

Se $\lim_{s\to -p} G(s) \to \infty$ e se a função $G(s)(s+p)^n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ tem um valor finito não nulo em $s=-p$ então $-p$ é chamado de pólo de ordem n. Se $n=1$ o pólo é chamado de pólo simples. Se $n = 2,3,\ldots$ o pólo é chamado de pólo de segunda ordem, terceira ordem e assim por diante.

Pontos Ordinários e Singulares - Polos e Zeros

- ***Zeros*** **são pontos ordinários nos quais a função G(s) é zero**
- **Existem pontos no infinito e no finito que podem levar G(s) para zero. Se pontos no infinito são levados em conta a G(s) terá o mesmo número de *polos* e *zeros***

$$G(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)^2}$$

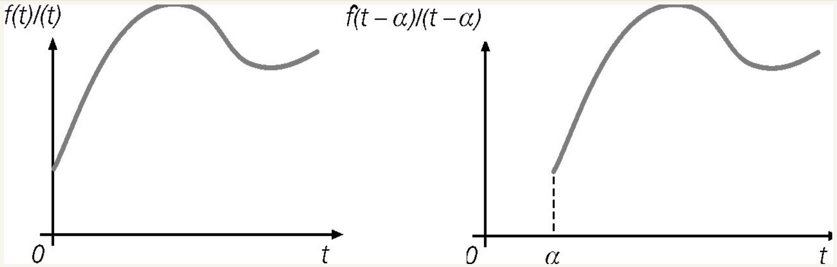
Por exemplo, esta função tem um zero em $s = -z$. Se pontos no infinito são também considerados G(s) tem o mesmo número de polos e zeros. No exemplo acima G(s) tem 2 zeros no infinito em adição ao zero finito dado por –z. Note que:

$$G(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)^2}$$

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \left(\frac{K}{s^2}\right) \to 0$$

Portanto temos 3 polos e 1 zero

Resumo 1 de 4

Linearidade ou Homogeneidade	$L\left[\alpha f(t)\right] = \alpha L\left[f(t)\right] = \alpha F(s)$
Aditividade	$\mathscr{L}\left[\, f_1(t) \pm f_2(t) \,\right] = \mathscr{L}\left[\, f_1(t) \,\right] \pm \mathscr{L}\left[\, f_2(t) \,\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$
Translação no tempo	 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau = e^{-\alpha s}F(s)$

Resumo 2 de 4

Derivação	$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = \mathscr{L}\left[D f(t)\right] = s\,F(s) - f(0)$
Derivação de ordem *n*	$\mathrm{L}\left[D^n f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(t) - \cdots - s D^{n-2} f(0) - D^{n-1} f(0)$

Resumo 3 de 4

Teorema do valor inicial	$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$
Teorema do valor final	$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Resumo 4 de 4

Multiplicação pela função exponencial	$\mathscr{L}\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} f(t) dt = F(s+\alpha)$
Transformada inversa de Laplace	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \dfrac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, t > 0$

[4] – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EPUSP

PRO3252
Automação e Controle

Mauro de Mesquita Spinola

Marcelo Schneck de Paula Pessôa

EPUSP-PRO