



Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos

Exp. 1: Arranjos de Antenas (Beamforming)

Allan E. Feitosa

Vítor H. Nascimento

Agosto de 2023

1 Princípios básicos

Imagine um arranjo de M antenas. Para simplificar, vamos supor que as antenas estejam distribuídas uniformemente em linha reta, como na figura abaixo.

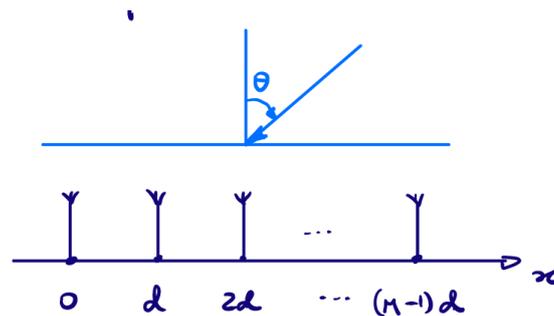


Figura 1: Arranjos de antenas e sinal de onda plana.

Imagine que uma onda se propaga no espaço, vinda da direção dada pelo ângulo θ . Defina o sinal chegando na antena m como sendo $x_m(t)$. Suponha inicialmente que haja apenas uma frente de onda chegando ao arranjo, vinda da direção θ (Figura 1). Se a fonte estiver bem distante do arranjo, podemos aproximar a frente de onda por uma onda plana, ou seja, o sinal observado é constante num plano perpendicular à direção de propagação, como pode ser visto na Figura 2.

O sinal recebido na antena $m = 0$ pode ser representado por

$$x_0(t) = f(t).$$

Então, o sinal chegando na antena 1 será $x_1(t)$, e deverá chegar na antena $m = 1$ antes de chegar na antena $m = 0$, se θ for positivo. O adiantamento será $\tau = \frac{d \sin \theta}{c}$, em que c é a velocidade de propagação (Figura 3).

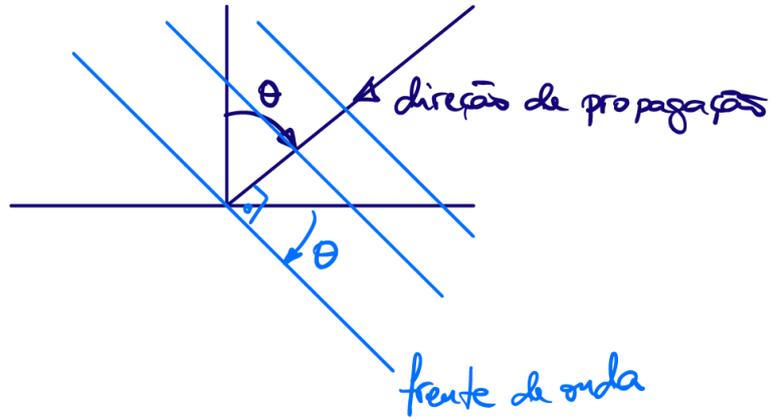


Figura 2: Ondas planas perpendiculares à direção de propagação.

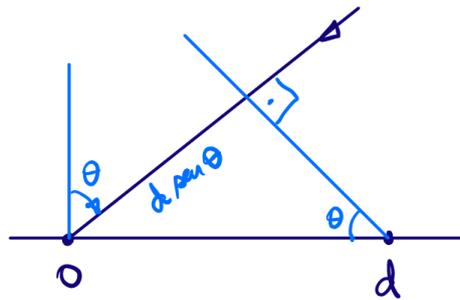


Figura 3: Cálculo do atraso τ .

Portanto,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f(t + \tau) = f\left(t + \frac{d \text{ sen } \theta}{c}\right), \\ x_2(t) &= f(t + 2\tau) = f\left(t + \frac{2d \text{ sen } \theta}{c}\right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Defina $\tau_m = m \frac{d \text{ sen } \theta}{c}$ e vamos considerar um sinal complexo $f(t) = A e^{j\Omega t}$, para uma dada frequência angular Ω dada em rad/s. Na ausência de ruído, vale

$$x_m(t) = A e^{j\Omega(t + \tau_m)} = e^{j\Omega \tau_m} A e^{j\Omega t} = e^{j\Omega m \left(\frac{d \text{ sen } \theta}{c}\right)} A e^{j\Omega t}. \quad (1)$$

Defina o vetor de sinais recebidos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{M-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{\Omega d \text{ sen } \theta}{c}} \\ \vdots \\ e^{j(M-1)\frac{\Omega d \text{ sen } \theta}{c}} \end{bmatrix} A e^{j\Omega t} = \mathbf{v}(\Omega, \theta) A e^{j\Omega t}, \quad (2)$$

em que $\mathbf{v}(\Omega, \theta)$ é chamado de vetor diretor.

Suponha que os sinais em cada microfone ou antena sejam amostrados a uma taxa $f_a = \frac{1}{T_a}$. Então

$$x_m[n] = x_m(nT_a) = e^{j\frac{\Omega m d \sin \theta}{c}} A e^{j\Omega T_a n} = e^{j\frac{\omega m d \sin \theta}{T_a c}} A e^{j\omega n}, \quad (3)$$

pois $\omega = \Omega T_a$.

Vamos reforçar os sinais que vêm de uma certa direção θ_0 . Definindo $u(\theta) = \frac{d \sin \theta}{T_a c}$, podemos então somar em fase os sinais que vêm da direção θ_0 :

$$y[n] = \frac{1}{M} \left[1 \cdot x_0[n] + e^{-j\omega u(\theta_0)} x_1[n] + e^{-j\omega 2u(\theta_0)} x_2[n] + \dots + e^{-j\omega(M-1)u(\theta_0)} x_{M-1}[n] \right] = A e^{j\omega n}. \quad (4)$$

O que acontece com sinais vindos de outras direções? Suponha que tenhamos projetado nosso sistema para reforçar sinais vindos da direção θ_0 , mas veio um sinal da direção θ . Então,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M} \left[1 \cdot A e^{j\omega n} + e^{-j\omega u(\theta_0)} e^{j\omega u(\theta)} A e^{j\omega n} + e^{-j\omega 2u(\theta_0)} e^{j\omega 2u(\theta)} A e^{j\omega n} + \dots + e^{-j\omega(M-1)u(\theta_0)} e^{j\omega(M-1)u(\theta)} A e^{j\omega n} \right] \\ &= \frac{1}{M} \left[1 \cdot + e^{-j\omega u(\theta_0)} e^{j\omega u(\theta)} + e^{-j\omega 2u(\theta_0)} e^{j\omega 2u(\theta)} + \dots + e^{-j\omega(M-1)u(\theta_0)} e^{j\omega(M-1)u(\theta)} \right] A e^{j\omega n} \\ &= B(\theta, \theta_0) A e^{j\omega n}, \end{aligned} \quad (5)$$

em que

$$B(\theta, \theta_0) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{j\omega(u(\theta)-u(\theta_0))m} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1 - e^{j\omega M(u(\theta)-u(\theta_0))}}{1 - e^{j\omega(u(\theta)-u(\theta_0))}}.$$

Assim, o módulo e fase do sinal $y[n]$ reconstruído em (5) são afetados segundo $B(\theta, \theta_0)$. Por exemplo, na figura 4, temos o gráfico de $|B(\theta, \theta_0)|$ para $\theta_0 = 20^\circ$, $M = 8$ e $d = \lambda/2$, sendo λ o comprimento de onda do sinal que chega ao arranjo de antenas. Perceba como o módulo é máximo e igual a um para $\theta = 20^\circ$, e que para outros sinais vindos de outros valores de θ há uma considerável atenuação de sua amplitude.

Suponha agora que duas frentes de onda, $f_0(t)$ e $f_1(t)$, cheguem ao arranjo de antenas simultaneamente, uma vinda da direção θ_0 , e outra da direção θ_1 , e ambas na mesma frequência Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] &= \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) f_0(nT_a) + \mathbf{v}(\Omega, \theta_1) f_1(nT_a) \\ \mathbf{x}[n] &= \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) A_0 e^{j\Omega T_a n} + \mathbf{v}(\Omega, \theta_1) A_1 e^{j\Omega T_a n} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) & \mathbf{v}(\Omega, \theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 e^{j\Omega T_a n} \\ A_1 e^{j\Omega T_a n} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}[n], \end{aligned} \quad (6)$$

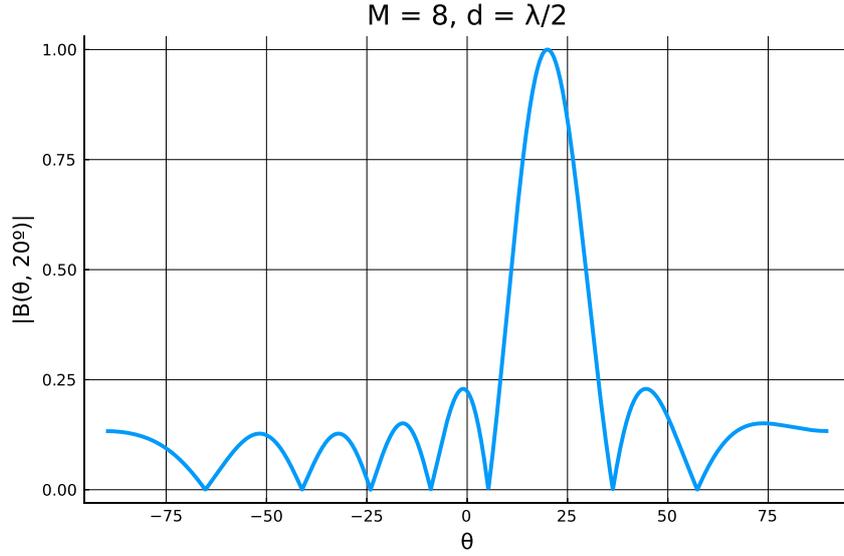


Figura 4: Exemplo de $|B(\theta, \theta_0)|$.

em que \mathbf{V} é a matriz diretora que depende da frequência Ω , das posições das antenas e dos ângulos dos sinais, e $\mathbf{f}[n]$ o vetor com os sinais.

Em geral, fazemos a saída do arranjo como sendo

$$y[n] = w_0^* x_0[n] + w_1^* x_1[n] + \dots + w_{M-1}^* x_{M-1}[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{x}[n], \quad (7)$$

em que $\mathbf{w}^H = [w_0^* \ w_1^* \ \dots \ w_{M-1}^*]$ é o hermitiano ou “transposto conjugado” do vetor \mathbf{w} . Escolhendo então

$$\mathbf{w} = \frac{1}{M} \mathbf{v}(\Omega, \theta_0), \quad (8)$$

resulta

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathbf{w}^H \mathbf{x}[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{V} \mathbf{f}[n] \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{v}^H(\Omega, \theta_0) \begin{bmatrix} \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) & \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) \end{bmatrix} \mathbf{f}[n] \\ &= \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^H(\Omega, \theta_0) \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) & \mathbf{v}^H(\Omega, \theta_0) \mathbf{v}(\Omega, \theta_0) \end{bmatrix} \mathbf{f}[n] \\ &= \begin{bmatrix} B(\theta_0, \theta_0) & B(\theta, \theta_0) \end{bmatrix} \mathbf{f}[n] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & B(\theta, \theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 e^{j\Omega T_a n} \\ A_1 e^{j\Omega T_a n} \end{bmatrix} = A_0 e^{j\Omega T_a n} + B(\theta, \theta_0) A_1 e^{j\Omega T_a n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Como $|B(\theta, \theta_0)| \leq 1$, o sinal vindo da direção θ_0 é recebido sem distorções, enquanto o sinal vindo da direção θ_1 é atenuado. O que construímos então é um filtro espacial, que permite escolher apenas sinais que venham de direções de interesse, e cancelar interferências vindas de outras direções. Tal sistema como descrito acima é chamada de “formador de feixe” (*beamformer*), já que permite modificar o diagrama de radiação equivalente do arranjo de antenas (ou microfones).

A escolha $\mathbf{w}^H = \frac{1}{M}\mathbf{v}^H(\Omega, \theta_0)$ é chamada de *beamformer Delay-and-Sum*, pois corresponde a equalizar os atrasos em todos os sensores de sinais vindos da direção θ_0 , de forma a que a soma seja de sinais em fase (e assim o efeito é de reforçar o sinal). Repare que os valores dos coeficientes dependem da frequência Ω .

2 Parte Experimental 1

1. Imagine que queiramos projetar um sistema com 8 antenas, dispostas numa linha plana, operando no padrão IEEE 802.11ad (WiGig) a 60GHz. A distância entre cada antena adjacente é d . Desenhe o gráfico de $|B(\theta, \theta_0)|$ considerando $d = \lambda/4$ (comprimento de onda do sinal transmitido), $\theta_0 = -25^\circ$ e θ variando entre -90° e 90° . Considere a velocidade de propagação $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$. Comente o que acontece com sinais vindos de diferentes direções quando recebidos por este sistema.
2. Desenhe gráficos de $|B(\theta, \theta_0)|$ para $d = \lambda/2$, $d = 3\lambda/4$ e $d = \lambda$. Comente o que acontece, comparando os 4 gráficos de $|B(\theta, \theta_0)|$, conforme aumentamos o valor de d . Que problema você notou para $d > \lambda/2$?
3. Desenhe agora os gráficos de $|B(\theta, 90^\circ)|$ para $d = \lambda/4$ e $d = \lambda/2$. Você nota algum problema?

Obs 1: A função **sin** do MATLAB e de Julia calcula o seno de um ângulo medido em radianos, enquanto a função **sind** já calcula o seno de um ângulo medido em graus.

4. Fixe $d = \lambda/2$. Suponha que uma frente de onda de frequência 60 GHz com amplitude $A_1 = 1$ incida sobre as antenas com ângulo $\theta_0 = -25^\circ$, juntamente com um outro sinal de interferência de mesma frequência e com amplitude $A_2 = 2$, que incide em um ângulo θ_2 . Plote a amplitude do sinal estimada pelo *Beamforming Delay-and-Sum* em função de θ_2 . Comente o resultado.

3 Beamforming de banda estreita usando sinais reais

Como vimos anteriormente, toda a formulação do *Beamforming Delay-and-Sum* supõe que os sinais incidentes sejam sinais complexos da forma

$$f(t) = A e^{j\Omega t}.$$

Como já sabemos nesta altura da nossa vida, os sinais recebidos só podem ser sinais reais; entretanto, o processamento do *Beamforming* como feito na Equação (7) depende dos coeficientes do vetor \mathbf{w} , que são números complexos. Como podemos utilizar esta técnica se os sinais recebidos são reais?

Código decimal	Código binário	Símbolo
0	0000	$-3 + 3j$
1	0001	$-3 + 1j$
2	0010	$-3 - 3j$
3	0011	$-3 - 1j$
4	0100	$-1 + 3j$
5	0101	$-1 + 1j$
6	0110	$-1 - 3j$
7	0111	$-1 - 1j$
8	1000	$3 + 3j$
9	1001	$3 + 1j$
10	1010	$3 - 3j$
11	1011	$3 - 1j$
12	1100	$1 + 3j$
13	1101	$1 + 1j$
14	1110	$1 - 3j$
15	1111	$1 - 1j$

Tabela 1: Relação entre informação a ser transmitida e símbolo no 16-QAM

Uma das maneira possíveis é (1) utilizar uma codificação dos sinais a serem transmitidos utilizando símbolos no domínio complexo, então (2) realizar um processamento que transforme estes símbolos em sinais reais na transmissão, e finalmente (3) recuperar os símbolos complexos num novo processamento e utilizar o *Beamforming Delay-and-Sum* no sistema de recepção.

Para (1), podemos utilizar uma modulação de amplitude em quadratura, ou QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*), bastante utilizada em transmissão de tv digital, internet 4G e conexões radio-satélite. Por exemplo, a codificação em 16-QAM transforma seqüências de 4 bits em símbolos no plano complexo segundo a tabela 1.

Seja $z(t)$ o sinal já codificado segundo o QAM, portanto complexo. Para transmitir este sinal, fazemos

$$x(t) = \text{Re}\{z(t)\} \cos(\Omega_0 t) - \text{Im}\{z(t)\} \text{sen}(\Omega_0 t),$$

sendo $x(t)$ o sinal real que será transmitido e Ω_0 a frequência de portadora tal que $\Omega_0 \gg$ banda de $z(t)$ (banda estreita).

Por fim, os sinais $x_m(t)$ recebidos nas antenas do arranjo são processados segundo o esquema da Figura 5. O filtro $H(j\Omega)$ é um filtro passa-baixas com corte em Ω_0 .

Pode-se demonstrar que (ver apostila em separado no Moodle)

$$x_{im}(t) \approx \text{Re}\{z(t)\} \quad \text{e} \quad x_{qm}(t) \approx \text{Im}\{z(t)\},$$

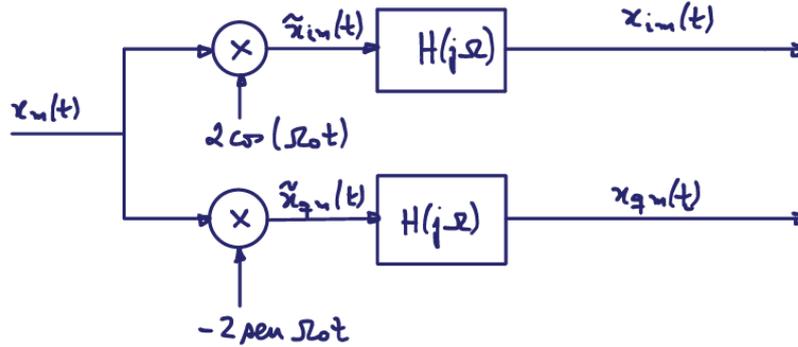


Figura 5: Processamento para recuperar o sinal original após transmissão.

e, portanto,

$$x_{im}(t) + jx_{qm}(t) \approx z(t).$$

4 Parte experimental 2

Considere que o arranjo de antenas da parte 1 do experimento receba uma sequência de dados modulados usando 16-QAM (Tabela 1). O sinal de interesse tem amplitude máxima $A_0 = 3$ e incide com ângulo $\theta_0 = 20^\circ$. Há também dois sinais de interferência incidindo sobre o arranjo, vindos das direções $\theta_1 = 45^\circ$ e $\theta_2 = -15^\circ$, ambos com amplitude 1 e com mesma frequência. Há também em cada antena um ruído na medida, de potência unitária. O que é de fato medido pelo arranjo (“sinal de interesse” + “interferências” + “ruído”) está no arquivo **sinais.mat**. Considerando as condições da parte 1 do experimento, vamos projetar um sistema *beamforming Delay-and-Sum* para recuperar o sinal de interesse.

1. A partir dos sinais fornecidos, vamos realizar o processamento necessário para trabalhar com sinais reais, como descrito na Figura 5. Utilize para o passa-baixas um filtro Butterworth de ordem 6 com a devida frequência de corte — ela deve ser igual à frequência de portadora dos sinais.

Um filtro de Butterworth é um filtro IIR simples. Para fazer o projeto usando Julia, use os comandos

```
flt = digitalfilter(Lowpass(wn/π), Butterworth(6)),
```

em que wn é a frequência de corte do filtro normalizada, em rad/amostra. Para passar um sinal x pelo filtro `flt`, use o comando `y = filt(flt, x)`.

Em Matlab, use a função `butter` para adquirir os parâmetros a e b do filtro, como descrito abaixo:

```
[b, a] = butter(6, wn),
```

A frequência de amostragem utilizada é $f_a = 10^{12}$ Hz. Plote a resposta em frequência do filtro projetado. Em Julia, use os comandos

```
 $\omega = \text{range}(0, \pi, \text{length}=500),$   
 $H = \text{freqresp}(\text{flt}, \omega),$ 
```

e

```
 $\text{plot}(\omega/\pi, \text{abs.}(H)).$ 
```

Plote também os gráficos de x_{im} e x_{qm} filtrados para uma das 8 antenas. Comente o que você observa.

2. Projete os coeficientes do vetor \mathbf{w} e realize o *Delay-and-Sum* (Equação (7)) para recuperar o sinal. Plote as partes reais e imaginárias do $y[n]$ obtido. Comente o resultado.
3. Agora vamos recuperar os símbolos que foram transmitidos. Para isto precisamos saber por quanto tempo cada símbolo foi transmitido, e juntamente com a informação da taxa de amostragem, obter o número N de amostras no sinal correspondente a cada símbolo. Sabendo que cada símbolo foi transmitido por 1ns, calcule N e comente se está coerente com o que se observa nos gráficos das parte real e imaginária de $y[n]$. Para cada trecho de símbolo, calcule o valor médio das N amostras. Quantos símbolos foram transmitidos?
4. Escreva num trecho do seu código um algoritmo que decide a qual símbolo do 16-QAM cada símbolo reconstruído na etapa anterior se refere, utilizando a mínima distância em módulo para cada símbolo reconstruído em relação aos símbolos do 16-QAM.

Dica: crie um vetor com os símbolos do 16-QAM utilizando o comando:

```
symbols_16_qam = qammod(0:15,16).
```

Isto criará a terceira coluna da tabela 1.

5. Compare os símbolos reconstruídos com o vetor **mensagem** fornecido e diga se houve erros na transmissão. O vetor fornecido está em decimal, então utilize a Tabela 1 para conversão. Plote num mesmo gráfico as partes reais e imaginárias da mensagem e do sinal reconstruído em 16-QAM, utilizando a função *scatter* do Matlab. Se feito corretamente, o gráfico deve apresentar um mapa no plano complexo com os pontos de ambos os vetores.
6. Vamos observar o que acontece se diminuirmos a relação sinal/ruído nas antenas. Ao sinal fornecido no vetor **sinais.mat** some em cada antena ruídos brancos gaussianos e média nula com desvio-padrão 10, 30 e 50, utilizando a função *randn*. Realize

novamente o *Delay-and-Sum* para cada caso, plote os gráficos das partes reais e imaginárias de $y[n]$ e comente o que você observa nos gráficos. O que acontece com os símbolos reconstruídos? Eles apresentam erros? Plote os símbolos reconstruídos e os da mensagem original utilizando o *scatter* e comente o que você observa.