PSI-3432 — Processamento de Áudio e Imagem
Lista de Exercícios 4

Vítor H. Nascimento Thiago Yuji Aoyagi

4 de novembro de 2019

Processamento de Sinais Multidimensionais

1. Na TDF unidimensional, uma raia $X[k]$, juntamente com seu conjugado em $X[N-k]$, contém a informação de módulo e fase da componente senoidal de frequência $\omega = 2\pi k/N$ presente no sinal $x[n]$. Para sinais de duas dimensões, a interpretação é análoga. As raias $X[k_1,k_2]$ e $X[N_1-k_1,N_2-k_2]$, juntas, representam o módulo e fase da parte real do sinal

$$\mathrm{e}^{j\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1}\mathrm{e}^{j\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2} = \mathrm{e}^{j\left(\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1+\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2\right)} = \mathrm{e}^{j\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{n}}$$

onde

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi k_1}{N_1} \\ \frac{2\pi k_2}{N_2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Qual é a direção da onda $\Re\mathrm{e}\{\mathrm{e}^{j\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{n}}\}$ (para uma raia espectral fixa)? Faça um esboço desse sinal.

(lembre, de álgebra linear, que todo vetor pode ser decomposto em $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, onde $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$ são ortogonais entre si, e que o produto interno $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ é zero quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são ortogonais)

2. Mostre que a convolução linear entre os sinais $x[n_1,n_2]$ (comprimento N_{x1}, N_{x2}) e $h[n_1,n_2]$ (comprimento N_{h1}, N_{h2}) pode ser implementada usando a TDF se esta última for calculada usando-se $N_1 \geq N_{x1} + N_{h1} - 1$, $N_2 \geq N_{x2} + N_{h2} - 1$ pontos.

3. Projete um filtro de duas dimensões, com fase nula e com janela de Kaiser, com as especificações:

- Banda-passante em $0 \leq |\omega_1| \leq \pi/3$ e $0 \leq |\omega_2| \leq \pi/4$.
- Banda de rejeição em $\pi/2 \leq |\omega_1| \leq \pi$ e $\pi/3 \leq |\omega_2| \leq \pi$.
- Oscilação máxima na banda passante e na banda de rejeição de 0,002.

(a) Quais as frequências de corte do filtro?

(b) Quais os parâmetros A, $\Delta\omega_1$ e $\Delta\omega_2$ utilizados no projeto da janela de Kaiser?

(c) Quais são os comprimentos dos filtros e o parâmetro β?

4. Sabendo que a FFT de duas dimensões requer $N_1 N_2 \log_2(N_1 N_2)$ operações se N_1 e N_2 forem potências de dois, e lembrando que a implementação direta da TDF requer $(N_1 N_2)^2$ operações, compare o ganho de número de operações para implementar um filtro de 101×101 coeficientes aplicado a uma imagem de 128×128 pixels.

5. Neste exercício, vamos comparar trabalhar com a reconstrução da imagem sintética 'phantom.mat' de tamanho 100×100 chamada Fantasma de Shepp-Logan. Esta imagem representa os coeficientes de atenuação de um corte transversal de um fantasma que modela a cabeça humana. Cada pixel da imagem é um coeficiente de atenuação cujo valor varia entre 0 e 57.27, o coeficiente de atenuação do osso humano em cm^{-1}. Vamos supor que a imagem tem tamanho $20cm \times 20cm$, de forma que a distância entre dois pixels adjacentes seja de $2mm$.

(a) Vamos simular uma tomografia de raios paralelos com o fantasma usando uma máquina que mede 720 projeções de raios-X em ângulos linearmente espaçados, isto é, que mede uma projeção a cada 0.5°. Considerando que as dimensões da imagem são de $20cm \times 20cm$, use a função `radon` para calcular a atenuação total para cada projeção e depois plote o sinograma.

Não se esqueça de colocar os eixos e a escala de cor. No Matlab, `imagesc(theta,u,R)` mostra a matriz `R` com eixos `theta` e `u`. O comando colorbar adiciona a escala de cores.

(b) Na prática, o número de fótons em cada projeção é limitado, gerando um ruído de medida do tipo Poisson. Se N é o número de fótons recebidos por um detector e N_0 é o número de fótons emitido pela fonte na direção do detector, então o valor esperado do número de fótons recebidos segue a lei de Beer-Lambert:

$$E\{N\} = N_0 \mathrm{e}^{-\int \mu(x,y) d\ell} = N_0 \mathrm{e}^{-R(u,\theta)}$$

onde μ é a imagem e R sua transformada Radon. Suponha que sejam emitidos $N_0 = 100$ fótons na direção de cada detector em cada projeção. Usando a função `poissrnd`, simule o número de fótons recebidos por cada detector em cada projeção e então plote o sinograma medido. Compare com o sinograma sem ruído.

Dica: Basta gerar um ruído de Poisson N com média $N_0 \mathrm{e}^{-R(u,\theta)}$ e depois calcular o sinograma ruidoso como $R_{noisy}(u,\theta) = -\ln(N = N_0)$.

(c) Reconstrua as imagens com ruído e sem ruído usando a transformada Radon inversa sem a aplicação do filtro. Para isso, use a função `iradon` com o par de argumentos `'Filter', 'None'`. Depois, reconstrua usando o filtro de Ram-Lak. Compare as quatro imagens que você obteve.