PSI-3432 — Processamento de Áudio e Imagem
Lista de Exercícios 3

Vítor H. Nascimento Thiago Yuji Aoyagi

27 de setembro de 2021

Processamento Multitaxa

1. O sinal $x[n]$ está amostrado a 24 kHz, e você precisa aumentar a taxa de amostragem para 40 kHz. Sabe-se que o sinal original tem banda entre 0 e $3\pi/4$ rad/amostra.

(a) Quais são os fatores de conversões de taxa intermediários L e M?

(b) No sinal de taxa elevada (interpolado por zeros), em que frequências estão centradas as imagens do espectro do sinal original? Qual a frequência de corte e o ganho do filtro passa-baixa necessário para removê-las? Haverá perda de informação na conversão?

(c) Agora você vai projetar o filtro passa-baixa com janela de Kaiser. Determine os limites da banda de passagem e da banda de rejeição do filtro, e determine os parâmetros N e β da janela de Kaiser.

Dados: distorção máxima na banda-passante do sinal $\delta_p = \pm 0{,}01$, oscilação máxima na banda de rejeição $\delta_r = 0.001$ (lembre que as oscilações δ consideradas no projeto da janela de Kaiser são relativos a um filtro de ganho unitário).

Resposta 1. (a) A razão L/M representa a conversão de taxa total, portanto:

$$\frac{L}{M} = \frac{40\text{kHz}}{24\text{kHz}} = \frac{5}{3}$$

(b) Na taxa elevada $L \times 24 = 120$kHz, as imagens do espectro estão centradas em $2\pi/L = 0.4\pi$ rad/amostra, como mostra a Figura 1b. A frequência de corte do filtro deve ser

$$\omega_c = \min\{\pi/M, \pi/L\} = \pi/5$$

e o ganho do filtro deve ser $L = 5$.

Como na taxa elevada o espectro do sinal original tem largura de banda

$$3\pi/4L = 0.15\pi < \omega_c = 0.2\pi$$

não haverá perda de informação na conversão.

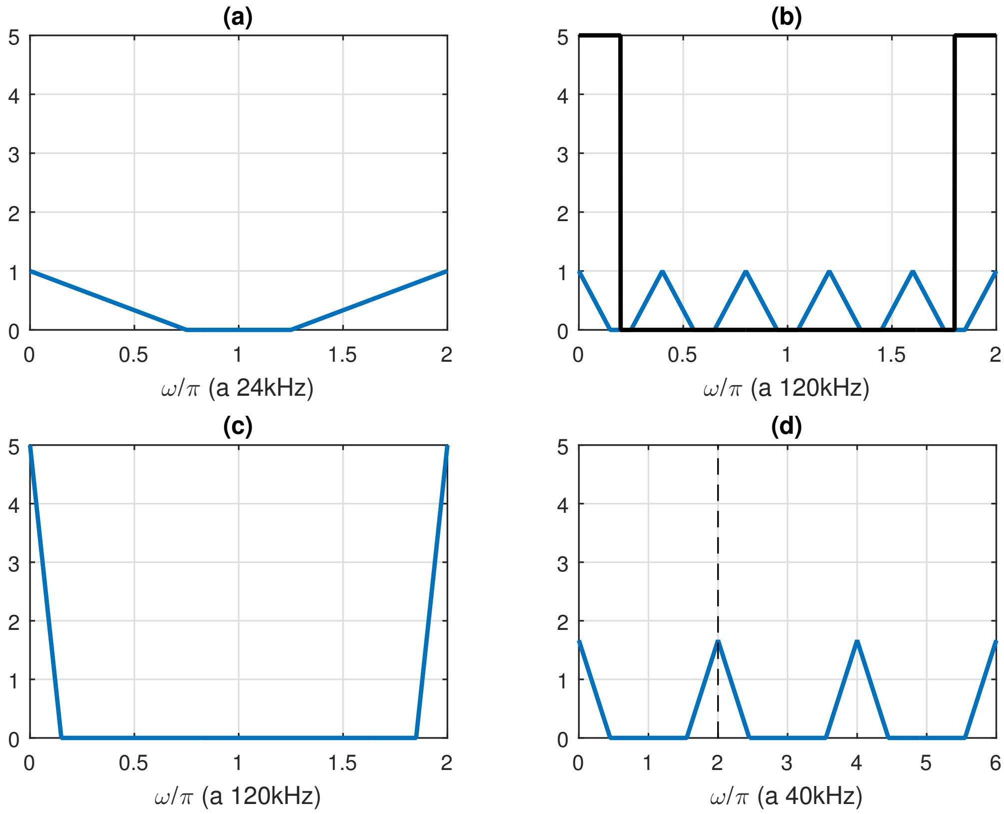

Figura 1: Espectros ilustrativos do sinal em diversas etapas da conversão. (a) espectro do sinal original; (b) espectro do sinal interpolado por zeros, e a resposta em frequência do filtro passa-baixas ideal; (c) espectro do sinal filtrado idealmente; (d) espectro do sinal decimado (atenção à escala da frequência).

(c) A faixa de transição é determinada pela banda do sinal na taxa mais elevada:

$$\omega_p = \frac{3\pi}{4} \times \frac{1}{L} = \frac{3\pi}{20}, \quad \omega_r = \left(2\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \times \frac{1}{L} = \frac{5\pi}{20}, \quad \Delta\omega = \omega_r - \omega_p = \frac{\pi}{10}$$

Como o filtro possui ganho 5, normalizamos as oscilações para um filtro de ganho unitário, e obtemos:

$$\delta = \min\left\{\frac{0.01}{5}, \frac{0.001}{5}\right\} = 0.0002, \quad A = -20\log_{10}\delta \approx 74\text{dB}$$

Portanto:

$$\beta = 7.1961, \quad N = 93$$

2. Considere agora um caso contrário ao da questão anterior. O sinal $x[n]$ está amostrado a 40 kHz, e você precisa reduzir a taxa de amostragem para 24 kHz. Sabe-se que o sinal original tem banda entre 0 e $3\pi/4$ rad/amostra (agora na taxa de 40 kHz).

(a) Quais são os fatores de conversões de taxa intermediários L e M?

(b) Qual a frequência de corte e o ganho do filtro passa-baixa? Haverá perda de informação na conversão?

(c) Neste caso, como deve ser feito o projeto do filtro? Quais as frequências ω_p e ω_r a serem consideradas?

Resposta 2. (a)

$$\frac{L}{M} = \frac{24\text{kHz}}{40\text{kHz}} = \frac{3}{5}$$

(b) Neste caso, é a posterior decimação que restringe a frequência de corte, que deve ser

$$\omega_c = \min\{\pi/M, \pi/L\} = \pi/5$$

e o ganho do filtro deve ser $L = 3$.

Como na taxa elevada o espectro do sinal original tem largura de banda

$$3\pi/4L = 0.25\pi > \omega_c = 0.2\pi$$

devemos retirar as frequências acima de ω_c para evitar o rebatimento e consequentes distorções do sinal. A Figura 2 mostra esse comportamento com um filtro ideal.

(c) Neste caso, as frequências ω_p e ω_r devem ser definidas por algum outro critério. Há o dilema entre usar $\Delta\omega$ mais largo, e portanto perder mais informação espectral, mas resultar num filtro com N menor, ou usar $\Delta\omega$ mais estreito, a custo de um filtro muito longo.

Há também a ponderação entre perder mais espectro na banda de passagem ou deixar passar mais espectro para além da frequência de Nyquist, gerando rebatimento. Para minimizar o rebatimento, normalmente se faz $\omega_r = \pi/M$.

Exemplificando, usando as mesmas especificações de máscara da questão anterior, e com o mesmo $\Delta\omega = 0.1\pi$, teríamos:

$$N(\text{estimado}) = 87, \quad N(\text{experimental}) = 93$$

Agora escolhendo ω_p e ω_r de forma a obter $\Delta\omega = 0.02\pi$, teríamos:

$$N(\text{estimado}) = 430, \quad N(\text{experimental}) = 473$$

3. Suponha que você precise aumentar a taxa de amostragem de um sinal de 10 kHz para 1 MHz. O sinal tem originalmente frequências na faixa $0 \le |\omega| \le 5\pi/6$ rad/amostra. Na banda-passante o ganho do sistema deve ficar em $1 \pm 0{,}001$, e as imagens do sinal na frequência alta devem ser atenuadas de pelo menos 90 dB[1].

[1] Deve-se tomar cuidado quando a especificação é dada em termos de atenuação. Nestes casos, atenuação de uma banda espectral **não** é a sua relação entrada/saída ao passar pelo filtro, mas **sim** sua relação com a faixa espectral que foi mantida na saída do filtro (banda de passagem).

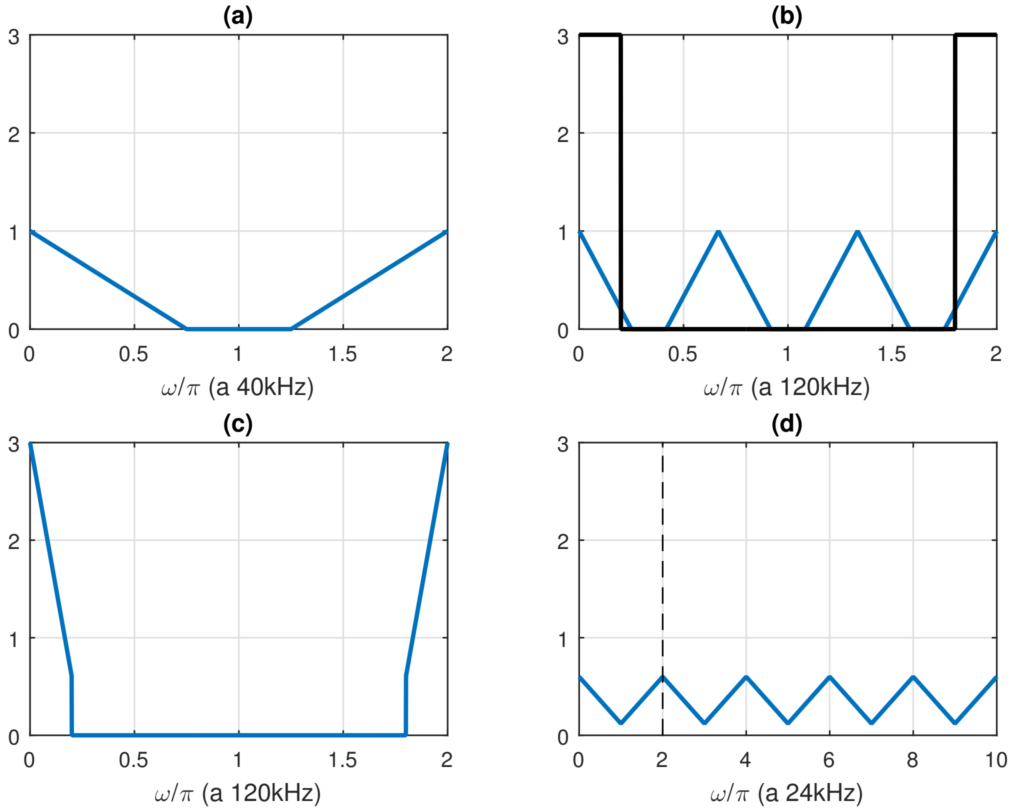

Figura 2: Espectros ilustrativos do sinal em diversas etapas da conversão. (a) espectro do sinal original; (b) espectro do sinal interpolado por zeros, e a resposta em frequência do filtro passa-baixas ideal; (c) espectro do sinal filtrado idealmente; (d) espectro do sinal decimado (atenção à escala da frequência).

(a) Projete um interpolador mais filtro para atender às especificações acima, supondo que a taxa de amostragem seja aumentada de uma vez só para 1 MHz. Qual é o comprimento do filtro necessário usando janela de Kaiser?

(b) Projete agora um interpolador com um passo intermediário: primeiro, a frequência de amostragem é aumentada para 100 kHz, e em seguida numa segunda etapa, para 1 MHz, usando dois interpoladores e dois filtros.

   i. qual é a largura da faixa de transição de cada filtro?

   ii. qual é a atenuação de projeto de cada filtro?

   iii. calcule o comprimento de cada filtro da cascata.

(c) Compare o número de multiplicações necessárias por amostra de saída para cada uma das soluções acima. Lembre que os sinais na entrada dos filtros na conversão têm várias amostras nulas.

Resposta 3. (a) O filtro terá fator de conversão $L = 100$, e na taxa elevada, a largura da faixa de transição será:

$$\Delta\omega = \frac{7\pi}{6L} - \frac{5\pi}{6L} = \frac{\pi}{300}$$

Como os ripples foram especificados relativos a um filtro de ganho unitário, temos:

$$A = \max\left(20\log_{10}(0.001),90\right) = 90\text{dB}$$

Portanto, o comprimento do filtro será:

$$N = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega} + 1 \approx 3428$$

(experimentalmente, o filtro que satisfaz a máscara tem comprimento 3565)

(b) i. As conversões intermediárias têm fatores de conversão $L_1 = L_2 = 10$. Após a primeira elevação de taxa, o espectro do sinal é achatado e passa a ter imagens centradas em $2\pi k/L_1$, para $k = 1,\ldots,L_1-1$. Assim, a largura da faixa de transição do primeiro filtro deverá ser:

$$\Delta\omega_1 = \frac{7\pi}{6L_1} - \frac{5\pi}{6L_1} = \frac{\pi}{30}$$

Após a segunda elevação, aparecem imagens mais estreitas agora centradas em $2\pi k/L_2$, para $k = 1,\ldots,L_2-1$. Assim:

$$\Delta\omega_2 = \left(\frac{2\pi}{L_2} - \frac{5\pi}{6L_1L_2}\right) - \frac{5\pi}{6L_1L_2} = \frac{11\pi}{60}$$

ii. Sendo $\delta_p = 0.001$ e $\delta_r = 10^{-4.5}$ as especificações de ripples relativos a um filtro de ganho unitário, as especificações dos filtros na cascata podem ser calculadas de maneira simples, aproximadamente por:

$$\delta_{p1} = \delta_{p2} = \delta_p/2 = 0.0005$$

$$\delta_{r1} = \delta_{r2} = \delta_r = 10^{-4.5}$$

assim, para ambos os filtros, a atenuação especificada para a janela de Kaiser seá $A = 90$dB.

iii.

$$N_1 = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega_1} + 1 \approx 344$$

$$N_2 = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega_2} + 1 \approx 64$$

(c) Na conversão direta do item (a), apenas 1 a cada 100 amostras na entrada do filtro é não nula. Assim, o número de multiplicações por amostra da saída é $3428/100 \approx 34$.

No esquema de cascata do item (b), ambos os filtros recebem 9 amostras nulas a cada 10. Além disso, o primeiro filtro, na taxa intermediária, calcula uma amostra de sinal enquanto 10 são calculadas pelo segundo filtro. Portanto, para cada amostra de saída, temos aproximadamente $344/10/10 + 64/10 = 10$ multiplicações.

4. Suponha que o sinal $x(t)$ tenha banda entre 0 e 15 kHz, e precise ser amostrado com uma precisão de 12 bits. Está disponível um conversor A/D com 8 bits, que pode fornecer até 30×10^6 amostras por segundo.

(a) Usando o método da sobreamostragem sem realimentação, qual deve ser a taxa de amostragem do conversor de 8 bits para fazer um sistema que forneça a precisão necessária à taxa de amostragem de 30 kHz?

(b) E usando realimentação do erro?

Resposta 4. (a) Sendo B_{eq} a precisão em bits desejada do sistema e B a precisão do conversor, temos:

$$B_{eq} = B + \frac{1}{2}\log_2 M$$
$$12 = 8 + \frac{1}{2}\log_2 M$$

e portanto o fator de conversão necessário para o sistema é $M = 2^8 = 256$. A taxa do conversor deve então ser $M \times 30\text{kHz} = 7.68\text{MHz}$.

(b) Usando realimentação de erro sigma-delta, temos:

$$B_{eq} = B + \frac{1}{2}\left[\log_2 M - \log_2(1 - \operatorname{sinc}(1/M)) - 1\right]$$

e obtemos aproximadamente $M \approx 9.44$. A taxa de amostragem necessária para o conversor é $M \times 30\text{kHz} = 283.2\text{kHz}$ (muito menor do que sem realimentação).

5. Você dispõe de um conversor A/D e um conversor D/A com 10 bits, capazes de amostrar sinais a uma taxa de 2,4 MHz. Você deseja amostrar um sinal de áudio (na faixa de 0 a 20 kHz, amostrado a 44,1 kHz) com precisão de 12 bits. Suponha que os filtros passa-baixas sejam ideais.

(a) Qual seria a taxa de amostragem necessária para obter a precisão desejada, usando sobreamostragem sem realimentação do erro?

(b) Qual seria a taxa de amostragem necessária para obter a precisão desejada usando sobreamostragem com realimentação do erro?

(c) Qual seria a maior precisão possível nas condições do problema, usando sobreamostragem sem realimentação do erro?

(d) Qual seria a maior precisão possível, usando sobreamostragem com realimentação do erro?

Resposta 5. (a) $M = 2^4 \rightarrow f_a = 705{,}6\,\text{kHz}$.

(b) $M \approx 4 \rightarrow f_a = 176{,}4\,\text{kHz}$.

(c) A taxa pode ser aumentada até em $M = 2{,}4 \cdot 10^6/(44100) = 54{,}4$ vezes, o que permite um aumento na precisão (usando $M = 54$) para 12,9 bits.

(d) Com realimentação de erro, há um aumento da precisão de 17,7 bits.

6. Na prática, o filtro passa-baixas usado no final do conversor A/D por sobreamostragem não é ideal. Suponha que você projete um conversor A/D com sobreamostragem

de 2 vezes, sem realimentação, e que o filtro passa-baixas tenha resposta em frequência $H(e^{j\omega}) = \cos(\omega/2)$. Calcule a potência do ruído e o número equivalente de bits na saída, considerando o filtro real e compare com um filtro ideal.

Lembre-se que a potência média de um processo estacionário e ergódico $y[n]$ na saída de um filtro digital pode ser calculada por

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega)\, \mathrm{d}\,\omega,$$

em que $S_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega)$, e $S_x(\omega)$ é a densidade espectral de potência do sinal de entrada $x[n]$.

Resposta 6. (a) $N = 11$: $P_{\text{med}} = 1{,}1 \times 10^{-7}$, $B_{\text{eq}} = 10{,}76$; $N = 51$: $P_{\text{med}} = 4 \times 10^{-8}$, $B_{\text{eq}} = 11{,}5$; $N = 101$: $P_{\text{med}} = 3 \times 10^{-8}$, $B_{\text{eq}} = 11{,}7$.

7. No exercício 5, suponha que os filtros passa-baixas não sejam ideais. Projete para os casos dos itens (a) e (b) filtros passa-baixas com as características abaixo, e compare o desempenho (em termos de potência de ruído de quantização e número equivalente de bits) com o uso de um filtro ideal:

Use um filtro FIR com $N = 11$, 51 e 101 coeficientes, usando janela de Hamming. Use $\omega_p = \pi/M$ (para garantir que o filtro deixe passar com pouca atenuação os sinais de interesse), e $\omega_r = \omega_p + 8\pi/N$ ($8\pi/N$ é a largura da banda de transição da janela de Hamming), e $\omega_c = (\omega_p + \omega_r)/2$. Para cada caso, calcule a potência do ruído na saída e o número equivalente de bits. Para fazer os cálculos, lembre que a densidade espectral de potência na saída de um filtro digital é $S_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega)$.

Lembre-se que a potência média de um processo estacionário e ergódico $y[n]$ pode ser calculada por

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega)\, \mathrm{d}\,\omega.$$

Se $S_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega)$ e $x[n]$ for ruído branco, então $S_x(\omega) = r_x$ é constante, e P_{med} se simplifica para

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r_x |H(e^{j\omega})|^2\, \mathrm{d}\,\omega = r_x \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|^2,$$

pelo Teorema de Parseval. Como no caso de filtros FIR a resposta ao impulso do filtro é conhecida, é fácil calcular a potência média.

No caso de $S_x(\omega)$ não ser constante, uma maneira de se obter a potência média é usar um algoritmo numérico para calcular a integral. Outra forma é lembrar que a realimentação corresponde a passar o ruído por um filtro com função de transferência $H_\varepsilon(z) = 1 - z^{-1}$ (ou seja, com resposta ao impulso $h_\varepsilon[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, além do filtro $H(z)$. Definindo o filtro total equivalente por $h_{\text{eq}}[n] = h[n] * h_\varepsilon[n]$, a potência do ruído pode ser calculada por $P_{\text{med}} = r_x \sum_{n=0}^{\infty} |h_{\text{eq}}[n]|^2$.

Resposta 7. Caso sem realimentação, usando $M = 16$. $N = 11$: $P_{\text{med}} = 1{,}5 \times 10^{-7}$, $B_{\text{eq}} = 10{,}54$; $N = 51$: $P_{\text{med}} = 6{,}3 \times 10^{-8}$, $B_{\text{eq}} = 11{,}16$; $N = 101$: $P_{\text{med}} = 5{,}17 \times 10^{-8}$, $B_{\text{eq}} = 11{,}31$.

Caso com realimentação, usando $M = 4$. $N = 11$: $P_{\text{med}} = 4{,}47 \times 10^{-7}$, $B_{\text{eq}} = 9{,}75$; $N = 51$: $P_{\text{med}} = 1{,}68 \times 10^{-7}$, $B_{\text{eq}} = 10{,}46$; $N = 101$: $P_{\text{med}} = 1{,}41 \times 10^{-7}$, $B_{\text{eq}} = 10{,}58$.

Repare que a resposta com realimentação deu uma potência de ruído maior, porque o fato da resposta em frequência do filtro real não ser muito boa piora o desempenho consideravelmente perto do filtro ideal para um valor pequeno de M, como é o caso aqui.

Janelamento em TDF e STFT

8. Suponha que você calcule a TDF do sinal $x[n] = \sin(0{,}1\pi n)$ com $N = 128$ pontos.

(a) Qual a frequência normalizada do sinal $x[n]$? A quais frequências correspondem as amostras $X[6]$ e $X[7]$ da TDF?

(b) O que deve ser feito para a TDF amostrar exatamente a frequência do sinal?

(c) Esboce o módulo da TDF de $x[n]$. Por que aparecem raias não nulas em todo o espectro? Lembre que a TDF corresponde a amostras do espectro do sinal $x[n]w_R[n]$, em que $w_R[n]$ é a janela retangular de comprimento correspondente.

(d) Uma maneira de melhorar a resolução espectral é usar janelas no sinal. Aplique a janela de Hamming

$$w_H[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

ao sinal $x[n]$ e calcule sua TDF. Por que que o espectro ficou mais "limpo"?

Resposta 8. (a) O sinal tem frequência $\omega_0 = 0.1\pi$ rad/amostra. As amostras correspondem às frequências

$$\omega_6 = \frac{2\pi}{128}6 = 0.09375\pi \text{ rad/amostra}$$
$$\omega_7 = \frac{2\pi}{128}7 = 0.109375\pi \text{ rad/amostra}$$

(b) Devemos calcular a TDF com comprimento múltiplo do período do sinal, ou seja, $N = mM$, onde $M = 20$ é o período do sinal, neste caso. Assim:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{mM} = \frac{\pi}{10}\frac{k}{m} = \omega_0\frac{k}{m}$$

e a frequência ω_0 do sinal ficaria na raia inteira $k = m$.

(c) A TDF é apresentada na Figura 3a (as amostras estão divididas por N).

O espectro de $x[n]w_R[n]$ corresponde à convolução entre os espectros dos seus termos. O espectro $X(e^{j\omega})$ é uma soma de impulsos, então a convolução resulta na soma de versões deslocadas $W_R(e^{j\omega})$ centradas nos impulsos de $X(e^{j\omega})$. Como o espectro da janela retangular $W_R(e^{j\omega})$ (uma função sinc) tem muitas oscilações secundárias, o espectro resultante tem componentes de amplitude relevante numa larga faixa de frequências.

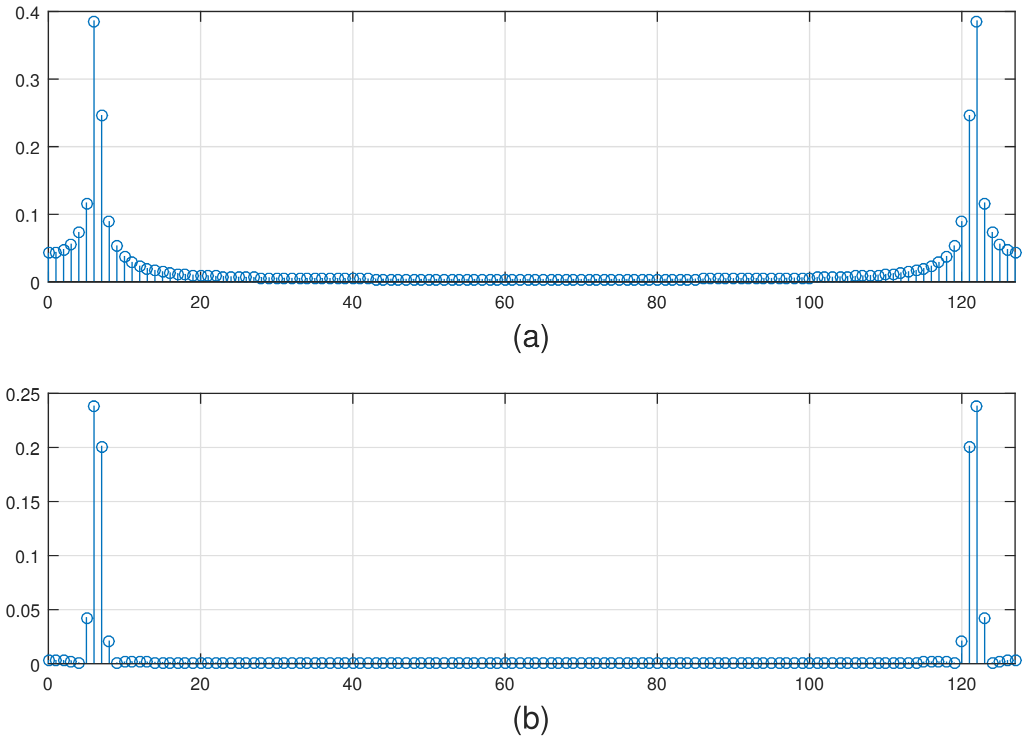

Figura 3: (a) TDF de $x[n]$ com $N = 128$ (janela retangular); (b) TDF de $x[n]$ com janela de Hamming.

(d) Aplicando a janela de Hamming, obtemos o espectro da Figura 3b.

Como o espectro da janela de Hamming $W_H(e^{j\omega})$ tem os lóbulos secundários consideravelmente atenuados, a energia do espectro resultante da convolução fica mais concentrada em torno dos impulsos de $X(e^{j\omega})$.

9. Considere um sinal senoidal $x[n] = \sin(0{,}3\pi n)$. Suponha que você use uma janela retangular $w_R[m]$ de comprimento M para calcular $X[0, \lambda)$.

(a) Determine a expressão teórica de $X[0, \lambda)$.

(b) Determine o valor aproximado do máximo de $|X[0, \lambda)|$.

(c) Compare o máximo aproximado do item anterior com o valor obtido desenhando o gráfico de $|X[0, \lambda)|$ para $M = 20$.

(d) Repita os itens anteriores para $X[5, \lambda)$. O máximo de $|X[5, \lambda)|$ é igual ao máximo de $|X[0, \lambda)|$?

Resposta 9. (a)

$$X[0,\lambda) = \frac{e^{-j(\lambda-0.3\pi)\frac{M-1}{2}}}{2j}\frac{\text{sen}(\frac{(\lambda-0.3\pi)M}{2})}{\text{sen}(\frac{\lambda-0.3\pi}{2})} - \frac{e^{-j(\lambda+0{,}3\pi)\frac{M-1}{2}}}{2j}\frac{\text{sen}(\frac{(\lambda+0{,}3\pi)M}{2})}{\text{sen}(\frac{\lambda+0{,}3\pi}{2})}.$$

(b) Para M suficientemente grande (tal que $2\pi/M \ll 2\times 0{,}3\pi$), o máximo de $X[0,\lambda)$ ocorre aproximadamente em $\lambda = 0{,}3\pi$:

$$\max_{\lambda} X[0,\lambda) \approx X[0, 0{,}3\pi) = M/2.$$

(c) Escolhendo-se $M = 20$, obtemos (note que o valor abaixo é obtido para uma frequência próxima, mas não exatamente igual a $0{,}3\pi$ — o máximo não acontece em $0{,}3\pi$ devido à soma de dois termos em $X[0,\lambda)$.)

$$\max X[0,\lambda) = 10{,}0201.$$

que deve ser comparado ao valor aproximado $M/2 = 10$.

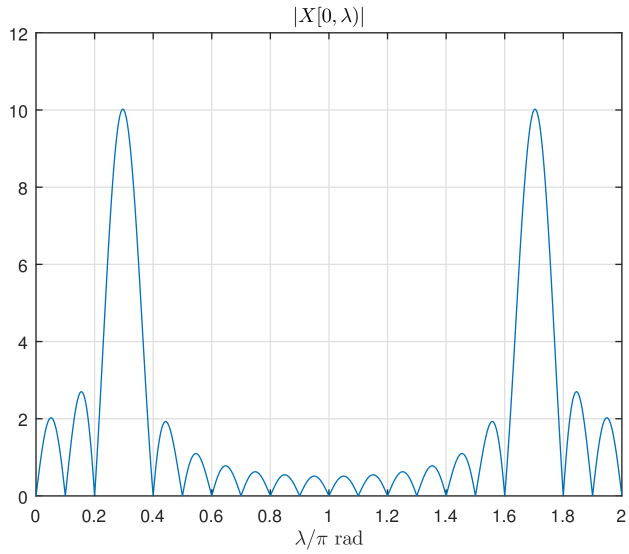

Figura 4: $|X[0,\lambda)|$ para $M = 20$.

(d) Neste caso a fase da senóide na janela muda, de modo que

$$X[5,\lambda) = \frac{e^{-j(\lambda-0.3\pi)\frac{M-1}{2}}}{2} e^{-j(\pi/2-5\times 0.3\pi)} \frac{\operatorname{sen}(\frac{(\lambda-0.3\pi)M}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\lambda-0.3\pi}{2})} - \frac{e^{-j(\lambda+0{,}3\pi)\frac{M-1}{2}}}{2} e^{j(\pi/2-5\times 0.3\pi)} \frac{\operatorname{sen}(\frac{(\lambda+0{,}3\pi)M}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\lambda+0{,}3\pi}{2})}.$$

Neste caso a fase relativa dos dois termos muda de 6π, e portanto o valor do máximo não se altera. Em geral a fase relativa se altera, e o máximo muda um pouco, mas continua sendo próximo de $M/2$.

10. Considere um sinal senoidal $x[n] = \sin(0{,}3\pi n)$. Suponha que você use uma janela de Hamming $w_H[m]$ de comprimento M para calcular $X[0,\lambda)$. Repare que diferentes autores definem a janela de Hamming de maneira ligeiramente diferente. Use a definição a seguir:

$$w_H[m] = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi}{M-1}\left(m - \frac{M-1}{2}\right)\right), \quad 0 \leq m \leq M-1.$$

(a) Determine a expressão teórica de $W_H(\mathrm{e}^{j\omega})$, a TFTD da janela de Hamming. Verifique que o máximo de $|W_H(\mathrm{e}^{j\omega})|$ ocorre para $\omega = 0$, e ache seu valor.

(b) Determine a expressão teórica de $X[0, \lambda)$.

(c) Determine o valor aproximado do máximo de $|X[0, \lambda)|$.

(d) Compare o máximo aproximado do item anterior com o valor obtido desenhando o gráfico de $|X[0, \lambda)|$ para $M = 20$.

(e) Repita os itens anteriores para $X[5, \lambda)$. O máximo de $|X[5, \lambda)|$ é igual ao máximo de $|X[0, \lambda)|$?

Resposta 10. (a)

$$W_H(\mathrm{e}^{j\omega}) = 0.54\left(\frac{\mathrm{e}^{-j\omega\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)$$
$$-\,0.23\left(\frac{\mathrm{e}^{-j(\omega-\frac{2\pi}{M-1})\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(\omega-\frac{2\pi}{M-1})M}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\omega-\frac{2\pi}{M-1}}{2}\right)} + \frac{\mathrm{e}^{-j(\omega+\frac{2\pi}{M-1})\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(\omega+\frac{2\pi}{M-1})M}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\omega+\frac{2\pi}{M-1}}{2}\right)}\right).$$

Para verificar o máximo de $|W_H(\mathrm{e}^{j\omega})|$, podemos analisar o fato de que todos os coeficientes $w_H(m)$ da janela de Hamming, $m = 0,1,...,M-1$, são reais e positivos. Desta forma, o somatório na definição da TFTD

$$W_H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{M-1} w_H[m]\mathrm{e}^{-j\omega m}$$

terá módulo máximo quando os termos $w_H(m)$ da soma forem ponderados por uma mesma fase ωm no fator exponencial. Isso apenas é possível para $\omega = 0$; desta forma, temos que

$$\max|W_H(\mathrm{e}^{j\omega})| = |W_H(\mathrm{e}^{j0})| \leq \sum_{m=0}^{M-1}|w_H[m]| = \sum_{m=0}^{M-1}(0{,}54{+}0{,}46\cos(2\pi(m{-}\frac{M-1}{2})/(M{-}1))),$$

que também pode ser obtido a partir da expressão de $W_H(\mathrm{e}^{j\omega})$ do item (a) para $w = 0$.

(b) A expressão

$$X[0,\lambda) = \sum_{m=0}^{M-1} x[0+m]w_H[m]\mathrm{e}^{-j\lambda m} = \sum_{m=0}^{M-1}\mathrm{sen}(0{,}3\pi m)w_H[m]\mathrm{e}^{-j\lambda m}$$

pode ser entendida como a TFTD da multiplicação do sinal $\mathrm{sen}(0{,}3\pi m)$ com a janela de Hamming. Logo, a expressão pode ser calculada por

$$X[0,\lambda) = \frac{1}{2\pi}S(\mathrm{e}^{j\lambda}) * W_H(\mathrm{e}^{j\lambda}),$$

sendo $S(\mathrm{e}^{j\lambda}) = \frac{\pi}{j}\delta(\lambda - 0{,}3\pi) - \frac{\pi}{j}\delta(\lambda + 0{,}3\pi)$ a TFTD do sinal $\mathrm{sen}(0{,}3\pi m)$. O resultado será, portanto,

$$
\begin{aligned}
X[0{,}\lambda) &= \frac{0.54}{2j}\left(\frac{\mathrm{e}^{-j(\lambda-0.3\pi)\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\big(\frac{(\lambda-0.3\pi)M}{2}\big)}{\mathrm{sen}\big(\frac{\lambda-0.3\pi}{2}\big)} - \frac{\mathrm{e}^{-j(\lambda+0{,}3\pi)\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\big(\frac{(\lambda+0{,}3\pi)M}{2}\big)}{\mathrm{sen}\big(\frac{\lambda+0{,}3\pi}{2}\big)}\right) \\
&- \frac{0.23}{2j}\left(\frac{\mathrm{e}^{-j(\lambda-0.3\pi-\frac{2\pi}{M-1})\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(\lambda-0.3\pi-\frac{2\pi}{M-1})M}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda-0.3\pi-\frac{2\pi}{M}}{2}\right)} + \frac{\mathrm{e}^{-j(\lambda-0.3\pi+\frac{2\pi}{M-1})\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(\lambda-0.3\pi+\frac{2\pi}{M-1})M}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda-0.3\pi+\frac{2\pi}{M-1}}{2}\right)}\right) \\
&+ \frac{0.23}{2j}\left(\frac{\mathrm{e}^{-j(\lambda+0.3\pi-\frac{2\pi}{M-1})\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(\lambda+0.3\pi-\frac{2\pi}{M-1})M}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda+0.3\pi-\frac{2\pi}{M}}{2}\right)} + \frac{\mathrm{e}^{-j(\lambda+0.3\pi+\frac{2\pi}{M-1})\frac{M-1}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(\lambda+0.3\pi+\frac{2\pi}{M-1})M}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\lambda+0.3\pi+\frac{2\pi}{M-1}}{2}\right)}\right).
\end{aligned}
$$

(c) Usando um procedimento semelhante ao do item b da questão anterior, obtemos

$$\max X[0{,}\lambda) \approx X[0{,}0{,}3\pi) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M-1} w_H[n] = W_H(e^{j0})/2.$$

(d) Escolhendo-se $M = 20$, obtemos

$$\max X[0{,}\lambda) = 5{,}167.$$

que deve ser comparado ao valor aproximado $W_H(e^{j0})/2 = 5{,}17$.

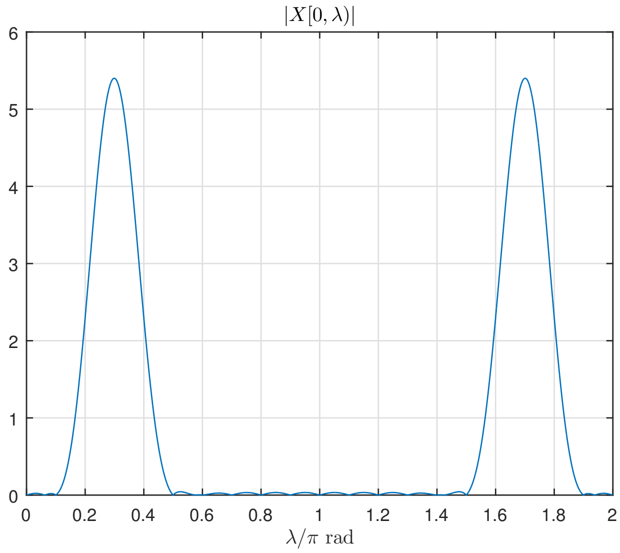

Figura 5: $|X[0{,}\lambda)|$ para $M = 20$, com janela de Hamming.

(e) Agora, com a mudança de fase, o máximo de $X[5, \lambda)$ é um pouco diferente, igual a 5,1738.

11. Suponha que você tenha calculado a transformada de Fourier de tempo curto de um sinal $x(t)$, usando:

- Taxa de amostragem: $f_a = 20$ kHz.
- Janela de Hamming com $L = 500$ amostras.
- Passo para cálculo das transformadas $M = 250$.
- Comprimento da FFT: 1024 pontos.

Responda:

(a) Qual é a resolução do espectro observado no tempo? (quer dizer, qual é a taxa de variação do espectro mais rápida que é possível observar?)

(b) Qual é a resolução do espectro?

(c) Suponha que você esteja observando duas senóides de frequências diferentes, ocorrendo simultaneamente. Qual é a mínima distância entre as frequências tal que as duas senóides ainda podem ser distinguidas?

Resposta 11. (a) Suponha que o sinal $x[n] = x(nT_a)$ tenha uma taxa α de variação do espectro. Para que esta variação seja adequadamente visualizada, o espaçamento máximo entre as janelas da STFT será de meio período da taxa de variação ($M_{max} = 1/(2\alpha)$). Para um M fixo, a taxa máxima de variação é obtida por

$$\alpha_{max} = 1/(2M) = 1/(2 \cdot 250) = 1/500,$$

e corresponde, em hertz, a $1/500 \cdot 20\text{kHz} = 40\text{Hz}$.

(b) Resolução do espectro $= 20\text{kHz}/1024 = 19{,}5313\text{Hz}$.

(c) A distância mínima em frequência discreta deve ser maior que a largura do lóbulo principal da janela de Hamming, que é aproximadamente $8\pi/L$. Portanto, a distância em Hz será:

$$\frac{8\pi}{100} \cdot \frac{20\text{kHz}}{2\pi} = 800\text{Hz}.$$

12. Você tem um sinal $x(t) = \cos(\Theta(t))$, em que $\Theta(t) = 2\pi 10^4 t + 100\cos(2\pi 10t)$. Você quer observar o sinal $x(t)$ usando um espectrograma, com precisão na medida de frequência de 1 Hz ao menos, e capacidade de distinguir duas senoides afastadas de 5 Hz ao menos.

(a) Qual é a frequência instantânea do sinal?

(b) Qual é a mínima taxa de amostragem do sinal?

(c) Qual é o comprimento mínimo necessário para cálculo da TDF?

(d) Supondo que seja usada janela de Hamming, qual é o comprimento da janela que deve ser usado?

(e) Qual é o espaçamento mínimo entre as transformadas para que a a variação da frequência seja observada adequadamente? (quer dizer, o valor de R)

Resposta 12. (a) A frequência instantânea é a derivada da fase: $\Omega\text{inst} = \frac{d\Theta(t)}{dt} = 2\pi(10^4 - 10^3\sin(2\pi 10t))$

(b) A máxima frequência instantânea ocorre quando $\sin(2\pi 10t) = -1$ em Ω_{inst}; portanto,

$$\Omega_{\text{inst,max}} = 2\pi(10^4 + 10^3) = 2{,}2\pi \cdot 10^4 \,\text{rad/s}$$

que equivale a $1{,}1 \cdot 10^4$ Hz. Portanto, a frequência de amostragem deve ser maior que

$$f_a > 2{,}2 \cdot 10^4 \text{Hz}.$$

(c) A resolução do espectro é dada por $k = f_a/N$, sendo f_a a frequência de amostragem e N o número de pontos da TDF. Assim, para um k mínimo de 1 Hz, devemos ter

$$k \leq 1\,\text{Hz} \rightarrow 2{,}2 \cdot 10^4/N \leq 1 \rightarrow N \geq 2{,}2 \cdot 10^4 = 22000.$$

(d) A largura do lóbulo principal da janela de Hamming é aproximadamente $8\pi/L$, que equivale a

$$\frac{8\pi}{L} \cdot \frac{2{,}2 \cdot 10^4}{2\pi} = \frac{8{,}8 \cdot 10^4}{L}\text{Hz},$$

e este valor deve ser no máximo igual a 5 Hz; portanto

$$\frac{8{,}8 \cdot 10^4}{L} \leq 5 \rightarrow L \geq 17600.$$

(e) A taxa de variação do espectro da frequência instantânea é igual a 10 Hz. Logo, a taxa mínima para sua correta visualização no espectrograma é 20 Hz. Para o sinal amostrado a $f_a = 2{,}2 \cdot 10^4$Hz, podemos encontrar o valor mínimo do espaçamento entre as transformadas será

$$M = 2{,}2 \cdot 10^4/20 = 1100.$$

Na prática é melhor escolher uma frequência um pouco maior, pois o espectro não se limita aos valores das frequências instantâneas.