

PSI-3432 — Processamento de Áudio e Imagem

Lista de Exercícios 3

Vítor H. Nascimento Thiago Yuji Aoyagi

1 de outubro de 2020

Processamento Multitaxa

1. O sinal $x[n]$ está amostrado a 24 kHz, e você precisa aumentar a taxa de amostragem para 40 kHz. Sabe-se que o sinal original tem banda entre 0 e $3\pi/4$ rad/amostra.

- (a) Quais são os fatores de conversões de taxa intermediários L e M ?
- (b) No sinal de taxa elevada (interpolado por zeros), em que frequências estão centradas as imagens do espectro do sinal original? Qual a frequência de corte e o ganho do filtro passa-baixa necessário para removê-las? Haverá perda de informação na conversão?
- (c) Agora você vai projetar o filtro passa-baixa com janela de Kaiser. Determine os limites da banda de passagem e da banda de rejeição do filtro, e determine os parâmetros N e β da janela de Kaiser.

Dados: distorção máxima na banda-passante do sinal $\delta_p = \pm 0,01$, oscilação máxima na banda de rejeição $\delta_r = 0.001$ (lembre que as oscilações δ consideradas no projeto da janela de Kaiser são relativos a um filtro de ganho unitário).

2. Considere agora um caso contrário ao da questão anterior. O sinal $x[n]$ está amostrado a 40 kHz, e você precisa reduzir a taxa de amostragem para 24 kHz. Sabe-se que o sinal original tem banda entre 0 e $3\pi/4$ rad/amostra (agora na taxa de 40 kHz).

- (a) Quais são os fatores de conversões de taxa intermediários L e M ?
- (b) Qual a frequência de corte e o ganho do filtro passa-baixa? Haverá perda de informação na conversão?
- (c) Neste caso, como deve ser feito o projeto do filtro? Quais as frequências ω_p e ω_r a serem consideradas?

3. Suponha que você precise aumentar a taxa de amostragem de um sinal de 10 kHz para 1 MHz. O sinal tem originalmente frequências na faixa $0 \leq |\omega| \leq 5\pi/6$ rad/amostra.

Na banda-passante o ganho do sistema deve ficar em $1 \pm 0,001$, e as imagens do sinal na frequência alta devem ser atenuadas de pelo menos 90 dB¹.

- (a) Projete um interpolador mais filtro para atender às especificações acima, supondo que a taxa de amostragem seja aumentada de uma vez só para 1 MHz. Qual é o comprimento do filtro necessário usando janela de Kaiser?
- (b) Projete agora um interpolador com um passo intermediário: primeiro, a frequência de amostragem é aumentada para 100 kHz, e em seguida numa segunda etapa, para 1 MHz, usando dois interpoladores e dois filtros.
 - i. qual é a largura da faixa de transição de cada filtro?
 - ii. qual é a atenuação de projeto de cada filtro?
 - iii. calcule o comprimento de cada filtro da cascata.
- (c) Compare o número de multiplicações necessárias por amostra de saída para cada uma das soluções acima. Lembre que os sinais na entrada dos filtros na conversão têm várias amostras nulas.

4. Suponha que o sinal $x(t)$ tenha banda entre 0 e 15 kHz, e precise ser amostrado com uma precisão de 12 bits. Está disponível um conversor A/D com 8 bits, que pode fornecer até 30×10^6 amostras por segundo.

- (a) Usando o método da sobreamostragem sem realimentação, qual deve ser a taxa de amostragem do conversor de 8 bits para fazer um sistema que forneça a precisão necessária à taxa de amostragem de 30 kHz?
- (b) E usando realimentação do erro?

5. Você dispõe de um conversor A/D e um conversor D/A com 10 bits, capazes de amostrar sinais a uma taxa de 2,4 MHz. Você deseja amostrar um sinal de áudio (na faixa de 0 a 20 kHz, amostrado a 44,1 kHz) com precisão de 12 bits. Suponha que os filtros passa-baixas sejam ideais.

- (a) Qual seria a taxa de amostragem necessária para obter a precisão desejada, usando sobreamostragem sem realimentação do erro?
- (b) Qual seria a taxa de amostragem necessária para obter a precisão desejada usando sobreamostragem com realimentação do erro?
- (c) Qual seria a maior precisão possível nas condições do problema, usando sobreamostragem sem realimentação do erro?
- (d) Qual seria a maior precisão possível, usando sobreamostragem com realimentação do erro?

¹Deve-se tomar cuidado quando a especificação é dada em termos de atenuação. Nestes casos, atenuação de uma banda espectral **não** é a sua relação entrada/saída ao passar pelo filtro, mas **sim** sua relação com a faixa espectral que foi mantida na saída do filtro (banda de passagem).

6. Na prática, o filtro passa-baixas usado no final do conversor A/D por sobreamostragem não é ideal. Suponha que você projete um conversor A/D com sobreamostragem de 2 vezes, sem realimentação, e que o filtro passa-baixas tenha resposta em frequência $H(e^{j\omega}) = \cos(\omega/2)$. Calcule a potência do ruído e o número equivalente de bits na saída, considerando o filtro real e compare com um filtro ideal.

Lembre-se que a potência média de um processo estacionário e ergódico $y[n]$ na saída de um filtro digital pode ser calculada por

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega) d\omega,$$

em que $S_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega)$, e $S_x(\omega)$ é a densidade espectral de potência do sinal de entrada $x[n]$.

7. No exercício 5, suponha que os filtros passa-baixas não sejam ideais. Projete para os casos dos itens (a) e (b) filtros passa-baixas com as características abaixo, e compare o desempenho (em termos de potência de ruído de quantização e número equivalente de bits) com o uso de um filtro ideal:

Use um filtro FIR com $N = 11, 51$ e 101 coeficientes, usando janela de Hamming. Use $\omega_p = \pi/M$ (para garantir que o filtro deixe passar com pouca atenuação os sinais de interesse), e $\omega_r = \omega_p + 8\pi/N$ ($8\pi/N$ é a largura da banda de transição da janela de Hamming), e $\omega_c = (\omega_p + \omega_r)/2$. Para cada caso, calcule a potência do ruído na saída e o número equivalente de bits. Para fazer os cálculos, lembre que a densidade espectral de potência na saída de um filtro digital é $S_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega)$.

Lembre-se que a potência média de um processo estacionário e ergódico $y[n]$ pode ser calculada por

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega) d\omega.$$

Se $S_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_x(\omega)$ e $x[n]$ for ruído branco, então $S_x(\omega) = r_x$ é constante, e P_{med} se simplifica para

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r_x |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = r_x \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|^2,$$

pelo Teorema de Parseval. Como no caso de filtros FIR a resposta ao impulso do filtro é conhecida, é fácil calcular a potência média.

No caso de $S_x(\omega)$ não ser constante, uma maneira de se obter a potência média é usar um algoritmo numérico para calcular a integral.

Janelamento em TDF e STFT

8. Suponha que você calcule a TDF do sinal $x[n] = \sin(0,1\pi n)$ com $N = 128$ pontos.

(a) Qual a frequência normalizada do sinal $x[n]$? A quais frequências correspondem as amostras $X[6]$ e $X[7]$ da TDF?

- (b) O que deve ser feito para a TDF amostrar exatamente a frequência do sinal?
- (c) Esboce o módulo da TDF de $x[n]$. Por que aparecem raias não nulas em todo o espectro? Lembre que a TDF corresponde a amostras do espectro do sinal $x[n]w_R[n]$, em que $w_R[n]$ é a janela retangular de comprimento correspondente.
- (d) Uma maneira de melhorar a resolução espectral é usar janelas no sinal. Aplique a janela de Hamming

$$w_H[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

ao sinal $x[n]$ e calcule sua TDF. Por que que o espectro ficou mais “limpo”?

9. Considere um sinal senoidal $x[n] = \sin(0,3\pi n)$. Suponha que você use uma janela retangular $w_R[m]$ de comprimento M para calcular $X[0, \lambda]$.

- (a) Determine a expressão teórica de $X[0, \lambda]$.
- (b) Determine o valor aproximado do máximo de $|X[0, \lambda]|$.
- (c) Compare o máximo aproximado do item anterior com o valor obtido desenhando o gráfico de $|X[0, \lambda]|$ para $M = 20$.
- (d) Repita os itens anteriores para $X[5, \lambda]$. O máximo de $|X[5, \lambda]|$ é igual ao máximo de $|X[0, \lambda]|$?

10. Considere um sinal senoidal $x[n] = \sin(0,3\pi n)$. Suponha que você use uma janela de Hamming $w_H[m]$ de comprimento M para calcular $X[0, \lambda]$. Repare que diferentes autores definem a janela de Hamming de maneira ligeiramente diferente. Use a definição a seguir:

$$w_H[m] = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi}{M-1} \left(m - \frac{M-1}{2}\right)\right), \quad 0 \leq m \leq M-1.$$

- (a) Determine a expressão teórica de $W_H(e^{j\omega})$, a TFTD da janela de Hamming. Verifique que o máximo de $|W_H(e^{j\omega})|$ ocorre para $\omega = 0$, e ache seu valor.
- (b) Determine a expressão teórica de $X[0, \lambda]$.
- (c) Determine o valor aproximado do máximo de $|X[0, \lambda]|$.
- (d) Compare o máximo aproximado do item anterior com o valor obtido desenhando o gráfico de $|X[0, \lambda]|$ para $M = 20$.
- (e) Repita os itens anteriores para $X[5, \lambda]$. O máximo de $|X[5, \lambda]|$ é igual ao máximo de $|X[0, \lambda]|$?

11. Suponha que você tenha calculado a transformada de Fourier de tempo curto de um sinal $x(t)$, usando:

- Taxa de amostragem: $f_a = 20$ kHz.
- Janela de Hamming com $L = 500$ amostras.

- Passo para cálculo das transformadas $M = 250$.
- Comprimento da FFT: 1024 pontos.

Responda:

- Qual é a resolução do espectro observado no tempo? (quer dizer, qual é a taxa de variação do espectro mais rápida que é possível observar?)
- Qual é a resolução do espectro?
- Suponha que você esteja observando duas senóides de frequências diferentes, ocorrendo simultaneamente. Qual é a mínima distância entre as frequências tal que as duas senóides ainda podem ser distinguidas?

12. Você tem um sinal $x(t) = \cos(\Theta(t))$, em que $\Theta(t) = 2\pi 10^4 t + 100 \cos(2\pi 10 t)$. Você quer observar o sinal $x(t)$ usando um espectrograma, com precisão na medida de frequência de 1 Hz ao menos, e capacidade de distinguir duas senóides afastadas de 5 Hz ao menos.

- Qual é a frequência instantânea do sinal?
- Qual é a mínima taxa de amostragem do sinal?
- Qual é o comprimento mínimo necessário para cálculo da TDF?
- Supondo que seja usada janela de Hamming, qual é o comprimento da janela que deve ser usado?
- Qual é o espaçamento mínimo entre as transformadas para que a a variação da frequência seja observada adequadamente? (quer dizer, o valor de R)