PSI-3432 — Processamento de Áudio e Imagem
Resolução da Lista de Exercícios 1

Vítor H. Nascimento   Thiago Yuji Aoyagi

Obs.: as duas primeiras seções são de assuntos que você provavelmente já viu em alguma outra disciplina. Converse conosco se você tiver dificuldade nesses exercícios, ou se não lembrar de alguma coisa. As questões da terceira seção dependem de alguns resultados dessas primeiras seções.

Transformadas em tempo contínuo

1. Calcule as transformadas de Fourier dos sinais abaixo.

(a) $p_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$

(b) $x(t) = A\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\Omega_0 t)H(t)$

($H(t)$ é o degrau unitário: $H(t) = 1$ para $t \geq 0$, $H(t) = 0$ para $t < 0$).

Resposta 1. (a) (lembre que $\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{sen}(\pi x)/(\pi x)$)

$$\begin{aligned} P_T(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_T(t)\mathrm{e}^{-j\Omega t}dt = \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{-j\Omega}\left(\mathrm{e}^{-j\Omega T/2} - \mathrm{e}^{j\Omega T/2}\right) \\ &= \frac{2}{\Omega}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega T}{2}\right) = T\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\frac{\Omega T}{2}} = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j\Omega t}dt = A\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\mathrm{e}^{j\Omega_0 t} - \mathrm{e}^{-j\Omega_0 t}}{2j}\right)\mathrm{e}^{-j\Omega t}dt \\ &= \frac{A}{2j}\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-(\alpha + j(\Omega-\Omega_0))t} - \mathrm{e}^{-(\alpha+j(\Omega+\Omega_0))t}\right)dt \\ &= \frac{A}{2j}\left(\frac{1}{\alpha + j(\Omega - \Omega_0)} - \frac{1}{\alpha + j(\Omega + \Omega_0)}\right) \\ &= \frac{A\Omega_0}{\alpha^2 + \Omega_0^2 - \Omega^2 + 2\alpha\Omega j} \end{aligned}$$

2. Calcule a transformada de Fourier do impulso $\delta(t - t_0)$. A partir deste resultado, e usando as propriedades da dualidade tempo-frequência, calcule a transformada de Fourier de $A\cos(\Omega_0 t + \phi)$.

(Dica: lembre a propriedade do impulso: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$).

Resposta 2. A TF do impulso é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-j\Omega t}dt = \mathrm{e}^{-j\Omega t_0}$$

ou seja, uma exponencial complexa oposta em Ω com "frequência" constante t_0. Portanto temos o par transformado $\delta(t-t_0) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{-j\Omega t_0}$. A propriedade da dualidade tempo-frequência diz que, se existe o par $x(t) \longleftrightarrow X(j\Omega)$, também vale $X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$. Portanto, neste caso, partindo de uma exponencial complexa oposta em t com frequência fixa Ω_0

$$\mathrm{e}^{-j\Omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\Omega-\Omega_0) = 2\pi\delta(\Omega+\Omega_0)$$

pois $\delta(-\Omega) = \delta(\Omega)$. Como a função $A\cos(\Omega_0 t+\phi)$ pode ser decomposta por:

$$A\cos(\Omega_0 t+\phi) = \frac{A}{2}\left(\mathrm{e}^{j(\Omega_0 t+\phi)} + \mathrm{e}^{-(j\Omega_0 t+\phi)}\right) = \frac{A\mathrm{e}^{j\phi}}{2}\mathrm{e}^{j\Omega_0 t} + \frac{A\mathrm{e}^{-j\phi}}{2}\mathrm{e}^{-j\Omega_0 t}$$

portanto sua transformada de Fourier é

$$A\pi\mathrm{e}^{j\phi}\delta(\Omega-\Omega_0) + A\pi\mathrm{e}^{-j\phi}\delta(\Omega+\Omega_0)$$

3. (Oppenheim e Willsky 2010, Ex. 4.24 - modificado) Determine quais (se houver algum) dos sinais reais representados na Figura 1 possuem transformadas de Fourier que satisfazem cada uma das seguintes condições:

(a) $\Re\mathrm{e}\{X(j\Omega)\} = 0$

(b) $\Im\mathrm{m}\{X(j\Omega)\} = 0$

(c) Existe um α real tal que $\mathrm{e}^{j\alpha\Omega}X(j\Omega)$ seja real.

(d) $X(j\Omega)$ é periódico.

Resposta 3. (a) Funções (a) e (d), pois para $X(j\Omega)$ ser imaginário puro, $x(t)$ deve ser real e ímpar.

(b) Funções (e) e (f), pois para $X(j\Omega)$ ser real, $x(t)$ deve ser real e par.

(c) Funções (a),(b),(e) e (f), pois a condição implica que deve haver uma função deslocada $x(t+\alpha)$ que seja par.

(d) Função (b), pois $X(j\Omega)$ só é (idealmente) periódica quando é composta por impulsos de Dirac.

4. Calcule as séries de Fourier dos sinais periódicos:

(a) $x(t) = \cos(2\pi 5t) + 0{,}2\cos(2\pi 15t - \pi/4)$

(b) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$

Resposta 4. (a) $x_1 = x_{-1} = 1/2$, $x_3 = 0{,}1\mathrm{e}^{-j\pi/4}$, $x_{-3} = 0{,}1\mathrm{e}^{j\pi/4}$. Todos os demais são nulos.
(b)

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\mathrm{e}^{jk\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t-kT)\mathrm{e}^{jk\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\mathrm{e}^{jk\Omega_0 0} = \frac{1}{T}$$

para todo k.

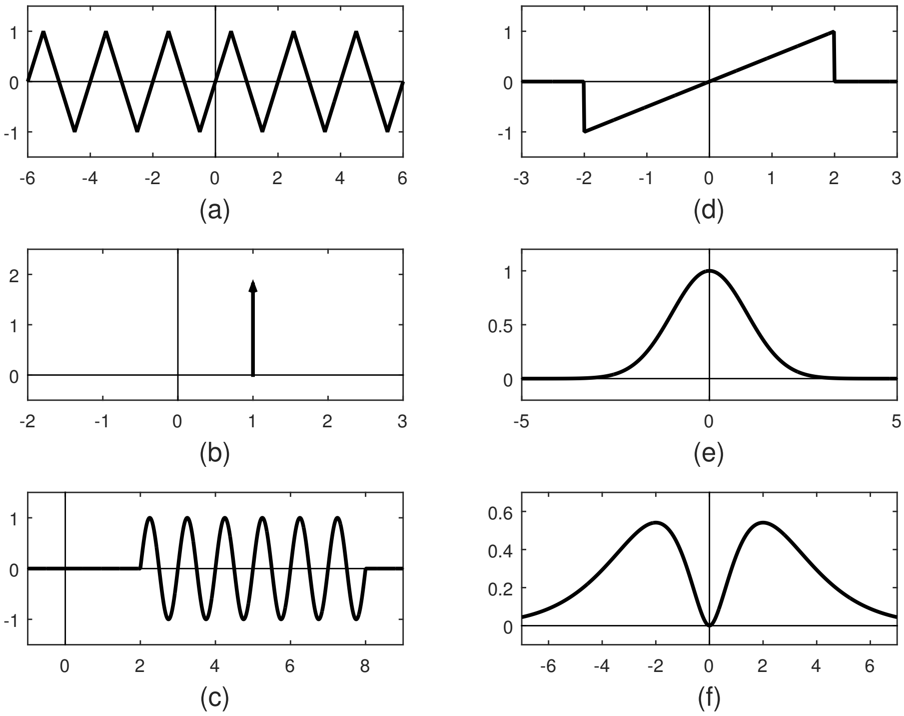

Figura 1: Sinais $x(t)$ da questão 3.

Transformadas em tempo discreto

5. Truncar uma sequência $x[n]$ pode ser interpretada como multiplicá-la por uma janela retangular

$$p_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) calcule a TFTD da janela $p_N[n]$. Expresse-a em função de uma razão de senos.

(b) quais são os efeitos espectrais de truncar uma sequência? Em que casos esses efeitos são mais notáveis? Explique com base nas propriedades da TFTD e no resultado do item anterior.

Resposta 5. (a)

$$X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-j\omega n}$$

Pela somatória finita de uma P.G.:

$$X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-j\omega N}}{1-\mathrm{e}^{-j\omega}} = \frac{\mathrm{e}^{-j\omega N/2}\left(\mathrm{e}^{j\omega N/2} - \mathrm{e}^{-j\omega N/2}\right)}{\mathrm{e}^{-j\omega/2}\left(\mathrm{e}^{j\omega/2} - \mathrm{e}^{-j\omega/2}\right)} = \mathrm{e}^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

(b) Multiplicando um sinal no tempo pela janela $p_N[n]$, sua frequência fica convoluida pela TFTD $P_N\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)$. A convolução identidade, que não altera o sinal original, é a convolução por um impulso de Dirac. Note que $P_N\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)$ tem um lobo principal em torno de $\omega = 0$ e lobos secundários de menor amplitude, então ele espalha o espectro do sinal original, e causa oscilações devido aos lobos secundários. Quando N é pequeno, o efeito do espalhamento é mais perceptível, pois o lobo principal é mais largo. Já o efeito das oscilações é mais perceptível quando o espectro de $x(t)$ tem descontinuidades.

6. O sinal $x_0[n]$, mostrado Figura 2a, tem comprimento 8 e vale zero em toda sua extensão não coberta pela figura, e tem TFTD dada por $X_0(\mathrm{e}^{j\omega})$. Calcule as TFTDs dos sinais das Figuras 2b e 2c, em função de $X_0(\mathrm{e}^{j\omega})$.

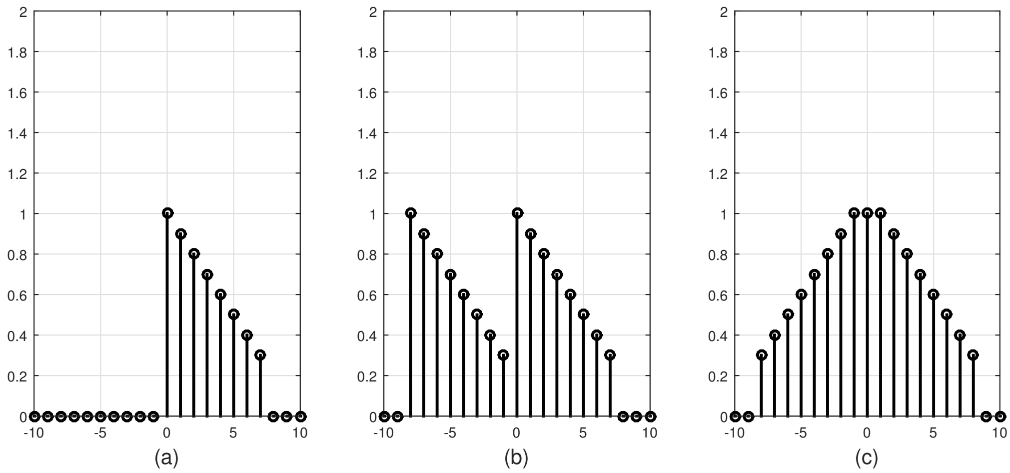

Figura 2: Sinais da questão 6.

Resposta 6.

$$x_b[n] = x_0[n] + x_0[n+8] \longleftrightarrow X_b\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) = X_0\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) + \mathrm{e}^{j8\omega} X_0\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)$$

$$x_c[n] = \delta[n] + x_0[n-1] + x_0[-n-1] \longleftrightarrow X_c\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) = 1 + \mathrm{e}^{-j\omega} X_0\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) + \mathrm{e}^{j\omega} X_0\left(\mathrm{e}^{-j\omega}\right)$$

7. Seja $x[n] = a\mathrm{e}^{-bn}u[n]$, em que $b > 0$ e $u[n] = 0$ para $n < 0$ e $u[n] = 1$ para $n \geq 0$. Calcule $X(\mathrm{e}^{j\omega})$.

Resposta 7.

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{a}{1 - \mathrm{e}^{-(b+j\omega)}}.$$

8. A série de Fourier de tempo discreto (SFTD) de um sinal periódico $\tilde{x}[n]$, de período $N = 8$, tem apenas dois coeficientes não nulos no intervalo $[-5,5]$: $\tilde{X}[-2] = 3$ e $\tilde{X}[2] = 3$. Calcule o sinal $\tilde{x}[n]$ através da definição da inversa da SFTD.

(Dica: lembre que, devido ao rebatimento, exponenciais complexas discretas tem a propriedade $\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)} = \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}k}$).

Resposta 8. Pela propriedade da simetria conjugada:

$$\tilde{X}[6] = \tilde{X}[N-2] = \tilde{X}^*[2] = 3$$

Pela definição da SFTD inversa:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{8}\left(3\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{8}n2} + 3\underbrace{\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{8}n(8-2)}}_{=\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{8}n2}}\right) = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

9. (Oppenheim e Willsky 2010, Ex. 3.11 - modificado) Suponha que tenhamos as seguintes informações sobre um sinal $x[n]$:

(a) $x[n]$ é um sinal real e par.

(b) $x[n]$ tem período $N = 10$.

(c) Sua SFTD, para $k = 11$, é $\tilde{X}[11] = 5$.

(d) $\sum_{k=0}^{9} |\tilde{X}[k]|^2 = 50$.

Qual é o sinal $x[n]$?

Resposta 9. Se o sinal é real e par, sua SFTD também é real e par.

Se $x[n]$ tem período $N = 10$, então:

$$\tilde{X}[11] = \tilde{X}[N+1] = \tilde{X}[1] = 5$$

Pela simetria conjugada:

$$\tilde{X}[9] = \tilde{X}[N-1] = \tilde{X}^*[1] = 5$$

Como $\tilde{X}^2[1] + \tilde{X}^2[9] = 50$, estes são os únicos coeficientes não nulos de $\tilde{X}[k]$. Assim, de modo análogo à questão anterior, aplicamos a SFTD inversa e obtemos:

$$\tilde{x}[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

10. Considere

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-j\omega}}, \qquad Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{0{,}25}{1 - \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-j\omega}}.$$

Use as propriedades da TFTD para calcular a convolução

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) * Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{jz})Y(\mathrm{e}^{j(\omega-z)})\,\mathrm{d}\,z.$$

(Dica: qual é o sinal correspondente no tempo? Qual é sua transformada?)

Resposta 10.

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) * Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{0{,}5}{1 - \mathrm{e}^{-(3+j\omega)}}.$$

11. Calcule a resposta em frequência do filtro definido por

$$y[n] = 0{,}8y[n-1] - 0{,}2y[n-2] + 2x[n-1].$$

Suponha que a entrada desse filtro seja $x[n] = 0{,}2\cos(0{,}2\pi n)$. Determine a saída $y[n]$ *em regime permanente*.

(Dica: lembre que exponenciais complexas, idealmente infinitas, são autofunções quando aplicadas na entrada de um sistema linear invariante no tempo)

Resposta 11.

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{2\mathrm{e}^{-j\omega}}{1 - 0{,}8\mathrm{e}^{-j\omega} + 0{,}2e^{-2j\omega}} \qquad y[n] = H(\mathrm{e}^{j0.2\pi})0.2\cos(0{,}2\pi n)$$

12. Calcule a resposta em frequência do filtro definido por

$$y[n] = ay[n-1] + a^* x[n] - x[n-1],$$

em que a^* é o conjugado de a. Mostre que o módulo da resposta em frequência é sempre igual a um para todo $|a| < 1$. Este tipo de filtro é chamado *passa-tudo*.

Resposta 12.

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{a^* - \mathrm{e}^{-j\omega}}{1 - a\mathrm{e}^{-j\omega}}.$$

Para ver que o módulo é igual a um, fatore o termo $\mathrm{e}^{-j\omega}$ no numerador:

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \mathrm{e}^{-j\omega} \frac{a^* \mathrm{e}^{j\omega} - 1}{1 - a\mathrm{e}^{-j\omega}} = -\mathrm{e}^{-j\omega} \frac{(1 - a\mathrm{e}^{-j\omega})^*}{1 - a\mathrm{e}^{-j\omega}}.$$

Como $|z| = |z^*|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, e $|-\mathrm{e}^{-j\omega}| = 1$ segue que o filtro tem ganho com módulo unitário para toda frequência.

Relações entre as quatro transformadas

13. Considere os sinais periódicos de tempo contínuo da questão 4. Calcule suas transformadas de Fourier.

(Dica: use a relação entre a SF e a TF)

Resposta 13. Pela relação entre SF e TF, basta multiplicar cada coeficiente de Fourier x_k por $2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$.

14. O sinal da questão 4a foi amostrado com frequências de amostragem $f_\mathrm{a} = 60\mathrm{Hz}$ e $f_\mathrm{a} = 42\mathrm{Hz}$, resultando nos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$, respectivamente.

(a) qual o período do sinal $x_1[n]$?

(b) calcule a SFTD de $x_1[n]$ (use a relação com a SF).

(c) o que acontece se calcularmos a SFTD de $x_1[n]$ para quatro períodos do sinal?

(d) em quantas amostras de $x_2[n]$ está contido um período do sinal $x(t)$? Neste caso, é possível obter a série de Fourier a partir da SFTD de $x_2[n]$?

Resposta 14. (a) Ao amostrar o sinal, temos:

$$t = nT_\mathrm{a} = n/60$$

Substituindo na expressão do sinal $x(t)$, obtemos:

$$x[n] = \cos(2\pi 5n/60) + 0{,}2\cos(2\pi 15n/60 - \pi/4) = \cos\left(\frac{2\pi}{12}n\right) + 0{,}2\cos\left(\frac{2\pi}{4}n - \pi/4\right)$$

Portanto, o período do sinal é $N = 12$ pontos.

(b) A SFTD tem valores 12 vezes maiores: $X[1] = 6 = X[11]$, $X[3] = 1{,}2\mathrm{e}^{-j\pi/4} = X^*[9]$, todos os outros termos são nulos.

(c) Teremos $N = 4 \times 12 = 48$ pontos, onde os coeficientes são $X[4] = 24 = X[44]$, $X[12] = 4{,}8\mathrm{e}^{-j\pi/4} = X^*[36]$, todos os outros termos são nulos.

(d) Com $T_a = 1/42$s, é impossível tomar exatamente um período do sinal, já que o período do sinal é $T = 1/5$s, e $T/T_a = 42/5 = 8{,}4$. Se aproximarmos o número de pontos para calcular a SFTD para $N = 8$, a SFTD calculada será

$$X[k] = \begin{bmatrix} -0{,}2852 \\ 3{,}9509 - 0{,}5619j \\ 0{,}2049 + 0{,}1011j \\ 0{,}4417 - 0{,}7036j \\ 0{,}2215 \\ 0{,}4417 + 0{,}7036j \\ 0{,}2049 - 0{,}1011ij \\ 3{,}9509 + 0{,}5619j \end{bmatrix}.$$

Repare que o fato de não tomarmos um número inteiro de períodos faz com que a transformada não se relacione mais de maneira simples com a série de Fourier. No entanto, é possível relacionar $X[k]$ com a série de Fourier do sinal amostrado e truncado com uma janela retangular de comprimento $T_j = 8/42$s, como visto em aula.

Para o caso de serem tomados três períodos, vale $3T/T_a = 25{,}2$, novamente um número não inteiro. O gráfico da SFTD obtida usando $N = 25$ está na Figura 3 (veja que as raias pequenas não são exatamente nulas). Repare como, apesar de não termos usado um número inteiro de períodos, aparecem raias mais significativas próximas de $k = 3$ (correspondente à frequência $3/(NT_a) = 5{,}04$ Hz, bem próxima de 5 Hz), e $k = 9$, correspondente à frequência de $9/(NT_a) = 15{,}12$ Hz, próxima de 15 Hz).

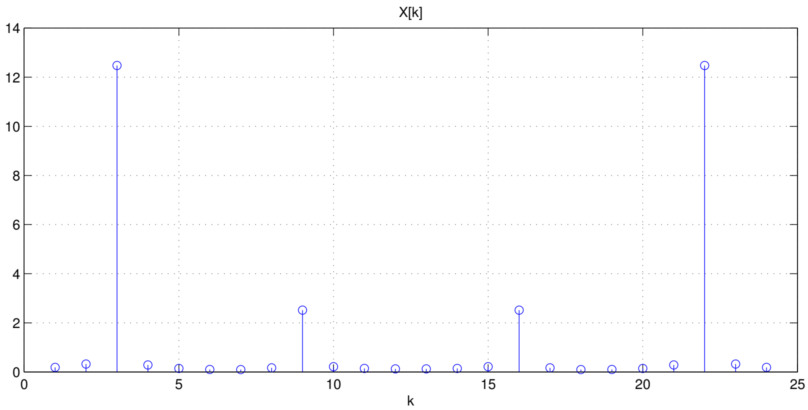

Figura 3: SFTD (TDF) do sinal do exercício com $N = 25$.

Para o caso de tomarmos cinco períodos, vale $N = 5T/T_a = 42$ pontos, e nesse caso a SFTD vai recuperar exatamente à série de Fourier, com a primeira harmônica do sinal aparecendo para $k = 5$, como mostra a Figura 4.

15. Seja $x[n]$ o sinal obtido amostrando o sinal da questão 1b a uma taxa f_a.

(a) calcule o espectro de $x[n]$, aplicando diretamente a definição da TFTD. Expresse em função de $T_\mathrm{a} = \frac{1}{f_\mathrm{a}}$.

(b) obtenha a TFTD de $x[n]$ a partir de sua TF, calculada questão 1b (utilize o Matlab). Considere os parâmetros $A = 1$, $\alpha = 0.4$ e $\Omega_0 = 0.4\pi$rad/s. Considere dois casos: $f_\mathrm{a} = 5$ Hz e $f_\mathrm{a} = 1$ Hz. Em qual dos dois é possível recuperar razoavelmente o sinal de tempo contínuo? (lembre-se da relação entre as frequências $\omega = T_\mathrm{a}\Omega$)

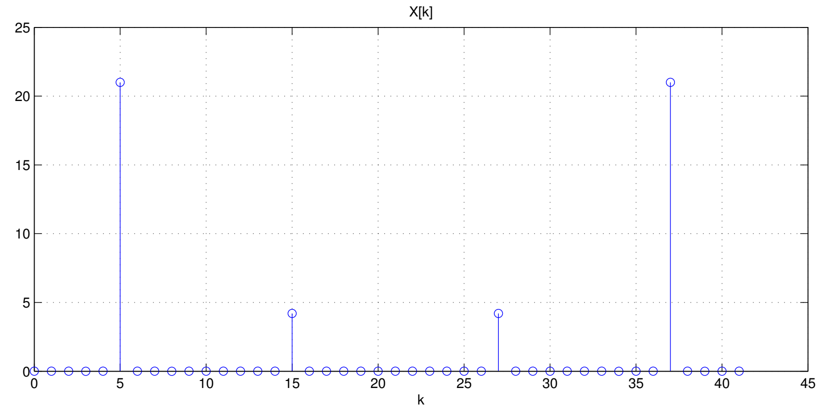

Figura 4: SFTD (TDF) do sinal do exercício com $N = 42$.

Resposta 15. (a) Amostrando o sinal, temos:

$$x[n] = Ae^{-\alpha T_a n} \sin(\Omega_0 T_a n) H[nT_a] = \frac{A}{2j}\left[e^{-(\alpha T_a - j\Omega_0 T_a)n} - e^{-(\alpha T_a + j\Omega_0 T_a)n}\right] H[nT_a]$$

Aplicando a TFTD:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{A}{2j}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\alpha T_a + j(\omega - \Omega_0 T_a))n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\alpha T_a + j(\omega + \Omega_0 T_a))n}\right] \\ &= j\frac{A}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{-\alpha T_a} e^{-j(\omega + \Omega_0 T_a)}} - \frac{1}{1 - e^{-\alpha T_a} e^{-j(\omega - \Omega_0 T_a)}}\right] \end{aligned}$$

(b) A TF do sinal de tempo contínuo $x(t)$ da questão 1b, com os parâmetros especificados, é apresentada na Figura 5. Obtemos a TFTD somando infinitas versões deslocadas da TF, multiplicadas pelo fator $1/T_a = f_a$. Tome cuidado com o fator e escala na frequência! As TFs são convertidas para frequência de tempo discreto por $X(j\Omega)|_{\Omega = \frac{\omega}{T_a}}$ e são deslocadas por $2\pi k$, para k inteiro.

Nas Figuras 6 e 7 mostramos as TFTDs dos sinais amostrados à $f_a = 5$ Hz e a $f_a = 1$ Hz, respectivamente. Ambas foram obtidas somando 5 versões deslocadas da TF, para $k = -2, -1, 0, 1$ e 2. Note que, para $f_a = 5$, as TFs estão bem mais separadas e pouco se deformam pela soma das outras, então os sinais de tempo contínuo podem ser obtidos sem grandes distorções. Já para $f_a = 1$ a TFTD tem uma forma bem diferente da TF pois há muita sobreposição entre elas. Neste caso, é muito mais perceptível o efeito do aliasing.

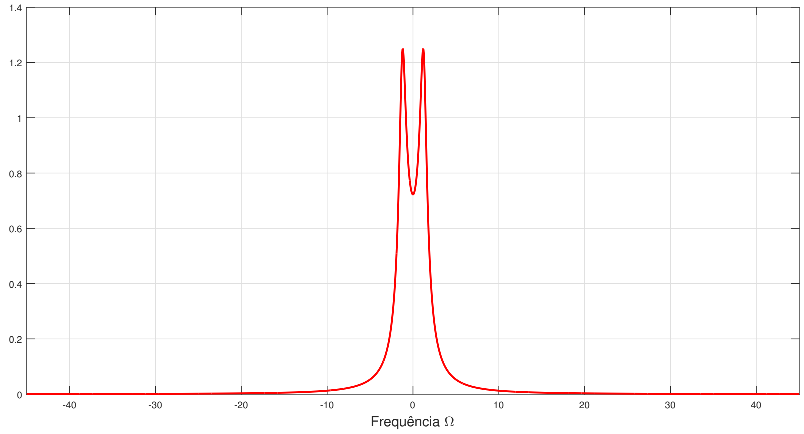

Figura 5: Transformada de Fourier do sinal da questão 1b.

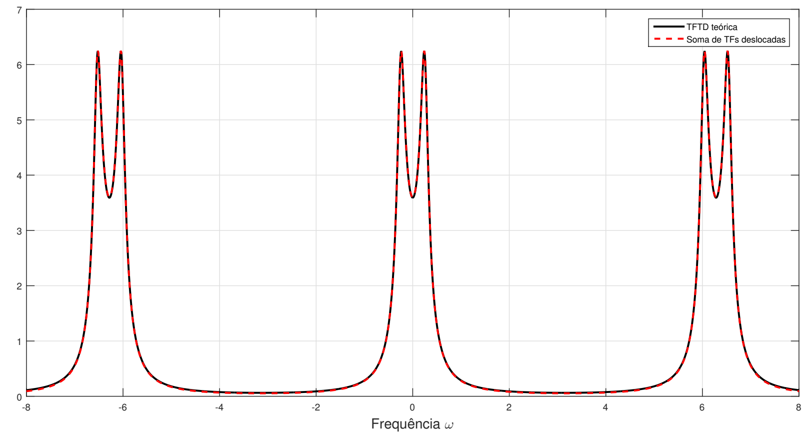

Figura 6: TFTD do sinal amostrado à taxa de $f_a = 5$ Hz.

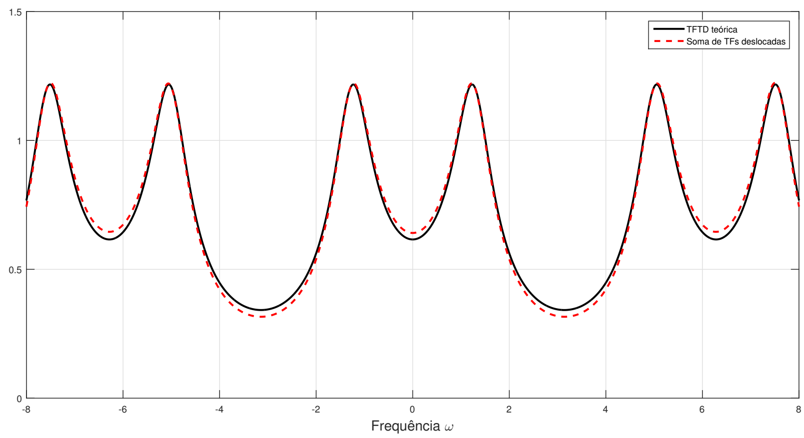

Figura 7: TFTD do sinal amostrado à taxa de $f_a = 1$ Hz.