PSI-3432 — Processamento de Áudio e Imagem
Lista de Exercícios 1

Vítor H. Nascimento   Thiago Yuji Aoyagi

Obs.: as duas primeiras seções são de assuntos que você provavelmente já viu em alguma outra disciplina. Converse conosco se você tiver dificuldade nesses exercícios, ou se não lembrar de alguma coisa. As questões da terceira seção dependem de alguns resultados dessas primeiras seções.

Transformadas em tempo contínuo

1. Calcule as transformadas de Fourier dos sinais abaixo.

(a) $p_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$

(b) $x(t) = A\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\Omega_0 t)H(t)$

($H(t)$ é o degrau unitário: $H(t) = 1$ para $t \geq 0$, $H(t) = 0$ para $t < 0$).

2. Calcule a transformada de Fourier do impulso $\delta(t - t_0)$. A partir deste resultado, e usando as propriedades da dualidade tempo-frequência, calcule a transformada de Fourier de $A\cos(\Omega_0 t + \phi)$.

(Dica: lembre a propriedade do impulso: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$).

3. (Oppenheim e Willsky 2010, Ex. 4.24 - modificado) Determine quais (se houver algum) dos sinais reais representados na Figura 1 possuem transformadas de Fourier que satisfazem cada uma das seguintes condições:

(a) $\Re\mathrm{e}\{X(j\Omega)\} = 0$

(b) $\Im\mathrm{m}\{X(j\Omega)\} = 0$

(c) Existe um α real tal que $\mathrm{e}^{j\alpha\Omega}X(j\Omega)$ seja real.

(d) $X(j\Omega)$ é periódico.

4. Calcule as séries de Fourier dos sinais periódicos:

(a) $x(t) = \cos(2\pi 5t) + 0{,}2\cos(2\pi 15t - \pi/4)$

(b) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

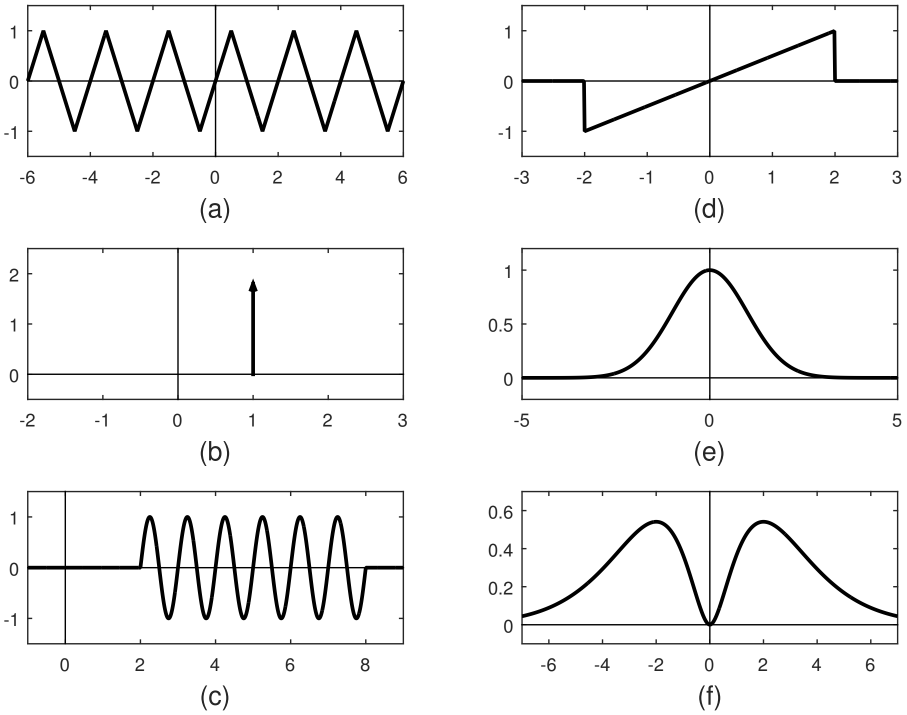

Figura 1: Sinais $x(t)$ da questão 3.

Transformadas em tempo discreto

5. Truncar uma sequência $x[n]$ pode ser interpretada como multiplicá-la por uma janela retangular

$$p_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) calcule a TFTD da janela $p_N[n]$. Expresse-a em função de uma razão de senos.

(b) quais são os efeitos espectrais de truncar uma sequência? Em que casos esses efeitos são mais notáveis? Explique com base nas propriedades da TFTD e no resultado do item anterior.

6. O sinal $x_0[n]$, mostrado Figura 2a, tem comprimento 8 e vale zero em toda sua extensão não coberta pela figura, e tem TFTD dada por $X_0(e^{j\omega})$. Calcule as TFTDs dos sinais das Figuras 2b e 2c, em função de $X_0(e^{j\omega})$.

7. Seja $x[n] = a e^{-bn} u[n]$, em que $b > 0$ e $u[n] = 0$ para $n < 0$ e $u[n] = 1$ para $n \geq 0$. Calcule $X(e^{j\omega})$.

8. A série de Fourier de tempo discreto (SFTD) de um sinal periódico $\tilde{x}[n]$, de período $N = 8$, tem apenas dois coeficientes não nulos no intervalo $[-5{,}5]$: $\tilde{X}[-2] = 3$ e $\tilde{X}[2] = 3$. Calcule o sinal $\tilde{x}[n]$ através da definição da inversa da SFTD.

(Dica: lembre que, devido ao rebatimento, exponenciais complexas discretas tem a propriedade $e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$).

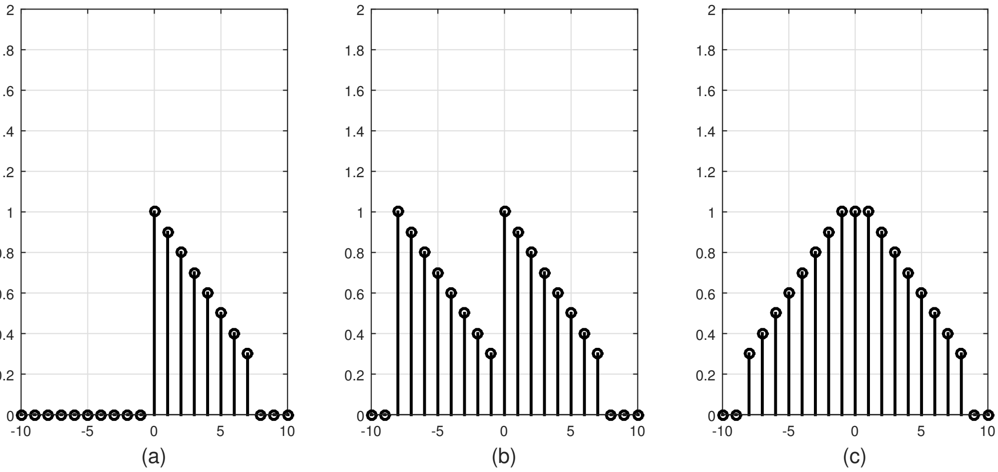

Figura 2: Sinais da questão 6.

9. (Oppenheim e Willsky 2010, Ex. 3.11 - modificado) Suponha que tenhamos as seguintes informações sobre um sinal $x[n]$:

(a) $x[n]$ é um sinal real e par.

(b) $x[n]$ tem período $N = 10$.

(c) Sua SFTD, para $k = 11$, é $\tilde{X}[11] = 5$.

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} |\tilde{X}[k]|^2 = 50$.

Qual é o sinal $x[n]$?

10. Considere

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-j\omega}}, \qquad Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{0{,}25}{1 - \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-j\omega}}.$$

Use as propriedades da TFTD para calcular a convolução

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) * Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{jz})Y(\mathrm{e}^{j(\omega-z)})\,\mathrm{d}\,z.$$

(Dica: qual é o sinal correspondente no tempo? Qual é sua transformada?)

11. Calcule a resposta em frequência do filtro definido por

$$y[n] = 0{,}8y[n-1] - 0{,}2y[n-2] + 2x[n-1].$$

Suponha que a entrada desse filtro seja $x[n] = 0{,}2\cos(0{,}2\pi n)$. Determine a saída $y[n]$ *em regime permanente*.

(Dica: lembre que exponenciais complexas, idealmente infinitas, são autofunções quando aplicadas na entrada de um sistema linear invariante no tempo)

12. Calcule a resposta em frequência do filtro definido por

$$y[n] = ay[n-1] + a^*x[n] - x[n-1],$$

em que a^* é o conjugado de a. Mostre que o módulo da resposta em frequência é sempre igual a um para todo $|a| < 1$. Este tipo de filtro é chamado *passa-tudo*.

Relações entre as quatro transformadas

13. Considere os sinais periódicos de tempo contínuo da questão 4. Calcule suas transformadas de Fourier.

(Dica: use a relação entre a SF e a TF)

14. O sinal da questão 4a foi amostrado com frequências de amostragem $f_{\mathrm{a}} = 60\mathrm{Hz}$ e $f_{\mathrm{a}} = 42\mathrm{Hz}$, resultando nos sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$, respectivamente.

(a) qual o período do sinal $x_1[n]$?

(b) calcule a SFTD de $x_1[n]$ (use a relação com a SF).

(c) o que acontece se calcularmos a SFTD de $x_1[n]$ para quatro períodos do sinal?

(d) em quantas amostras de $x_2[n]$ está contido um período do sinal $x(t)$? Neste caso, é possível obter a série de Fourier a partir da SFTD de $x_2[n]$?

15. Seja $x[n]$ o sinal obtido amostrando o sinal da questão 1b a uma taxa f_{a}.

(a) calcule o espectro de $x[n]$, aplicando diretamente a definição da TFTD. Expresse em função de $T_{\mathrm{a}} = \frac{1}{f_{\mathrm{a}}}$.

(b) obtenha a TFTD de $x[n]$ a partir de sua TF, calculada questão 1b (utilize o Matlab). Considere os parâmetros $A = 1$, $\alpha = 0.4$ e $\Omega_0 = 0.4\pi\mathrm{rad/s}$. Considere dois casos: $f_{\mathrm{a}} = 5$ Hz e $f_{\mathrm{a}} = 1$ Hz. Em qual dos dois é possível recuperar razoavelmente o sinal de tempo contínuo? (lembre-se da relação entre as frequências $\omega = T_{\mathrm{a}}\Omega$)