LISTA DE EXERCÍCIOS 2

Esta lista trata de vários conceitos associados ao movimento harmônico forçado e/ou amortecido. Tais conceitos são abordados no capítulo 4 do livro-texto (seções 4.1 a 4.5):

- Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 2. - Fluidos, Oscilações e Ondas e Calor.

Oscilador amortecido

1. Um pêndulo com fio de comprimento 1,00 m é abandonado do repouso de um ângulo inicial de 15°. Após 1000 s, sua amplitude é reduzida para 5,5°. Qual é o valor da constante de amortecimento γ? (**R:** 0,002 s^{-1})

2. Um oscilador harmônico amortecido consiste em um bloco ($m = 2$ kg), uma mola ($k = 10,0$N/m) e uma força de amortecimento $F = -\rho v$. Inicialmente, ele oscila com amplitude de 25,0 cm; devido ao amortecimento, a amplitude é reduzida para três quartos do seu valor inicial, quando são completadas quatro oscilações.

   (a) Qual o valor de ρ?

   (b) Quanta energia foi dissipada durante essas oscilações?

   R: (a) $\rho =$ 0,102 kg/s; (b) $\Delta E = 0,136$ J.

3. Em um sistema oscilatório com uma força de atrito temos:

$$F_{mola} + F_{atrito} = -kx - \rho \frac{dx}{dt},$$

   onde k é a constante da mola e ρ é a constante de amortecimento. Logo, a equação de movimento fica:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \rho\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

   Considere o oscilador como estando no regime subcrítico e resolva a equação diferencial para as condições iniciais $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$.

   R: $x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\frac{\rho t}{2M}} \sin(\omega t)$, com $\omega = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{\rho^2}{4M^2}}$.

4. Um corpo de massa $m = 40$ g está preso a uma mola de constante elástica $k = 100$ N/m. Este sistema é colocado para oscilar e depois imerso num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0,08$ kg/s.

   (a) Determine a frequência natural do sistema.

   (b) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes (indicando suas unidades).

   (c) Qual é o regime de oscilação? (justifique)

(d) Qual é a frequência de oscilação?

R: (a) $\omega_0 = 50$ rad/s; (b) $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ($\gamma = 2$ s^{-1} e $\omega_0^2 = 2500$ rad^2/s^2); (c) sub-crítico; (d) $\omega = \sqrt{2499}$ rad/s.

5. Um corpo de massa $m = 1,0$ kg oscila livremente, quando preso a uma mola, com frequência angular $\omega_0 = 2,0$ rad/s. Posteriormente este conjunto é colocado num lqúido, cujo coeficiente de resistência viscosa é $\rho = 2\sqrt{3}$ kg/s.

   (a) Escreva a equação diferencial do movimento harmônico amortecido, e a sua solução com as condições iniciais $x(0) = 0,50$ m e $v(0) = 0$.

   (b) Determine o tempo necessário T para que a amplitude do movimento diminua de um fator $1/e$ em relação ao valor inicial.

   R: (a) $\ddot{x} + 2\sqrt{3}\dot{x} + 4x = 0$; $x(t) = e^{-\sqrt{3}t}\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ m; (b) $T = \frac{\sqrt{3}}{3}$ s.

6. Considere uma situação em que você está examinando as características do sistema de suspensão de um automóvel. A suspensão "cede" 10 cm, quando o peso do automóvel inteiro é colocado sobre ela. Além disso, a amplitude da oscilação diminui 50% durante uma oscilação completa. Estime os valores de k e ρ para o sistema de mola e amortecedor em uma roda, considerando que cada uma suporta 500 kg.

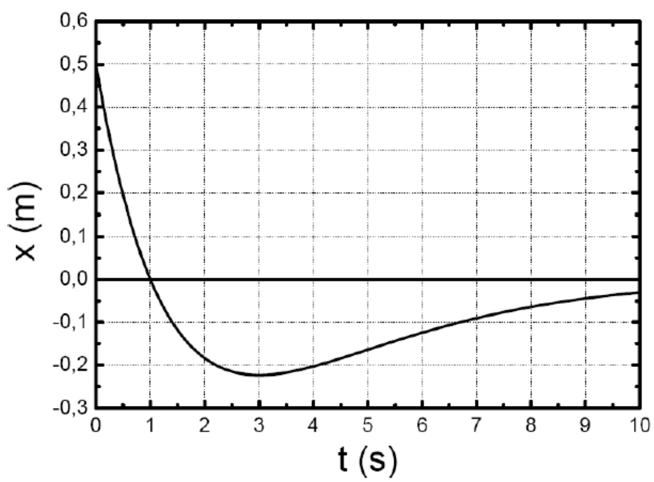
   R: $k = 5,0 \times 10^4$ N/m e $\rho = 1,1 \times 10^3$ kg/s.

7. Problema 4, cap. 4, MHN. Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0. Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a 3,68 m, após 1 segundo.

   (a) Qual é o valor de v_0?

   (b) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0 = 2$ m com a mesma velocidade inicial v_0, qual seria o valor de x no instante t?
   R: $v_0 = 10$ m/s e (b) $x(t) = e^{-t}(2 + 12t)$

8. (Poli 2006) O gráfico de $x(t)$, mostrado na figura, representa a equação horária de um oscilador criticamente amortecido, para um sistema composto de um corpo de massa $m = 1,0$ kg preso a uma mola de constante elástica k e imerso em um líquido viscoso, de coeficiente de resistência viscosa ρ.



   (a) Em que instante de tempo a velocidade do corpo será nula, no intervalo de tempo mostrado no gráfico?

(b) A equação horária $x(t)$ pode ser escrita como

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}(A + Bt)$$

Determine os valores de A e B da equação.

(c) Determine o coeficiente de resistência viscosa ρ e a constante elástica k da mola.

(d) Determine o valor da velocidade inicial do oscilador.

R: (a) $t = 3$ s (b) $A = 0,5$ m e $B = -0,5$ m/s (c) $\rho = 1$ kg/s, $\gamma = 1$ s^{-1}, $k = 0,25$ N/m e (d) $v_0 = -0,75$ m/s.

9. Um corpo de massa $m = 1000$ kg cai de uma altura $H = 1$ m sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se projetar um sistema constituído por uma mola e um amortecedor sobre o qual se montará a plataforma de modo que ela fique em equilíbrio a uma distância $d = 2$ m abaixo de sua posição inicial, após o impacto. O equilíbrio deve ser atingido tão rápido quanto possível, sem oscilações.

(a) Obtenha a constante k da mola e a constante de amortecimento ρ do amortecedor.

(b) Obtenha a função horária que descreve o movimento do bloco após entrar em contato com a plataforma.

R: $k = 5 \times 10^3$ N/m e $\rho = 2\sqrt{5} \times 10^3$ kg/s e (b) $x(t) = 2\left(e^{-\sqrt{5}t} - 1\right)$ m.

Oscilador forçado e/ou amortecido

10. Problema 7, cap. 4 de HMN. Um oscilador não-amortecido de massa m e frequência natural ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0 \sin(\omega t)$, partindo da posição de equilíbrio com velocidade inicial nula. Ache o deslocamento $x(t)$.

R: $x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right]$

11. Um corpo de massa m desliza sobre um plano horizontal sem atrito sujeito a três forças: uma forçca elástica resultante da ação de uma mola de constante elástica k, uma força devido á resistência viscosa do meio, caracterizada pela constante de resistência viscosa ρ e uma força externa periódica $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, sendo Ω a frequência externa.

(a) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento do corpo e encontre a sua solução estacionária.

(b) Considerando que $m = 50$ kg, $k = 5000$ N/m, $F_0 = 50$ N e $\rho = 500$ kg/s, calcule a frequência natural do sistema e o seu fator de qualidade.

(c) No regime estacionário, usando os valores do item anterior, determine o valor de Ω para o qual a amplitude do movimento é máxima.

(d) No regime estacionário, usando os valores do item (b), determine o valor da amplitude máxima.

R: $\ddot{x}+\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$, $x(t)=A(\Omega)\cos[\Omega t+\Phi(\Omega)]$, $A(\Omega)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2}}$ e $\Phi(\Omega)=-\arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$, (b) $\omega_0=10$ s^{-1} e $Q=1$, (c) $\Omega_R=5\sqrt{2}$ s^{-1} e (d) $A_{max}=\frac{1}{50\sqrt{3}}$ m.

12. (Poli 2007) Um corpo de massa 50 g está preso a uma mola de constante $k=20$ N/m e oscila, inicialmente, livremente. Esse oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho=0,9$ kg/s. Depois disso o oscilador, ainda no meio viscoso, é excitado por uma força externa $F=F_0cos(\Omega t)$, onde $F_0=9,0$ N e $\Omega=20,0$ rad/s.

    (a) Determine a frequência natural do sistema.

    (b) Qual o regime de oscilação do sistema quando imerso no meio viscoso, mas antes de ser excitado pela força externa? Justifique a resposta.

    (c) Depois que a força externa é aplicada e que o sistema entrou no regime estacionário, qual o valor da amplitude do movimento?

    (d) Qual deveria ser o valor exato da frequência externa de excitação para que a amplitude de oscilação, no regime estacionário, fosse máxima?

    R: $\omega_0=20$ s^{-1}; (b) regime sub-crítico ($\omega_0>\gamma/2$); (c) $A=0,5$ m e (d) $\Omega_R=\sqrt{238}$ s^{-1}.

13. Problema 1, cap. 4 de HMN. Verifique que a eq. 4.2.17) é solução para a eq. (4.1.2) para $\omega_0=\gamma/2$ e que a eq. (4.3.20) satisfaz a equação diferencial (4.3.4) e as condições iniciais (4.3.17).

$$x_1(t)=te^{-\gamma t/2} \qquad (4.2.17)$$

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \qquad (4.1.2)$$

$$x(t)=\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin(\omega_0 t) \quad (\omega=\omega_0) \qquad (4.3.20)$$

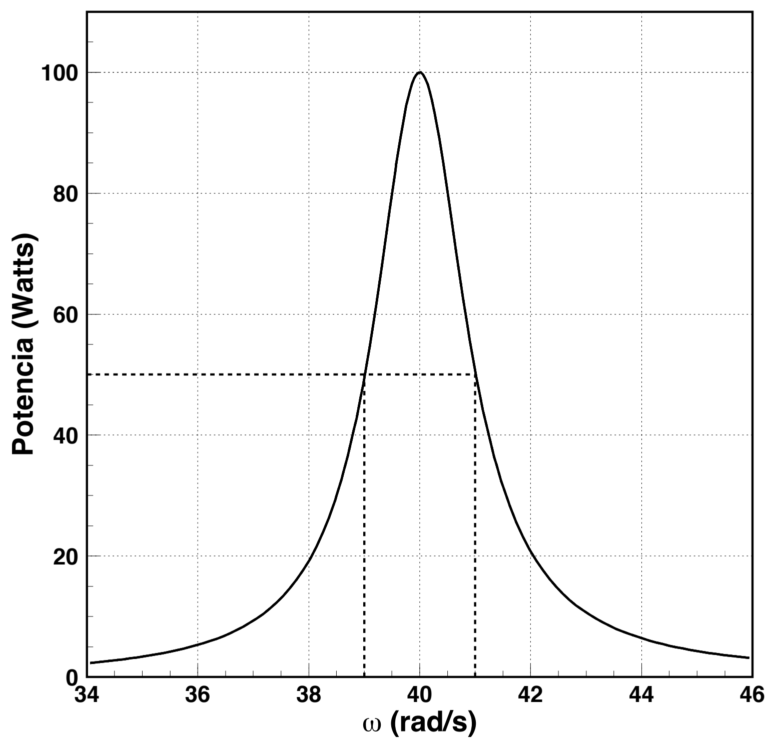
$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \qquad (4.3.4)$$

$$x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0 \qquad (4.3.17)$$

14. Problema 2, cap. 4 de HMN. Um oscilador harmônico amortecido tem um fator de qualidade $Q=10$. Partindo da posição de equilíbrio, é-lhe comunicada uma velocidade inicial de 5 m/s. Verifica-se que a energia total do oscilador diminui numa taxa, por segundo, igual a 4 vezes sua energia cinética instantânea. Calcule o deslocamento x do oscilador (em m) em função do tempo t (em s).

15. Seja r a razão entre dois máximos consecutivos do deslocamento de um oscilador livre fracamente amortecido ($\gamma << \omega_0$). O parâmetro $\delta = |\ln r|$ chama-se de *decremento logarítmico*. (a) Relacione δ com a constante de amortecimento γ e com o período τ do oscilador. (b) Se n é o número de períodos necessários para que a amplitude de oscilação caia à metade do valor inicial, ache δ.

16. O gráfico mostra a curva de ressonância de potência de um certo sistema mecânico quando sujeito a uma força externa $F_0 \sin(\omega t)$, onde F_0 =constante e ω é variável.



   (a) Encontre o valor numérico de ω_0 e Q para esse sistema. (**R:** $\omega_0 = 40$ rad/s, $Q = 20$)

   (b) A força externa deixa de agir. Depois de quantos ciclos de oscilações amortecidas a energia do sistema é reduzida por um fator $1/e^5$ do seu valor inicial? ($e = 2.718$) Dica: uma boa aproximação para o período nesse caso é $2\pi/\omega_0$. (**R:** 16)

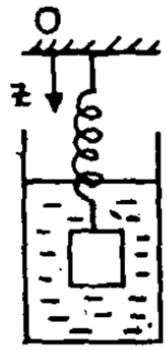
17. Observa-se que as oscilações na ausência de força externa periódica de um sistema mecânico tem frequência angula ω_1. O mesmo sistema, na presença de uma força externa $F_0 \cos(\omega t)$ (onde F_0 =constante e ω variável) tem uma curva de ressonância de potência cuja largura à meia altura é $\Delta\omega = \omega_1/5$.

   (a) Em que frequência ocorre o máximo de potência? (**R:** $1,005\omega_1$)

   (b) Determine o Q do sistema. (**R:** $Q \simeq 5$ em ótima aproximação)

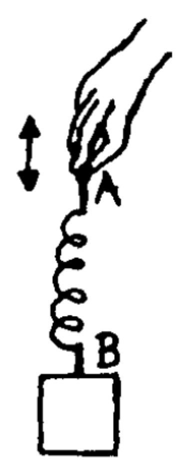
(c) Se o sistema consistir de uma massa m acoplada a uma mola de constante elástica k, determine o valor do coeficiente de atrito viscoso ρ do termo resistivo $-\rho v$, em termos de m e k. (**R:** $\rho \simeq 0,2\sqrt{mk}$)

18. Problema 9, cap. 4 de HMN. Um bloco cúbico de 10 cm de aresta e densidade 8 g/cm^3 está suspenso do teto por uma mola de constante elástica 40 N/m e comprimento relaxado de 0,5 m, e mergulhado dentro de um fluido viscoso de densidade 1,25 g/cm^3. Na situação considerada, a resistência do fluido é proporcional à velocidade, com coeficiente de proporcionalidade $\rho = 2$ N s/m. Inicialmente em equilíbrio, o bloco é deslocado de 1cm para baixo e solto a partir do repouso. Com origem no teto e eixo z vertical orientado para baixo (figura), determine a coordenada z da extremidade superior do bloco em função do tempo.



R: $z(t) = 2,15 + 0,01\exp(-0,125\,t)\,[\cos(2,23\,t) + 0,056\,\sin(2,23\,t)]$ (em m).

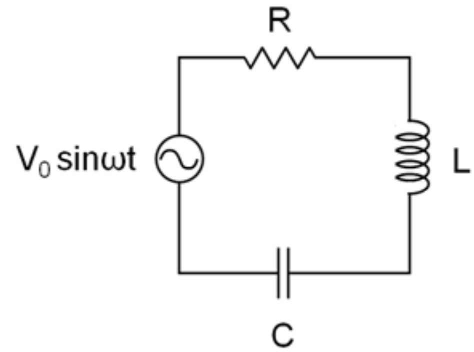
19. Problema 11, cap. 4 de HMN. Uma pessoa está segurando uma extremidade A de uma mola de massa desprezível e constante elástica 80 N/m. Na outra extremidade B, há uma massa de 0,5 kg suspensa, inicialmente em equilíbrio. No instante $t = 0$, a pessoa começa a sacudir a extremidade A (figura), fazendo-a oscilar harmonicamente com amplitude de 5 cm e período de 1s.



(a) Calcule o deslocamento z da massa em relação à posição de equilíbrio, para $t > 0$. (**R:** $z(t) = a[\sin(\omega t) - (\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)]$, com $\omega = 2\pi$ rad/s, $\omega_0 = 4\sqrt{10}$ rad/s e $a = \omega_0^2 A/(\omega_0^2 - \omega^2) = 0,066$ m, com z apontando para cima).

(b) Calcule a força total $\vec{F}(t)$ exercida sobre a extremidade A para $t > 0$. (**R:** $\vec{F} = mg\hat{z} - k[z - A\sin(\omega t)]\hat{z}$), com $A = 0,05$ m.

20. (**Desafio**) A figura mostra um circuito elétrico formado por uma fonte de tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, um capacitor de placas paralelas de capacitância C, uma resistência elétrica R e um indutor de indutância L, todos ligados em série. Sabe-se que a ddp que surge nos terminais de um capacitor com carga q acumulada em suas placas é qC. Já a ddp entre os terminais de uma resistência percorrida por corrente I é RI, enquanto a correspondente ddp nos terminais de um indutor é $L\frac{dI}{dt}$. Se a carga elétrica é conservada nesse circuito, temos que a taxa de variação no tempo da carga nas placas do capacitor (em C/s=Ampère) deve ser igual à própria corrente elétrica



$$I(t) = \frac{dq}{dt}$$

(a) Aplique a lei de Kirchhoff das tensões ao circuito acima e encontre a equação diferencial para a corrente elétrica $I(t)$. Essa equação deve ser a mesma de um sistema massa-mola forçado e amortercido.

(b) Identifique na sua equação diferencial o equivalente elétrico de cada componente do correspondente sistema mecânico. Ou seja, que componente deve corresponder à inércia representada pela massa? e à força de resistência? e à força externa?

(c) Determine a frequência natural ω_0 de oscilação da corrente elétrica, caso o circuito não contivesse a resistência R, nem estivesse acoplado a um gerador de tensão alternada, mas simplesmente carregado inicialmente com uma carga $q(0) = q_0$ em $t = 0$ e com corrente elétrica nula nesse instante ($I(0) = 0$).

(c) Assuma que a resistência elétrica não é muito grande, de forma que o regime de amortecimento seja o sub-crítico (que condição deve ser satisfeita para isso?) e escreva a solução para a corrente como função do tempo.