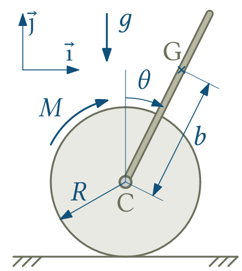
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 19 de Dezembro de 2023

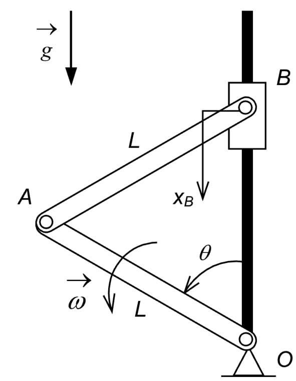
- Esta avaliação tem duração de 120 minutos e é composta por 3 questões.
- Não é permitido utilização de quaisquer dispositivos eletrônicos, tampouco consulta a qualquer material externo.
- As questões podem ser resolvidas a lápis, na ordem escolhida pelo aluno (que deve indicar claramente onde iniciou cada questão).

Questão 1 (3,5 pontos). Para melhor compreender a dinâmica de um monociclo motorizado, um estudante propôs o modelo físico ilustrado na figura ao lado. A roda é representada como um disco rígido de massa m, raio R e momento de inércia central $J_{Cz} = k_1 m R^2$, que rola sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal com velocidade angular $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$ e aceleração angular $\vec{\alpha} = -\alpha\vec{k}$. Sobre esta roda é aplicado um momento $\vec{M} = -M\vec{k}$. A pessoa que guia o monociclo, por sua vez, é representada como uma barra rígida, de massa $m' = k_2 m$ e centro de massa G, *idealmente articulada* ao centro C do disco. Deseja-se modelar um cenário em que seja possível *manter constante* o ângulo θ que o segmento CG forma com a vertical. Nestas condições, pede-se:

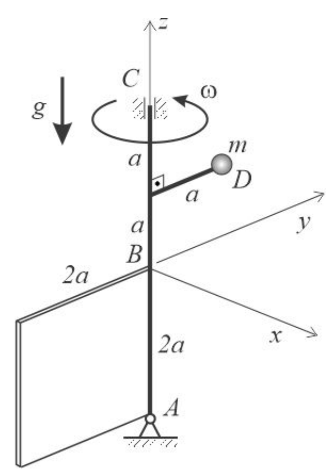


a) (0,5) os diagramas de corpo livre (DCLs) do disco e da barra;
b) (0,5) as expressões das acelerações dos centros de massa C e G em função dos dados do problema;
c) (1,5) listar e enumerar as equações obtidas pela aplicação dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular ao disco e à barra;
d) (0,5) o valor do momento M compatível com o movimento modelado em função de m, g, R, k_1, k_2 e θ;
e) (0,5) o menor valor do coeficiente de atrito estático μ compatível com a condição de rolamento sem escorregamento.

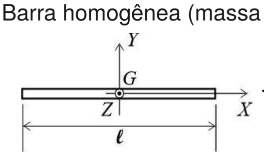
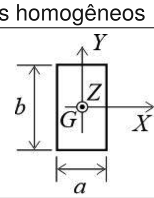
Questão 2 (3,0 pontos) A figura ao lado ilustra um sistema composto por um bloco e duas barras. O bloco B de massa m desliza na vertical, guiado pelo eixo fixo OB. A barra OA, que gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ ao redor de O, está articulada em A à barra AB. As barras OA e AB possuem massa m e comprimento L. Considere que na posição inicial, quando θ da barra OA é *aproximadamente zero*, o sistema encontra-se em repouso. Pede-se:
(a) (0,5) determinar a posição do bloco B em função de θ;
(b) (1,0) determinar a energia cinética do sistema em função de θ;
(c) (1,0) determinar o trabalho das forças externas ao sistema em função de θ;
(d) (0,5) determinar a velocidade do bloco B em função de θ.



Questão 3 (3,5 pontos). Na figura, no eixo vertical ABC há uma articulação em A e um anel em C. Soldadas nesse eixo, há uma placa homogênea, de massa m e lado $2a$, e uma barra, de comprimento a com uma massa m fixa em D, conforme mostrado na figura. O conjunto eixo, placa e barra está no plano Byz e o sistema de coordenadas (B, x, y, z) gira solidariamente ao conjunto com rotação ω constante dada. O eixo e a barra têm massas desprezíveis. Pede-se:
(a) (0,5) faça o diagrama de corpo livre (DCL) do conjunto;
(b) (1,0) obtenha a expressão da quantidade de movimento angular do conjunto, em relação ao polo B, em função da sua rotação ω;
(c) (0,5) obtenha os momentos e produtos de inércia do conjunto, envolvidos na expressão do item (b);
(d) (1,5) obtenha as reações em A e C, em função de ω.



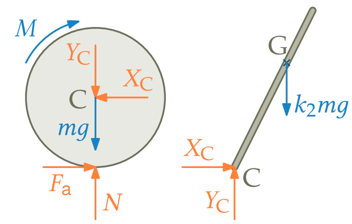
Formulário da prova: momentos de inércia de sólidos homogêneos

Barra homogênea (massa m, comprimento ℓ):	Placa retangular homogênea (massa m, lados a, b):
 $J_{GY} = J_{GZ} = \frac{1}{12} m\ell^2$	 $J_{GX} = \frac{1}{12} mb^2$ $J_{GZ} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

Questão 1 (3,5 pontos)

Resolução:

(a) Os diagramas de corpo livre são indicados na figura abaixo **(0,5)**.



(b) O disco rola sem escorregar, assim, seu centro C descreve um movimento retilíneo com velocidade $\vec{v}_C = \omega R\,\vec{\imath}$ e aceleração $\vec{a}_C = \alpha R\,\vec{\imath}$. A barra, por sua vez, descreve um movimento de translação retilínea, de tal forma que:

$$\boxed{\vec{a}_G = \vec{a}_C = \alpha R\,\vec{\imath}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

(c) Aplicando os teoremas, obtêm-se as equações (1) a (3) para o disco e as equações (4) a (6) para a barra **(1,5)**:

$$ma_{Cx} = R_x^{\text{disco}}: \quad mR\alpha = F_a - X_C \tag{1}$$
$$ma_{Cy} = R_y^{\text{disco}}: \quad 0 = N - mg - Y_C \tag{2}$$
$$J_{Cz}\alpha_z^{\text{disco}} = M_{Cz}^{\text{disco}}: \quad -k_1 mR^2\alpha = -M + RF_a \tag{3}$$
$$ma_{Gx} = R_x^{\text{barra}}: \quad k_2 mR\alpha = X_C \tag{4}$$
$$ma_{Gy} = R_y^{\text{barra}}: \quad 0 = Y_C - k_2 mg \tag{5}$$
$$J_{Gz}\alpha_z^{\text{barra}} = M_{Gz}^{\text{barra}}: \quad 0 = bX_C\cos\theta - bY_C\sin\theta \tag{6}$$

Observação: a equação (3) corresponde ao TQMA aplicado ao disco para o polo C; a equação (6) corresponde ao TQMA aplicado à barra para o polo G.

(d) Resolvendo o sistema de equações obtido no item anterior, obtemos:

$$(4),(5) \to (6): \quad 0 = b(k_2 mR\alpha)\cos\theta - b(k_2 mg)\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{g}{R}\tan\theta \tag{7}$$
$$(7),(4) \to (1): \quad mg\tan\theta = F_a - k_2 mg\tan\theta \quad \Rightarrow \quad F_a = (k_2+1)mg\tan\theta \tag{8}$$
$$(5) \to (2): \quad 0 = N - mg - k_2 mg \quad \Rightarrow \quad N = (k_2+1)mg \tag{9}$$
$$(7),(8) \to (3): \quad -k_1 mRg\tan\theta = -M + R(k_2+1)mg\tan\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = (k_1+k_2+1)mgR\tan\theta} \qquad \textbf{(0,5)}$$

(e) Utilizando as equações (8) e (9), obtemos:

$$\boxed{\mu \geq \frac{|F_a|}{N} = \tan\theta} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Questão 2 (3,0 pontos)

Resolução:

(a) Determinar a posição do bloco B em função de θ: **(0,5)**

$$(\mathrm{B}-\mathrm{O}) = 2L\cos\theta\,\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\mathrm{B}} = 2L\,(1-\cos\theta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{\mathrm{B}} = -\dot{x}_{\mathrm{B}}\vec{\jmath} = -\left(2L\sin\theta\dot{\theta}\right)\vec{\jmath} = -\left(2\omega L\sin\theta\right)\vec{\jmath}} \qquad (1)$$

(b) Determinar a energia cinética do sistema em função de θ: **(1,0)**

- Bloco B: $T_{\mathrm{B}} = \frac{m}{2}|\vec{v}_{\mathrm{B}}|^2 = \left(2mL^2\sin^2\theta\right)\omega^2 \qquad (2)$
- Barra OA (polo em O): $T_{\mathrm{OA}} = \frac{J_{\mathrm{Oz}}}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)\omega^2 = \left(\frac{mL^2}{6}\right)\omega^2 \qquad (3)$
- Barra AB (polo em $\mathrm{G_{AB}}$): $T_{\mathrm{AB}} = \frac{m}{2}|\vec{v}_{\mathrm{G_{AB}}}|^2 + \frac{J_{\mathrm{Gz}}}{2}{\omega_{\mathrm{AB}}}^2 \qquad (4)$

Aplicando a expressão do campo de velocidades para o cáculo de $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ nas duas barras, tem-se:

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = \vec{v}_{\mathrm{O}} + \vec{\omega}_{\mathrm{OA}} \wedge (\mathrm{A}-\mathrm{O}) = \omega\vec{k}\wedge\left(-L\sin\theta\vec{\imath} + L\cos\theta\vec{\jmath}\right) = -\omega L\left(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}\right) \qquad (5)$$

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = \vec{v}_{\mathrm{B}} + \vec{\omega}_{\mathrm{AB}} \wedge (\mathrm{A}-\mathrm{B}) = -\left(2\omega L\sin\theta\right)\vec{\jmath} + \omega_{\mathrm{AB}}\vec{k}\wedge\left(-L\sin\theta\vec{\imath} - L\cos\theta\vec{\jmath}\right) = \omega_{\mathrm{AB}}L\cos\theta\vec{\imath} - L\sin\theta\left(2\omega + \omega_{\mathrm{AB}}\right)\vec{\jmath} \qquad (6)$$

Igualando as expressões (5) e (6), tem-se que $\vec{\omega}_{\mathrm{AB}} = -\omega\vec{k}$. Dessa forma, $\vec{v}_{\mathrm{G_{AB}}}$ pode ser calculado aplicando-se novamente a expressão do campo de velocidades a barra AB:

$$\vec{v}_{\mathrm{G_{AB}}} = \vec{v}_{\mathrm{B}} + \vec{\omega}_{\mathrm{AB}} \wedge (\mathrm{G_{AB}}-\mathrm{B}) = -\left(2\omega L\sin\theta\right)\vec{\jmath} - \omega\vec{k}\wedge -\frac{L}{2}\left(\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) = -\frac{\omega L}{2}\left(\cos\theta\vec{\imath} + 3\sin\theta\vec{\jmath}\right) \qquad (7)$$

Substituindo (7) e (4), obtém-se a expressão da energia cinética da barra AB:

$$T_{\mathrm{AB}} = \frac{mL^2}{6}\left(1 + 6\sin^2\theta\right)\omega^2 \qquad (8)$$

A energia cinética total do sistema é calculada por meio da soma das expressões (2), (3) e (8):

$$\boxed{T = \frac{mL^2}{3}\left(1 + 9\sin^2\theta\right)\omega^2} \qquad (9)$$

(c) Determinar o trabalho das forças externas ao sistema em função de θ: **(1,0)**

- Trabalho da força peso do bloco B: $W_{\mathrm{B}} = -\Delta U_{G_{\mathrm{B}}} = 2mgL\,(1-\cos\theta) \qquad (10)$
- Trabalho da força peso da barra OA: $W_{\mathrm{OA}} = -\Delta U_{G_{\mathrm{OA}}} = \frac{mgL}{2}(1-\cos\theta) \qquad (11)$
- Trabalho da força peso da barra AB: $W_{\mathrm{AB}} = -\Delta U_{G_{\mathrm{AB}}} = \frac{3mgL}{2}(1-\cos\theta) \qquad (12)$

O trabalho total das forças externas ao sistema é calculado por meio da soma das expressões (10-12):

$$\boxed{W^{\mathrm{ext}} = 4mgL\,(1-\cos\theta)} \qquad (9)$$

(d) Determinar a velocidade do bloco B em função de θ: **(0,5)**

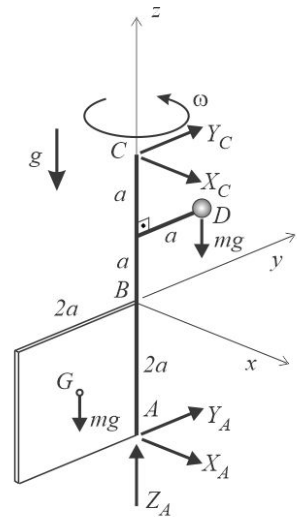
Sabendo que as forças internas nesse sistema não realizam trabalho, tem-se

$$\Delta T = W^{\mathrm{ext}} \quad \Rightarrow \quad \frac{mL^2}{3}\left(1 + 9\sin^2\theta\right)\omega^2 = 4mgL\,(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{12g}{L}\left(\frac{1-\cos\theta}{1+9\sin^2\theta}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{\mathrm{B}} = -\left[2L\sin\theta\sqrt{\frac{12g}{L}\left(\frac{1-\cos\theta}{1+9\sin^2\theta}\right)}\right]\vec{\jmath}}$$

Questão 3 (3,5 pontos)

Resolução:



(a) DCL ao lado **(0,5)**:

(b) Quantidade de movimento angular em relação ao polo B, com coordenadas (B, x, y, z) **(1,0)**:

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{B}} = m(\mathrm{G}-\mathrm{B}) \wedge \vec{v}_{\mathrm{B}} + \left(J_{\mathrm{Bx}}\omega_x - J_{\mathrm{Bxy}}\omega_y - J_{\mathrm{Bxz}}\omega_z\right)\vec{\imath} + \left(-J_{\mathrm{Byx}}\omega_x + J_{\mathrm{By}}\omega_y - J_{\mathrm{Byz}}\omega_z\right)\vec{\jmath} +$$
$$\left(-J_{\mathrm{Bzx}}\omega_x - J_{\mathrm{Bzy}}\omega_y + J_{\mathrm{Bz}}\omega_z\right)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{B}} = -J_{\mathrm{Byz}}\omega\vec{\jmath} + J_{\mathrm{Bz}}\omega\vec{k}}$$

(c) Polo B **(0,5)**:

$$\boxed{J_{\mathrm{Byz}} = [0 + m(a)(a)] + [0 + m(a)(a)] = 2ma^2} \qquad \boxed{J_{\mathrm{Bz}} = \left[\frac{m(2a)^2}{12} + ma^2\right] + ma^2 = \frac{7ma^2}{3}}$$

(d) Centro de massa CM do conjunto:

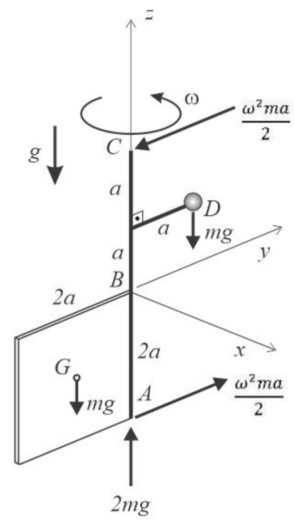
$$(\mathrm{CM}-\mathrm{B}) = \frac{m\,(x_{\mathrm{G}} + x_{\mathrm{D}})\,\vec{\imath} + m\,(y_{\mathrm{G}} + y_{\mathrm{D}})\,\vec{\jmath} + m\,(z_{\mathrm{G}} + z_{\mathrm{D}})\,\vec{k}}{2m} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{CM} \equiv \mathrm{B}$$

Pelo Teorema da Resultante (TR), obtemos **(0,5)**:

$$m\vec{a}_{\mathrm{B}} = \vec{0} = (X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{C}})\,\vec{\imath} + (Y_{\mathrm{A}} + Y_{\mathrm{C}})\,\vec{\jmath} + (Z_{\mathrm{A}} - 2mg)\,\vec{k}$$

$$X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{C}} = 0 \qquad (1)$$
$$Y_{\mathrm{A}} + Y_{\mathrm{C}} = 0 \qquad (2)$$
$$Z_{\mathrm{A}} = 2mg \qquad (3)$$

Pelo Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), obtemos **(0,5)**:



$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{B}} = \omega\left(-J_{\mathrm{Byz}}\vec{\jmath} + J_{\mathrm{Bz}}\vec{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\mathrm{H}}}_{\mathrm{B}} = \dot{\omega}\left(-J_{\mathrm{Byz}}\vec{\jmath} + J_{\mathrm{Bz}}\vec{k}\right) + \omega\left(-J_{\mathrm{Byz}}\dot{\vec{\jmath}} + J_{\mathrm{Bz}}\dot{\vec{k}}\right) = \omega^2 J_{\mathrm{Byz}}\vec{\imath}$$
$$\dot{\vec{\mathrm{H}}}_{\mathrm{B}} = m\vec{v}_{\mathrm{B}} \wedge \vec{v}_{\mathrm{B}} + \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{ext}} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 J_{\mathrm{Byz}}\vec{\imath} = a\,(2Y_{\mathrm{A}} - mg + mg - 2Y_{\mathrm{C}})\,\vec{\imath} + a\,(-2X_{\mathrm{A}} + 2X_{\mathrm{C}})\,\vec{\jmath}$$

$$\omega^2 J_{\mathrm{Byz}} = 2a\,(Y_{\mathrm{A}} - Y_{\mathrm{C}}) \qquad (4)$$
$$0 = 2a\,(-X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{C}}) \qquad (5)$$

Destas equações obtemos **(0,5)**:

De (1) e (5): $\boxed{X_{\mathrm{A}} = 0}$ e $\boxed{X_{\mathrm{C}} = 0}$

De (2) e (4): $\boxed{Y_{\mathrm{A}} = \frac{\omega^2 J_{\mathrm{Byz}}}{4a} = \frac{\omega^2 ma}{2}}$ e $\boxed{Y_{\mathrm{C}} = -\frac{\omega^2 J_{\mathrm{Byz}}}{4a} = -\frac{\omega^2 ma}{2}}$

De (3): $\boxed{Z_{\mathrm{A}} = 2mg}$