ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

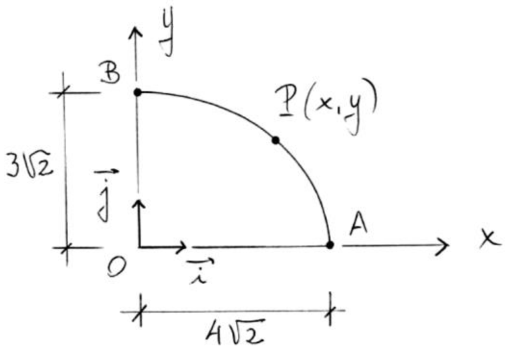
PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 7 de Novembro de 2023. Duração: 120 min.
(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e dispositivos similares)

1ª Questão (3,0 pontos). O ponto P percorre o quadrante de uma elipse, com semieixos $4\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$, de A até B :
O movimento de P é definido pelas equações do movimento (em formulação adimensional):

$$x = 4\sqrt{2}\cos t \;\text{ e }\; y = 3\sqrt{2}\sin t, \text{ sendo } 0 \le t \le \pi/2$$

Determine, para o instante $t = \pi/4$:

a) A velocidade e a aceleração na base fixa
b) Os versores do triedro de *Frenet*
c) A velocidade e a aceleração intrínsecas, na base de *Frenet*
d) O raio de curvatura da trajetória



RESOLUÇÃO

a) Velocidade e aceleração na base fixa

$$\vec{r} = \sqrt{2}\,(4\cos t\,\vec{\imath} + 3\sin t\,\vec{\jmath})$$

$$\therefore \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sqrt{2}\,(-4\sin t\,\vec{\imath} + 3\cos t\,\vec{\jmath}) \quad \text{e} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sqrt{2}\,(-4\cos t\,\vec{\imath} - 3\sin t\,\vec{\jmath})$$

No instante $t = \pi/4$ temos: $\boxed{\vec{v} = -4\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}}$ e $\boxed{\vec{a} = -4\,\vec{\imath} - 3\,\vec{\jmath}}$

0,5

b) Versores da base de Frenet

Temos: $v = \sqrt{2}\sqrt{16\sin^2 t + 9\cos^2 t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \sqrt{2}\,\frac{32\sin t\cos t - 18\cos t\sin t}{2\sqrt{16\sin^2 t + 9\cos^2 t}} = 7\sqrt{2}\,\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{16\sin^2 t + 9\cos^2 t}}$$

Em $t = \pi/4$ teremos: $v = \sqrt{2}\sqrt{16\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2}} = 5$ e $\frac{dv}{dt} = \dot{v} = 7\sqrt{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{16\frac{1}{2}+9\frac{1}{2}}} = \frac{7}{5}$

Sendo *s* o comprimento do arco medido sobre a curva, de A até P, usando a definição dos versores de Frenet, teremos:

$$\vec{\tau} = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\sqrt{2}\,(-4\sin t\,\vec{\imath} + 3\cos t\,\vec{\jmath})}{\sqrt{2}\sqrt{16\sin^2 t + 9\cos^2 t}}\text{; em } t = \pi/4 \text{ teremos: } \boxed{\boldsymbol{\vec{\tau}} = \frac{-4\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}}{5}}$$

Para o versor normal:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n} \Rightarrow \vec{n} = \rho\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho\frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\rho}{v}\frac{d\vec{\tau}}{dt} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|}$$

Temos: $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{v}}{v}\right] = \frac{\dot{\vec{v}}\cdot v - \vec{v}\cdot\dot{v}}{v^2}$

Em $t = \pi/4$ teremos: $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{(-4\,\vec{\imath} - 3\,\vec{\jmath})\cdot 5 - (-4\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath})\cdot\frac{7}{5}}{25} = \frac{24}{125}(-3\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath}) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{n}} = \frac{-3\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath}}{5}}$

1,0

Para o versor binormal, tratando-se de uma curva no plano xy: $\boxed{\boldsymbol{\vec{b}} = \boldsymbol{\vec{k}}}$

ou $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \frac{-4\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}}{5} \wedge \frac{-3\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath}}{5} = \vec{k}$

<u>RESOLUÇÃO ALTERNATIVA do item b):</u>

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = \boxed{\frac{-4\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}}{5}}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{v}\wedge\vec{a}}{|\,\vec{v}\wedge\vec{a}\,|} = \frac{24\,\vec{k}}{24} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{b} = \vec{k}}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{n} = -0{,}6\,\vec{\imath} - 0{,}8\,\vec{\jmath}}$$

	ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO **Departamento de Engenharia Mecânica**

c) Velocidade e aceleração intrínsecas

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\tau})\,\vec{\tau} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{v} = 5\,\vec{\tau}}$$

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\,\vec{\tau} + (\vec{a} \cdot \vec{n})\,\vec{n} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{a} = 1{,}4\,\vec{\tau} + 4{,}8\,\vec{n}}$$

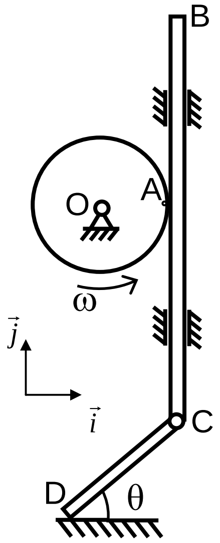
1,0

d) Raio local de curvatura

$$\rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|} = \frac{5^3}{24} \quad \therefore \quad \boxed{\rho = \frac{125}{24}}$$

0,5

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica



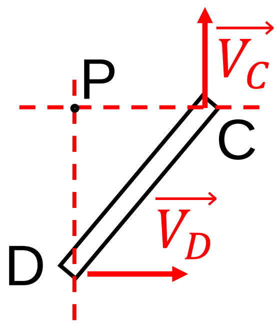
2ª Questão (3,5 pontos). No sistema mostrado na figura, o disco de centro fixo *O* tem raio *R* e vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante. O disco rola sem escorregar em relação à barra *BC*, que tem liberdade para mover-se verticalmente. A barra *CD* tem comprimento *L*, está articulada em *C* e desliza no ponto *D*, mantendo contato com a superfície horizontal.
Para o instante considerado, pede-se:

a) A velocidade do ponto *A*, localizado na periferia do disco, e de forma que o vetor (A – O) é paralelo a $\vec{\imath}$.
b) Os centros instantâneos de rotação (*CIR*) do disco e da barra *CD*.
c) O vetor de rotação da barra *CD*.
d) A aceleração do ponto *A* pertencente ao disco e do ponto *C*.

RESOLUÇÃO

a) Velocidade do ponto *A*

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \wedge (A - O) \;\Rightarrow \overrightarrow{V_A} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (R\vec{\imath}) \;\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{V_A} = \omega R\vec{\jmath}}$$ 0,5



b) CIR do disco

O CIR do disco está no **ponto O, que é um ponto fixo** 0,5

Para a barra *CD*, CIR_{CD} está sobre o **ponto *P*** 0,5

b) Vetor rotação da barra *CD*

A barra *BC* está em translação com velocidade igual a $\overrightarrow{V_A}$

Portanto, $\overrightarrow{V_C} = \omega R\vec{\jmath}$

Para a barra *CD*:

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{\omega_{CD}} \wedge (C - P) \;\Rightarrow \omega R\vec{\jmath} = \vec{0} + \omega_{CD}\vec{k} \wedge (Lcos\theta\vec{\jmath}) \;\Rightarrow \omega_{CD} = \frac{\omega R}{Lcos\theta}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{\omega_{CD}} = \frac{\omega R}{Lcos\theta}\vec{k}}$$ 1,0

c) Aceleração do ponto *A* do disco e do ponto *C*

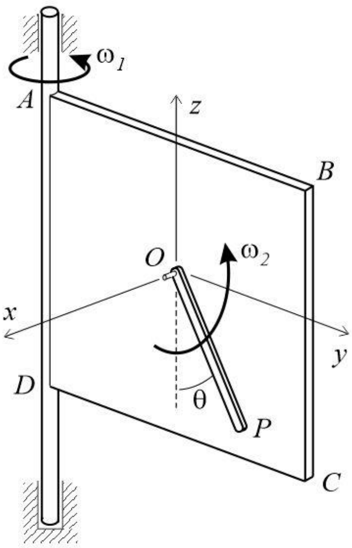
Para o disco: $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)]$

$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge [\omega R\vec{\jmath}] \;\Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_A = -\omega^2 R\vec{\imath}}$ 0,5

Como $\vec{\omega}$ é constante, $\overrightarrow{V_C}$ é constante $\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{a_C} = \vec{0}}$ 0,5

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos). A placa quadrada $ABCD$, de lado $2a$, gira em torno do eixo vertical AD com velocidade angular $\omega_1\vec{k}$ (ω_1 constante). A barra delgada OP, de comprimento ℓ, é vinculada ao ponto O (localizado no centro da placa) por meio de um pino que a impede de mover-se fora do plano Oyz. Sabendo que a barra OP gira com velocidade angular $\omega_2\vec{\imath}$ (ω_2 constante) em torno do eixo Ox e denotando por θ o ângulo fomado entre $-z$ e $(P-O)$, pede-se determinar, em função dos dados do problema:



(a) a velocidade relativa, a velocidade de arrastamento e a velocidade absoluta de P;
(b) a aceleração relativa, a acelEração de arrastamento, a aceleração de Coriolis e a aceleração absoluta de P.

RESOLUÇÃO

(a) A velocidade relativa de P é:

$$\vec{v}_{Prel} = \omega_2\vec{\imath} \wedge (P-O) = \omega_2\vec{\imath} \wedge \ell\left(\sin\theta\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k}\right)$$
$$= \omega_2\ell\left(\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right) \quad (0{,}5)$$

A velocidade de arrastamento de P é:

$$\vec{v}_{Parr} = \vec{v}_A + \omega_1\vec{k} \wedge (P-A) = \vec{0} + \omega_1\vec{k} \wedge [(P-O)+(O-A)]$$
$$\Rightarrow \vec{v}_{Parr} = \omega_1\vec{k} \wedge \left[\ell\left(\sin\theta\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k}\right) + \left(a\vec{\jmath} - a\vec{k}\right)\right] = -\omega_1(\ell\sin\theta + a)\vec{\imath} \quad (0{,}5)$$

A velocidade absoluta de P é:

$$\vec{v}_P = \omega_1(\ell\sin\theta + a)\vec{\imath} + \omega_2\ell\left(\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right) \quad (0{,}25)$$

(b) A aceleração relativa de P é:

$$\vec{a}_{Prel} = \omega_2\vec{\imath} \wedge [\omega_2\vec{\imath} \wedge (P-O)] = \omega_2\vec{\imath} \wedge \left[\omega_2\vec{\imath} \wedge \ell\left(\sin\theta\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_{Prel} = \omega_2\vec{\imath} \wedge \left[\omega_2\ell\left(\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right)\right] = \omega_2^2\ell\left(-\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right) \quad (0{,}5)$$

A aceleração de arrastamento de P é:

$$\vec{a}_{Parr} = \vec{a}_A + \dot{\omega}_1\vec{k} \wedge (P-A) + \omega_1\vec{k} \wedge \left[\omega_1\vec{k} \wedge (P-A)\right] = \omega_1\vec{k} \wedge [-\omega_1(\ell\sin\theta + a)\vec{\imath}]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_{Parr} = -\omega_1^2(\ell\sin\theta + a)\vec{\jmath} \quad (0{,}5)$$

A aceleração de Coriolis de P é:

$$\vec{a}_{Pcor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{Prel} = 2\omega_1\vec{k} \wedge \omega_2\ell\left(\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right) = -2\omega_1\omega_2\ell\cos\theta\,\vec{\imath} \quad (0{,}5)$$

A aceleração absoluta de P é:

$$\vec{a}_P = \omega_2^2\ell\left(-\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right) - \omega_1^2(\ell\sin\theta + a)\vec{\jmath} - 2\omega_1\omega_2\ell\cos\theta\,\vec{\imath}$$
$$\Rightarrow \vec{a}_P = -2\omega_1\omega_2\ell\cos\theta\,\vec{\imath} - \left[\omega_2^2\ell\sin\theta + \omega_1^2(\ell\sin\theta + a)\right]\vec{\jmath} + \omega_2^2\ell\cos\theta\,\vec{k} \quad (0{,}25)$$