

Mecânica I – PME 3100

Notas de Aula – Parte 3

# **MECÂNICA GERAL**

## **DINÂMICA**

Roberto Spinola Barbosa

Conteúdo:

1.	INTRODUÇÃO .....	4
2.	REFERENCIAL E SISTEMA DE COORDENADAS.....	5
3.	DINÂMICA DA PARTÍCULA .....	9
3.1.	Quantidade Movimento Translacional .....	9
3.2.	Momento da Quantidade Movimento .....	10
3.3.	Movimento Angular e Momento.....	10
3.4.	Equação Fundamental .....	10
3.5.	Impulso.....	12
3.6.	Energia Cinética .....	12
3.7.	Trabalho .....	12
3.8.	Potência .....	13
3.9.	Função Potencial .....	13
3.10.	Variação da Energia Cinética e Trabalho.....	15
3.11.	Forças Conservativas e Sistemas Conservativos.....	15
4.	DINÂMICA DOS SÓLIDOS.....	20
5.	TEOREMA DA RESULTANTE .....	20
5.1.	Resolução de Problemas.....	22
6.	TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA - <i>TEC</i> .....	31
6.1.	Trabalho e Energia Cinética.....	31
6.2.	Energia Cinética do Corpo Rígido .....	34
7.	MOMENTO E PRODUTO DE INÉRCIA .....	45
7.1.	Momento de Inércia em Relação a Eixo .....	45
7.2.	Momento de Inércia em Relação a Coordenadas Cartesianos .....	46
7.3.	Produto de Inércia .....	51
7.4.	Matriz de Inércia .....	55
7.5.	Translação de Eixos Paralelos.....	56
7.6.	Rotação de Eixo .....	61
7.7.	Eixos Principais e Central .....	63
7.8.	Elipsóide de inércia .....	63
8.	TEOREMA DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR.....	64
8.1.	Momento e Momento da Quantidade de Movimento .....	64

8.2. Momento da Quantidade de Movimento.....	66
8.3. Teorema da Quantidade de Movimento Angular - TQMA.....	69
9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	76

## 1. INTRODUÇÃO

Esta monografia resume as notas de aula deste autor na disciplina de Mecânica I (PME3100), elaborada ao longo do seu aprimoramento didático junto a equipe de dinâmica do Departamento de Engenharia Mecânica (PME) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EP-USP). O texto pressupõe que o aluno domine os conhecimentos elementares de álgebra vetorial, álgebra linear e de cálculo diferencial e integral, adquirido nas disciplinas dos primeiros anos básicos (biênio) do curso de engenharia.

O conjunto de notas de aula se inicia pelo trato da Estática, Cinemática e finalmente a Dinâmica. Na estática sistemas estruturais são modelados e analisados. Na cinemática, os movimentos e composição de movimentos são tratados. Em dinâmica os teoremas de energia (Teorema da Energia Cinética - *TEC*), *Newton* (Teorema da Resultante - *TR*) e *Euler* (Teorema da Quantidade de Movimento Angular - *TQMA*) são apresentados.

A notação vetorial (*Boulos*, 1991) é utilizada sistematicamente ao longo deste texto.

### 1.1. Espaço e Tempo

Segundo *Newton* (1687) o **ESPACO** absoluto (referencial) permanece imóvel independente de qualquer fator externo. O **TEMPO** (absoluto ou *Newtoniano*) escoia uniformemente independente de qualquer fator externo. A **SIMULTANEIDADE** é a correspondência de posição de movimentos de dois ou mais pontos. **RELÓGIO** é a medida de tempo por comparação simultânea de movimento (ex.: movimento angular de ponteiros ou astros).

### 1.2. Princípios Fundamentais

**Primeiro Princípio** (Lei da Inércia) “Todo ponto material isolado no espaço e tempo absolutos, permanece num estado de repouso ou em movimento retilíneo uniforme” (Lei da conservação da quantidade de movimento  $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$ ). O termo isolado significa ausência de contato e portanto de forças.

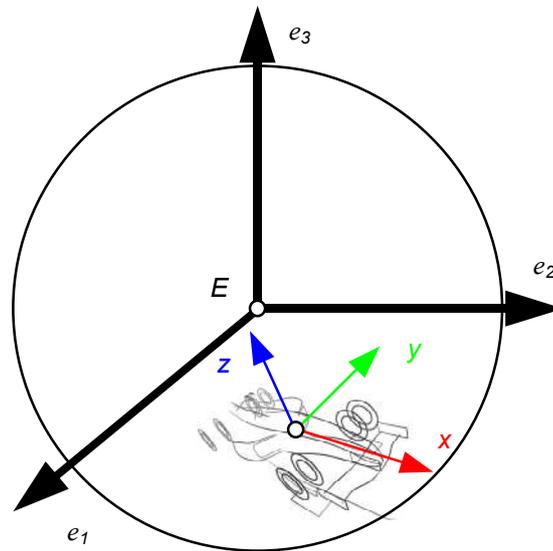
**Segundo Princípio** (Lei Fundamental) “A variação da quantidade de movimento é proporcional à força que age na partícula ou ponto material, no espaço e tempo absolutos, e se dá na mesma direção e sentido daquela força” (para massa constante  $\dot{\vec{p}} = \dot{m} \cdot \vec{V} + m \cdot \dot{\vec{V}} = m \vec{a} = \vec{F}$ ).

**Terceiro Princípio** (Ação e reação) “As forças de contato que dois corpos exercem entre si são sempre iguais e diretamente opostas”.

### 1.3. Referencial e Sistema de Coordenadas

Um corpo rígido pode ser considerado um referencial ou seja, de um de seus pontos se observa movimentação de outros corpos, segundo um sistema de coordenadas. Os referenciais em geral são associados a corpos (e se confundem com eles) e podem ser fixos ou móveis. A segunda lei de *Newton*, que relaciona a variação da quantidade de movimento com as forças ativas, é válida apenas em referenciais fixos (inerciais ou *Newtonianos*) ou referenciais com velocidade e

orientação constante (*França e Baruh*). Nestes referenciais, os vetores de posição, velocidade e aceleração tem formas simples. Entretanto, em alguns casos da dinâmica é conveniente e vantajoso expressar o movimento em um referencial móvel.



**Figura 1 – Referencial**

A melhor aproximação de um referencial fixo é considerar uma estrela fixa distante. Uma aproximação menos precisa é considerar o sol como referencial fixo. Entretanto, dependendo do tipo de fenômeno, a terra pode ser considerado um referencial inercial para descrever movimentos de corpos na sua superfície. Descrever por exemplo, o movimento de um veículo utilizando o referencial móvel solidário à terra é simples conforme mostrado na Figura 1. Entretanto, não se leva em consideração o pequeno efeito da rotação deste referencial móvel, que no caso da descrição da sutil movimentação das marés, não pode ser desprezado.

Note que o centro da Terra viaja em torno do sol com velocidade de 30.200 m/s (ou 108.720 km/h) e tem na linha do equador a velocidade relativa periférica de 465 m/s (1.674 km/h). A aceleração centrípeta na superfície do planeta (raio médio de 6.371 km) devido a sua rotação própria (0,2618 rad / hora) resulta em uma aceleração centrípeta de  $a_c = V^2/R = 0,03 \text{ m/s}^2$  (ou seja, 3 milésimos de  $g$ ) que é praticamente imperceptível sendo uma simplificação plausível para

alguns fenômenos na sua superfície. A aceleração da gravidade nos trópicos é cerca de 0,53% menor que nos pólos.

**Sistema de Coordenadas:** Um conjunto independente de versores unitários constitui um sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas pode ser retilinear (aquele onde a direção dos versores não se altera) ou curvilinear (aquele que incorpora a direção da trajetória que a origem descreve).

Um sistema de coordenadas definida no espaço *Euclidiano*  $\mathcal{R}^3$  da geometria clássica, é composta por dois eixos ortogonais (portanto independentes), formando um plano, e um terceiro eixo perpendicular ao plano (portanto independentes formando uma base positiva). A sistema de coordenadas pode ser fixo  $Ee_1e_2e_3$ , ou móvel  $Oxyz$ , conforme apresentado na Figura 2. Um sistema de coordenadas pode estar “**solidário**” a um corpo rígido e, portanto se movimentando junto com ele.

Um vetor  $\vec{r}$  pode ser descrito na base móvel, segundo os versores unitários  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  (vetor representado por uma seta sobre a letra) ou, representado no sistema de coordenadas fixo, segundo os versores  $e_1, e_2$  e  $e_3$  (letras em negrito identificando vetor).

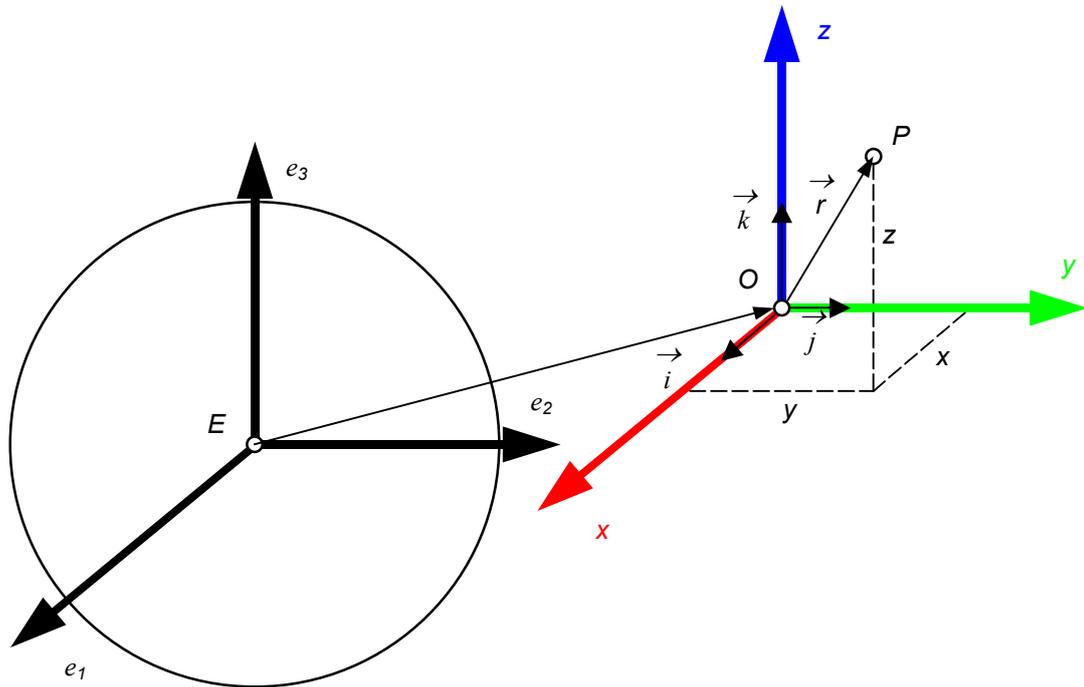


Figura 2 – Sistema de Coordenadas

O movimento de um corpo rígido e, portanto de um sistema de coordenadas móvel  $Oxyz$ , pode ser retilinear ou curvilinear. Pode ter orientação invariante ou ter, por exemplo, um de seus eixos acompanhando uma trajetória (sistema de coordenadas intrínseco - base de *Frenet*).

A descrição da distribuição de massa de um corpo é facilitada quando se utiliza de uma sistema de coordenadas solidário ao corpo (a matriz de inércia torna-se constante). Entretanto, quando se utiliza uma sistema móvel, deve-se ter um cuidado especial no cálculo da derivada de vetores. Deve-se distinguir a **derivada local**, feita com respeito a um referencial móvel, da **derivada total** (ou global) que é calculada em relação ao referencial inercial fixo.

## 2. DINÂMICA DA PARTÍCULA

Os teoremas gerais da dinâmica podem ser definidos para uma partícula  $P$ , de massa  $m$ , com posição espacial  $\vec{r} = (P - O)$  no instante de tempo  $t$ , submetido à força  $(\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}), P)$ :

### 2.1. Quantidade Movimento Translacional

Defini-se **QUANTIDADE DE MOVIMENTO**  $\vec{p}$  de um partícula  $P$  de massa  $m$  com velocidade  $\vec{V}$  no instante  $t$ , o vetor:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{V}(t)} \quad (1)$$

Derivando com respeito ao tempo e considerando a massa constante, obtêm-se:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}m \cdot \vec{V}(t) + m \cdot \frac{d}{dt}\vec{V}(t) = m \cdot \vec{a}(t) \quad (2)$$

que resulta em:

$$\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}(t)} \quad (3)$$

ou seja, a variação da quantidade de movimento de uma partícula é decorrente da força a ela aplicada (segunda lei de *Newton*).

## 2.2. Momento da Quantidade Movimento

Defini-se **MOMENTO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO** (ou Momento Angular)  $\vec{H}_O$  de um partícula  $P$  de massa  $m$  com velocidade  $\vec{V}$  em relação ao pólo  $O$ , o vetor:

$$\vec{H}_O = (P-O) \wedge \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_O = (P-O) \wedge m \cdot \vec{V} \quad (4)$$

## 2.3. Movimento Angular e Momento

De maneira muito simples pode-se correlacionar a quantidade de movimento angular  $\vec{H}_O$  com o momento em relação a um pólo qualquer, fazendo a pré multiplicação da expressão anterior  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$  vetorialmente por  $(P-G)$  obtendo-se de imediato:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \vec{F} \\ (P-G) \wedge \dot{\vec{p}} &= (P-G) \wedge \vec{F} \\ \dot{\vec{H}}_G &= \vec{M}_G \end{aligned} \quad (5)$$

ou seja, a taxa de variação temporal o momento angular, para uma determinada posição, é igual ao momento em relação ao mesmo pólo  $G$ . A dedução completa será apresentada no item 7.

## 2.4. Equação Fundamental

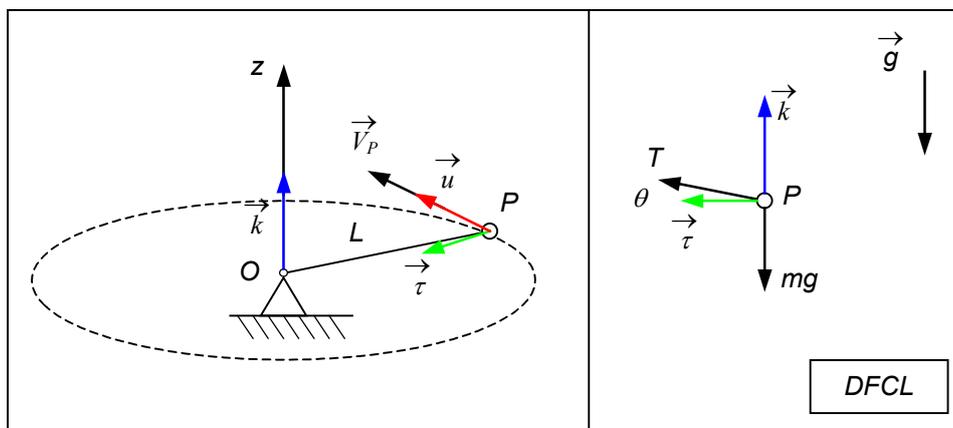
Existe um referencial fixo (ou inercial) em relação ao qual um ponto material se move com aceleração  $\vec{a}$  quando submetido a força resultante  $\vec{F}(t)$  tal que:

$$\boxed{m \cdot \vec{a} = \vec{F}(t)} \quad (6)$$

Note que a força pode ser de campo (proximidade) ou de contato entre corpos.

**Exemplo: Dinâmica da Partícula**

Considere uma partícula de massa  $m$  com movimento circular com velocidade tangencial  $\vec{V}_P$  constante amarrada num fio ideal de comprimento  $L$  fixado na articulação no ponto  $O$ , conforme ilustrado na Figura 3a (similar a uma *boleadeira*). Determinar a força  $T$  no vínculo  $O$ .



**Figura 3 – Dinâmica da Partícula**

**Resolução:** a) **Sistema:** partícula de massa  $m$ . b) **Diagramas:** DVC e DFCL conforme Figura 3b. c) **Referencial,** base e pólo: base móvel intrínseca  $P\vec{u}\vec{\tau}\vec{k}$  solidária à partícula. d)

**Teoremas:** Campo de velocidade e aceleração e  $TR$ . Para a trajetória circular tem-se:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = 0 + \omega \vec{k} \wedge L(-\cos \theta \vec{\tau} + \text{sen } \theta \vec{k}) = L\omega \cos \theta \vec{u}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = 0 + 0 + L\omega^2 \cos \theta \vec{\tau}$$

$$m\vec{a}_P = \sum \vec{F} \Rightarrow mL\omega^2 \cos \theta \vec{\tau} = T(\cos \theta \vec{\tau} + \text{sen } \theta \vec{k}) - mg \vec{k}$$

$$\begin{cases} m a_{G\vec{u}} = 0 \\ mL\omega^2 \cos \theta = T \cos \theta \\ T \text{sen } \theta = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{G\vec{u}} = 0 \\ T = mL\omega^2 = mV_P^2 / L \cos^2 \theta \\ \theta = \arcsen \frac{mg}{T} = \arcsen \frac{g}{L\omega^2} \end{cases} \quad (\text{Note que o fio tem inclinação } \theta)$$

## 2.5. Impulso

O **Impulso** de uma força  $(\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}), P)$  é definida como:

$$\vec{I}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \vec{F}(t) dt \quad (7)$$

## 2.6. Energia Cinética

A **Energia Cinética** de uma partícula  $P$ , de massa  $m$ , no instante de tempo  $t$ , é definida como o escalar:

$$T(t) = \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}^2 \quad \text{ou} \quad T(t) = \frac{1}{2} m \cdot \vec{V} \cdot \vec{V} \quad (8)$$

## 2.7. Trabalho

O **Trabalho Elementar** realizado por uma força  $(\vec{F}(t), P)$  é dado por:  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . O **Trabalho** realizado por uma força  $(\vec{F}(t), P)$  apenas função do tempo, entre os instantes de tempo  $t_0$  até  $t$ , que leva a partícula da posição  $r_0$  até a posição  $r$  é o escalar definido por:

$$W(t_0, t) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{ou} \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \vec{V} dt \quad (9)$$

pois:  $\vec{V} = d\vec{r}/dt$ . Note entretanto que a força  $(\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}), P)$  pode ser função do tempo, da posição e da velocidade. Neste caso para a integral acima ser definida requer o conhecimento da função que descreve a sua variação.

## 2.8. Potência

Chama-se **Potência** da força ( $\vec{F}(t), P$ ) para a partícula com velocidade  $\vec{V}_p$  no instante de tempo  $t$ , o escalar definido por:

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{V}} \quad (10)$$

Note também que a variação do trabalho é:  $dW = \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

## 2.9. Função Potencial

Se uma forças  $\vec{F}$ , atuante num ponto material for tal que o trabalho elementar  $dW = \vec{F} \cdot dP$  seja igual a diferencial de um a função tal que  $dW = dU(P)$ , chama-se **Função Potencial**  $U(P)$  e a força é conservativa. Neste caso ao trabalho realizado pela forças, não depende da trajetória percorrida pelo ponto material entre os pontos  $P_0$  e  $P$ . Portanto quando existe a função  $U(P)$  o trabalho  $W$  é obtido pela integral de linha:

$$W = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot dP = \int_{P_0}^P dU(P) = U(P) - U(P_0) \quad (11)$$

### Exemplos: Força Gravitacional e de Mola

Considere uma partícula de massa  $m$  se movimentando num local com força de campo do tipo ação da GRAVIDADE. Tomando o referencial  $Oxyz$  com a força gravitacional orientada para baixo na direção  $O\vec{k}$ , conforme ilustrado na Figura 4a, tem-se:  $\vec{F}_G = -mg\vec{k}$  e  $dP = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  portanto

$$dW = -mg\vec{k} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = -mg \cdot dz \quad \text{cuja integral resulta em:}$$

$$W = \int_{z_0}^z -mg \cdot dz = -mg \int_{z_0}^z dz = -mg z \Big|_{z_0}^z = -mg(z - z_0).$$

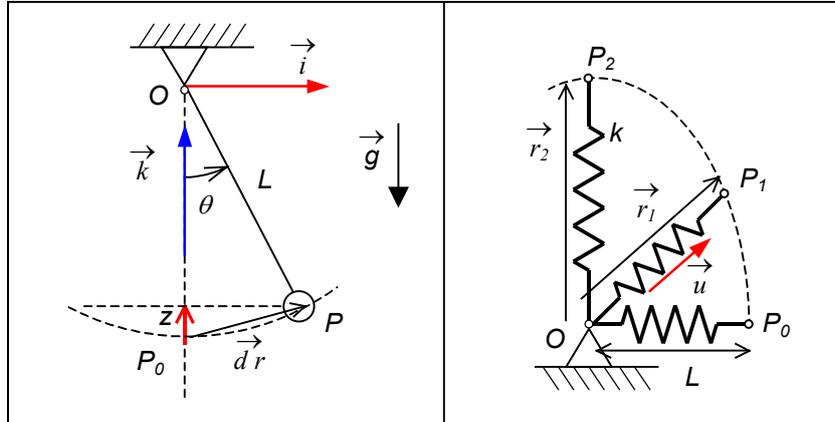


Figura 4 – Força de Campo e Elástica

Considere uma partícula ligada à extremidade de uma MOLA linear, de comprimento livre  $L$  (comprimento da mola sem força) que está presa na outra extremidade em um ponto fixo  $O$ . Tomando agora o sistema de coordenadas  $O\vec{u}\vec{\tau}\vec{k}$  móvel e solidário à mola, conforme ilustrado na Figura 4b, tem-se:  $\vec{F}_M = -k(r-L)\vec{u}$  e trajetória da partícula descrita por:  $(P-O) = \vec{r} = r\vec{u}$  cuja variação é:  $d(r\vec{u}) = dr\vec{u} + r d\vec{u}$ .

Portanto:  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -k(r-L)\vec{u} \cdot (dr\vec{u} + r d\vec{u}) = -k(r-L) \cdot dr$  (pode-se expandir  $d(\vec{r}) \Rightarrow d(r-L)$  pois  $L$  é uma constante). Portanto o trabalho realizado pela força da mola será determinado pela integral definida em  $(r-L)$ :

$$W_{(1 \rightarrow 2)} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -k \cdot \int_{r_1}^{r_2} (r-L) \cdot dr = -k \cdot \frac{1}{2} (r-L)^2 \Big|_{r_1}^{r_2} = -\frac{1}{2} k (r_2 - L)^2 + \frac{1}{2} k (r_1 - L)^2$$

Se a posição inicial da partícula coincidir com o comprimento livre da mola ( $r_1 = L$ ) ter-se-á:

$W_{(1 \rightarrow 2)} = -\frac{1}{2} k (r_2 - L)^2$ . Se a posição da partícula for medida a partir do comprimento livre

( $x_1 = r_1 - L$  e  $x_2 = r_2 - L$ ) ter-se-á: 
$$W_{(1 \rightarrow 2)} = -\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

## 2.10. Variação da Energia Cinética e Trabalho

A variação da **Energia Cinética** de uma partícula é igual ao **Trabalho** realizado pelas forças ativas externas, em um mesmo intervalo de tempo.

**Demonstração:** Utilizando a definição de energia cinética e a equação fundamental da dinâmica expressa em componentes intrínsecas, obtêm-se projetando na direção tangencial, multiplicando escalarmente por  $\vec{t}$ :

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m \cdot (a_t \vec{t} + a_n \vec{n}) = \vec{F} \Rightarrow m \cdot (a_t \vec{t} + a_n \vec{n}) \cdot \vec{t} = \vec{F} \cdot \vec{t} \quad (12)$$

Multiplicando cada lado pela velocidade  $V$  e lembrando que a variação da energia cinética é  $dT/dt = m\dot{V}$ , obtêm-se:

$$m \cdot a_t = m \cdot \dot{V} = \vec{F} \cdot \vec{t} \Rightarrow m \cdot \dot{V} \cdot V = \vec{F} \cdot V \cdot \vec{t} \Rightarrow \dot{T} = \vec{F} \cdot \vec{V} \\ dT = \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{P_0}^P dT = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow T - T_0 = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (13)$$

$$\boxed{\Delta T = T - T_0 = W_{(t_0 \rightarrow t)}} \quad (14)$$

que corresponde a variação da energia cinética  $T$  de uma partícula de massa  $m$ , num intervalo de tempo de  $t_0$  até  $t$ , que é idêntico ao trabalho  $W$  realizado pelas forças resultantes que nele atuam, durante a variação de posição no intervalo de  $P_0$  até  $P$ .

## 2.11. Forças Conservativas e Sistemas Conservativos

Forças (ou Sistemas) conservativas(os) são aquelas que quando o sistema é deslocado de uma configuração (posição relativa entre suas partes) para outra, o trabalho realizado pelas forças dependem somente da posição inicial e final (portanto independente do percurso da configuração/movimentação do sistema).

**Princípio da Conservação da Energia Mecânica:** Para um sistema conservativo e sua variação, valem as seguintes expressões de energia mecânica (cinética + potencial), uma vez que nenhuma energia é removida do sistema durante sua movimentação:

$$T + V = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad (15)$$

### Exemplos: Teorema da Energia Cinética:

Considere um sistema **massa/mola** deslizando sobre um plano sem atrito na direção  $x$ . A energia cinética  $T$  do sistema é dada por:  $T = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$ . O trabalho da força da mola é expressa pela integral do trabalho elementar realizado pela força de mola ( $F_{mola} = -k(x - x_0)$ ) durante a sua movimentação a partir da condição livre ( $x_0 = L$ ) até a posição de equilíbrio:

$$W = \int_{x_0}^x F_m \cdot dx = \int_{x_0}^x (-k x) \cdot dx = -k \int_{x_0}^x x \cdot dx = -\frac{k}{2} x^2 \Big|_{x_0}^x = -\frac{1}{2} k x^2 \quad \text{substituindo na equação do}$$

Teorema da Energia Cinética resulta em:  $T - T_0 = W_{(r_0 \rightarrow r)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 = -\frac{1}{2} k \cdot x^2 \quad \Rightarrow$

$$m \cdot \dot{x}^2 + k \cdot x^2 = 0 \quad \text{e derivando com respeito ao tempo: } m \cdot 2 \ddot{x} \dot{x} + k \cdot 2 \dot{x} x = 0 \quad \Rightarrow \quad m \ddot{x} + k x = 0$$

que é a conhecida equação diferencial de segunda ordem do sistema oscilatório massa/mola. A solução da equação diferencial de segunda ordem pode ser obtida de forma recursiva por dupla integração da equação que é função do tempo, na forma:  $\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m} x(t)$  obtendo

$$\text{systematicamente a velocidade } \dot{x}(t) = \frac{k}{m} \int_t^{t+dt} \ddot{x} \cdot dt + \dot{x}_0 \quad \text{e a posição } x(t) = \int_t^{t+dt} \dot{x} \cdot dt + x_0,$$

conhecidas as condições iniciais  $\dot{x}_0$  e  $x_0$ .

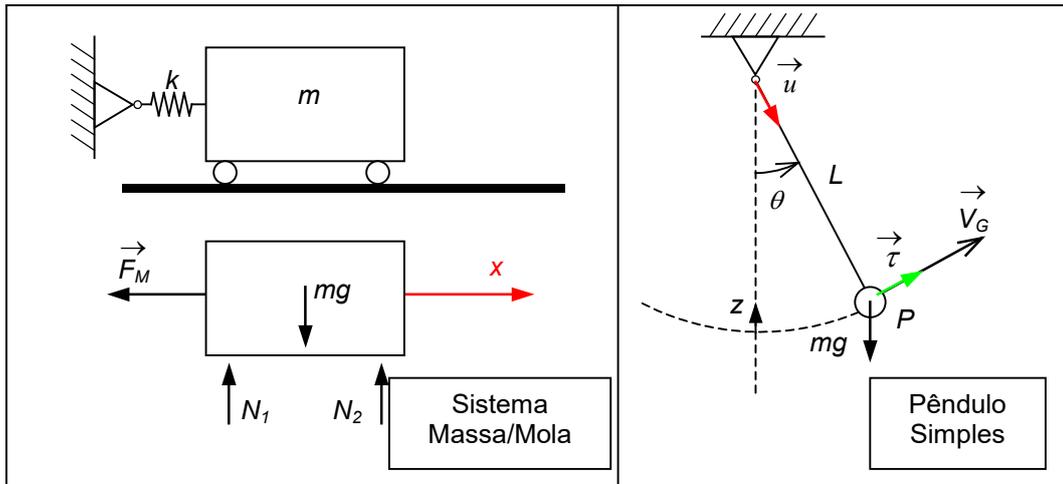


Figura 5 – Sistema Massa/Mola e Pêndulo Simples

Outro exemplo interessante é **pêndulo simples**: A energia cinética da massa pendular com comprimento  $L$  e variação angular  $\theta$  é  $T = \frac{1}{2}m \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2}m \cdot (L\dot{\theta})^2$ . O trabalho da força gravitacional da massa  $m$  é:  $W = mgh = mgL \cdot (1 - \cos\theta)$  e substituindo na equação do **TEC**

resulta em:  $T - T_0 = W_{(r_0 \rightarrow r)} \Rightarrow \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 = mgL(1 - \cos\theta)$  derivando com respeito ao

$$\text{tempo } \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta} \cdot \dot{\theta} - mgL(1 - \cos\theta) \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mL^2 \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL \sin\theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$(mL^2)\ddot{\theta} + mgL \sin\theta = 0$  para  $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$  que é a conhecida equação do sistema pendular para movimento angular com pequenas variações.

(Note que o trabalho realizado pela força  $R$  no cabo sobre o corpo é nula pois o movimento tem direção  $\vec{\tau}$  perpendicular à força  $\vec{u}$ ).

Para determinar a tensão no cabo  $R$ , considerando que a massa tenha sido abandonada com velocidade nula a partir da posição  $h$  ( $\theta < \pi/2$ ), portanto,  $V^2 = 2g(h - z)$  utiliza-se do **TR** aplicado na massa com trajetória circular de raio  $L$ :

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F} \Rightarrow m \cdot (a_t \vec{\tau} - a_n \vec{u}) = -mg \vec{k} - R \vec{u}.$$

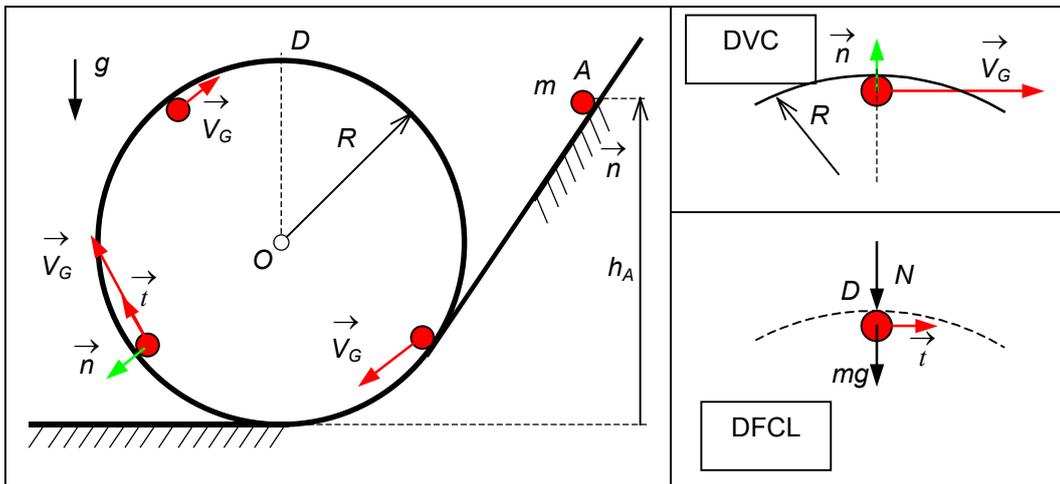
Multiplicando escalarmente por  $\vec{u}$ :  $-m \cdot a_n = -mg(\vec{k} \cdot \vec{u}) - R$  e considerando que:

$$\vec{k} \cdot \vec{u} = \cos \theta = -z/L \quad \text{e} \quad a_n = -V^2/L \quad \text{obtem-se:} \quad m \cdot V^2/L = -mgz/L - R \quad \Rightarrow$$

$$R = (mg/L) \cdot (2h - 3z)$$

**Exemplo: Conservação da Energia Mecânica:**

A partícula de massa  $m$  é abandonada a uma altura  $h$  na pista de acesso de um *LOOP*, conforme ilustrado na Figura 6, e desliza sem atrito ao longo do percurso circular de raio  $R$ . Determinar a altura mínima  $h_{\min}$  para que a partícula complete o *loop* sem perder o contato no ápice.



**Figura 6 – Trajetória em Loop de raio R**

**Resolução:** a) **Sistema:** partícula de massa  $m$ . b) **Diagramas:** DVC e DFCL conforme figura Figura 6. c) **Referencial,** base e pólo: base móvel intrínseca  $G\vec{t}\vec{n}$ . d) **Teoremas:** TR e *Energia Mecânica*.

Para percorrer o *loop* sem cair, no ápice (ponto  $D$ ) a reação normal ( $N$ ) da pista na partícula deve ser em módulo maior ou igual a zero (para manter o contato). Utilizando o TR e o DFCL obtêm-se:  $m \cdot \vec{a}_G = \vec{N} + m\vec{g}$ . A aceleração é obtida de:  $\vec{a}_G = \dot{V}_D \vec{t} - (V_D^2/R)\vec{n}$ .

Na posição **D** tem-se  $m \cdot \vec{a}_G = -N \vec{n} - mg \vec{n}$  portanto:  $m \cdot (-V_D^2 / R) \vec{n} = -N \vec{n} - mg \vec{n}$  e no limite para  $N = 0$  tem-se:  $V_D^2 \geq R \cdot g$ . A variação da energia cinética é igual ao trabalho das forças de campo. Para sistemas conservativos (a força de contato não realiza trabalho), nos pontos **A** e **D** resulta em:

$$\Delta T = W_{A \rightarrow D} \Rightarrow \left( \frac{1}{2} m V_D^2 \right) - \left( \frac{1}{2} m V_A^2 \right) = mg \cdot (h_A - h_D)$$

considerando  $\vec{V}_A = 0$  e  $h_D = 2R$  no limite para  $V_D^2 \geq R \cdot g$  resulta em:  $h_A \geq 2,5 \cdot R$ .

### 3. DINÂMICA DOS SÓLIDOS

Um agregado de partículas com distâncias internas invariantes, constituindo um corpo rígido, quando submetido a forças externas, no caso mais geral, descreve uma trajetória com variação de posição e atitude. Seu centro de massa  $G$  percorre uma translação curvilínea associada com uma variação angular da sua orientação. Na mecânica vetorial *Newtoniana* (Newton, 1687) o movimento de translação é identificado pelo Teorema da Resultante, baseado na segunda lei, e a atitude está associada com a proposição de *Euler* (1757) para o movimento angular do corpo no espaço. Na mecânica *Analítica*, que é baseada em grandezas escalares relacionadas com a Energia Mecânica total do sistema (Lagrange, 1788), esta combinação de movimentos é superada utilizando as coordenadas generalizadas e as equações de movimento, são obtidas de forma elegante e assertiva, mesmo para sistema com muitos graus de liberdade em roto-translação. Neste texto serão apresentadas apenas as equações de *Newton-Euler*. Para conhecer o método analítico procure informações sobre o curso de mecânica analítica (PME-3200).

### 4. TEOREMA DA RESULTANTE

A mecânica *Newtoniana* está baseado em três leis que são válidas para referenciais fixos ou em movimento uniforme. Estes referenciais são chamados de inerciais ou *newtonianos*. A primeira lei de *Newton* estabelece que uma partícula conserva sua quantidade de movimento  $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$  se não houver ação de forças sobre ela. Isso implica que para massa invariante  $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{V}(t) = cte$ .

Para uma partícula submetida a resultante de um sistema de forças  $\vec{R}(t) = \sum \vec{F}_i$  observando a segunda lei de *Newton*, tem variação proporcional da sua quantidade de movimento:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}(t)) = \frac{d}{dt} m \cdot \vec{V}(t) + m \cdot \frac{d}{dt} \vec{V}(t) = m \cdot \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = m \cdot \vec{a}(t) = \vec{F}(t) \quad (16)$$

Para um agregado de partículas  $P_i$  de forças ativas e reativas  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  (internas – Princípio da Ação e Reação da terceira lei de *Newton*) e forças externas somadas resultam em:

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{int} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} \quad (17)$$

Utilizando a propriedade de centro de massa e suas derivadas temporais:

$$\sum_{i=1}^n m_i (P_i - G) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i (\vec{V}_i - \vec{V}_G) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i (\vec{a}_i - \vec{a}_G) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = m \cdot \vec{a}_G \quad (18)$$

resultando finalmente o que é chamado de Teorema da Resultante (**TR**).

$$\boxed{m \cdot \vec{a}_G = \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{R}} \quad (19)$$

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_{Gx} \\ a_{Gy} \\ a_{Gz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Portanto, tudo se passa como se o centro de massa  $G$  se movesse em translação curvilínea como um ponto material de massa total  $m$  sujeito à resultante  $\vec{R}$  das forças externas a ele aplicada. Pense sobre a similaridade com os momentos de binário e a distribuição de massa:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (21)$$

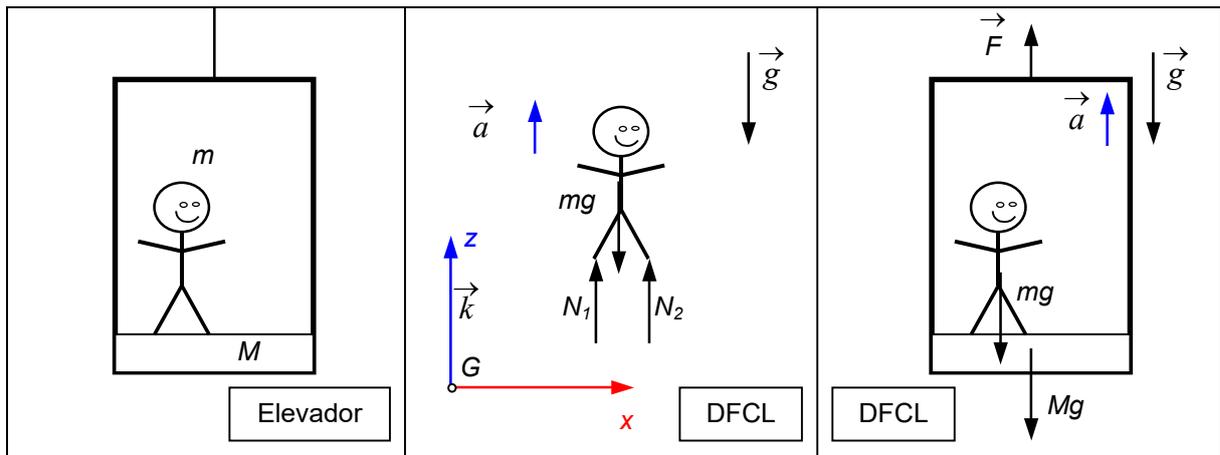
### 4.1. Resolução de Problemas

Uma forma de resolução dos problemas de mecânica recomenda seguir uma sequência de atividades estruturadas para facilitar a compreensão do problema, identificando as informações fornecidas, obtendo informações complementares e utilizar os conhecimentos/teoremas disponíveis para a montagem das equações para resolução do problema. Como sugestão, recomenda-se seguir as seguintes etapas consecutivas:

- **SISTEMA:** Identificar qual(is) corpo(s) rígido(s) deve(m) ser tratado(s), quais as informações disponíveis, quais vínculos são impostos e quais perguntas devem ser respondidas ou incógnitas a serem determinadas;
- **DIAGRAMAS:** fazer os diagramas de velocidades do corpo (**DVC**) e o diagrama de forças sobre o corpo livre (**DFCL**), facilitando a compreensão dos vínculos e distribuição das forças ativa. Identificar eventuais equações cinemática e/ou vinculares;
- **REFERENCIAL** e Pólo: selecionar um referencial apropriado (fixo ou móvel) para expressar os vetores e escolher um pólo conveniente para descrever os momentos;
- **TEOREMAS:** explicitar e aplicar os teoremas aplicáveis: Teorema de Resultante (**TR**), Teorema da Quantidade de Movimento Angular (**TQMA**) ou Teorema da Energia Cinética (**TEC**). Montar as equações considerando os diagramas e resolver o sistema de equações. Apresentar de forma clara os resultados obtidos.

#### Exemplo: Elevador

Um elevador de massa  $M$  parte com aceleração vertical de  $\vec{a} = a \vec{j} = 2 \text{ m/s}$ . Determinar a força vertical que o passageiro de massa  $m$  (70 kg) sofre durante a aceleração. Determinar a força no cabo de tração do elevador.



**Figura 7 - Elevador**

**Método de Resolução:** a) **Sistema:** O sistema é constituído pelo elevador de massa  $M$  e sistemas de guia que restringe o movimento na direção vertical e o passageiro com massa  $m$ . b) **Diagramas:** Diagrama de velocidade do corpo (*DVC*) e das forças sobre o corpo livre (*DFCL*). c) **Referencial e Pólo:** Adotando o referencial em  $O$  com sistema de coordenadas  $Oxyz$  fixo. d) **Teoremas:** Teorema da Resultante.

Para o passageiro, conforme ilustrado no diagrama de forças da Figura 7 (centro), que é acelerado junto com o elevador, tem-se:

$$m \cdot \vec{a}_G = \vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m \vec{g} \Rightarrow m \cdot a_{Gz} \vec{k} = N_1 \vec{k} + N_2 \vec{k} - m g \vec{k} \Rightarrow (N_1 + N_2) = m(a_{Gz} + g)$$

$$\text{Força sobre o passageiro: } (N_1 + N_2) = m(a_{Gz} + g) = 70 \cdot (2 + 9,81) = 826,7 \text{ N}$$

Para o conjunto formado pelo elevador e passageiro, conforme ilustrado no diagrama de forças da Figura 7 (à direita), tem-se:

$$(M + m) \cdot \vec{a}_G = \vec{F} + (M + m) \vec{g} \Rightarrow (M + m) \cdot a_G \vec{k} = F \vec{k} - (M + m) g \vec{k} \Rightarrow F = (M + m) \cdot (a_G + g)$$

### Exemplo: Movimento Circular

A cruzeta  $OABP$  de massa desprezível, restringe a massas  $m$  na extremidade  $P$ , a uma distância  $L$  do eixo, a girar com velocidade angular  $\vec{\omega}$ , conforme mostrado na Figura 8a. Determinar as reações dinâmicas nos mancais  $A$  e  $B$ .

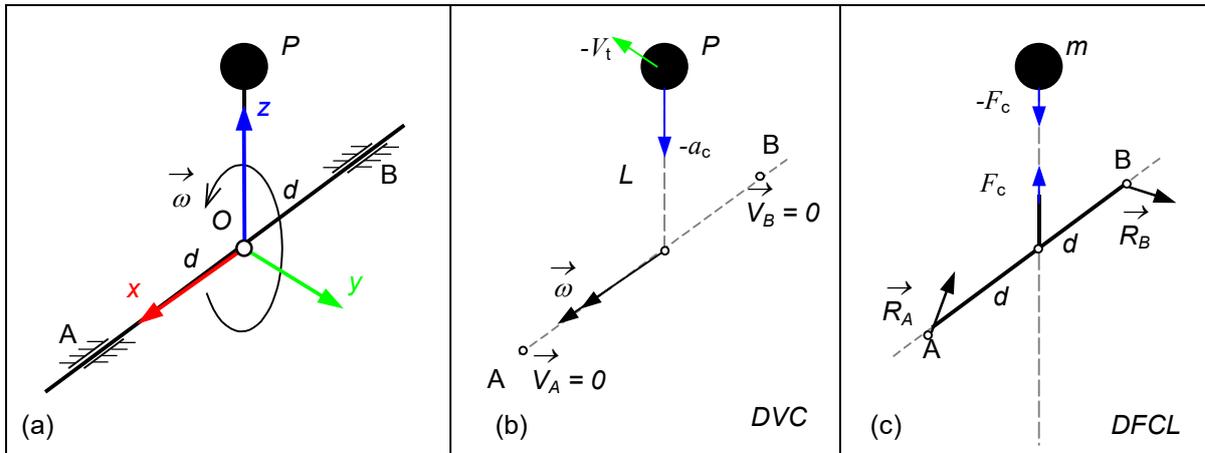


Figura 8 – Movimento Circular de Corpo Excêntrico

**Método de Resolução:** a) **Sistema:** O sistema é constituído por uma massa excêntrica vinculada à cruzeta que gira em torno do eixo  $AB$ . b) **Diagramas:** Fazendo o diagrama de forças sobre o corpo livre (*DFCL*) a massa fica sujeita as forças centrípetas devido ao vínculo da cruzeta que recebe a reação centrífuga e as reações dos mancais  $\vec{R}_A$  e  $\vec{R}_B$ . c) **Referencial e Pólo:** Adotando o referencial inercial centrado no pólo  $O$  com sistema de coordenadas  $Oxyz$  móvel solidário ao sistema (ou seja girando junto com o sistema), a posição  $P$  da partícula, fica definida pelas coordenadas  $L$  na direção  $z$ . d) **Teoremas:** Utilizando a fórmula de campo de acelerações da cinemática, obtêm-se para o corpo  $P$ :

$\vec{a}_p = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega \vec{i} \wedge (\omega \vec{i} \wedge L_i \vec{k}) = -L\omega^2 \vec{k}$  que é a aceleração centrípeta, conforme apresentado na Figura 8b.

d) **Teoremas:** Aplicando o teorema da resultante (*TR*) no corpo, observando o *DFCL* apresentado na Figura 8c e desprezando a ação gravitacional, obtêm-se as reações dinâmicas:

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{R}_A + \vec{R}_B + m \vec{g} \Rightarrow -m \cdot L\omega^2 \vec{k} = A_z \vec{k} + B_z \vec{k} - mg \vec{K} \Rightarrow A_z = B_z = -m \cdot L\omega^2 / 2$$

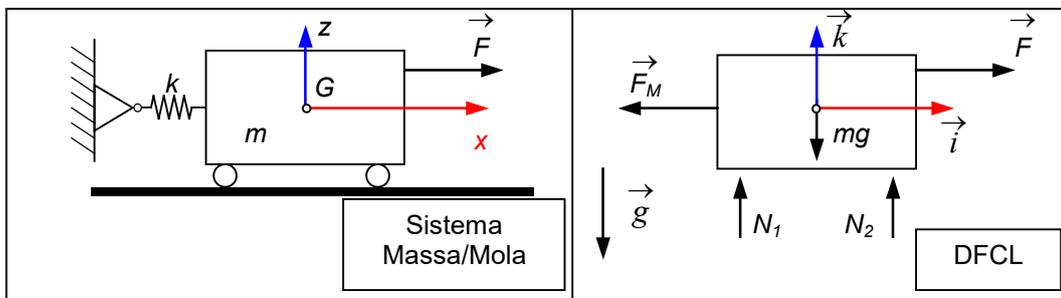
Note que a excentricidade da massa produz forças em fase nos mancais. Tal força pode ser anulada compensando a excentricidade com a introdução de uma massa idêntica mas em posição oposta (o centro de massa passa a coincidir com o eixo de rotação), balanceando o sistema.

**Exemplos: Sistema Massa-Mola**

Considere uma partícula de massa  $m$  se movimentando sobre um plano sem atrito submetida a uma força externa  $F(t)$  e vinculada à extremidade de uma mola de rigidez  $k$ . Tomando o referencial  $Oxyz$  com a força gravitacional orientada para baixo na direção  $O\vec{k}$ , conforme ilustrado no Diagrama de Forças sobre o Corpo Livre apresentado na Figura 9b, tem-se do Teorema da Resultante (TR) que  $m \cdot \vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext}$ , sabendo que a forças de mola é  $F_m = -k(x - x_0)$  resultando em:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = F(t) - F_{mola} \\ m \cdot \ddot{y} = 0 \\ m \cdot \ddot{z} = N_1 + N_2 - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} + k(x - x_0) = F(t) \\ \ddot{y} = 0 \\ N_1 + N_2 = mg \end{cases}$$

A expressão  $m\ddot{x} + kx = 0$  quando  $x_0$  é o comprimento livre da mola, é a conhecida como equação diferencial de segunda ordem em  $x$  do sistema oscilatório massa/mola livre.



**Figura 9 – Sistema Massa-Mola**

A resolução de uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea (sem forçamento externo) a termos constantes (escalares  $m$  e  $k$ ) é obtida pela observação de um movimento oscilatório do sistema quando retirado da posição de equilíbrio. Portanto considera-se que uma possível solução é um movimento de oscilação harmônica. Uma função harmônica oscilatória pode ser representada por  $x(t) = X \cdot \text{sen}(\omega t)$ . Utilizando esta função e sua derivada segunda em relação ao tempo  $\ddot{x}(t) = -\omega^2 X \cdot \text{sen}(\omega t)$  na equação diferencial obtêm-se o valor da frequência natural de vibrar do sistema, sendo portanto uma possível solução:

$$m\ddot{x} + kx = -m\omega^2 X \sin(\omega t) + kX \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)X \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow$$

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

### Exemplos: Sistemas de Corpos

**Fundamento:** Sistemas com vários corpos tem a variação da posição do centro de massa do conjunto determinada pela ação apenas das forças externas. Para sistemas não submetido a forças externas, a posição do centro de massa do conjunto permanece inalterada. E independente das forças internas (se conservativas tem resultante nula – princípio da ação/reação).

**Exemplo 1:** Embarcação com dois tripulantes.

Dois tripulantes de massa  $m_1$  e massa  $m_2$  estão sentados na proa e na popa de um barco simétrico de massa  $m_3$  em repouso sobre águas calmas, conforme ilustrado na Figura 10a. Determinar o deslocamento da extremidade do barco  $X$  na horizontal, após a troca de lugares dos tripulantes (desprezar o atrito com a água).

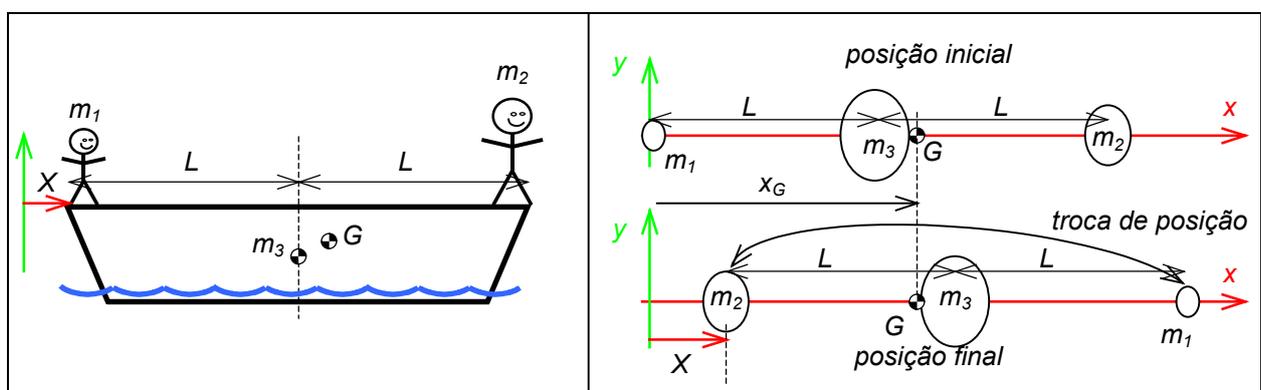


Figura 10 – Barco com dois tripulantes em repouso

**RESOLUÇÃO:** a) *Sistema*: barco com dois tripulantes b) *Diagramas*: troca de posição, conforme Figura 10b; c) *Referencial*: cota horizontal  $X$  da extremidade do barco; d) *Teoremas*: posição do centro de massa e Teorema da Resultante.

Considerando o sistema tripulantes/embarcação e não submetido a forças horizontais externas (as forças internas de movimentação dos tripulantes em contato com o barco são conservativas internas e se anulam) a posição horizontal do centro de massa do sistema após a troca de posições permanece inalterado. Portanto a posição do centro de massa  $G$  do sistema com posição  $x_G$  permanece inalterado antes e depois da mudança de lugar dos tripulantes.

Na posição inicial considerando  $x_1 = X = 0$  tem-se para a posição do centro do massa  $G$  do conjunto tripulantes+barco:

$$x_G = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{(m_1 + m_2 + m_3)} \Rightarrow x_G = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 2L + m_3 \cdot L}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{L(2m_2 + m_3)}{M_{Total}}$$

Após a mudança de posição dos tripulantes:  $x'_G = \frac{m_1(2L + X) + m_2 \cdot X + m_3(L + X)}{(m_1 + m_2 + m_3)}$

Como só há forças internas durante a mudança de posição o posição do centro de massa não se altera e a posição final será:  $x_G = x'_G \Rightarrow \frac{L(2m_2 + m_3)}{M_{Total}} = \frac{m_1(2L + X) + m_2 \cdot X + m_3(L + X)}{M_{Total}}$

$\Rightarrow X = \frac{2L}{M_{Total}}(m_2 - m_1)$  . Portanto se  $m_2 = m_1 \Rightarrow X = 0$ ; se  $m_2 > m_1 \Rightarrow X > 0$  o barco vai

para direita; se  $m_2 < m_1 \Rightarrow X < 0$  o barco vai para esquerda.

### Exemplo 2: Partícula em contato com Prisma

Considere uma partícula  $P$  de massa  $m$  que desliza sem atrito sobre a aresta do prisma de massa  $M$ , conforme ilustrado na Figura 11a. Determinar a velocidade do prisma em função da velocidade relativa da partícula  $P$ . Considere que o sistema não receba forças externas e parta do repouso (França, 2011).

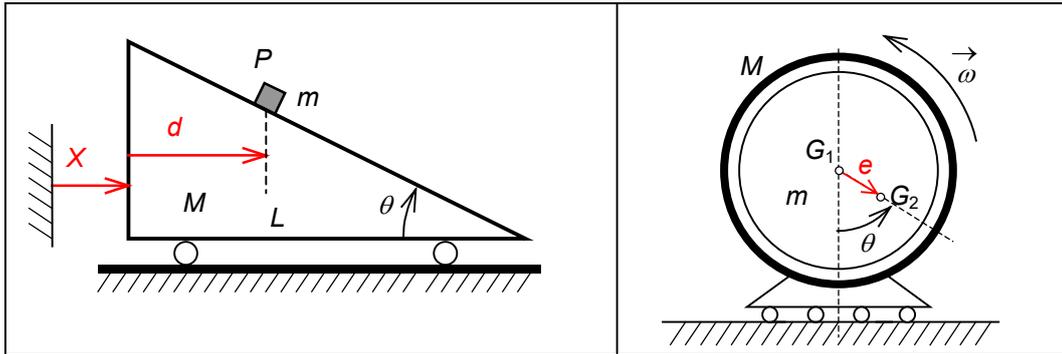


Figura 11 – Sistema Partícula/Prisma e Sistema Carcaça/Rotor

**RESOLUÇÃO:** a) **Sistema:** considere a partícula e o prisma; b) **Diagramas:** DVC e DFCL, conforme Figura 12; c) **Referencial** e pólo; d) **Teoremas:** imobilidade da posição horizontal do centro de massa do sistema e Teorema da Resultante.

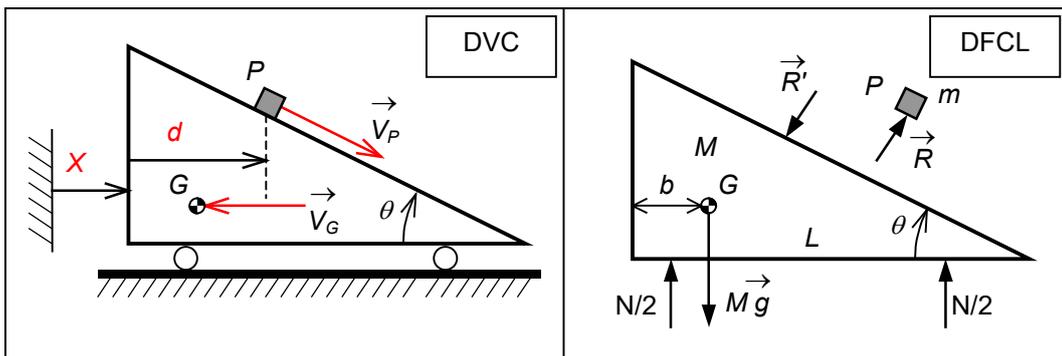


Figura 12 – Diagramas do Sistema Partícula/Prisma

Considerando o sistema partícula/prisma não submetido a forças horizontais externas (as forças internas de contato são conservativas e portanto se anulam) a posição horizontal do centro de massa do sistema permanece inalterado (possui derivada nula):

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} ; x_G = \sum m_i \cdot x_i / \sum m_i = cte \Rightarrow x_G = [M \cdot (X + b) + m \cdot (X + d)] / (M + m) = cte$$

$$x_G = [X \cdot (M + m) + M \cdot b + m \cdot d] / (M + m) = cte \quad \text{derivando com relação ao tempo:}$$

$$[\dot{X} \cdot (M + m) + m \cdot \dot{d}] / (M + m) = 0 \quad \text{rearranjando} \quad \dot{X} = -m \cdot \dot{d} / (M + m) \quad \text{onde:} \quad \dot{d} = v_P \cos \theta.$$

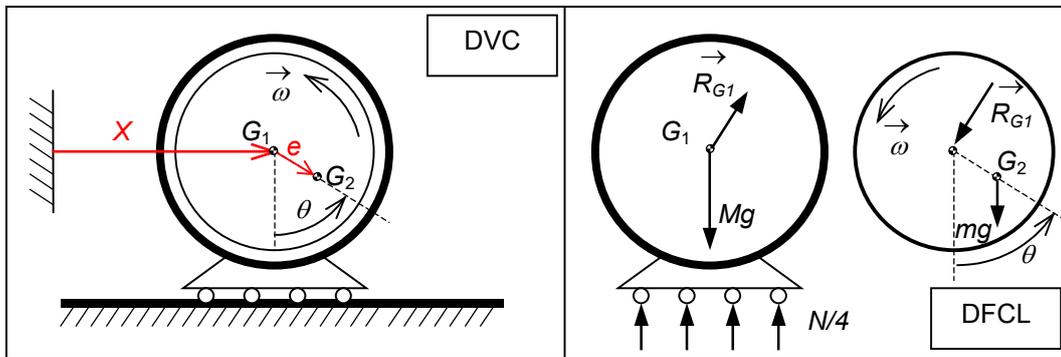
Portanto tem-se que: 
$$X = -\frac{m}{(M + m)} \cdot d$$
 e a posição X do prisma quando a partícula atingir o

final do prisma (quando  $d = L$ ) ter-se-á: 
$$X = -\frac{m}{(M + m)} \cdot L.$$

**Exemplo 3:** Rotor desbalanceado

Considere o rotor de massa  $m$  que gira dentro da carcaça estatora de massa  $M$  de um motor sem atrito com velocidade angular  $\vec{\omega}$ . O motor elétrico desliza sem atrito apoiado no plano e o rotor tem excentricidade  $e$ , conforme ilustrado na Figura 11b. Determinar o deslocamento da carcaça e a força vertical  $N$  na base em função da velocidade angular  $\vec{\omega}$  do rotor.

**RESOLUÇÃO:** a) *Sistema:* considere o rotor e estator (carcaça); b) *Diagramas:* DVC e DFCL, conforme Figura 13; d) *Teoremas:* posição do centro de massa e Teorema da Resultante.



**Figura 13 – Diagramas do Sistema Rotor/Carcaça**

Considerando o sistema rotor/carcaça não submetido a forças horizontais externas (as forças internas de contato no mancal entre o rotor e a carcaça são conservativas internas e se anulam) a posição horizontal do centro de massa do sistema permanece inalterado (derivada nula). Portanto para a carcaça com centro de massa  $G_1$  e posição horizontal  $X$  e para o rotor com centro de massa  $G_2$ ; e posição horizontal ( $e \cdot \text{sen } \theta$ ) tem-se:  $M \cdot X + m \cdot (X + e \cdot \text{sen } \theta) = \text{cte} \Rightarrow$

$$(M + m) \cdot X + m \cdot e \cdot \text{sen } \theta = \text{cte} \quad \text{derivando obtêm-se: } (M + m) \cdot \dot{X} + m \cdot e \cdot \cos \theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{X} = \frac{m \cdot e \cdot \omega}{(M + m)} \cos(\omega t).$$

A posição vertical do centro de massa  $G_2$  é dado por:  $y_{G_2} = e \cdot (1 - \cos(\omega t))$  e

$$\ddot{y}_{G_2} = e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \quad \text{e utilizando o TR: } m \cdot \ddot{y}_{G_2} = N - (M + m)g \Rightarrow$$

$$m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) = N - (M + m)g \Rightarrow \boxed{N = m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) + (M + m)g}$$

A força horizontal exercida, pelo rotor sobre o estator (força interna) é aquela que produz aceleração na carcaça. Portanto utilizando o **TR**:  $M \cdot \ddot{X} = F_x$  ; derivando a velocidade

horizontal  $\ddot{X} = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{(M + m)} \text{sen}(\omega t)$  e substituindo  $\Rightarrow$  
$$F_x = \frac{M \cdot m}{(M + m)} e \omega^2 \text{sen}(\omega t)$$

## 5. TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA - *TEC*

### 5.1. Trabalho e Energia Cinética

A *ENERGIA CINÉTICA* de uma partícula de massa  $m$  e de um agregado de partículas são dadas por:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 \quad (22)$$

Diferenciando com respeito ao tempo a expressão da energia cinética para o corpo rígido resulta em:

$$\frac{d}{dt} T = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i) \cdot m_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ 2 \left( \vec{V}_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{V}_i \right) \cdot m_i + (\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i) \cdot \frac{d}{dt} m_i \right] \quad (23)$$

Assumindo a invariância da massa do corpo rígido, o último termo se anula resultando em:

$$\frac{d}{dt} T = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \cdot \vec{a}_i \cdot m_i = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n P_i \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = P \quad (24)$$

que é a potência  $P$  das forças elementares aplicadas em cada partícula. Relembrando da expressão da potência:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V} = \vec{F} \cdot \frac{d}{dt} \vec{r} \quad \Rightarrow \quad P \cdot dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW \quad (25)$$

que é o trabalho elementar  $dW$  da força  $\vec{F}$  percorrendo o deslocamento  $d\vec{r}$ . Integrando ao longo do tempo e considerando o trabalho das forças internas e forças externas:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P} dt = \int_{t_0}^{t_1} dW \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} dT = \int_{t_0}^{t_1} dW^{ext} + \int_{t_0}^{t_1} dW^{int} \quad (26)$$

Para o caso de forças internas de ação e reação a variação da energia cinética é igual ao trabalho realizado apenas pelas forças externas entre os instantes considerados  $[t_0, t_1]$ :

$$T_1 - T_0 = W_{(t_0 \rightarrow t_1)}^{ext} + W_{(t_0 \rightarrow t_1)}^{int} = W_{(t_0 \rightarrow t_1)}^{ext} \quad (27)$$

$$\Delta T = W^{ext} \quad (28)$$

Para o caso de um conjunto de corpos com vínculos conservativos (trabalho das forças vinculares nulo), obtêm-se o escalar:

$$\sum T_1 - \sum T_0 = \sum W_{(t_0 \rightarrow t_1)}^{ext} + \sum W_{(t_0 \rightarrow t_1)}^{vinc} = \sum W_{(t_0 \rightarrow t_1)}^{ext} \quad (29)$$

$$\boxed{\Delta T = W_{(t_0 \rightarrow t_1)}^{ext}} \quad (30)$$

### Exemplo: *TEC*

**Exercício** com resolução utilizando o *TEC*: Dois corpos de massas  $m_A$  e  $m_B$  estão interligados por uma fio ideal (inextensível e massa desprezível), passante por uma polia ideal  $C$  (mancal sem atrito e inércia rotacional desprezível), conforme ilustrado na Figura 14. O bloco  $A$  desliza com atrito sobre o plano e está preso à mola de rigidez  $k$ . Considerando que o sistema seja abandonado em repouso na posição de força nula da mola ( $x = x_0$ ), determinar a velocidade e aceleração do conjunto.

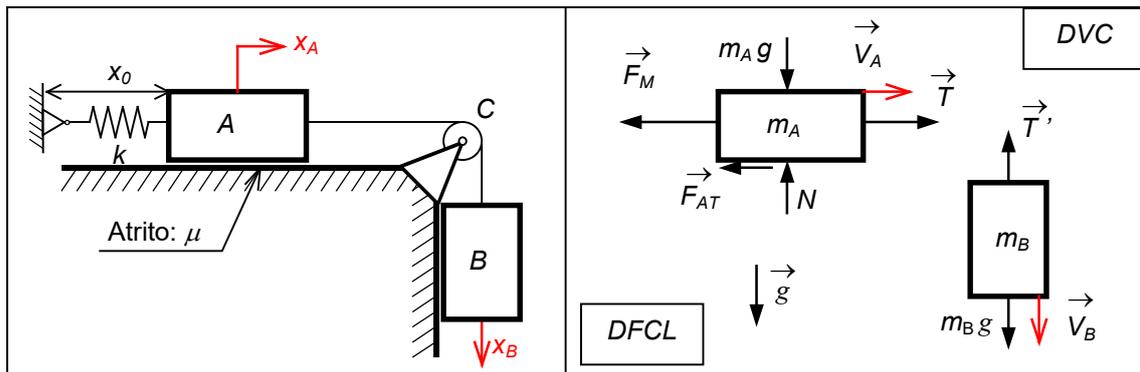


Figura 14 – Blocos Interligados

**Método de Resolução:** a) **Sistema:** dois blocos e mola; b) **Diagramas:** forças externas: gravidade e elástica da mola, forças internas se anulam; c) **Referencial e Pólo:** ; d) **Teoremas:** *TEC*.

Utilizando o *TEC*  $\Rightarrow \Delta T = T - T_0 = W^{ext}$  tem-se a Energia Cinética do sistema como:

$$T = \frac{1}{2} m_A \cdot V_A^2 + \frac{1}{2} m_B \cdot V_B^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) \cdot \dot{x}^2.$$

O trabalho das forças externas entre a posição inicial

em repouso e a posição genérica  $x$  é:  $W = \int_{x_0}^x F_{mola} \cdot dx + \int_0^x F_{grav} \cdot dx + \int_0^x T \cdot dx + \int_0^x F_{atrito} \cdot dx \Rightarrow$

em movimento  $|F_{atrito}| = \mu N = \mu m_A g$  ; tensão no cabo  $T = -T' \Rightarrow$

$$W = -\frac{1}{2} k \cdot (x - x_0)^2 + m_B g \cdot x - (\mu m_A g) \cdot x.$$

Para que haja movimento a partir de  $x_0$  deve-se ter:  $m_B g > \mu \cdot m_A g$  e  $|F_{atrito}| = \mu m_A g$ ,

resultando portanto em:  $\frac{1}{2} (m_A + m_B) \cdot \dot{x}^2 = -\frac{1}{2} k \cdot x^2 + m_B g \cdot x - (\mu m_A g) \cdot x \Rightarrow$

$$\dot{x}^2 = \frac{2g(m_B - \mu m_A) \cdot x}{(m_A + m_B)} - \frac{k \cdot x^2}{(m_A + m_B)}$$

derivando dos dois lados e lembrando que:

$$\frac{d}{dt} \dot{x}^2 = \frac{d}{dt} (\dot{x} \cdot \dot{x}) = \frac{d}{dt} \dot{x} \cdot \dot{x} + \dot{x} \cdot \frac{d}{dt} \dot{x} = 2 \dot{x} \ddot{x} \Rightarrow 2 \dot{x} \ddot{x} = \frac{2g(m_B - \mu m_A)}{(m_A + m_B)} \dot{x} - \frac{k}{(m_A + m_B)} 2x \dot{x} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = \frac{g(m_B - \mu m_A)}{(m_A + m_B)} - \frac{k}{(m_A + m_B)} x$$

## 5.2. Energia Cinética do Corpo Rígido

Considere agora um corpo rígido com movimento genérico de roto-translação com velocidade translacional do ponto  $O$   $\vec{V}_O$  e velocidade angular  $\vec{\omega}$ . Considere ainda um referencial móvel solidário ao corpo no ponto  $O$ , associado ao sistema de coordenadas tri-ortogonal  $xyz$ , conforme ilustrado na Figura 15. A **ENERGIA CINÉTICA**  $T$  do ponto  $P_i$  de massa  $m_i$  localizado na posição  $(P_i - O) = \vec{r}_i$  do corpo e para os  $P_i$  pontos o corpo como um todo, são dados pelos escalares:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \cdot \vec{V}_i^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i^2 \quad (31)$$

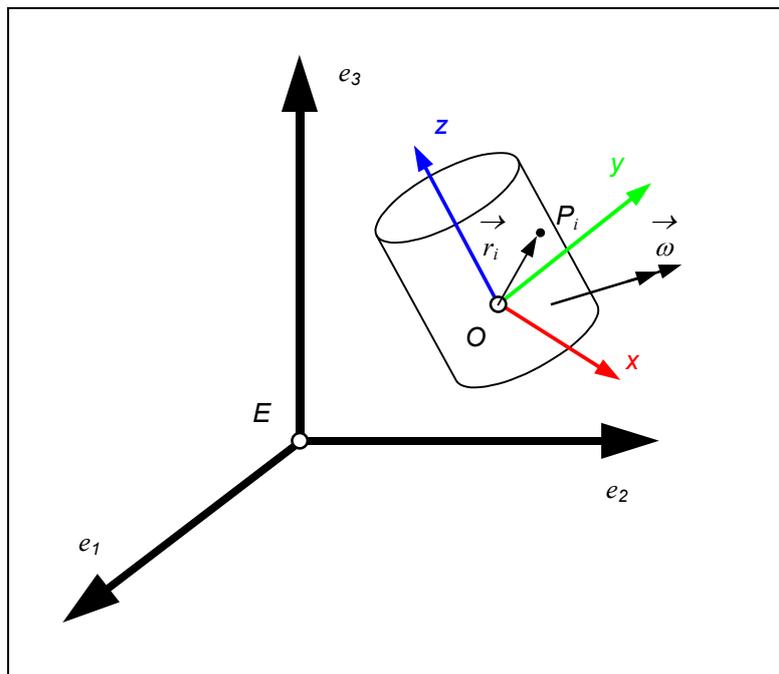


Figura 15 – Movimento do Corpo

A velocidade de qualquer ponto  $\vec{P}_i$  do corpo é dado pela fórmula de campo de velocidades  $\vec{V}_i = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$  que substituindo na expressão anterior resulta em:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 \quad (32)$$

Note que a fórmula de campo de velocidade vale para qualquer ponto  $i$  pertencente ao corpo rígido (ou extensão ideal do corpo). Expandindo o termo quadrático entre parêntesis da expressão anterior, obtêm-se três termos descritos a seguir:

$$T = \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_O^2 \right) + \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot 2\vec{V}_O (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \right) + \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 \right) \quad (33)$$

Resolvendo o primeiro termo, lembrando que velocidade  $\vec{V}_O$  é única, obtêm-se o escalar:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_O^2 = \frac{1}{2} \vec{V}_O^2 \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} m \cdot \vec{V}_O^2 \quad (34)$$

que é a energia cinética do corpo de massa total  $m$  devido ao movimento de translação  $\vec{V}_O$ .

Para o segundo termo têm-se:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot 2\vec{V}_O (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \vec{V}_O \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i \quad (35)$$

relembrando do momento de primeira ordem:  $(G-O) \cdot m = \sum m_i \cdot \vec{r}_i$  correspondendo à propriedade do centro de massa obtêm-se para o segundo termo o escalar:

$$\vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i = m \vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G-O) \quad (36)$$

Para o terceiro termo  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2$ , considerando a posição  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  e a velocidade angular descrita na base móvel como  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ , realiza-se inicialmente o produto vetorial do termo entre parêntesis:

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i) \vec{i} + \\ (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i) \vec{j} + \\ (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i) \vec{k} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Fazendo o produto escalar correspondente ao quadrado de cada termo, recuperando o somatório dos elementos de massa  $m_i$  e rearranjando na forma matricial obtêm-se:

$$\begin{aligned} (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i) \vec{i} \cdot (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i) \vec{i} &= \omega_y^2 \cdot z_i^2 - 2 \cdot \omega_y \omega_z \cdot y_i z_i + \omega_z^2 \cdot y_i^2 \\ (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i) \vec{j} \cdot (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i) \vec{j} &= \omega_z^2 \cdot x_i^2 - 2 \cdot \omega_x \omega_z \cdot x_i z_i + \omega_x^2 \cdot z_i^2 \\ (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i) \vec{k} \cdot (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i) \vec{k} &= \omega_x^2 \cdot y_i^2 - 2 \cdot \omega_x \omega_y \cdot x_i y_i + \omega_y^2 \cdot x_i^2 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Nomeando os termos quadráticos na diagonal principal da matriz como **Momentos de Inércia** ( $J_x, J_y, J_z$ ) e os termos fora da diagonal principal da matriz como **Produtos de inércia** ( $J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$ ) em relação a pares de eixos coordenados, obtêm-se na forma compacta:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{\omega\}^t [J]_O \{\omega\} \quad (40)$$

Este é o termo de energia cinética devido à rotação do corpo. A matriz  $[J]_O$  é quadrada, simétrica, de ordem 3, denominada **Matriz de Inércia** que retrata a forma como a massa é distribuída no corpo em relação ao sistema de coordenadas **Oxyz**.

Finalmente montando os três termos escalares denominados: energia cinética de **Translação**, termo cruzado e termo de **Rotação**, obtêm-se a Energia Cinética do sólido:

$$T = \frac{1}{2}mV_O^2 + m\vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2}\{\omega\}^t [J]_O \{\omega\} \quad (41)$$

Retomando a expressão do trabalho  $\Delta T = W^{ext}$  para condições iniciais nulas, escreve-se o **TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA (TEC)** como o escalar:

$$\boxed{\frac{1}{2}mV_O^2 + m\vec{V}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2}\{\omega\}^t [J]_O \{\omega\} = W^{ext}} \quad (42)$$

**Casos particulares:**

- a) Se a escolha das coordenadas auxiliares tiver a origem coincidente com o centro de massa ( $O \equiv G$ ), a expressão da **Energia Cinética** se reduz à:

$$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\{\omega\}^t [J]_G \{\omega\} \quad (43)$$

ou seja, a **Energia Cinética** medida em relação ao centro de massa  $G$ , é composta de duas parcelas associadas ao movimento de translação e outra ao movimento de rotação.

- b) Se o pólo escolhido for fixo  $\vec{V}_O = 0$  então:

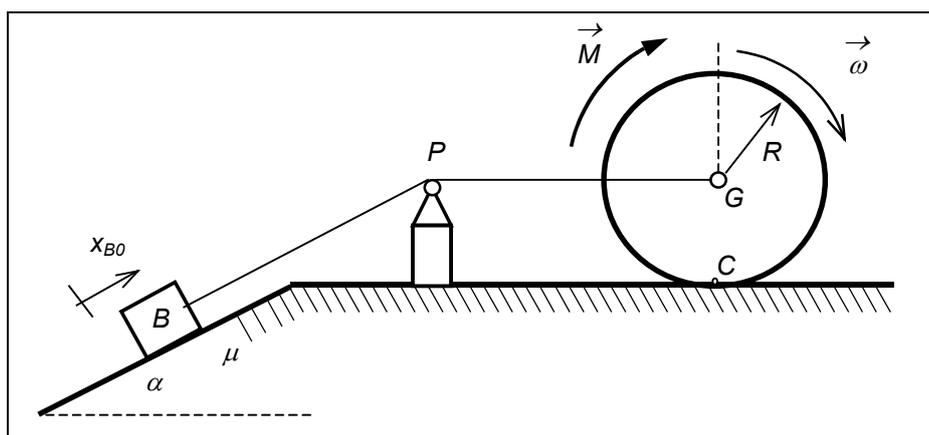
$$T = \frac{1}{2}\{\omega\}^t [J]_O \{\omega\} \quad \text{ou} \quad T = \frac{1}{2}\{\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\} \cdot \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (44)$$

ou seja, a **Energia Cinética** contem apenas o termo devido à rotação. A Energia Cinética é uma grandeza escalar e pode ser medida em relação a qualquer ponto do corpo ou extensão ideal (movimento solidário ao corpo) resultando sempre no mesmo escalar e, portanto, independe do pólo escolhido.

**Exemplo: TEC**

Exercício de dinâmica de corpos rígidos com resolução utilizando o **TEC**: Um disco homogêneo de massa  $m$  e raio  $R$  rola sem escorregar sobre um plano horizontal, acionado por um momento externo  $\vec{M}$ . O bloco  $B$  massa  $m$  é arrastado sobre a superfície com inclinação  $\alpha$ , com atrito  $\mu$ , conforme mostrado na Figura 16, por um cabo ideal que interligado com o centro  $G$  do disco, através da polia ideal  $P$ .

No instante inicial o disco possuía velocidade angular  $\omega_0$  e estava na posição  $x_{B0}$ . Calcule a velocidade angular  $\vec{\omega}(t)$  em função da posição  $x_B(t)$ , a aceleração angular  $\vec{\dot{\omega}}$  do disco.



**Figura 16 – Disco Rolando sem Escorregar**

**Método de Resolução:** a) **Sistema:** O sistema é composto por um disco de centro em  $G$ , com rotação  $\vec{\omega} = -\omega \vec{k}$  acionado pelo momento externo  $\vec{M}$  e retido por uma força externa  $\vec{F}_{ext} = -T \vec{i}$ ; do fio ideal passante pela polia ideal  $P$  sem atrito e massa desprezível b) **Diagramas:** Diagrama de velocidades e de forças conforme Figura 17; c) **Referencial e Pólo:** Referencial  $xy$  e pólo em  $G$ . d) **Teoremas:** TEC e TR.

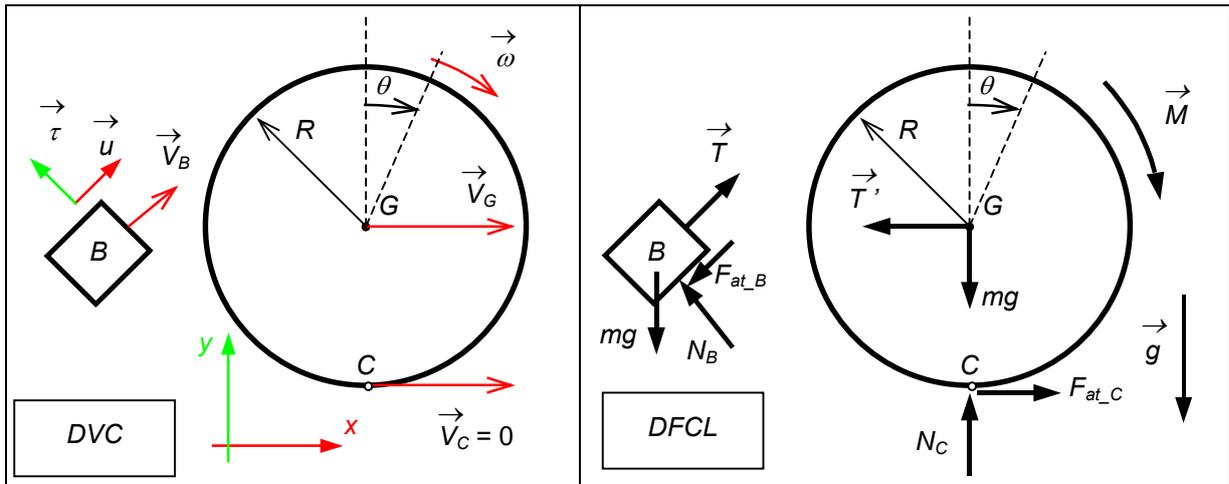


Figura 17 – Diagrama de Velocidade e Forçamentos

Para determinar a velocidade do centro de massa do disco utiliza-se da formula de campo de velocidades, considerando que o rolamento ocorre em torno do ponto  $C$ , sem escorregamento,  $\vec{V}_G = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C) = 0 + \omega \vec{j} \wedge R \vec{k} = R\omega \vec{i}$ .

A energia cinética do bloco  $B$  é composta apenas do termo translacional:  $T = \frac{1}{2} m \vec{V}_B^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_B^2$

como  $\dot{x}_B = V_G = R\omega \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{x}_B^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$ .

A energia cinética do disco é composta da parte translacional acrescida do termo rotacional determinado por:  $T = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \{\omega\}^T [J]_G \{\omega\}$  ou

$$T = \frac{1}{2} m (R\omega \vec{i})^2 + \frac{1}{2} \{0 \quad \omega \quad 0\}^T \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_{Gy} \omega^2 \quad \text{para}$$

$$J_{Gy} = \frac{1}{2} m R^2 \Rightarrow T - T_0 = \frac{3}{4} m R^2 (\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2)$$

O trabalho realizado pelas forças externas é determinado pelo somatório:  $W^{ext} = \sum_{i=1}^n \left( \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \right)$

para deslocamento  $x_c \vec{i}$  e ponto  $C$  fixo:

$$W^{ext} = \int_{t_0}^{t_1} -mg \vec{j} \cdot d\vec{G} + \int_{t_0}^{t_1} N_C \vec{j} \cdot d\vec{C} + \int_{t_0}^{t_1} F_{at\_C} \vec{i} \cdot d\vec{C} + \int_{t_0}^{t_1} -T \vec{i} \cdot d\vec{G} + \int_{t_0}^{t_1} M \cdot d\theta + \int_{t_0}^{t_1} -mg \vec{j} \cdot d\vec{B} + \int_{t_0}^{t_1} N_B \vec{\tau} \cdot d\vec{B} + \int_{t_0}^{t_1} -F_{at\_B} \vec{u} \cdot d\vec{B} + \int_{t_0}^{t_1} T \vec{\tau} \cdot d\vec{B}$$

como  $d\vec{G} = dx_G \vec{i}$  ;  $d\vec{C} = \vec{0}$  ;  $d\vec{B} = du_B \vec{u}$  ;  $d\vec{B} = d\vec{G}$  e  $d\vec{B} = du_B (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$

resultando em :  $W^{ext} = M \cdot (\theta - \theta_0) - mg \sin \alpha \cdot (x_B - x_{B0}) - F_{atB} \cdot (x_B - x_{B0})$ .

Utilizando o **TEC**  $\Rightarrow \Delta T = T - T_0 = W^{ext}$  e  $x = \theta \cdot R$ , obtêm-se usando  $x_B = x_G = R\theta$  :

$$\frac{3}{4}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2) = M \cdot (\theta - \theta_0) - mg \sin \alpha \cdot (x_B - x_{B0}) - F_{atB} \cdot (x_B - x_{B0})$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4}{5mR^2} \left( \frac{M}{R} - mg \sin \alpha - F_{atB} \right) \cdot (x_G - x_{G0})$$

Derivando com respeito ao tempo os dois lados da equação anterior e lembrando que

$$\dot{x}_G = V_G = \omega R :$$

$$2\omega\dot{\omega} = 0 + \frac{4}{5mR^2} \left( \frac{M}{R} - mg \sin \alpha - F_{atB} \right) \cdot \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{2}{5mR} \left( \frac{M}{R} - mg \sin \alpha - F_{atB} \right)$$

As forças de contato no bloco **B** são determinadas utilizando o **TR**:  $m\vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext}$  e o diagrama de forças sobre o corpo livre:

$$m \cdot a_B \vec{u} = (T - F_{atB} - mg \sin \alpha) \vec{u} + (N_B - mg \cos \alpha) \vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_B = mg \cos \alpha} \quad \Rightarrow$$

$m \cdot a_B = T - F_{atB} - mg \sin \alpha$  considerando em movimento o atrito resulta em :

$$F_{atB} = \mu \cdot N_B = \mu \cdot mg \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\omega} = \frac{2}{5mR} \left[ \frac{M}{R} - mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \right]}$$

## Exemplo de TEC

Um disco homogêneo de massa **m** e raio **R** rola sem escorregar sobre um plano, acionado por um momento externo  $\vec{M}$  e retido por uma força externa  $\vec{F}_{ext} = -F \vec{i}$ , conforme mostrado na Figura 16. No instante inicial o disco possuía velocidade angular  $\omega_0$  e estava na posição  $x_0$ . Calcule a velocidade angular  $\bar{\omega}(t)$  em função da posição  $x(t)$ , a aceleração angular  $\dot{\bar{\omega}}$  e as forças externas que agem sobre o disco.

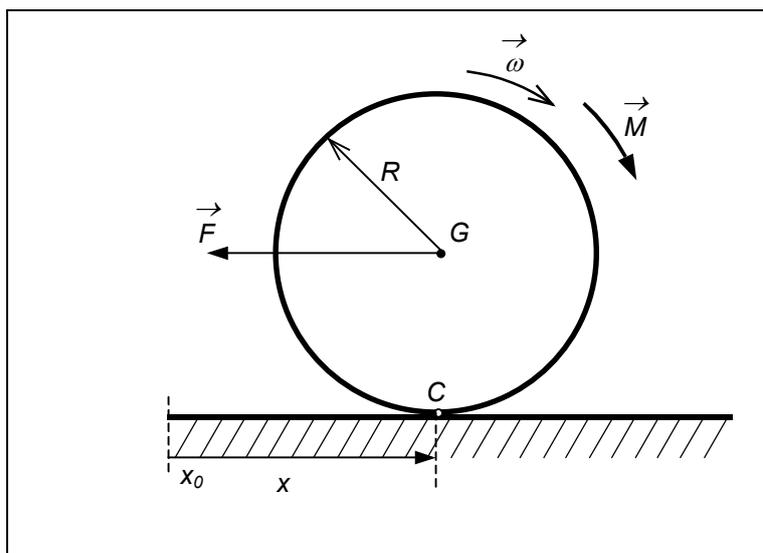


Figura 18 – Disco Rolando sem escorregar

**Método de Resolução:** a) Sistema: O sistema é composto por um disco de centro em  $G$ , com rotação  $\vec{\omega} = \omega \vec{j}$  acionado pelo momento externo  $\vec{M}$  e retido por uma força externa  $\vec{F}_{ext} = -F \vec{i}$ . b) Diagramas: Diagrama de velocidades e de forças conforme Figura 17. c) Referencial e Pólo: Referencial  $Oxz$  e pólo em  $G$ . d) Teoremas: TEC. (Note que esse caso é similar à roda de um veículo que recebe o torque do motor e arrasta o veículo com a força  $F$ ).

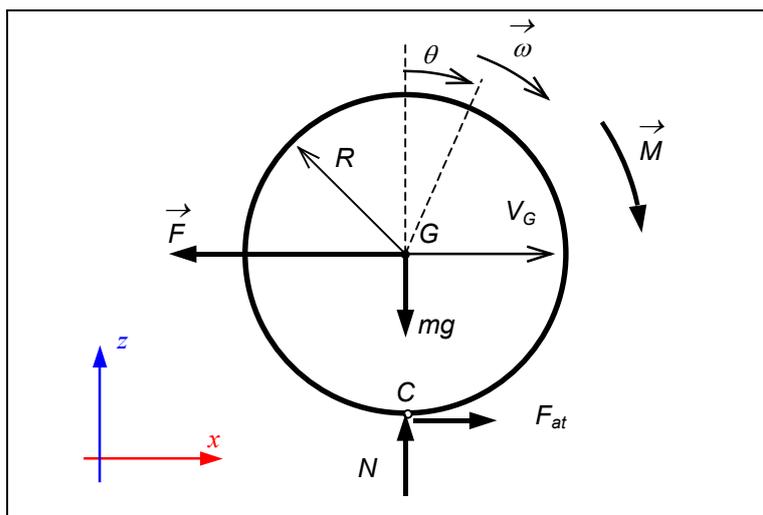


Figura 19 – Diagrama de Forças

Para determinar a velocidade do centro de massa utiliza-se da fórmula de campo de velocidades, considerando que o rolamento ocorre em torno do ponto  $C$  sem escorregamento,

$$\vec{V}_G = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C) = 0 + \omega \vec{j} \wedge R \vec{k} = R\omega \vec{i}.$$

A energia cinética é composta da parte translacional acrescida do termo rotacional por:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \{\omega\}^T [J]_G \{\omega\} \text{ para o pólo em } G \text{ ou}$$

$$T = \frac{1}{2} m (R\omega \vec{i})^2 + \frac{1}{2} \{0 \quad \omega \quad 0\}^T \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_y \omega^2$$

$$\text{para } J_{Gy} = \frac{1}{2} m R^2 \Rightarrow T = \frac{3}{4} m R^2 \omega^2$$

O trabalho realizado pelas forças externas é dado por:  $W^{ext} = \sum_{i=1}^n \left( \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i \right)$  para deslocamento

$$x \vec{i} \text{ e ponto } C \text{ fixo: } W^{ext} = \int_{t_0}^{t_1} -mg \vec{k} \cdot dx \vec{i} + \int_{t_0}^{t_1} N \vec{k} \cdot d\vec{C} + \int_{t_0}^{t_1} F_{at} \vec{i} \cdot d\vec{C} + \int_{t_0}^{t_1} -F \vec{i} \cdot dG \vec{i} + \int_{t_0}^{t_1} M \cdot d\theta$$

$$W^{ext} = -F \cdot x + M \cdot \theta. \text{ Utilizando o } \mathbf{TEC} \Rightarrow \Delta T = T - T_0 = W^{ext} \text{ e } x = \theta \cdot R, \text{ obtêm-se:}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4}{3mR^2} \left( \frac{M}{R} - F \right) \cdot (x - x_0)$$

Derivando com respeito ao tempo e sabendo que  $\dot{x} = V_G = \omega R$

$$2\omega \dot{\omega} = 0 + \frac{4}{3mR^2} \left( \frac{M}{R} - F \right) \cdot \dot{x} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{2}{3mR} \left( \frac{M}{R} - F \right)$$

As forças de contato no ponto  $C$  podem ser determinadas utilizando o  $\mathbf{TR}$ :  $m\vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext}$  e o diagrama de forças sobre o corpo livre:

$$m \cdot \dot{\omega} R \vec{i} = (-F + F_{at}) \vec{i} + (-mg + N) \vec{k} \Rightarrow \boxed{N = mg} \Rightarrow \boxed{F_{at} = \frac{2M}{3R} + \frac{F}{3}}$$

### Exemplo: Sistema Massa-Mola (C)

Considere novamente o sistema **massa/mola** deslizando sobre um plano sem atrito na direção  $x$ ,

conforme ilustrado na Figura 9a. A energia cinética  $T$  do sistema é dada por:  $T = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$ . O

trabalho da força da mola é expressa pela integral do trabalho elementar realizado pela força de

mola ( $F_{mola} = -k(x - x_0)$ ) durante a sua movimentação a partir da condição livre ( $x_0 = L$ ) até a posição de equilíbrio:

$$W = \int_{x_0}^x F_m \cdot dx = \int_{x_0}^x (-kx) \cdot dx = -k \int_{x_0}^x x \cdot dx = -\frac{k}{2} x^2 \Big|_{x_0}^x = -\frac{1}{2} k x^2 \quad \text{substituindo na equação do}$$

Teorema da Energia Cinética resulta em:  $T - T_0 = W_{(r_0 \rightarrow r)} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 = -\frac{1}{2} k \cdot x^2 \Rightarrow$

$$m \cdot \dot{x}^2 + k \cdot x^2 = 0 \quad \text{e derivando com respeito ao tempo: } m \cdot 2 \dot{x} \ddot{x} + k \cdot 2 \dot{x} x = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + k x = 0$$

que é a conhecida equação diferencial de segunda ordem do sistema oscilatório massa/mola.

Para a determinação do movimento do sistema massa-mola descrito pela equação diferencial de segunda ordem  $m \ddot{x}(t) + k x(t) = F(t)$ , observa-se que o sistema quando retirado da posição de equilíbrio vai oscilar de maneira periódica. Portanto uma possível solução da equação homogênea (sem forçamento externo) para condições iniciais (CI) não nulas, pode ser obtida por uma função periódica de soma de senos e co-senos com diferentes magnitudes, do tipo:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{cos}(\omega t).$$

Obtém-se as derivadas de ordem superior da soma como:  $\dot{x}(t) = A \omega \operatorname{cos}(\omega t) - B \omega \operatorname{sen}(\omega t)$  e

$\ddot{x}(t) = -A \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) - B \omega^2 \operatorname{cos}(\omega t)$ . Considerando as condições iniciais (CI) de

$t_0 = 0$ ;  $x(t_0) = x_0$ ;  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$  utilizadas nas duas equações anteriores para pode-se determinar os

parâmetros  $A$  e  $B$  da equação de  $x(t)$ :

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{cos}(\omega t) \quad \text{para } t_0 = 0 \rightarrow x_0 = x(t_0) = B \rightarrow B = x_0$$

$$\dot{x}(t) = A \omega \operatorname{cos}(\omega t) - B \omega \operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{para } t_0 = 0 \rightarrow V_0 = \dot{x}(t_0) = A \omega \rightarrow A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

onde as constantes dependem das condições iniciais (CI) de posição e velocidade, sendo  $B = x_0$  e

$A = V_0 / \omega$ . Substituindo na expressão da aceleração obtém-se:

$$\boxed{x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + x_0 \operatorname{cos}(\omega t)}$$

que é a solução da equação diferencial homogênea do sistema massa-mola com frequência natural  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  que determina a posição  $x(t)$  para qualquer instante de tempo  $t$  devido às condições iniciais não nulas  $x_0$  e  $\dot{x}_0$ .

**Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor**

Considere novamente o sistema **massa/mola**, conforme ilustrado na Figura 9a, acrescido de um **amortecedor**, que é um elemento de forças dissipativa, com constante de amortecimento  $c$ , proporcional à velocidade. Nesse caso a equação diferencial do sistema passa a ser:

$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$  que pode ser reescrita como:  $\ddot{x}(t) = -\frac{c}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{F(t)}{m}$  e ser

integrada ao longo do tempo de forma recursiva, utilizando pequenos intervalos de tempo  $dt$ ,

para condições iniciais conhecidas:  $\dot{x}(t+dt) = \int_t^{t+dt} \ddot{x}(t) dt + \dot{x}_0$  e  $x(t+dt) = \int_t^{t+dt} \dot{x}(t) dt + x_0$ .

## 6. MOMENTO E PRODUTO DE INÉRCIA

A forma como a massa é distribuída no corpo rígido influencia seu comportamento angular, conforme apresentado no item 5.2. Estas relações chamadas de **Momentos e Produtos de Inércia**, quantificam essa influência. Os momentos e produtos de inércia, formam a chamada **Matriz de Inércia**. A definição de cada propriedade de distribuição de massa é apresentada, quantificada e analisada individualmente à seguir.

### 6.1. Momento de Inércia em Relação a Eixo

Defini-se **Momento de Inércia** da partícula  $P_i$  em relação a eixo  $\vec{r}$ , o escalar  $J_r$  obtido do produto da massa  $m_i$  multiplicada pelo quadrado da distância  $d_i$  até o eixo, conforme mostrado na Figura 20. Seja o sistema  $S$  de pontos materiais  $(P_i, m_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  um agregado rígido de partículas. O Momento de Inércia  $J_r$  em relação ao eixo  $\vec{r} = r\vec{u}$  passante pelo ponto  $O$ , conforme ilustrado na Figura 20a, é dado pelo escalar:

$$J_r = \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 \quad (45)$$

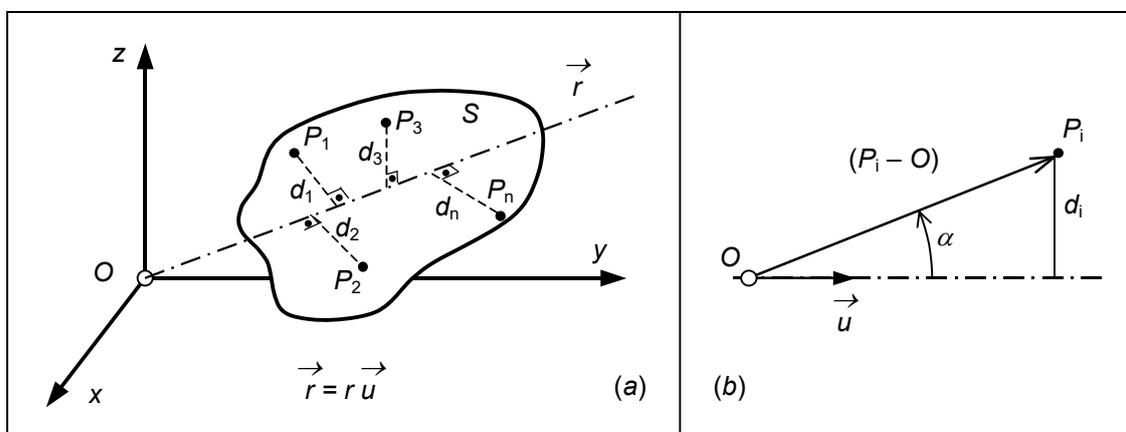


Figura 20 - Momento de Inércia em relação a um eixo

Portanto para cada partícula  $P_i$  de massa  $m_i$  com distância  $d_i$  à reta  $\vec{r} = r\vec{u}$ , conforme ilustrado na Figura 20b, tem-se:

$$\text{sen } \alpha_i = \frac{d_i}{|(P_i - O)|} \Rightarrow d_i = (P_i - O) \cdot \text{sen } \alpha_i \quad (46)$$

Que pode ser representada pelo produto vetorial:

$$|d_i| = |(P_i - O)| |\vec{u}| \cdot \text{sen } \alpha_i \Rightarrow d_i^2 = [(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2 \Rightarrow \boxed{J_r = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2} \quad (47)$$

Para um agregado indeformável de partículas (corpo rígido) os momentos de inércia descritos num sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz$  resultam na seguinte forma:

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) ; \quad J_{yy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (z_i^2 + x_i^2) ; \quad \text{e} \quad J_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) ; \quad (48)$$

**Propriedade:** Chama-se **Raio de Giração** “  $i_r$  ” do sistema  $S$  em relação a reta  $\vec{r} = r\vec{u}$ , o escalar positivo, tal que:

$$\boxed{J_r = M \cdot i_r^2} \quad \text{onde} \quad M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (49)$$

ou seja, tudo se passa como se a massa total  $M$  do sistema, estivesse concentrada a uma distância “  $i_r$  ” do eixo  $\vec{r} = r\vec{u}$  em torno do qual se deseja medir o Momento de Inércia.

## 6.2. Momento de Inércia em Relação a Coordenadas Cartesianas

O Momento de Inércia medido em relação a um sistema de coordenadas cartesianas, em torno de um determinado eixo (por exemplo: eixo  $z$ ), conforme ilustrado na Figura 21, utilizando *Pitágoras*, é dado por:

$$J_{Oz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \quad (50)$$

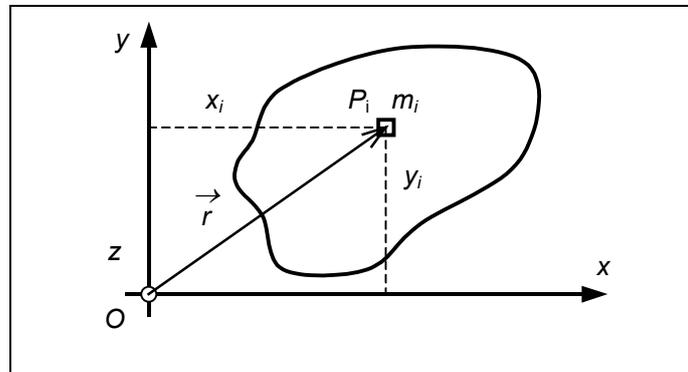


Figura 21 - Momento de Inércia em relação a Eixos Cartesianos

Por analogia, para os demais eixos coordenados, tem-se:

$$J_{Ox} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) \quad \text{e} \quad J_{Oy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) \quad (51)$$

**Propriedade:** para sistemas planos ( $z_i = 0$ ) obtêm-se:  $J_z = J_x + J_y$ . Lembre-se que a forma como os momentos de inércia foram organizados foi constituído na dedução do Teorema da Energia Cinética (*TEC*) apresentado no item 5.2.

## Exemplos de Momento de Inércia

Determinar o momento de inércia de uma **BARRA** homogênea, esbelta de massa  $m$  e comprimento  $L$  em relação ao seu eixo transversal  $z$  passante pelo centro da barra.

**RESOLUÇÃO:** Sistema: barra de massa  $m$  e comprimento  $L$ . Diagrama. Teorema: integral definida dos elementos  $dx$  com de massa elementar  $dm$  dados por  $dm = \lambda \cdot dx$  (onde  $\lambda$  é a densidade linear da barra homogênea em unidade de kg/metro) ao longo do comprimento  $L$ , conforme ilustrado na Figura 22a. Assim tem-se o somatório convertido para a seguinte integral:

$$J_z = \int_{-L/2}^{L/2} dm \cdot x^2 = \int_{-L/2}^{L/2} (\lambda \cdot dx) \cdot x^2 = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \lambda \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} \quad \text{considerando a massa total da barra}$$

$$M = \lambda \cdot L \text{ resulta em: } J_z = \lambda \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \lambda \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \lambda \cdot \frac{1}{12} mL^3 = \frac{1}{12} ML^2$$

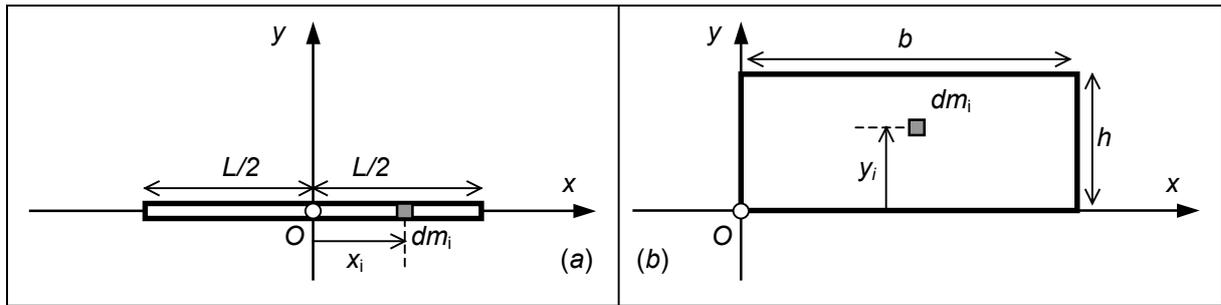


Figura 22 – Momento de Inércia de Barra Esbelta e Placa

Determinar o momento de inércia de uma **PLACA** de massa  $M$ , altura  $h$ , comprimento  $b$  e espessura  $e$ , em relação ao seu eixo passante pela extremidade inferior da placa ( $Ox$ ).

**RESOLUÇÃO:** Sistema: placa de massa  $m$ , altura  $h$  e comprimento  $b$ . Diagrama. Teorema: integral dupla definida dos elementos de massa elementar  $dm$  dados por  $dm = \mu \cdot dx \cdot dy$  (onde  $\mu$  é a densidade linear de área da placa homogênea em unidade de  $\text{kg/metro}^2$ ) ao longo do comprimento  $b$  e altura  $h$ , conforme ilustrado na Figura 22b. Assim tem-se a seguinte integral dupla em  $dx$  e  $dy$ :

$$J_{Ox} = \iint_{\text{chapa}} dm \cdot y^2 = \iint_{\text{chapa}} (\mu \cdot dx \cdot dy) \cdot y^2 = \int_0^b (\mu \cdot dx) \int_0^h y^2 \cdot dy \Rightarrow$$

$$J_{Ox} = \int_0^b (\mu \cdot dx) \left( \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^h \right) = \frac{1}{3} \mu h^3 \int_0^b dx = \frac{1}{3} \mu h^3 \cdot x \Big|_0^b = \frac{1}{3} \mu b h^3 \quad \text{considerando a massa total da placa}$$

homogênea:  $M = \mu \cdot b \cdot h$  resulta em:  $J_{Ox} = \frac{1}{3} M h^2$ . Por similaridade o momento de inércia em

$$\text{relação ao eixo } Oy \text{ é: } J_{Oy} = \frac{1}{3} M b^2 \quad \text{e} \quad J_{Oz} = \frac{1}{3} M (h^2 + b^2)$$

Determinar o momento de inércia de um **ANEL** de massa  $M$ , espessura desprezível e raio  $R$  em relação ao seu eixo perpendicular  $z$  passante por seu centro, conforme ilustrado na Figura 23.

**RESOLUÇÃO:** Sistema: anel de massa  $M$  e raio  $R$ . Diagrama. Teorema: integral definida dos

elementos  $d\theta$  com de massa elementar  $dm$ , dado por  $dm = \lambda \cdot ds = \lambda \cdot R d\theta$  (onde  $\lambda$  é a densidade linear do anel homogêneo em unidade de kg/metro) ao longo do comprimento  $2\pi$ , conforme ilustrado na Figura 23a. Assim tem-se a seguinte integral definida:

$$J_z = \int_0^{2\pi} dm_i \cdot R^2 = R^2 \int_0^{2\pi} \lambda \cdot R d\theta = \lambda \cdot R^2 R \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \lambda \cdot R^2 R \cdot (\theta \Big|_0^{2\pi}) = \lambda \cdot 2\pi R \cdot R^2 \quad \text{considerando a}$$

massa total do anel igual a:  $M = \lambda \cdot 2\pi R$  resulta em:  $J_z = M R^2$

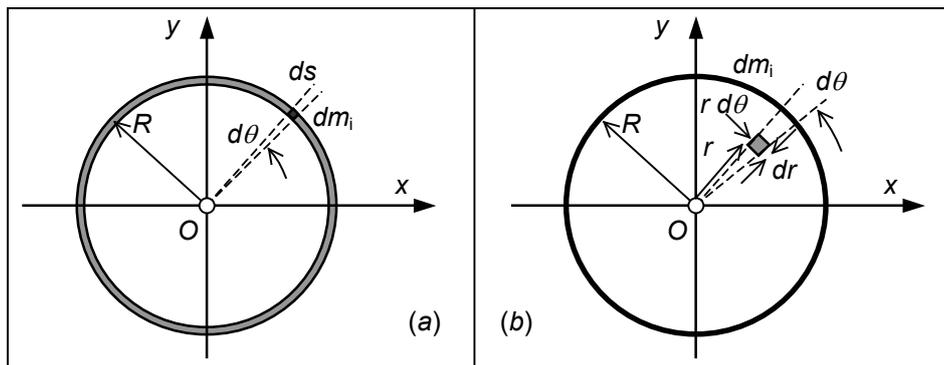


Figura 23 – Momento de inércia do Anel e do Disco

Determinar o momento de inércia de um **DISCO** de massa  $M$ , raio  $R$  e espessura  $e$ , em relação ao seu eixo perpendicular  $z$  passante por seu centro, conforme ilustrado na Figura 23b.

**RESOLUÇÃO:** Sistema: disco de massa  $M$  e raio  $R$ . Diagrama. Teorema: integral dupla definida dos elementos  $d\theta$  e  $dr$  com de massa elementar  $dm$ , dado por  $dm = \mu \cdot dA = \mu \cdot r d\theta \cdot dr$  (onde  $\mu$  é a densidade de área do disco homogêneo em unidade de kg/metro<sup>2</sup>) ao longo do comprimento  $2\pi$  e  $R$ , conforme ilustrado na Figura 23b. Assim tem-se a seguinte integral dupla:

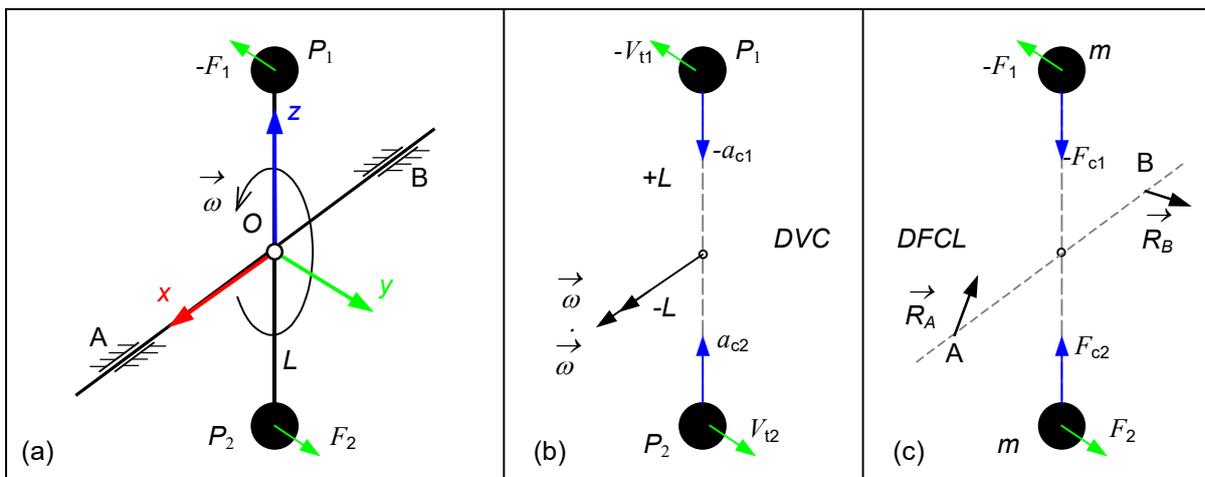
$$J_z = \iint_{Disco} dm_i \cdot r^2 = \iint_{Disco} (\mu \cdot r d\theta \cdot dr) \cdot r^2 = \mu \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \mu \int_0^R r^3 dr \cdot (\theta \Big|_0^{2\pi}) = \mu \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr \Rightarrow$$

$$J_z = \mu \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \mu \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R \right) = \mu \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4 = \mu \cdot \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} R^2 \quad \text{considerando a massa total do}$$

disco igual à:  $M = \mu \cdot A = \mu \cdot \pi R^2$  resulta em:  $J_z = \frac{1}{2} M R^2$

**Efeito do Momento de Inércia**

Determine a aceleração angular  $\dot{\vec{\omega}}$  da cruzeta  $OABP_1P_2$  de massa desprezível, com duas massas  $m$  nas extremidades  $P_1$  e  $P_2$ , quando submetido a um binário de forças externas  $F_1$  e  $F_2$  (portanto momento  $M$ ), conforme mostrado na Figura 24a.



**Figura 24 – Exemplo de Momento de Inércia**

**Método de Resolução:** a) **Sistema:** O sistema é constituído por duas massas vinculadas e pela cruzeta que gira em torno do eixo  $AB$ . b) **Diagramas:** Fazendo o diagrama de forças sobre o corpo livre (*DFCL*) cada massa fica sujeita as forças centrípetas devido ao vínculo da cruzeta e a força do binário. c) **Referencial e Pólo:** Adotando o referencial inercial centrado em  $O$  com sistema de coordenadas  $Oxyz$  móvel solidário ao sistema, a posição  $P_1$  e  $P_2$  de cada partícula, fica definida pelas coordenadas  $+L$  e  $-L$  na direção  $z$ . d) **Teoremas:** Utilizando a fórmula de campo de acelerações da cinemática, obtêm-se para cada corpo  $P_i$ :

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = 0 + \dot{\omega} \vec{i} \wedge L_i \vec{k} + \omega \vec{i} \wedge (\omega \vec{i} \wedge L_i \vec{k})$$

$$\vec{a}_{P_i} = \pm L \dot{\omega} \vec{j} + \omega \vec{i} \wedge (-L \omega \vec{j}) = \pm (L \dot{\omega} \vec{j} - L \omega^2 \vec{k}) = \pm (a_t \vec{j} + a_c \vec{k})$$

que são as

componentes de aceleração tangencial e centrípeta, conforme apresentado na Figura 24b.

d) **Teoremas:** Aplicando o teorema da resultante (*TR*) para cada corpo e observando o *DFCL* apresentado na Figura 24c e desprezando a ação gravitacional, obtêm-se,

$$m \cdot \vec{a}_1 = \sum \vec{F} = -F_1 \vec{j} - F_c \vec{k} \quad \text{e} \quad m \cdot \vec{a}_2 = \sum \vec{F} = F_2 \vec{j} + F_c \vec{k}$$

Pré multiplicando vetorialmente os dois lados de cada expressão por  $Li = (Pi - O)$ , as forças centrípetas se anulam, resultando em:

$$\begin{aligned} L\vec{k} \wedge m \cdot \vec{a}_1 &= L\vec{k} \wedge (-F_1)\vec{j} + L\vec{k} \wedge (-F_c)\vec{k} = LF_1\vec{i} \\ -L\vec{k} \wedge m \cdot \vec{a}_2 &= -L\vec{k} \wedge F_2\vec{j} - L\vec{k} \wedge F_c\vec{k} = LF_2\vec{i} \end{aligned}$$

Utilizando as acelerações de  $P_1$  determinadas anteriormente para o sistema completo, considerando as duas massas e somando as equações:

$$\begin{aligned} L\vec{k} \wedge m(L\dot{\omega}\vec{j} - L\omega^2\vec{k}) &= LF_1\vec{i} \quad \text{e} \quad -L\vec{k} \wedge m(-L\dot{\omega}\vec{j} + L\omega^2\vec{k}) = LF_2\vec{i} \\ (2mL^2) \cdot \dot{\omega}\vec{i} &= 2LF\vec{i} \quad \Rightarrow \quad J_x \dot{\omega} = \vec{M}_O \end{aligned}$$

Portanto o momento de inércia  $J_x = 2mL^2$  (de maneira similar à inércia da massa) é a quantidade associada com a aceleração angular  $\dot{\omega}$  produzida devido a ação de um binário de forças  $\vec{M}_O$ , ou seja, a inércia rotacional.

### 6.3. Produto de Inércia

O produto de inércia em relação a pares de eixos cartesianos de um conjunto de partículas ( $P_i$ ,  $m_i$ ),  $i = 1, 2, \dots, n$ , por definição é dado por:

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i \cdot y_i) \quad ; \quad J_{yz} = J_{zy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i \cdot z_i) \quad ; \quad J_{zx} = J_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (z_i \cdot x_i) \quad (52)$$

O significado físico do produto de inércia está associado com a simetria de distribuição de massa em torno do centro de massa. A forma como os produtos de inércia são organizados foi constituída na dedução do Teorema da Energia Cinética, apresentado no item 5.2.

**Propriedades:** para sistemas planos (ex.  $z_i = 0$ ) os seguintes produtos de inércia são nulos.

$$J_{yz} = J_{zy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i \cdot z_i) = 0 \quad ; \quad J_{zx} = J_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (z_i \cdot x_i) = 0 \quad (53)$$

Para sistemas planos (ex.  $z_i = 0$ ) com um plano de simetria, conforme ilustrado na Figura 25, todos os produtos de inércia são nulos.  $J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i \cdot y_i) = m_1 \cdot x y - m_2 \cdot x y = 0$  Para sistemas tridimensionais com dois planos de simetria todos os produtos de inércia são nulos.

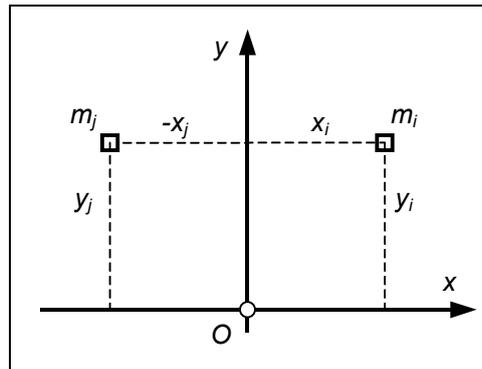


Figura 25 – Produto de Inércia para partículas simétricas

### Exemplo de Produto de Inércia

Determinar o produto de inércia de uma **BARRA** homogênea, de massa  $M$  e comprimento  $L$  em relação ao par de eixos  $Oxy$ , conforme ilustrado na Figura 26. **RESOLUÇÃO:** **Sistema:** barra de massa  $M$  e comprimento  $L$ . **Diagrama.** **Teorema:** integral definida dos elementos  $dx$  com de massa elementar  $dm$  dados por  $dm = \lambda \cdot dx$  (onde  $\lambda$  é a densidade linear da barra esbelta e homogênea em unidade de kg/metro) ao longo do comprimento  $L$ , conforme ilustrado na Figura 26a. O somatório pode ser substituído pela seguinte integral definida:

$$J_{xy} = \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i = \int_0^L dm_i \cdot x_i \cdot y_i = b \int_0^L (\lambda \cdot dx) \cdot x = \lambda b \int_0^L x dx = \lambda b \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^L$$

considerando a massa total da barra  $M = \lambda \cdot L$  resulta em:

$$J_{xy} = \lambda b \cdot \frac{1}{2} L^2 = M \cdot b \cdot \frac{L}{2}$$

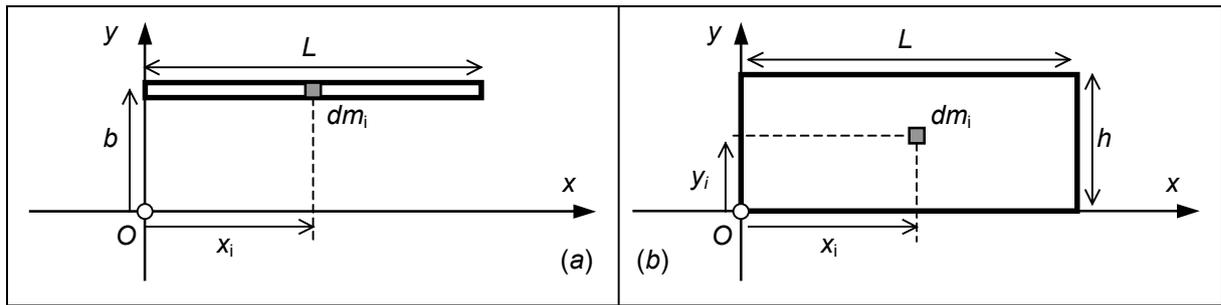


Figura 26 – Produto de inércia de Barra Esbelta e Placa Retangular

Determinar o produto de inércia de uma **PLACA RETANGULAR**, esbelta de massa  $M$ , comprimento  $L$  e largura  $h$ , em relação ao par de eixos  $Oxy$  conforme ilustrado na Figura 26b.

**RESOLUÇÃO: Sistema:** placa retangular homogênea, de massa  $M$ , comprimento  $L$  e largura  $h$ . **Diagrama. Teorema:** integral dupla definida dos elementos  $dx$  e  $dy$  com de massa elementar  $dm$  dados por  $dm = \mu \cdot dx \cdot dy$  (onde  $\mu$  é a densidade de área da placa homogênea em unidade de  $\text{kg/metro}^2$ ) ao longo do comprimento  $L$ , conforme ilustrado na Figura 26b. Assim tem-se a seguinte integral dupla:

$$J_{xy} = \iint_{\text{chapa}} dm \cdot x \cdot y = \iint_{\text{chapa}} (\mu \cdot dx \cdot dy) x \cdot y = \int_0^L (\mu \cdot dx) x \int_0^h y \cdot dy \Rightarrow$$

$$J_{xy} = \mu \int_0^L x dx \cdot \left( \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^h \right) = \mu \frac{1}{2} h^2 \int_0^L x dx = \mu \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^L \right) = \mu h L \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{L}{2} \quad \text{considerando a massa}$$

total da placa homogênea:  $M = \mu \cdot h \cdot L$  resulta em:  $J_{xy} = M \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{L}{2}$ .

### Efeito do Produto de Inércia

Considere agora o sistema com duas massas  $m$  presas nas extremidades  $P_1$  e  $P_2$  com distância  $2L$  do eixo  $\overline{AB}$  da estrutura, deslocadas entre si de uma distância  $2d$  ao longo do eixo (caracterizando uma assimetria) e girando com velocidade angular  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  constante, conforme ilustrado na Figura 27a.

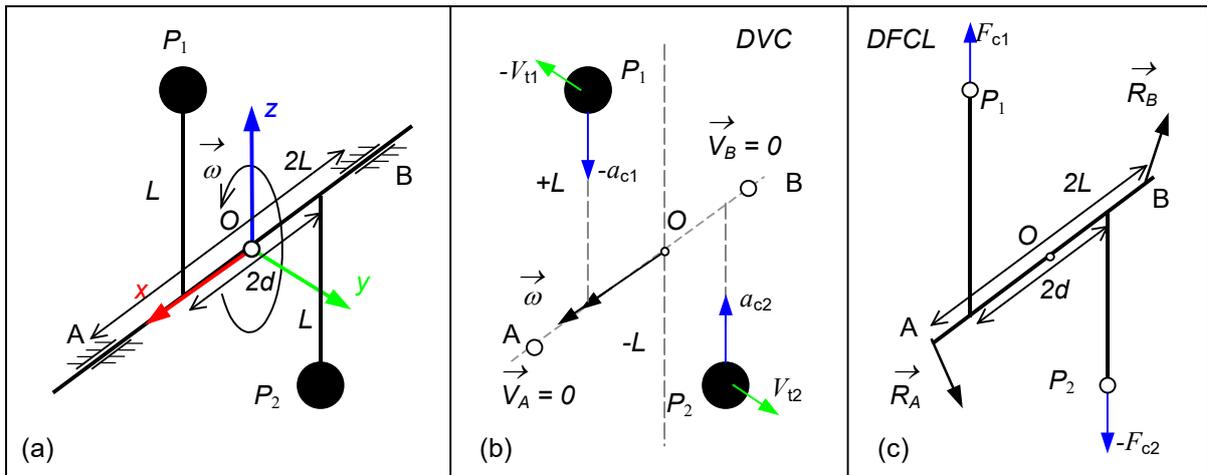


Figura 27 – Efeito do Produto de Inércia

**Método de Resolução:** a) **Sistema:** O sistema é constituído por duas massas vinculadas e pela cruzeta que gira em torno do eixo  $AB$ . b) **Diagramas:** Fazendo o diagrama de forças sobre o corpo livre ( $DFCL$ ) cada massa fica sujeita as forças centrípetas devido ao vínculo da cruzeta e a força do binário. c) **Referencial e Pólo:** Adotando o referencial inercial centrado em  $O$  com sistema de coordenadas  $Oxyz$  móvel solidário ao sistema a posição  $P_1$  e  $P_2$  de cada partícula, fica definida pelas coordenadas  $+L$  e  $-L$ , na direção  $z$ . d) **Teoremas:** Utilizando a fórmula de campo de acelerações, obtêm-se para cada corpo  $P_i$ :

$$\vec{a}_p = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] = \vec{0} + \vec{0} \wedge L_i \vec{k} + \omega \vec{i} \wedge [\omega \vec{i} \wedge L_i \vec{k}] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_{P_i} = \omega \vec{i} \wedge (-L_i \omega \vec{j}) = \mp L_i \omega^2 \vec{k} \quad \text{que é a aceleração centrípeta necessária para cada partícula}$$

percorrer a trajetória circular em torno do eixo  $\overline{AB}$ , conforme apresentado na Figura 27b. A reação sobre a cruzeta é obtida do **TR**:  $m_i \cdot \vec{a}_{P_i} = \mp m_i \cdot L_i \omega^2 \vec{k}$ . Considerando a cruzeta  $OABP_1P_2$  em equilíbrio e calculando o momento em relação ao pólo  $O$ , utilizando o  $DFCL$  apresentado na Figura 27c e desprezando a ação gravitacional, obtêm-se,

$$\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = (d\vec{i} + L\vec{k}) \wedge F_{c1} \vec{k} - (d\vec{i} + L\vec{k}) \wedge (-F_{c2})\vec{k} + L\vec{i} \wedge \vec{R}_A - L\vec{i} \wedge \vec{R}_B = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{M}_O = -d F_{c1} \vec{j} - d F_{c2} \vec{j} + (L A_y \vec{k} - L A_z \vec{j}) - (L B_y \vec{k} - L B_z \vec{j}) = 0. \text{ Tomando apenas a componente}$$

do momento na direção  $\vec{j}$ , obtêm-se:  $2mdL\omega^2 \vec{j} = -L A_z \vec{j} + L B_z \vec{j}$  que é o binário de forças reativas nos mancais  $A$  e  $B$  separados de  $2L$  necessário para conter o movimento centrípeto das massas, separadas pela distância  $2d$ . Note que para que a posição das massas sejam fixas é

necessário utilizar um sistema de coordenadas  $Oxyz$  auxiliar solidário ao corpo e girando com ele.

Note que, apesar do centro de massa coincidir com o eixo de giro, a assimetria das massas produz forças reativas em oposição de fase nos mancais. Tal força pode ser anulada compensando a assimetria com a introdução de duas massa idêntica mas em posição oposta, balanceando o sistema. Note ainda que a assimetria em relação ao centro de massa, vai produzir produtos de inércia não nulos ( $J_{xz} \neq 0$ ).

#### 6.4. Matriz de Inércia

A **Matriz de Inércia** em relação a um sistema de eixos coordenados para um conjunto agregado de partículas por definição é descrita como:

$$J_O = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}_O = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot y_i & -\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i \cdot x_i & \sum_{i=1}^n m_i \cdot (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i \cdot z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i \cdot x_i & -\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}_O \quad (54)$$

A forma como os momentos e produtos de inércia são organizados foi constituído na dedução do Teorema da Energia Cinética (**TEC**) apresentado no item 5.2.

#### Propriedades da Matriz de Inércia

a) **Simetria**: Como os produtos de inércia opostos à diagonal principal são idênticos

$$J_{xy} = \int_S (x \cdot y) dm = \int_S (y \cdot x) dm = J_{yx} \quad \text{ter-se-á para o agregado rígido de partículas: } [J]_O = [J]_O^T$$

b) **Invariância** no traço: A soma dos termos da diagonal principal da matriz de inércia é invariante ( $J_x + J_y + J_z = 2J_O$ ) para qualquer sistema de coordenadas escolhido.

c) **Positividade**: A matriz de inércia é positiva definida. Os momentos de inércia são formas quadráticas e portanto sempre positivas. Como a matriz pode ser diagonalizada (problema de auto-vetor, auto-valor em Álgebra Linear) e como o traço é invariante, seu determinante será sempre maior ou igual a zero.

d) **Composição**: A matriz de inércia de um conjunto de partes é a composição do momento de inércia de cada parte:  $J_x^C = J_x^A + J_x^B$  onde  $C = A \cup B$  (união). Caso uma retirada de massa esteja presente (por exemplo furo em uma chapa) vale:  $J_x^C = J_x^A - J_x^B$  onde  $C = A \cap B$  (exclusão). A mesma propriedade vale para os produtos de inércia.

## 6.5. Translação de Eixos Paralelos

A translação de eixos paralelos (Teorema de *Stainer*) é um recurso muito útil na determinação dos termos da matriz de inércia. O momento de inércia da partícula  $P_i$ , de massa  $m_i$ , expresso em relação a reta  $\vec{u}$  é dado por:

$$J_{O\vec{u}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2 \quad \text{ou} \quad J_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) \quad (55)$$

A posição da partícula  $P_i$ , conforme mostrado na Figura 28, pode ser expresso na base  $OXYZ$  ou na base  $Gxyz$ :

$$\begin{aligned} (P_i - O) &= X_i \vec{I} + Y_i \vec{J} + Z_i \vec{K} \\ (P_i - G) &= x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad ; \quad (G - O) = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k} \end{aligned} \quad (56)$$

O momento de inércia  $J_{OX}$  determinado em relação ao eixo  $OX$  resulta em:

$$J_{OX} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (Y_i^2 + Z_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(y_i + b)^2 + (z_i + c)^2] \quad (57)$$

$$J_{OX} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) + 2b \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i + Mb^2 + 2c \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i + Mc^2$$

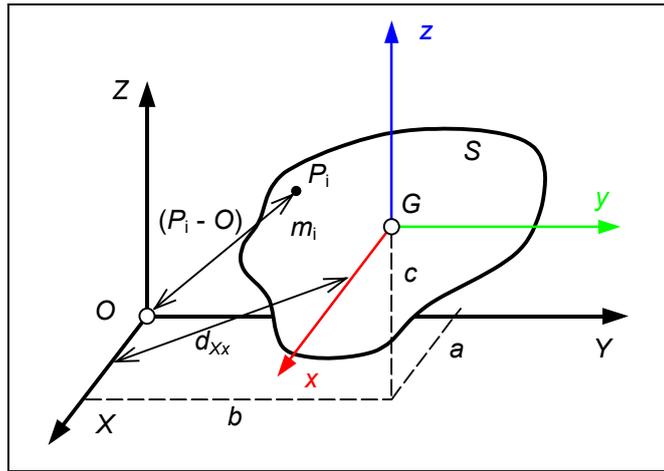


Figura 28 – Translação de eixos

Utilizando a propriedade do centro de massa do corpo, descrito na base  $Gxyz$ , lembrando que

$$\sum m_i \cdot (P_i - G) = 0, \text{ resulta em: } 2b \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i = 0 \text{ e } 2c \sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i = 0, \text{ e obtêm-se:}$$

$$J_{OX} = \bar{J}_{Gx} + M \cdot d_{Xx}^2 \quad (58)$$

ou seja o momento de inércia no novo eixo ( $OX$ ) é igual ao momento de inércia calculado em relação ao centro de massa  $G$  em relação ao eixo ( $Gx$ ), adicionado a massa total  $M$  multiplicado pela distância ao quadrado  $d_{Xx}^2 = b^2 + c^2$  entre os eixo  $X$  e  $x$ .

De forma análoga para os demais eixos obtêm-se:

$$\boxed{J_{OX} = \bar{J}_{Gx} + M \cdot d_{Xx}^2 \quad ; \quad J_{OY} = \bar{J}_{Gy} + M \cdot d_{Yy}^2 \quad \text{e} \quad J_{OZ} = \bar{J}_{Gz} + M \cdot d_{Zz}^2} \quad (59)$$

Para o produto de inércia  $J_{OXY}$  da partícula  $P_i$  de massa  $m_i$ , calculado em relação a base  $OXY$ , conforme mostrado na Figura 28, é:

$$\begin{aligned}
 J_{OXY} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot X_i \cdot Y_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i + a) \cdot (y_i + b) \\
 J_{OXY} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \cdot y_i + b \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i + a \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i + ab \sum_{i=1}^n m_i \\
 J_{OXY} &= \bar{J}_{G_{xy}} + M \cdot a \cdot b
 \end{aligned} \tag{60}$$

De forma análoga para os demais eixos obtêm-se a translação de eixos paralelos para os **PRODUTOS DE INÉRCIA**:

$$\boxed{J_{OXY} = \bar{J}_{G_{xy}} + M \cdot a \cdot b \quad ; \quad J_{OYZ} = \bar{J}_{G_{yz}} + M \cdot b \cdot c \quad \text{e} \quad J_{OZX} = \bar{J}_{G_{zx}} + M \cdot c \cdot a} \tag{61}$$

ou seja o produto de inércia em relação a novos pares de eixos (exemplo:  $OXY$ ) é igual ao produto de inércia calculado em relação ao centro de massa  $G$  em relação ao par de eixo ( $Gxy$ ), adicionado a massa total  $M$  multiplicado pela distância entre cada um dos novos eixos paralelos.

### Exemplo de Cálculo da Matriz de Inércia

Considere a barra homogênea e esbelta de massa  $m$  e comprimento  $L$  ilustrada na Figura 29a. Determinar a matriz de inércia da barra.

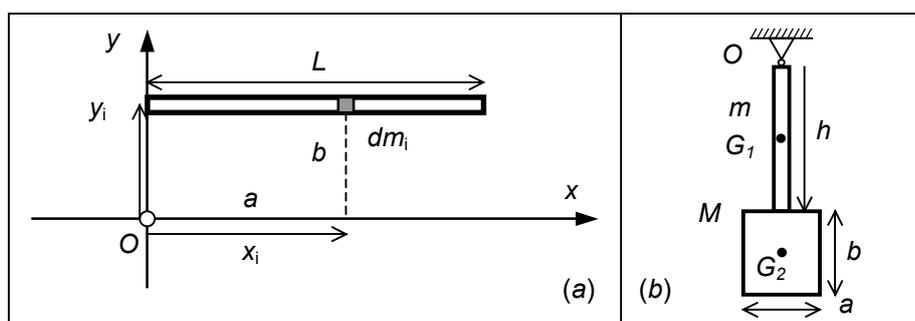


Figura 29 – Barra Esbelta e Sistema Composto

**Resolução:** a) **Sistema:** Barra de massa  $m$  e comprimento  $L$ . b) **Diagramas.** c) **Referencial e**

Pólo:  $Oxyz$ . d) **Teoremas:** Momento e Produtos e Transporte.  $J_{Ox} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2)$  barra

contida no plano  $Oxy$   $\therefore z_i = 0$ . Para  $y_i = b = \text{cte}$  tem-se:  $J_{Ox} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i^2 + 0) = b^2 \sum_{i=1}^n m_i = m \cdot b^2$ .

Alternativamente utilizando o teorema de eixos paralelos para barra esbelta:

$J_{Ox} = \bar{J}_{Gx} + m \cdot d_{xx'}^2 = 0 + m \cdot b^2$ . O momento de inércia em torno do eixo  $y$  é:

$J_{Oy} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) = \frac{1}{3} m L^2$ . Para o momento de inércia em torno do eixo  $z$  pode ser obtido de

$\therefore J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy} = m b^2 + \frac{1}{3} m L^2 = m \left( b^2 + \frac{L^2}{3} \right)$ . O produto de inércia é obtido do transporte de

eixos paralelos:  $J_{Oxy} = \bar{J}_{Gxy} + m \cdot a \cdot b = 0 + m \frac{L}{2} b$ . Os produtos de inércia que envolvem  $z_i = 0$

resultam nulos. A matriz de inércia resulta em:

$$J_O = m \cdot \begin{bmatrix} b^2 & (-bL/2) & 0 \\ (-bL/2) & (L^2/3) & 0 \\ 0 & 0 & (b^2 + L^2/3) \end{bmatrix}$$

## Exemplo de Sistema Composto

Considere o sistema composto pela barra homogênea e esbelta de massa  $m$  e comprimento  $h$  e a chapa de massa  $M$  com altura  $b$  e largura  $a$ , conforme ilustrada na Figura 29b. Determinar a posição do centro de massa e o Momento de inércia do sistema composto.

**Resolução:** a) **Sistema:** sistema composto pela barra e chapa. b) **Diagramas.** c) **Referencial e**

Pólo:  $Oxy$ . d) **Teoremas:** Momento e Transporte. Considerando problema plano ( $z_i = 0$ ) e

sistema simétrico ( $x_G = 0$ ), o centro de massa é obtido por:  $y_G = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i} \Rightarrow$

$$y_G = -\frac{m \cdot h/2 + M \cdot (h + b/2)}{(M + m)}$$

Momento de inércia é obtido pela adição das partes (barra chapa):  $J_{Oz} = J_{OG_1} + J_{OG_2} \Rightarrow$

$$J_{Oz} = (\bar{J}_{G_1} + m \cdot d_{zz'}^2) + (\bar{J}_{G_2} + M \cdot d_{zz'}^2) \Rightarrow$$

$$J_{Oz} = \left( \frac{1}{12} m h^2 + m \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right) + \left( \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) + M \cdot \left( h + \frac{b}{2} \right)^2 \right) \Rightarrow$$

$$J_{Oz} = \frac{1}{3} m h^2 + \frac{1}{12} M (a^2 + 12h^2 + 12hb + 4b^2).$$

### Exemplo Calculo de Matriz Inércia

Considere o dispositivo com duas barras de massa  $m$  e comprimento  $L$  que estão ligadas a um eixo de massa desprezível que gira sobre dois mancais  $A$  e  $B$ , conforme ilustrado na Figura 30a. Determinar a posição do centro de massa  $G$  do sistema e a Matriz de Inércia em relação ao pólo  $O$ .

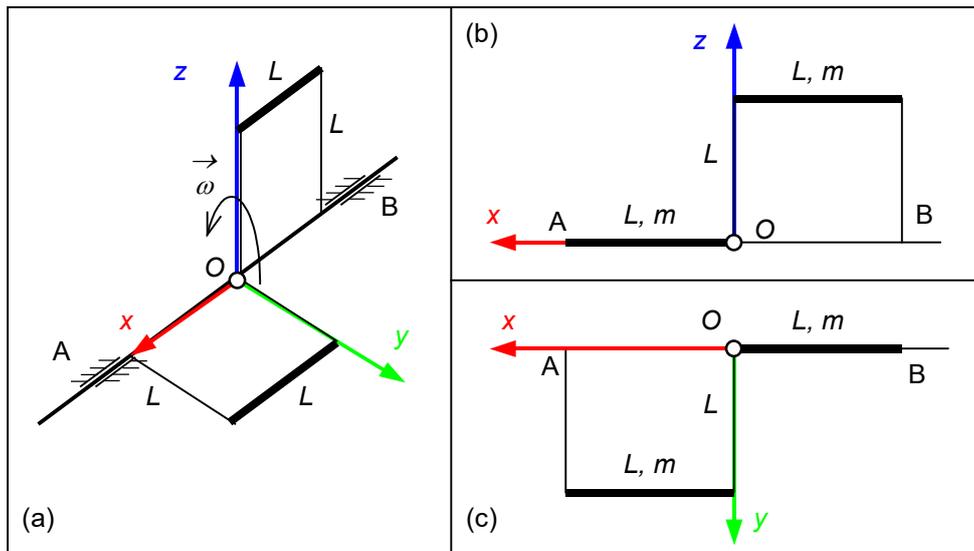


Figura 30 – Rotor excêntrico e assimétrico e Planos de Observação

**Resolução:** a) **Sistema:** sistema composto por duas barra de comprimento  $L$  e massa  $m$  e eixo suporte de massa desprezível. b) **Diagramas.** Planos de observação c) **Referencial** e Pólo:  $Oxyz$ . d) **Teoremas:** Momento e Transporte. Considerando a simetria ao longo do eixo  $x$ , o centro de massa é obtido por:

$$y_G = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i} \Rightarrow y_G = \frac{m \cdot 0 + m \cdot L}{(m + m)} = \frac{L}{2} \quad \text{e} \quad z_G = \frac{m \cdot L + m \cdot 0}{(m + m)} = \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$(G-O) = \frac{L}{2}(\vec{j} + \vec{k}) = (0 \quad L/2 \quad L/2)$$

Os momentos de inércia são obtido pela adição das barras:  $J_{Ox} = J_{G_1x} + J_{G_2x} = 2mL^2$  ;

$$J_{Oy} = (\bar{J}_{G_1y} + m \cdot d_{y_1}^2) + (\bar{J}_{G_2y} + m \cdot d_{y_2}^2) = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m \cdot (L^2 + L^2/4) = \frac{5}{3}mL^2 = J_{Oz}.$$

Os produtos de inércia são obtido pela adição das barras, conforme ilustrado na Figura 30b no plano  $Oxz$  e na Figura 30c no plano  $Oxy$ :

$$J_{xy} = \sum \bar{J}_{xy} + mab = \left[0 + m \cdot \frac{L}{2} \cdot L\right] + \left[0 + m \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) \cdot 0\right] = \frac{1}{2}mL^2$$

$$J_{yz} = \sum \bar{J}_{yz} + mbc = \left[0 + m \cdot \frac{L}{2} \cdot 0\right] + \left[0 + m \cdot 0 \cdot L\right] = 0$$

$$J_{zx} = \sum \bar{J}_{zx} + mca = \left[0 + m \cdot \frac{L}{2} \cdot 0\right] + \left[0 + m \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) \cdot L\right] = -\frac{1}{2}mL^2$$

Portanto a matriz de inércia em relação ao pólo  $O$ , resulta em:

$$J_O = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}_O = mL^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 5/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 5/3 \end{bmatrix}_O$$

## 6.6. Rotação de Eixo

A matriz de inércia pode ser descrita em relação a outro eixo rotacionado. Para determinar como a matriz de inércia se altera quando expressa em relação ao eixo  $O\vec{u}$ , considere cada ponto material " $P_i$ " do corpo e o versor unitário  $\vec{u}$ , conforme mostrado na Figura 31, e com posição descrita por :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ (P_i - O) &= \vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \end{aligned} \quad (62)$$

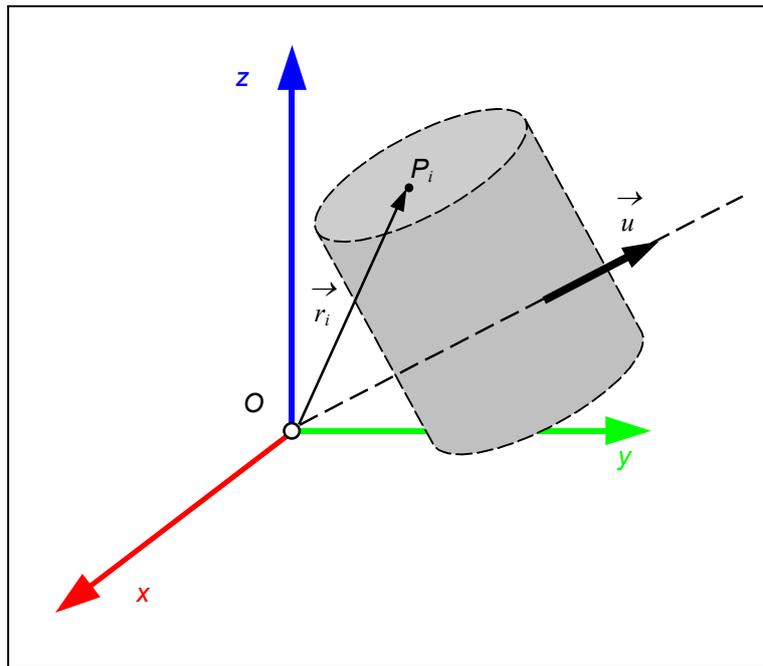


Figura 31 – Mudança de Eixo

O momento de inércia em relação ao eixo  $O\vec{u}$  é dado por:

$$J_{O\vec{u}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{u}]^2 \quad (63)$$

Resolvendo o produto vetorial, o quadrado e voltando na expressão do momento de inércia, obtêm-se:

$$\begin{aligned} (\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{u} &= (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}) \wedge (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \\ (\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{u} &= (y_i \cdot u_z - z_i \cdot u_y) \vec{i} + (z_i \cdot u_x - x_i \cdot u_z) \vec{j} + (x_i \cdot u_y - y_i \cdot u_x) \vec{k} \\ (\vec{r}_i \wedge \vec{u})^2 &= (z_i^2 + y_i^2) u_x^2 + (z_i^2 + x_i^2) u_y^2 + (y_i^2 + x_i^2) u_z^2 - 2x_i y_i u_x u_y - 2y_i z_i u_y u_z - 2z_i x_i u_z u_x \end{aligned} \quad (64)$$

$$J_{O\vec{u}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{u}]^2$$

$$J_{O\vec{u}} = J_{Ox} u_x^2 + J_{Oy} u_y^2 + J_{Oz} u_z^2 - 2J_{Oxy} u_x u_y - 2J_{Oyz} u_y u_z - 2J_{Ozx} u_z u_x$$

Utilizando a notação matricial para o versor unitário  $\{u\} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^t$  resulta na forma:

$$J_{O\bar{u}} = \begin{Bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oyx} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Ozx} & -J_{Ozy} & J_{Oz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (65)$$

$$J_{O\bar{u}} = \{u\}^t [J_O] \{u\} \quad (66)$$

ou seja para se obter a matriz de inércia, descrita em relação a um sistema de coordenadas  $Oxyz$ , em outro eixo, basta pré e pós multiplicar pelas coordenadas do versor unitário do novo eixo.

### 6.7. Eixos Principais e Central

Pode-se demonstrar que fixada uma origem arbitrária  $O$ , existe associado a qualquer sistema material  $S$ , um referencial ortogonal  $OXYZ$  para o qual os produtos de inércia são nulos. Os eixos deste referencial são chamados eixos **PRINCIPAIS** de inércia onde os produtos são chamados de momentos principais de inércia. Se a origem  $O$  for coincidente com o centro de massa o sistema de coordenadas é chamado de **CENTRAL**. Para se obter uma direção  $O\bar{u}$  tal que a matriz de inércia seja diagonal (produtos de inércia nulos), resolve-se o auto-problema do sistema linear  $[J]_O \{x\} = \lambda \cdot \{x\}$  que corresponde a determinar os três novos eixos (auto-vetores) para os quais a matriz seja diagonal (auto-valores).

### 6.8. Elipsóide de inércia

É possível provar que o lugar geométrico dos momentos de inércia em relação a variação de direção do eixo  $O\bar{u}$ , passante sempre por  $O$ , é uma superfície fechada de segundo grau e simétrica: um elipsóide (França, 2011). O maior eixo do elipsóide tem a magnitude do maior momento principal de inércia. A seção transversal média do elipsóide tem o diâmetro correspondente aos dois menores momentos principais de inércia.

## 7. TEOREMA DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR

O movimento geral do sólido é constituído de movimento de translação e rotação. O movimento do centro de massa de um corpo já foi delineado no item 4 e no caso de movimento de rotação o seguinte conceito é relevantes: A Quantidade de Movimento  $\vec{p}_i$  de uma partícula  $P_i$  de massa  $m_i$  e velocidade  $\vec{V}_i$ , num certo instante  $t$ , é dado por:

$$\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{V}_i \quad (67)$$

### 7.1. Momento e Momento da Quantidade de Movimento

Define-se o **MOMENTO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO** da partícula  $P_i$  de massa  $m_i$  em relação a um pólo  $O$  como o vetor:

$$\vec{H}_O = (P_i - O) \wedge \vec{p}_i = (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_i \quad (68)$$

Para um agregado de  $n$  partículas, formando um corpo rígido, tem-se pela soma:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (69)$$

Derivando a expressão  $\vec{H}_O$  e o produto vetorial à direita, em relação ao tempo, obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{V}_i - \vec{V}_O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \frac{d}{dt} (m_i \cdot \vec{V}_i) \quad (70)$$

Para massa da partícula invariante ( $\dot{m}_i = 0$ ) e lembrando que  $\vec{V}_i \wedge \vec{V}_i = 0$ , obtêm-se:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_{i=1}^n -\vec{V}_O \wedge m_i \cdot \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot \vec{V}_i) \wedge \vec{V}_O + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad (71)$$

Utilizando a propriedade do centro de massa e sua derivada temporal:

$$(G - O) = \frac{\sum (P_i - O) \cdot m_i}{\sum m_i} \Rightarrow m \cdot (\vec{V}_G - \vec{V}_O) = \sum (\vec{V}_i - \vec{V}_O) \cdot m_i \Rightarrow m \cdot \vec{V}_G = \sum \vec{V}_i \cdot m_i \quad (72)$$

e lembrando da expressão do momento de forças  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$  em relação ao pólo  $O$

(note que as forças internas não comparecem na expressão do momento) resulta finalmente em:

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext} + m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O} \quad (73)$$

ou seja, a taxa de variação temporal do momento da quantidade de movimento é igual ao momento das forças externas em relação ao pólo  $O$  qualquer, e mais um termo cruzado.

Na forma matricial utilizando vetores coluna tamanho  $\{3 \times 1\}$  tem-se:

$$\{\dot{H}_O\} = \{M_O^{ext}\} + m \cdot \{V_G\} \wedge \{V_O\} \quad (74)$$

onde:  $\{\dot{H}_O\} = \{\dot{H}_{Ox} \quad \dot{H}_{Oy} \quad \dot{H}_{Oz}\}^T$ ;  $\{M_O^{ext}\} = \{M_{Ox}^{ext} \quad M_{Oy}^{ext} \quad M_{Oz}^{ext}\}^T$ ;  $\{V_G\} = \{V_{Gx} \quad V_{Gy} \quad V_{Gz}\}^T$ ;  
 $\{V_O\} = \{V_{Ox} \quad V_{Oy} \quad V_{Oz}\}^T$ .

## 7.2. Momento da Quantidade de Movimento

Considere um corpo rígido com movimento genérico de roto-translação com velocidade  $\vec{V}_O$  e velocidade angular  $\vec{\omega}$ . O **Momento da Quantidade de Movimento** em relação ao pólo  $O$ , é uma grandeza vetorial dada por:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (75)$$

A velocidade do ponto material  $P_i$  de massa  $m_i$  do corpo, localizado na posição  $(P_i - O) = \vec{r}_i$  é dado pela fórmula de campo de velocidades  $\vec{V}_i = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$ .

Para movimento de translação  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , portanto  $\vec{V}_i = \vec{V}_O = \vec{V}_G$  e substituindo na expressão anterior resulta em:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_G = \left[ \sum_{i=1}^n m_i \cdot (P_i - O) \right] \wedge \vec{V}_G \quad (76)$$

Utilizando a propriedade do centro de massa o somatório resulta em:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot (P_i - O) = m \cdot (G - O) \quad (77)$$

Substituindo, resulta para corpo em **translação** o Momento da Quantidade de Movimento do centro de massa  $G$  do corpo rígido de massa total  $m$ :

$$\boxed{\vec{H}_G = (G - O) \wedge m \cdot \vec{V}_G} \quad (78)$$

Para movimento genérico de **roto-translação** substituindo a expressão da velocidade  $\vec{V}_i = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$  na expressão anterior resulta em dois somatórios:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_O + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \quad (79)$$

Utilizando novamente a propriedade do centro de massa o primeiro somatório resulta em:

$$\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot \vec{V}_O = \left[ \sum_{i=1}^n (P_i - O) \cdot m_i \right] \wedge \vec{V}_O = (G - O) \wedge m \vec{V}_O \quad (80)$$

Para o segundo somatório  $\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \cdot [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)]$  considerando a posição do ponto  $P_i$

$(P_i - O) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$ , para ponto  $O$  pertencente ao corpo e velocidade angular do corpo  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ , tem-se para o primeiro produto vetorial:

$$\vec{\omega} \wedge (P_i - O) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i) \vec{i} + \\ (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i) \vec{j} + \\ (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i) \vec{k} \end{pmatrix} \quad (81)$$

Para o segundo produto vetorial  $(P_i - O) \wedge \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$ :

$$(P_i - O) \wedge \vec{\omega} \wedge (P_i - O) = \begin{pmatrix} [(\omega_x y_i^2 - \omega_y x_i y_i) - (\omega_z x_i y_i - \omega_x z_i^2)] \vec{i} + \\ [(\omega_y z_i^2 - \omega_z y_i z_i) - (\omega_x y_i x_i - \omega_y x_i^2)] \vec{j} + \\ [(\omega_z x_i^2 - \omega_x z_i x_i) - (\omega_y z_i y_i - \omega_z y_i^2)] \vec{k} \end{pmatrix} \quad (82)$$

Aplicando na formula do momento da quantidade de movimento angular:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O = (G-O) \wedge m\vec{V}_O + \sum m_i \{ & \\ [\omega_x(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i] \vec{i} + & \\ [\omega_y(x_i^2 + z_i^2) - \omega_x x_i y_i - \omega_z y_i z_i] \vec{j} + & \\ [\omega_z(x_i^2 + y_i^2) - \omega_x x_i z_i - \omega_y y_i z_i] \vec{k} \} & \end{aligned} \quad (83)$$

Chamando de **Momentos e Produtos de Inércia** (conforme deduzido no item 5.2) os seguintes termos:

$$\begin{aligned} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = J_x \quad ; \quad \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = J_y \quad \text{e} \quad \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_z \\ \sum m_i x_i y_i = J_{xy} = J_{yx} \quad ; \quad \sum m_i y_i z_i = J_{yz} = J_{zy} \quad \text{e} \quad \sum m_i z_i x_i = J_{zx} = J_{xz} \end{aligned} \quad (84)$$

e voltando a substituir na formula anterior, resulta no momento angular de corpo:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O = (G-O) \wedge m\vec{V}_O + [ & \\ (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) \vec{i} + & \\ (J_y \omega_y - J_{xy} \omega_x - J_{yz} \omega_z) \vec{j} + & \\ (J_z \omega_z - J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y) \vec{k} ] & \end{aligned} \quad (85)$$

ou na forma vetorial:

$$\boxed{\vec{H}_O = (G-O) \wedge m\vec{V}_O + ([J]_O \{\vec{\omega}\})} \quad (86)$$

Utilizando a forma de produto matricial, tomando o vetor posição  $(G-O) = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$  expresso na forma anti-simétrica (*skel symmetric*), obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} + m \cdot \begin{bmatrix} 0 & -z_G & y_G \\ z_G & 0 & -x_G \\ -y_G & x_G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{Ox} \\ V_{Oy} \\ V_{Oz} \end{Bmatrix} \quad (87)$$

ou na forma compacta de produto matricial (*skel symmetric*):

$$\{H_O\} = ([J]_O \{\omega\}) + m \cdot [G-O]_{skel} \{V_O\} \quad (88)$$

A matriz  $[J]_O$  é quadrada, simétrica, de ordem 3, denominada **Matriz de Inércia** que retrata a forma como a massa é distribuída no corpo em relação ao sistema de coordenadas **Oxyz**. Os termos quadráticos na diagonal principal são denominados **Momentos de Inércia** em relação a um eixo e os termos fora da diagonal são chamados de **Produtos de Inércia** em relação a pares de eixos coordenados. Note que o ponto **O** pertence ao corpo ou extensão ideal dele.

### 7.3. Teorema da Quantidade de Movimento Angular - TQMA

Finalmente retomando a expressão do momento angular para o corpo rígido:

$\vec{H}_O = (G - O) \wedge m \cdot \vec{V}_O + ([J]_O \{\vec{\omega}\})$  e derivando em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{H}_O) &= (\vec{V}_G - \vec{V}_O) \wedge m \vec{V}_O + (G - O) \wedge m \cdot \vec{a}_O + \frac{d}{dt}([J]_O \{\vec{\omega}\}) \\ \frac{d}{dt}(\vec{H}_O) &= m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O + (G - O) \wedge m \cdot \vec{a}_O + \frac{d}{dt}([J]_O \{\vec{\omega}\}) \end{aligned} \quad (89)$$

e lembrando da expressão do momento  $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O + m \vec{V}_G \wedge \vec{V}_O$  e substituindo na anterior obtêm-se finalmente o **Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)** para o corpo rígido de massa constante em relação ao pólo **O** pertencente ao corpo:

$$\boxed{\frac{d}{dt}([J]_O \{\vec{\omega}\}) + (G - O) \wedge m \cdot \vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext}} \quad \text{TQMA} \quad (90)$$

Casos particulares:

- a) Se a escolha das coordenadas auxiliares tiver a origem coincidente com o centro de massa ( $O \equiv G$ ), e solidário ao corpo, a expressão da equação de rotação do corpo rígido

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) + (G - O) \wedge m \cdot \vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext} \text{ se reduz à:}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}([J]_G \{\vec{\omega}\}) = \vec{M}_G^{ext}} \quad (91)$$

b) Para corpos girando em torno de um eixo (ex. eixo  $z$ ) e sem simetria em relação ao centro de massa, os produtos de inércia não serão nulos (o sistema de coordenadas deve ser solidário ao corpo para manter a matriz de inércia constante) e mesmo com aceleração angular nula ( $\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \vec{0}$ ) haverá termos quadráticos na velocidade angular multiplicado por produtos de inércia (que corresponde à sistemas desbalanceados) resultando em:

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{Gx} \\ M_{Gy} \\ M_{Gz} \end{Bmatrix} \quad (92)$$

$$\omega_z^2 (J_{zy} \vec{i} - J_{zx} \vec{j}) = M_{Gx} \vec{i} + M_{Gy} \vec{j}$$

c) Se o sistema de coordenadas for solidário ao corpo, coincidente com o centro de massa ( $O \equiv G$ ) e orientado segundo eixos principais (matriz de inércia diagonal com momentos  $J_1, J_2, e J_3$  e produtos  $J_{12}, J_{23}, e J_{31}$  todos nulos) então:

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{Gx} \\ M_{Gy} \\ M_{Gz} \end{Bmatrix} \quad (93)$$

Que resulta na equação na forma de *Euler*:

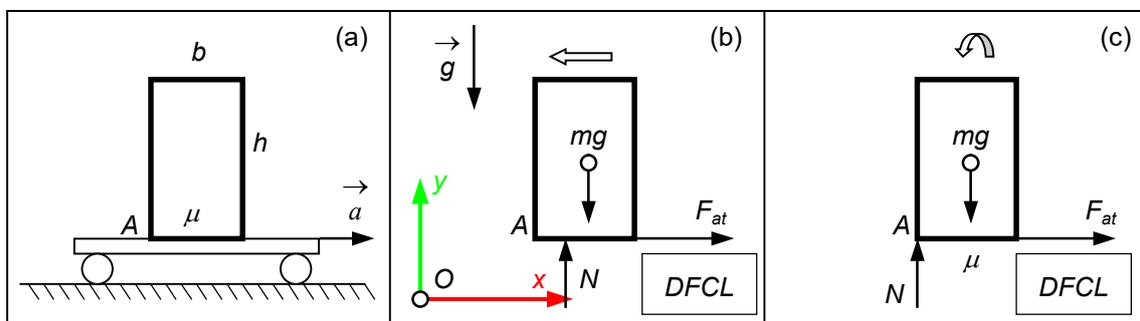
$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_{Gx} \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_{Gy} \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_{Gz} \end{cases} \quad (94)$$

Note que para o referencial solidário ao corpo:  $\vec{\omega}_{arr} = \vec{\omega}_{abs}$ ;  $\vec{\omega}_{rel} = 0$  e portanto:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}_{abs} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \dot{\vec{\omega}}.$$

**Exemplo: Dinâmica Translacional**

Um bloco homogêneo de massa  $m$ , largura  $b$  e altura  $h$ , repousa sobre uma plataforma plana do carro que se move com aceleração  $\vec{a} = a\vec{i}$ , conforme ilustrado na Figura 32a. O apoio do bloco sobre o carro ocorre com atrito  $\mu$ . Determinar o valor máximo da aceleração do carro para que a) não haja escorregamento do bloco, b) não haja o tombamento do bloco.



**Figura 32 – Bloco Acelerado**

**Resolução:** a) **Sistema:** bloco de massa  $m$  e carro. b) **Diagramas:** DFCL. c) **Referencial e Pólo:** base fixo  $Oxyz$ . d) **Teoremas:** TR e *Momento Angular* (conforme DFCL Figura 32c).

a) Aplicando do TR no bloco  $m\vec{a}_G = \sum \vec{F}_i$ , conforme ilustrado na Figura 32b, e considerando a relação de *Coulomb*  $|F_{at}| \leq \mu N$  do escorregamento sobre a superfície, obtêm-se:

$$\begin{cases} m a_{Gx} = F_{at} \\ m a_{Gy} = N - mg \\ m a_{Gz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m a_{Gx} = \mu N = \mu mg \\ N = mg \\ \text{-----} \end{cases}$$

Na iminência do escorregamento a força de atrito atinge seu valor máximo  $|F_{at}| = \mu N$  e

$$\boxed{a_{Gx} = \mu g}$$

b) Na iminência do tombamento, ou seja antes de girar em torno do ponto  $A$ , a reação de suporte  $N$  muda seu ponto de aplicação para a extremidade  $A$ . Utilizando a fórmula do *Momento Angular* para o centro de massa do bloco considerando o pólo em  $A$  obtêm-se:

$$\vec{H}_A = (\vec{G} - \vec{A}) \wedge m \vec{V}_G = \left( \frac{b}{2} \vec{i} + \frac{h}{2} \vec{j} \right) \wedge m V_x \vec{i} = -\frac{h}{2} m V_x \vec{k}$$

Lembrando que  $\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A + m\vec{V}_G \wedge \vec{V}_A$  ( $\vec{V}_G = \vec{V}_A$ ) e derivando a expressão do momento angular:

$$-\frac{h}{2}m \cdot \frac{d}{dt}(V_{Gx})\vec{k} = (A-A) \wedge F_{at} \vec{i} + (A-A) \wedge N \vec{j} + (G-A) \wedge -m\vec{g}$$

$$-m \frac{h}{2} a_{Gx} \vec{k} = \vec{0} + \vec{0} + \left(\frac{b}{2} \vec{i} + \frac{h}{2} \vec{j}\right) \wedge -mg \vec{j} = -\frac{b}{2} mg \vec{k} \Rightarrow a_{Gx} = \frac{b}{h} g$$

Portanto a aceleração máxima será:  $a_{\max} = \min(\mu g; bg/h)$

**Exemplo: Movimento Rotacional Plano**

Considere um disco de massa  $m$  e raio  $R$ , rolando sem escorregar em movimento contido no plano  $Oxy$  e submetido a um binário de força  $M$  (torque), conforme ilustrado na Figura 33a. Determinar a aceleração do disco.

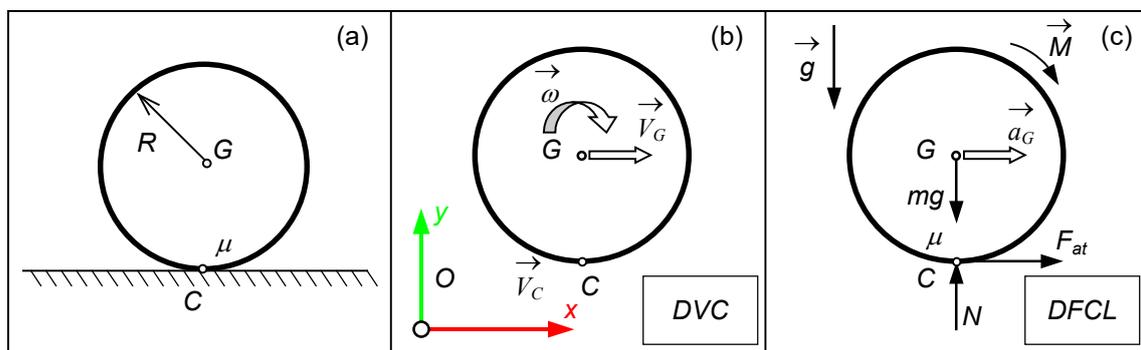


Figura 33 – Disco Rolando no Plano sem Escorregar

**Resolução:** a) **Sistema:** disco de massa  $m$  e raio  $R$ . b) **Diagramas:** DVC e DFCL. c) **Referencial** e Pólo: base fixo  $Gxyz$ . d) **Teoremas:** TR e *Momento Angular*.

a) Aplicando do TQMA no disco  $\dot{\vec{H}}_G = \sum \vec{M}_i^{ext}$ , conforme ilustrado na Figura 33c, obtêm-se:

$$[J]_G \cdot \dot{\omega} = \vec{M}_G^{ext} \text{ para } J_{Gz} = mR^2 / 2$$

$$J_{Gz}(-\dot{\omega})\vec{k} = (G-C) \wedge N \vec{j} + (G-C) \wedge F_{at} \vec{i} + (G-G) \wedge -mg \vec{j} + \vec{M}$$

$$-J_{Gz} \dot{\omega} \vec{k} = R \cdot F_{at} \vec{k} - M \vec{k}$$

a) Aplicando do TR no disco  $m\vec{a}_G = \sum \vec{F}_i$ , lembrando da cinemática de corpo rígido que:

$a_{Gx} = \dot{\omega}R$  e substituindo os valores na expressão anterior obtêm-se:

$$\begin{cases} m a_{Gx} = F_{at} \\ m a_{Gy} = N - mg \\ m a_{Gz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m a_{Gx} = F_{at} \\ N = mg \\ \text{-----} \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} m R^2\right) \cdot \frac{a_{Gx}}{R} = R \cdot m a_{Gx} = M \Rightarrow \boxed{a_{Gx} = \frac{2}{3} \frac{M}{m R}}$$

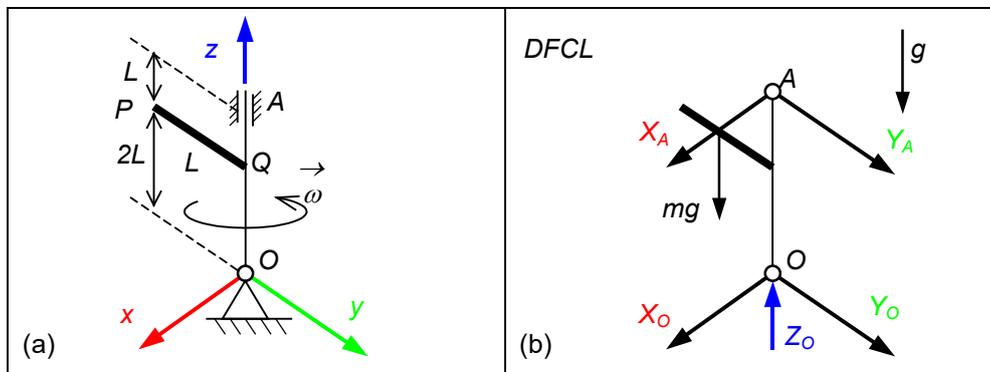
Pode-se utilizar o pólo em **C** fixo resultando em:

$$[J]_C \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_C^{ext} \quad \text{para} \quad J_{Cz} = \bar{J}_{Gz} + m d^2 = 3mR^2 / 2$$

$$\left(\frac{3}{2} m R^2\right) \dot{\omega} \vec{k} = M \vec{k} \Rightarrow \boxed{a_{Gx} = \frac{2}{3} \frac{M}{m R}}$$

**Exemplo: Movimento 3D**

Considere o sistema é constituído por uma barra esbelta homogênea **PQ** de comprimento **L** e massa **m**, contida no plano **Oyz**, e por um eixo **OA** de comprimento **3L** e massa desprezível, conforme ilustrado na Figura 34a. O sistema gira em torno de um eixo vertical fixo **Oz** com velocidade angular  $\vec{\omega}$  constante, Determinar as componentes das reação nos mancais **O** e **A**.



**Figura 34 – Rotor excêntrico e assimétrico**

**Resolução:** a) **Sistema:** sistema composto por uma barra de comprimento **L** e massa **m** e eixo suporte **AO** de massa desprezível. b) **Diagramas:** *DFCL*, conforme ilustrado na Figura 34b. c) **Referencial** e Pólo: base móvel solidária à barra **Oxyz**. d) **Teoremas:** *TR* e *TQMA*. A posição do

centro de massa é dado por:  $y_G = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{\sum m_i} \Rightarrow y_G = \frac{m \cdot -L/2}{m} = -\frac{L}{2}$  e  $z_G = \frac{m \cdot 2L}{m} = 2L \Rightarrow$

$$(G - O) = -\frac{L}{2} \vec{j} + 2L \vec{k} = (0 \quad -L/2 \quad 2L).$$

Momento de inércia  $J_{Oz}$  :  $J_{Oz} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2) = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{J_{Oz} = \frac{1}{3}mL^2}$

Produtos de inércia  $J_{Oxz}$  e  $J_{Oyz}$  :  $J_{Oxz} = m(0)(2L) \Rightarrow \boxed{J_{Oxz} = 0}$  e  $J_{Oyz} = m\left(\frac{-L}{2}\right)(2L) \Rightarrow \boxed{J_{Oyz} = -mL^2}$

A quantidade de movimento angular  $\vec{H}_O$  do corpo com respeito ao pólo  $O$ , considerando que a

rotação  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  constante, é dado por:  $\{\vec{H}_O\} = [J]_O \{\vec{\omega}\} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}_O \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\vec{H}_O = -J_{Oxz} \omega \vec{i} - J_{Oyz} \omega \vec{j} + J_{Oz} \omega \vec{k} = mL^2 \omega \left( \vec{j} + \frac{1}{3} \vec{k} \right).$$

Tomando sua derivada temporal da quantidade de movimento angular expressa na base móvel, considerando:  $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$  ;  $\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j}$  e  $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k}$  obtêm-se:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) = mL^2 \omega \left( \dot{\vec{j}} + \frac{1}{3} \dot{\vec{k}} \right) = mL^2 \omega \left[ (\omega \vec{k} \wedge \vec{j}) + \frac{1}{3} (\omega \vec{k} \wedge \vec{k}) \right] = -mL^2 \omega^2 \vec{i}$$

O momento  $\vec{M}_O$  das forças externas com respeito ao pólo  $O$  é:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (A-O) \wedge (X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}) + (G-O) \wedge (-mg \vec{k}) \\ \vec{M}_O &= (3L \vec{k}) \wedge (X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}) + \left( -\frac{L}{2} \vec{j} + 2L \vec{k} \right) \wedge (-mg \vec{k}) = \left( -3LY_A + \frac{L}{2} mg \right) \vec{i} + 3LX_A \vec{j} \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da quantidade de movimento angular descrito por:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) + (G-O) \wedge m \vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext} \quad \text{com pólo em } O \text{ fixo portanto } \vec{a}_O = \vec{0}:$$

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_O = \vec{M}_O \Rightarrow \begin{cases} -mL^2 \omega^2 = -3LY_A + \frac{1}{2} mgL \\ 0 = 3LX_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_A = \frac{1}{3} mL \omega^2 + \frac{1}{6} mg \\ X_A = 0 \end{cases}$$

Utilizando o **TR**, dado por  $m \vec{a}_G = \sum \vec{F}_i$  tem-se a aceleração do centro de massa obtido de:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)] \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{L}{2} \omega^2 \vec{j}.$$

$$\begin{cases} 0 = X_A + X_O \\ m \omega^2 \frac{L}{2} = Y_A + Y_O \\ 0 = Z_O - mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_O = 0 \\ Y_O = (mL \omega^2 - mg) / 6 \\ Z_O = mg \end{cases}$$

(Resumo da aplicação do **TQMA**: Determina-se a quantidade de movimento angular  $\vec{H}_O$  no pólo conveniente, faz-se a derivada temporal e iguala ao momento  $\vec{M}_O$  das forças externas).

### Conservação do Momento da Quantidade de Movimento

Utilizando o **TQMA** descrito por:  $\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) + (G-O) \wedge m\vec{a}_O = \vec{M}_O^{ext}$  para o pólo coincidente com o centro de massa  $G$  e momento externo nulo, verifica-se que o momento da quantidade de movimento deve permanecer constante (Lei da Conservação da Quantidade de Movimento:  $\vec{H}_O = cte$ ). Desta forma  $\{\vec{H}_O\} = [J]_O \{\vec{\omega}\} = cte$ .

Tomando o exemplo da cadeira giratória, ilustrado na Figura 35, o momento da quantidade de movimento  $[J]_O \{\vec{\omega}\} = J_z \cdot \omega_z = (2mL^2) \cdot \omega_z = cte$  deve permanecer constante. Quando as massas são retraídas para o centro (reduzindo a distância  $L$ ) sem alterar a posição do centro de massa, para que o produto permaneça constante a velocidade angular  $\vec{\omega}_z$  tem obrigatoriamente que aumentar.  $(2m \cdot L_{\downarrow}^2) \cdot \omega_z^{\uparrow} = cte$

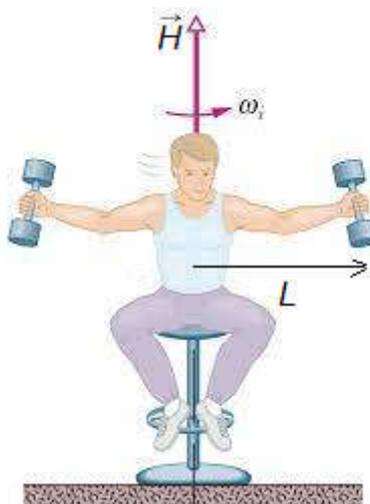


Figura 35 – Conservação da Quantidade de Movimento (Fonte da figura: *internet*)

## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- a) França, L. N. F., Matsumura, A. Z. (2011) Mecânica Geral. Editora Blücher, 3ª edição, São Paulo, p. 235.
- b) Baruh, H. (1999) Analytical Dynamics. MacGraw-Hill. p. 718.
- c) Giacaglia, G. E. O. (1982) Mecânica Geral. Editora Campus. p. 375.
- d) Boulos, P. Zagottis, D. L. (1991) Mecânica e Cálculo - um curso integrado. Editora Edgard Blucher. Vol.: 1, p. 267.
- e) Boulos, P., Camargo, I. (1997) Introdução à Geometria Analítica no Espaço. Editora Pearson Educacional. p. 239.
- f) Pesce, C. P. (2019) Dinâmica dos Corpos Rígidos. Monografia. Escola Politécnica da USP. p. 174.
- g) Carmo, M. P. (1976) Differential Geometry of Curves and Surfaces. Editora Prentice-Hall, p. 503.
- h) Araújo, P. V. (2004) Geometria Diferencial. Rio de Janeiro, IMPA. p. 358.