

SEM 536 - Sistemas de Controle I

Aula 8 - Resposta em Frequência

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Método da **Resposta em Frequência**

- Análise do sistema a partir da resposta em regime permanente quando uma entrada **senoidal** é aplicada
- Determinação do modelo dinâmico de sistemas a partir de resultados experimentais

Resposta à Entrada Senoidal

Sistema linear invariante no tempo, estável:

- Entrada: $u(t)$
- Saída: $y(t)$

Se $u(t)$ é senoidal, a saída $y(t)$ em regime permanente será senoidal:

- Mesma frequência
- Amplitude e ângulo de fase diferentes

Resposta à Entrada Senoidal

Seja:

$$u(t) = U \text{sen}(\omega t)$$

sendo U a amplitude e ω a frequência do sinal de entrada.
Resposta em regime permanente:

$$y_{rp} = Y \text{sen}(\omega t + \phi)$$

sendo $Y = U|G(j\omega)|$ e $\phi = \angle G(j\omega)$.

Para entradas senoidais:

$|G(j\omega)|$ = relação de amplitudes da saída e da entrada.

$\angle G(j\omega)$ = defasagem da senoíde de saída com relação à senoíde de entrada.

$G(j\omega)$: *Função de Transferência Senoidal*

Diagrama de Bode ou gráfico logarítmico:

- Gráfico do logaritmo do módulo de $G(j\omega)$
- Gráfico do ângulo de fase de $G(j\omega)$

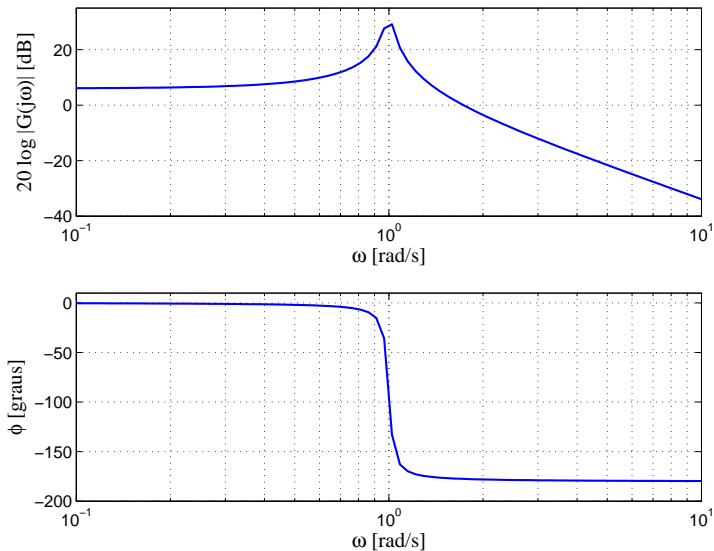
Em função da frequência de entrada ω em escala logarítmica

Representação padrão: $20\log|G(j\omega)|$

Unidade: dB (decibel)

Formas de Representação

Diagrama de Bode



- Exemplo:

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + s + 3}$$

$$G(j\omega) = \frac{3(3 - \omega^2)}{(3 - \omega^2)^2 + \omega^2} + j \frac{-3\omega}{(3 - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{(3(3 - \omega^2))^2 + (3\omega)^2}{((3 - \omega^2)^2 + \omega^2)^2}}$$

Diagrama de Nyquist ou gráficos polares:

- Gráfico da parte imaginária de $G(j\omega)$ versus a parte real de $G(j\omega)$

$$\text{Imag}[G(j\omega)] \times \text{Re}[G(j\omega)]$$

Diagrama de Nichols/Black:

- Gráfico do módulo de $G(j\omega)$ versus a fase de $G(j\omega)$

$$|G(j\omega)| \times \angle G(j\omega)$$

Fatores básicos de $G(j\omega)$

Fatores básicos de uma função de transferência arbitrária $G(j\omega)$:

- Ganho K
- Fatores integral e derivativo: $(j\omega)^{\mp 1}$
- Fatores de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$
- Fatores de segunda ordem:

$$(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{\mp 1}$$

Logaritmo do módulo:

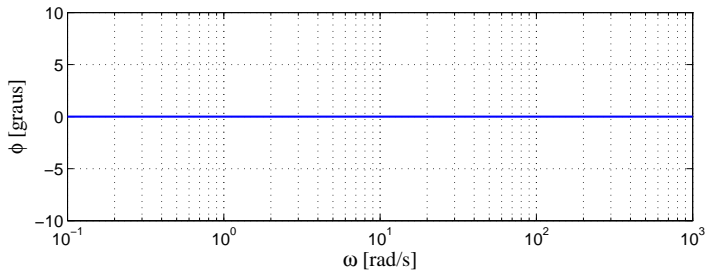
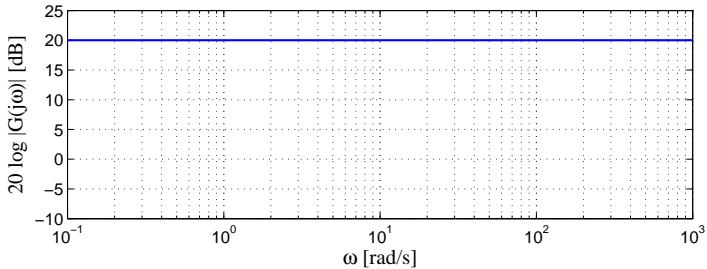
$$20\log K$$

Gráfico do módulo: reta horizontal de valor $20\log K$ dB

Gráfico da fase: ângulo de fase nulo

Varição do ganho K : deslocamento da curva do módulo, não afetando o gráfico de fase.

$$G(j\omega) = 10$$



Fator integral: $(j\omega)^{-1}$

Logaritmo do módulo:

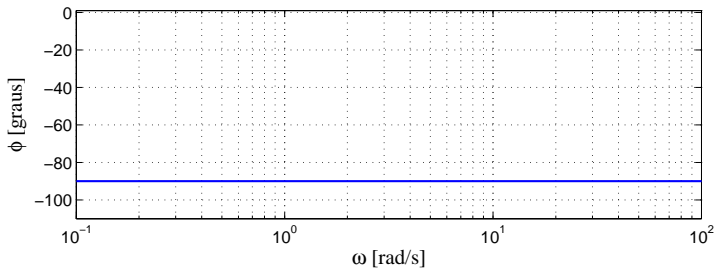
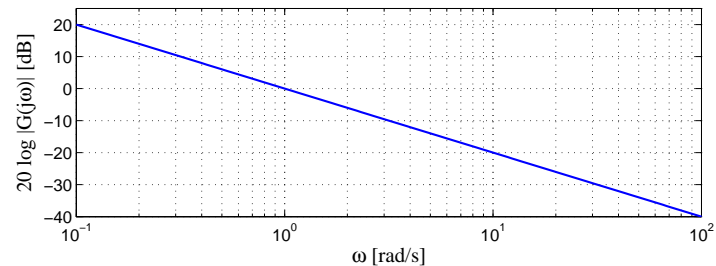
$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega$$

Gráfico do módulo: reta com inclinação -20 dB/década, cruzando 0 dB em $\omega = 1$

Ângulo de fase: constante e igual a -90 graus

Fator integral: $(j\omega)^{-1}$

$$G(j\omega) = 1/(j\omega)$$



Fator derivativo: $j\omega$

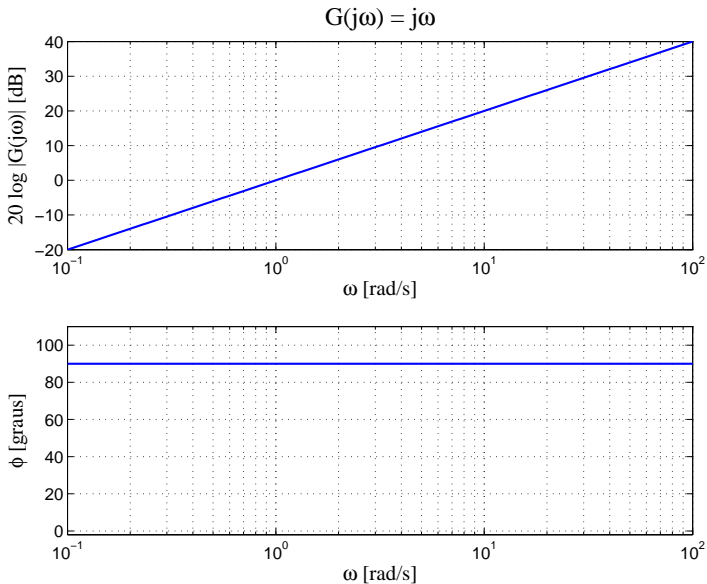
Logaritmo do módulo:

$$20\log |j\omega| = 20\log \omega$$

Gráfico do módulo: reta com inclinação 20 dB/década, cruzando 0 dB em $\omega = 1$

Ângulo de fase: constante e igual a 90 graus

Fator derivativo: $j\omega$



Fator de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{-1}$

Logaritmo do módulo:

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Para baixas frequências ($\omega \ll 1/T$)

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log 1 = 0$$

Gráfico: reta constante em 0 dB

Fator de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{-1}$

Para altas frequências ($\omega \gg 1/T$)

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log \omega T$$

Gráfico: reta com inclinação -20 dB/década cruzando 0 dB em $\omega_b = 1/T$ (frequência de quebra)

Gráfico do módulo: aproximação pelas duas retas assintóticas

Correção: -3 dB em ω_b

Fator de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{-1}$

O ângulo de fase

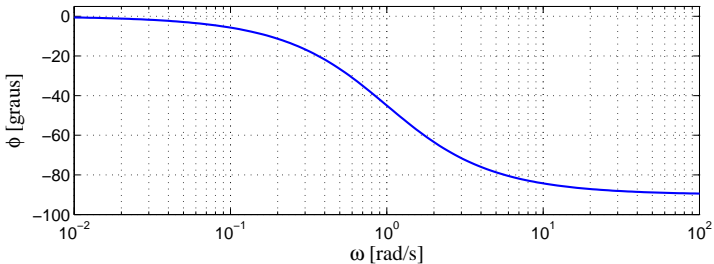
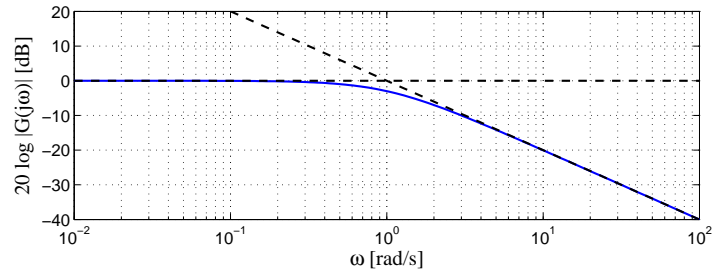
$$\phi = -\tan^{-1}\omega T$$

Gráfico de fase:

- $\omega = 0 \Rightarrow \phi = 0$
- $\omega = 1/T \Rightarrow \phi = -45$ graus
- $\omega = \infty \Rightarrow \phi = -90$ graus

Fator de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{-1}$

$$G(j\omega) = 1/(1 + j\omega), T = 1, \omega_b = 1$$



Fator de primeira ordem: $1 + j\omega T$

As curvas do módulo e ângulo de fase do fator $1 + j\omega T$ são obtidas pelas curvas do fator $1/(1 + j\omega T)$ trocando-se o sinal:

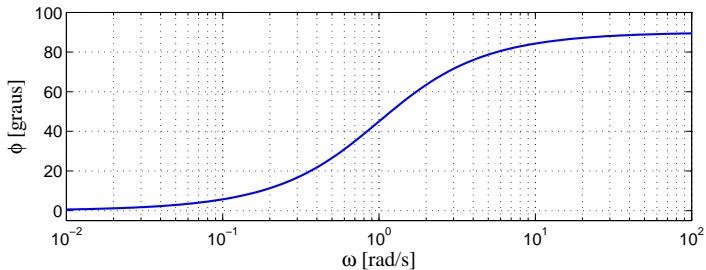
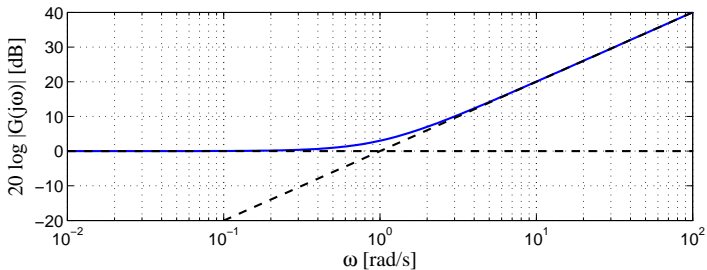
$$20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \omega T$$

Fator de primeira ordem: $1 + j\omega T$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega, T = 1, \omega_b = 1$$



Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

Logaritmo do módulo:

$$\begin{aligned} & 20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2} \right| \\ &= -20 \log \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{aligned}$$

Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

Para baixas frequências ($\omega \ll \omega_n$)

$$-20 \log \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log 1 = 0$$

Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

Para altas frequências ($\omega \gg \omega_n$)

$$-20 \log \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

Gráfico: reta com inclinação -40 dB/década, cruzando 0 dB em $\omega_b = \omega_n$

Frequência de ressonância: frequência na qual $|G(j\omega)|$ atinge o valor máximo

$$\omega_r = \omega_n(1 - 2\zeta^2)$$

Módulo do pico de ressonância M_r

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Se $\zeta \rightarrow 0 \Rightarrow M_r \rightarrow \infty$

Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

O ângulo de fase

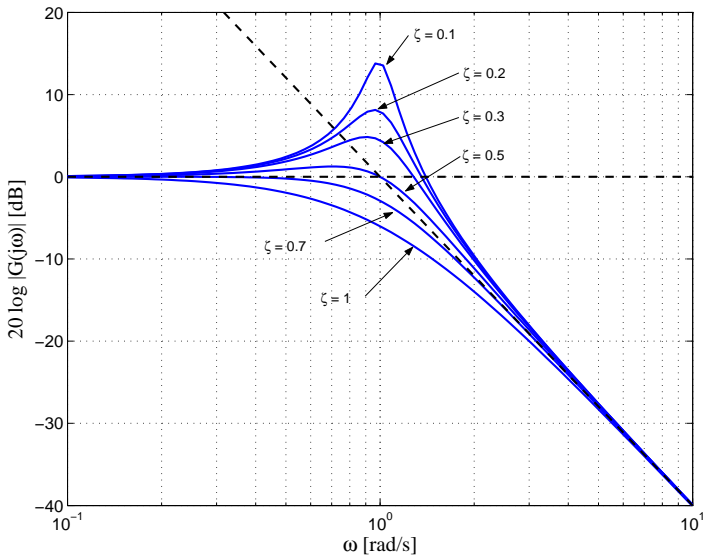
$$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

Gráfico de fase:

- $\omega = 0 \Rightarrow \phi = 0$
- $\omega = \omega_r \Rightarrow \phi = -90 + \sin^{-1}(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$ graus
- $\omega = \omega_n \Rightarrow \phi = -90$ graus
- $\omega = \infty \Rightarrow \phi = -180$ graus

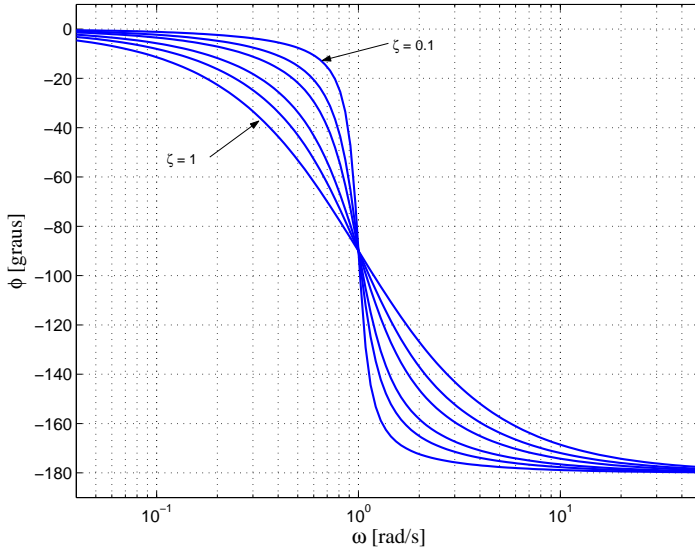
Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

$$G(j\omega) = 1/(1 + 2\zeta j \omega + j \omega), \omega_n = 1$$



Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

$$G(j\omega) = 1/(1 + 2\zeta j \omega + j \omega), \omega_n = 1$$



Determinação da Resposta em Frequência

- Reescrever $G(j\omega)$ como produto de fatores básicos
- Identificar as frequências de quebra associadas a cada fator
- Desenhar as curvas assintóticas no gráfico do módulo
- Somar as curvas obtidas para cada fator básico
- Efetuar as correções necessárias

Determinação da Resposta em Frequência

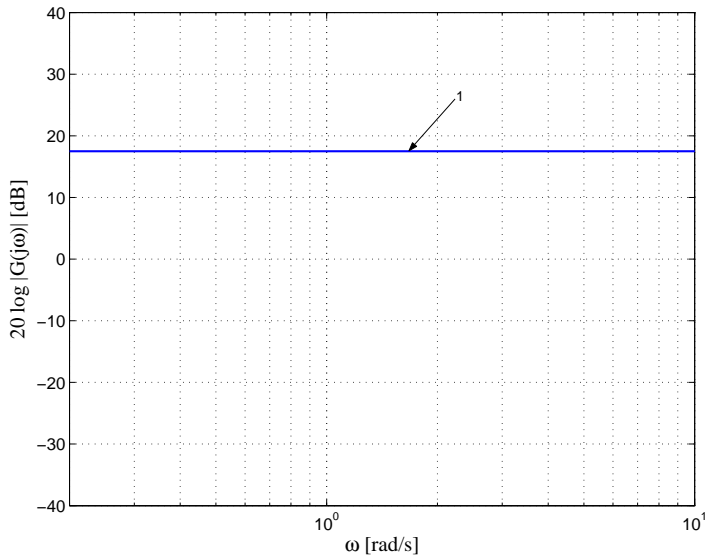
Exemplo:

$$G(s) = \frac{10(s + 3)}{s(s + 2)(s^2 + s + 2)}$$

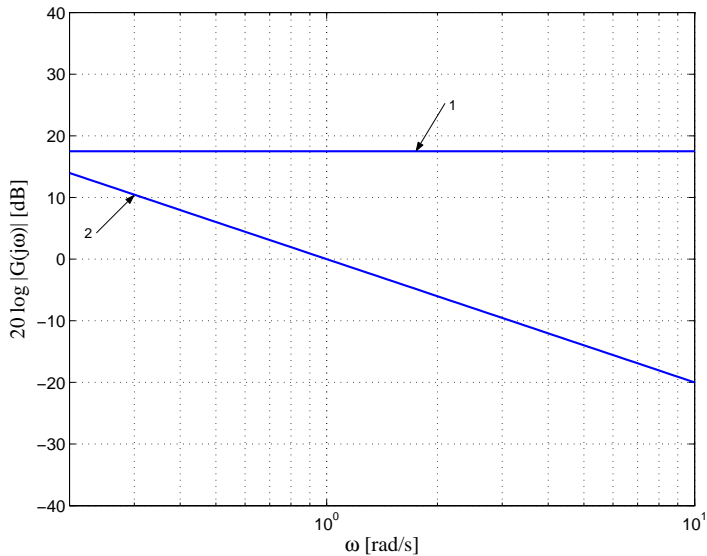
Função de transferência senoidal:

$$G(j\omega) = \frac{7,5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left(\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$$

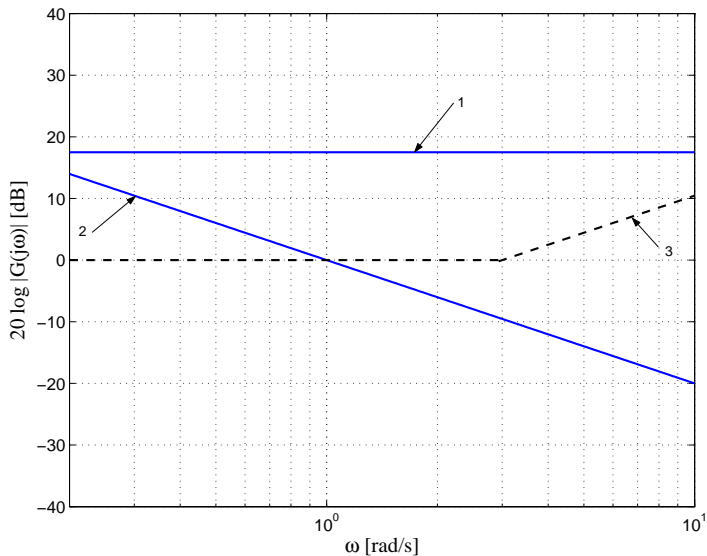
Fator 1: $K = 7,5$



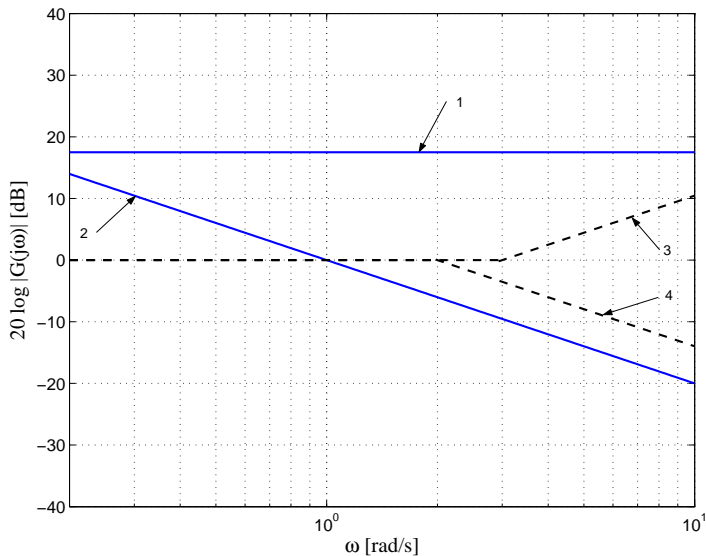
Fator 2: $1/(j\omega)$



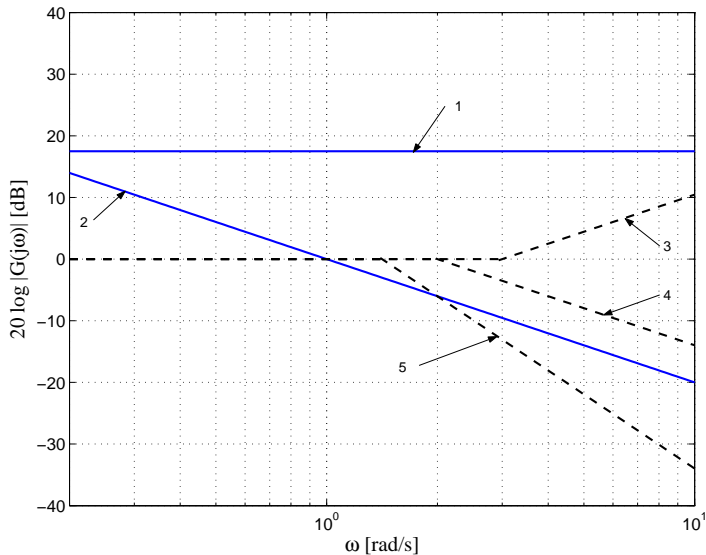
Fator 3: $1 + j\omega/3$, $\omega_b = 3$



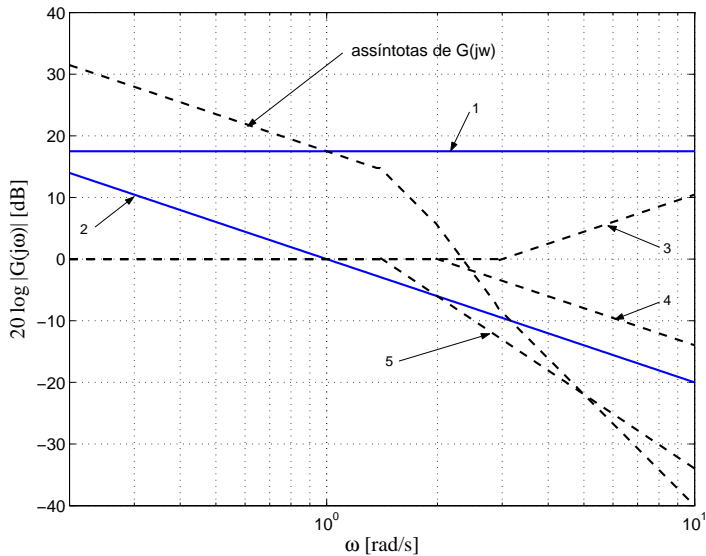
Fator 4: $1/(1 + j\omega/2)$, $\omega_b = 2$



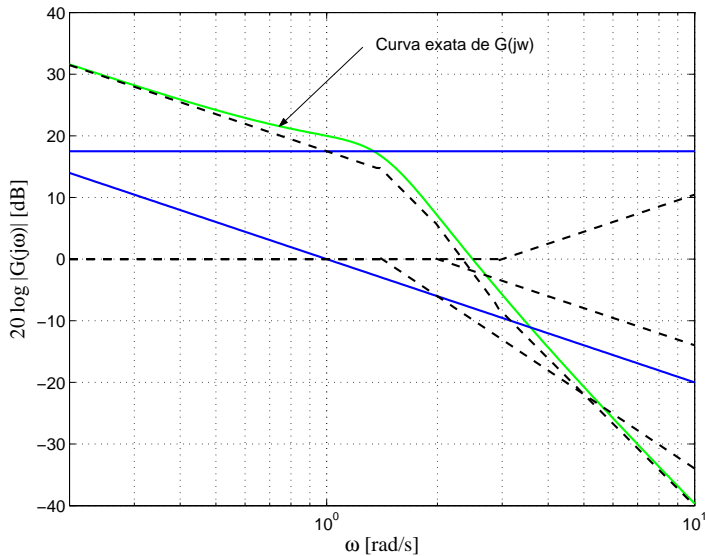
Fator 5: $1/(1 + j\omega/2 + (j\omega)^2/2)$, $\omega_b = \sqrt{2}$



Assíntotas de $G(j\omega)$



Curva exata de $G(j\omega)$



Geradores de sinais senoidais convenientes (mecânicos, elétricos ou pneumáticos)

Faixas de freqüências usuais:

- 0,001-10 Hz para sist. com grandes constantes de tempo
- 0,1-1000 Hz para sist. com pequenas constantes de tempo

A partir das medidas das relações de amplitudes e da defasagem constrói-se o **Diagrama de Bode**

Procedimento geral para obtenção de funções de transferência:

- Desenhar as curvas assintóticas no gráfico do módulo experimental (assíntotas devem possuir inclinações múltiplas de ± 20 dB/decada)

- Variação na curva de -20 dB/decada em ω_1 , fator de primeira ordem $1/(1 + j(\omega/\omega_1))$
- Variação na curva de -40 dB/decada em ω_2 , fator de segunda ordem

$$\frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_2) + (j\omega/\omega_2)^2}$$

- Fator de amortecimento obtido medindo-se o valor de pico ressonante próximo à frequência ω_2

- Ganho determinado pela curva em baixas frequências $w \ll 1$

$$G(jw) = \frac{K}{(jw)^\lambda}$$

- $\lambda = 0$: $G(jw) = K$

$$20\log|G(jw)| = 20\log K$$

K determinado pelo valor da reta horizontal (assíntota)

- $\lambda = 1$: $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)}$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log K - 20\log\omega$$

Assíntota possui inclinação de -20 dB/década e o valor de K é igual à frequência na qual a assíntota (ou seu prolongamento) cruza a reta 0 dB

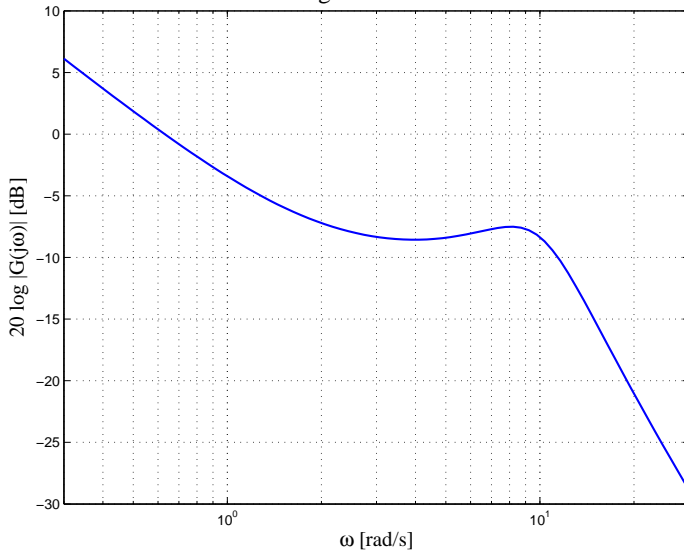
- $\lambda = 2$: $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log K - 40\log\omega$$

Assíntota possui inclinação de -40 dB/década e a frequência na qual a assíntota (ou seu prolongamento) cruza a reta 0 dB é igual a \sqrt{K}

Exemplo: gráfico do módulo

Diagrama de Bode



Exemplo: função de transferência

Função de transferência senoidal:

$$G(j\omega) = \frac{0,6 \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\left(\frac{j\omega}{10} \right)^2 + 2 \times 0,4 \frac{j\omega}{10} + 1 \right)}$$

Função de transferência:

$$G(s) = \frac{30(s + 2)}{s(s^2 + 8s + 100)}$$

Exemplo: gráfico de fase

