SEM 536 - Sistemas de Controle I
Aula 6 - Lugar das Raízes

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

- Função de Transferência de Malha Aberta

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$G(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

z_j: zeros de $G(s)$

p_i: polos de $G(s)$

- Função de Transferência de Malha Fechada (Ganho Proporcional)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

- Equação característica

$$1 + KG(s) = 0$$

- Definição:

Lugar geométrico no plano complexo das raízes da equação característica $1 + KG(s) = 0$ quando se varia o ganho K de 0 a ∞.

Lugar das Raízes

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Equação característica

$$1 + KG(s) = 0$$
$$s^2 + s + K = 0$$

- Polos de Malha Fechada

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

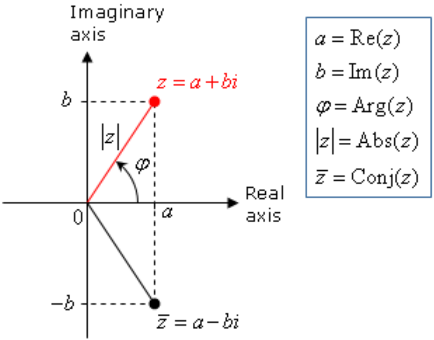
Lugar das Raízes

- Polos de Malha Fechada

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

- $0 < K < 0,25$: polos reais distintos, $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$
- $K = 0,25$: polos reais iguais, $p_{1,2} = -\frac{1}{2}$
- $K > 0,25$: polos complexos conjugados, $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{4K-1}}{2}$
- Exemplo Matlab

- Números complexos - Plano Complexo



- Equação característica

$$1+KG(s)=0$$
$$1+K\frac{b(s)}{a(s)}=0$$
$$a(s)+Kb(s)=0$$

- Outra forma

$$G(s)=-\frac{1}{K}$$

Lugar das Raízes

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

- K real positivo $\Rightarrow$ $G(s)$ real negativo:

$$\text{fase de } \; G(s) = 180^\circ \Rightarrow \underline{/G(s)} = 180^\circ$$

- Nova definição:

Lugar geométrico no plano complexo onde a fase de $G(s)$ é 180° ($\angle G(s) = 180^\circ$).

- Exemplos para a construção do Lugar das Raízes (LR)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 8s} = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 1} = \frac{s+1}{(s+j)(s-j)}$$

- Passo 1: Plotar no plano complexo os polos ($\times$) e zeros ($\circ$) de $G(s)$

$$\text{Corresponde a } K = 0$$

- Passo 2: Determinar o LR sobre o eixo real

Se o número de polos e zeros à direita de s_0 é ímpar, então s_0 pertence ao LR

- Passo 3: Desenhar as assíntotas do LR para $K \to \infty$

$$G(s) = -\frac{1}{K} \Rightarrow G(s) = 0$$

- Primeiro caso: o LR tende para os zeros

$$b(s) = 0$$

- Segundo caso: o LR tende para o infinito
- Quando $n > m$ e $s \to \infty$

$$1 + K\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = 0$$

- Aproximado por

$$1 + K\frac{1}{(s+\alpha)^{n-m}} = 0$$

- Ângulo das assíntotas

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m}, \quad l = 1, 2, \cdots, n-m$$

- Ponto de cruzamento das assíntotas, α

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

Lugar das Raízes

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

- Ângulo das assíntotas

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m}, \quad l = 1, 2, \cdots, n-m$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \\
\phi_2 &= \frac{180^\circ + 360^\circ}{3} = 180^\circ \\
\phi_3 &= \frac{180^\circ + 720^\circ}{3} = 300^\circ = -60^\circ
\end{aligned}$$

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

- Ponto de cruzamento das assíntotas, α

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

$$\alpha = \frac{0-2-4}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

- Passo 4: Determinar ângulo de partida do pólo k

$$\phi_k = \sum_{j=1}^{m} \psi_j - \sum_{i=1, i \neq k}^{n} \phi_i - 180^\circ$$

ψ_j = ângulo entre o zero j e o pólo k

ϕ_i = ângulo entre o pólo i e o pólo k

- Exemplo

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s+1}{(s+j)(s-j)}$$

- Ângulo de partida do pólo 1

$$\phi_1 = \psi_1 - \phi_2 - 180^\circ = 45^\circ - 90^\circ - 180^\circ = -225^\circ = 135^\circ$$

ψ_1 = ângulo entre o zero 1 e o pólo 1

ϕ_2 = ângulo entre o pólo 2 e o pólo 1

- Passo 4: Determinar ângulo de chegada do zero k

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{n} \phi_i - \sum_{j=1, j \neq k}^{n} \psi_j + 180^\circ$$

ψ_j = ângulo entre o zero j e o pólo k

ϕ_i = ângulo entre o pólo i e o pólo k

- Passo 5: Determinar os pontos de cruzamanto com o eixo imaginário

  1) Critério de Routh

  2) Substitua $s_0 = \omega_0 j$ na eq. característica e determina-se K e ω_0

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 8s} = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

- Equação Característica

$$1 + KG(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + K = 0$$

- Critério de Routh

$$\begin{array}{lcc}
s^3: & 1 & 8 \\
s^2: & 6 & K \\
s^1: & \dfrac{48-K}{6} & \\
s^0: & K & \qquad\qquad \Rightarrow 0 < K < 48
\end{array}$$

- Equação Característica

$$1 + KG(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + K = 0$$

- Substitua $s_0 = \omega_0 j$ na eq. característica e determina-se K e ω_0

$$\begin{aligned}(\omega_0 j)^3 + 6(\omega_0 j)^2 + 8\omega_0 j + K &= 0\\ -\omega_0^3 j - 6\omega_0^2 + 8\omega_0 j + K &= 0\\ (K - 6\omega_0^2) + (8\omega_0 - \omega_0^3)j &= 0 + 0j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(K - 6\omega_0^2) &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad K = 0 \;\text{ ou }\; K = 48\\ (8\omega_0 - \omega_0^3)j &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = 0 \;\text{ ou }\; \omega_0 = \sqrt{8}\end{aligned}$$

- Passo 6: Determinar os pontos de separação de partida e de chegada

$$f(s) = a(s) + Kb(s) = 0$$

- Múltiplas raízes

$$\frac{f(s)}{ds} = \frac{da(s)}{ds} + K\frac{db(s)}{ds} = 0$$

$$K = -\frac{a'(s)}{b'(s)}$$

- Condição necessária

$$a(s)b'(s) - a'(s)b(s) = 0$$

- Exemplo

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$$

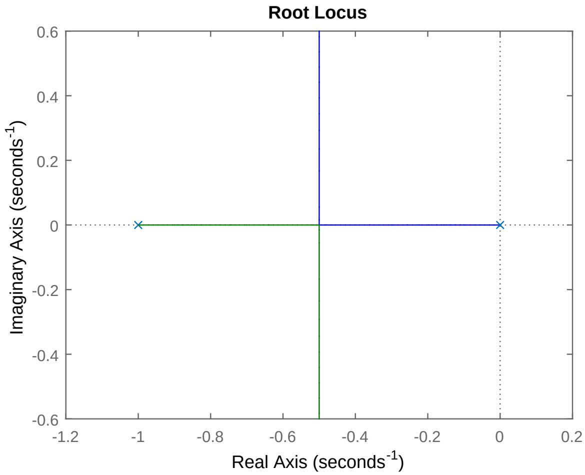
- Condição necessária

$$\begin{aligned} b(s) =& s+1 \qquad \Rightarrow \qquad b'(s) = 1 \\ a(s) =& s^2+1 \qquad \Rightarrow \qquad a'(s) = 2s \end{aligned}$$

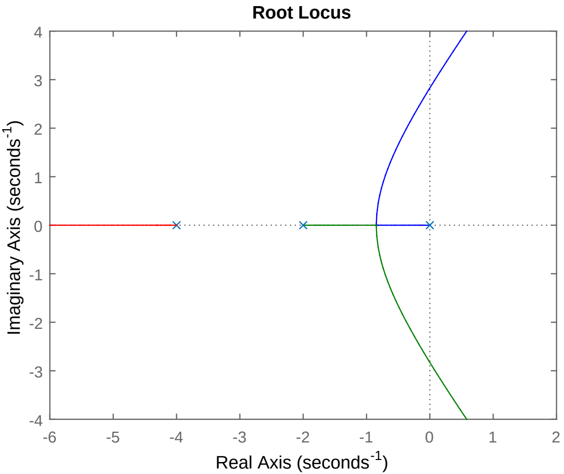
$$a(s)b'(s) - a'(s)b(s) = s^2 + 1 - 2s(s+1) = -s^2 - 2s + 1$$

$$s_1 = -2,4142 \ \text{ e } \ s_2 = 0,4142$$

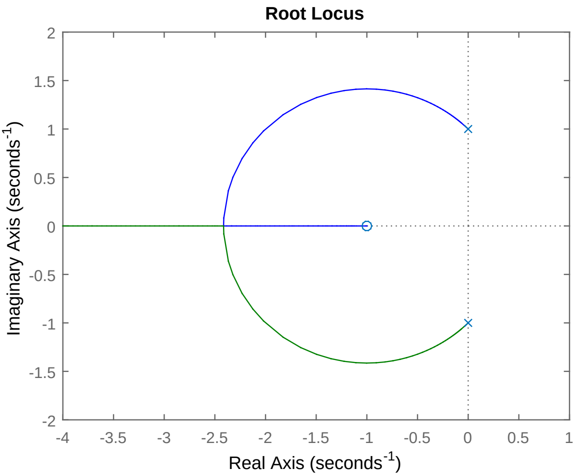
- Passo 7: Desenhar o Lugar das Raízes $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$



- Passo 7: Desenhar o Lugar das Raízes $G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$



- Passo 7: Desenhar o Lugar das Raízes $G(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$



Determinação de K pelo Lugar das Raízes

- Da equação característica

$$K = -\frac{1}{G(s)}$$

- Condição $\angle G(s) = 180^\circ$

$$K = \frac{1}{|G(s)|}$$

Determinação de K pelo Lugar das Raízes

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

- Especificação de Desempenho: $\zeta = 0,5$

Determinação de K pelo Lugar das Raízes

- Exemplo: $\zeta = 0,5 \Rightarrow s_0 = -0,67 + 1,16j$

$$
\begin{aligned}
|G(s_0)| =& \frac{1}{|s_0(s_0+2)(s_0+4)|} \\
=& \frac{1}{|s_0||s_0+2||s_0+4|}
\end{aligned}
$$

- Portanto

$$
\begin{aligned}
K =& |s_0||s_0+2||s_0+4| \\
=& |-0,67+1,16j||-0,67+1,16j+2||-0,67+1,16j+4| \\
=& |-0,67+1,16j||1,33+1,16j||3,33+1,16j| \\
=& 1,34 \times 1,76 \times 3,53 = 8,34
\end{aligned}
$$

Determinação de K pelo Lugar das Raízes

- Fórmula geral

$$K = \frac{|s_0 - p_1||s_0 - p_2| \cdots |s_0 - p_n|}{|s_0 - z_1||s_0 - z_2| \cdots |s_0 - z_m|}$$