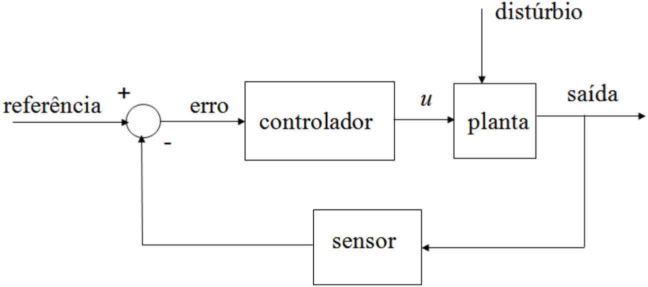
SEM 536 - Sistemas de Controle I
Aula 2 - A - Transformada de Laplace

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Estrutura básica de um sistema realimentado



Função Impulso Unitário

- Função pulso com área unitária:

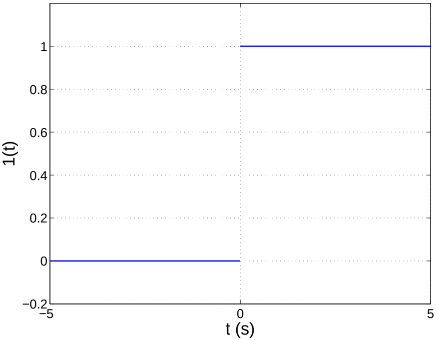
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0} & \text{se } 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{se } t < 0,\ t > t_0 \end{cases}$$

- Se $t_0 \to 0$, temos o *impulso unitário* ou *delta de Dirac*, $\delta(t)$. Propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau)$$

- Função Degrau Unitário:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



Transformada de Laplace

- Variável complexa

$$s = \sigma + j\omega$$

- Transformada de Laplace de uma função $f(t)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

- Exemplos:
  - Função impulso unitário: $\delta(t)$
  - Função degrau com amplitude a: $f(t) = a$, para $t \geq 0$
  - Função rampa: $f(t) = bt$
  - Função seno: $f(t) = sen(wt)$

- Propriedades
    - Superposição (linearidade)

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

    - Atraso de tempo: $f_1(t) = f(t - \lambda)$ com $\lambda > 0$

$$F_1(s) = e^{-s\lambda} F(s)$$

- Propriedades
  - Multiplicação por e^{-at}: $f_1(t) = e^{-at} f(t)$

$$F_1(s) = F(s + a)$$

Exemplo: $f_1(t) = e^{-at}$, $f(t) = 1 \Longrightarrow F_1(s) = \frac{1}{s+a}$

  - Diferenciação

$$\mathcal{L}[\dot{f}] = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}[\ddot{f}] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

- Propriedades
  - Multiplicação pelo tempo: $f_1(t) = tf(t)$

$$F_1(s) = \mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Exemplo:

Degrau $(f(t) = b)$:

$$F(s) = \frac{b}{s}$$

Rampa $(f(t) = bt)$:

$$F(s) = \frac{b}{s^2}$$

Transformada de Laplace

- Transformação inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

- Dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- Expansão em frações parciais

$$F(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \cdots + b_m s + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$F(s) = \frac{C(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

z_i: zeros de $F(s)$
p_i: polos de $F(s)$

- Expansão em frações parciais

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n} \\
(s-p_1)F(s) &= C_1 + \frac{(s-p_1)}{s-p_2}C_2 + \cdots + \frac{(s-p_1)}{s-p_n}C_n
\end{aligned}
$$

- Fazendo $s = p_1$

$$C_1 = (s-p_1)F(s)|_{s=p_1}$$

Transformada de Laplace

- Expansão em frações parciais

$$C_i = (s - p_i)F(s)|_{s=p_i}$$

- Função no tempo

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

- Exemplo

- Solução de Equações Diferencias Ordinárias (EDOs)

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

- Aplicando a propriedade da diferenciação (com condições iniciais nulas: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$)

$$s^2 Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} U(s)$$

- Entrada exponencial: $u(t) = 2e^{-2t}$

$$U(s) = \frac{2}{s+2}$$

- Resolvendo para $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s^2+5s+4)} = \frac{2}{(s+2)(s+1)(s+4)}$$

- Expansão em frações parciais

$$Y(s) = -\frac{1}{(s+2)} + \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+4)}$$

- Resposta no tempo

$$y(t) = -1e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

- Teorema do valor final: se todos os pólos de $sY(s)$ estão no semiplano esquerdo do plano s, então

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

- Exemplo

Transformada de Laplace

- Teorema do valor inicial: para qualquer função Y(s)

$$y(0^+) = \lim_{s \to \infty} sY(s)$$

- Exemplo