

PME3403 - Laboratório de Vibrações e Controle

## **L5-B - Modos de Corpo Rígido da Placa Retangular**

Autor: Prof. Dr. Walter Ponge-Ferreira  
E-mail: [ponge@usp.br](mailto:ponge@usp.br)

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
*Departamento de Engenharia Mecânica - PME*

Av. Prof. Mello Moraes, 2231  
São Paulo SP 05508-970 BRASIL  
Tel.: 55 (0)11 3091-9677  
Cel: 55 (0)11 97244-0900

22 de agosto de 2018

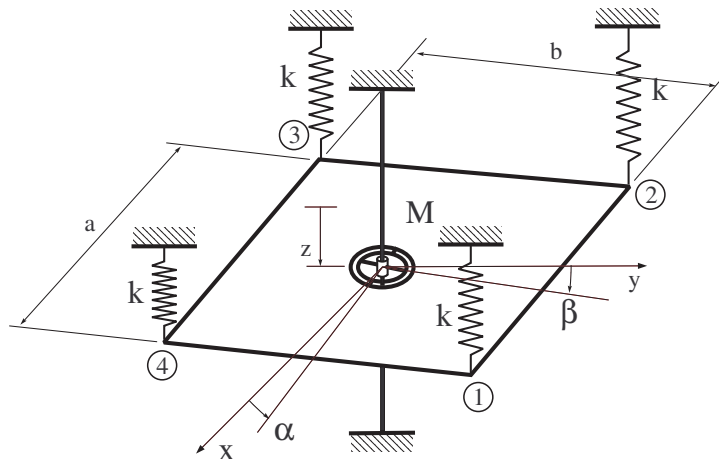


Figura 1: Placa retangular suspensa por quatro molas

## 1 Problema

Uma placa retangular de massa  $m$  com lados  $a$  e  $b$  é suspensa nos seus vértices por quatro molas idênticas de constante  $k$ , conforme mostrado na figura 1. Considerando somente pequenos movimentos verticais dos vértices, pede-se:

- determinar as equações diferenciais do sistema nas coordenadas  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ ;
- determinar as frequências naturais e formas dos modos de vibração;
- determinar a transformação modal que desacopla o sistema e a expressão das coordenadas modais em função das coordenadas físicas  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ ;
- repetir a determinação das equações diferenciais na coordenadas  $z$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ .
- realizar a parte prática do exercício.

## 2 Resolução

### 2.1 Equações Diferenciais

Consideremos o sistema com três graus de liberdade, qual sejam, movimento vertical para baixo, rotação em torno dos eixos  $x$  e  $y$ .

A coordenado do baricentro  $z$  é dada por:

$$z = \frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{1}{2} \frac{z_3 + z_4}{2} = \frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} + \frac{z_4}{4} \quad (1)$$

e os ângulos de rotação  $\alpha$  e  $\beta$  são dados por:

$$\alpha \simeq \tan \alpha = \left[ \frac{z_1 + z_4}{2} - \frac{z_2 + z_3}{2} \right] \frac{1}{a}$$

e

$$\beta \simeq \tan \beta = \left[ \frac{z_1 + z_2}{2} - \frac{z_3 + z_4}{2} \right] \frac{1}{b}$$

Pelo *Teorema do Movimento do Baricentro - TMB* temos:

$$m \ddot{z} = -k z_1 - k z_2 - k z_3 - k z_4$$

ou seja,

$$\frac{m}{4} (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 + \ddot{z}_3 + \ddot{z}_4) + k (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = 0 \quad (2)$$

Pelo *Teorema do Momento Angular - TMA* temos:

$$J_y \ddot{\alpha} = -k z_1 \frac{a}{2} + k z_2 \frac{a}{2} + k z_3 \frac{a}{2} - k z_4 \frac{a}{2}$$

$$J_y (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 - \ddot{z}_3 + \ddot{z}_4) + k a^2 (z_1 - z_2 - z_3 + z_4) = 0 \quad (3)$$

e

$$J_x \ddot{\beta} = -k z_1 \frac{b}{2} - k z_2 \frac{b}{2} + k z_3 \frac{b}{2} + k z_4 \frac{b}{2}$$

$$J_x (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) + k b^2 (z_1 + z_2 - z_3 - z_4) = 0 \quad (4)$$

Temos as equações vinculares:

$$z = \frac{z_2 + z_4}{2} \quad \text{e} \quad z = \frac{z_1 + z_3}{2}$$

logo

$$z_4 = z_1 - z_2 + z_3 \quad (5)$$

Substituindo nas equações diferenciais vem:

$$m (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_3) + 4k (z_1 + z_3) = 0 \quad (6)$$

$$J_y (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) + k a^2 (z_1 - z_2) = 0 \quad (7)$$

$$J_x (\ddot{z}_2 - \ddot{z}_3) + k b^2 (z_2 - z_3) = 0 \quad (8)$$

Que pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & m \\ J_y & -J_y & 0 \\ 0 & J_x & -J_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 0 & 4k \\ k a^2 & -k a^2 & 0 \\ 0 & k b^2 & -k b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde verifica-se o acoplamento tanto estático como dinâmico.

Introduzindo as matrizes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & m \\ J_y & -J_y & 0 \\ 0 & J_x & -J_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4k & 0 & 4k \\ k a^2 & -k a^2 & 0 \\ 0 & k b^2 & -k b^2 \end{bmatrix}$$

e o vetor

$$\vec{v} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}$$

podemos escrever as equações diferenciais na forma matricial:

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{v}} + \mathbf{K} \vec{v} = \vec{0} \quad (9)$$

## 2.2 Freqüências Naturais e Formas dos Modos de Vibração

Impondo-se uma solução harmônica ao sistema de equações diferenciais:

$$\vec{v}_h = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) \quad (10)$$

com  $\lambda = \omega^2$  obtemos o seguinte problema de autovalor:

$$\mathbf{K} \vec{v}_h = \lambda \mathbf{M} \vec{v}_h$$

ou

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \vec{v}_h = \vec{0} \quad (11)$$

onde  $\lambda$  e  $\vec{v}_h$  são os autovalores e autovetores do sistema.

Para obter uma solução não trivial devemos impor nulo o determinante da matriz, i.e.,

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0$$

que fornece o seguinte polinômio característico:

$$(4k - \lambda m) (k a^2 - \lambda J_y) (k b^2 - \lambda J_x) = 0 \quad (12)$$

donde obtemos os três autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{4k}{m} \quad \lambda_2 = \frac{k a^2}{J_y} \quad \lambda_3 = \frac{k b^2}{J_x} \quad (13)$$

Para obter os autovetores aplicamos os autovalores no sistema de equações homogêneas.  
Para  $\lambda = \lambda_1$  vem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k a^2 - 4k \frac{J_y}{m} & -k a^2 + 4k \frac{J_y}{m} & 0 \\ 0 & k b^2 - 4k \frac{J_x}{m} & -k b^2 + 4k \frac{J_x}{m} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde obtem-se:

$$z_1 = z_2 \quad \text{e} \quad z_2 = z_3 \quad \Rightarrow \quad z_4 = z_1$$

Assim:

$$\vec{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Repetindo para  $\lambda = \lambda_2$  vem:

$$\begin{pmatrix} 4k - k \frac{m a^2}{J_y} & 0 & 4k - k \frac{m a^2}{J_y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k b^2 - k a^2 \frac{J_x}{J_y} & -k b^2 + k a^2 \frac{J_x}{J_y} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde obtem-se:

$$z_1 = -z_3 \quad \text{e} \quad z_2 = z_3 \quad \Rightarrow \quad z_4 = z_1$$

Assim:

$$\vec{v}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Finalmente para  $\lambda = \lambda_3$  vem:

$$\begin{pmatrix} 4k - k \frac{m b^2}{J_x} & 0 & 4k - k \frac{m b^2}{J_x} \\ k a^2 - k b^2 \frac{J_y}{J_x} & -k a^2 + k b^2 \frac{J_y}{J_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde obtem-se:

$$z_1 = -z_3 \quad \text{e} \quad z_1 = z_2 \quad \Rightarrow \quad z_4 = z_3$$

Assim:

$$\vec{v}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Para a placa retangular homogênea de espessura  $t$  e lados  $a$  e  $b$  e material de densidade  $\rho$  temos:

$$m = \rho a b t \quad J_x = \frac{m b^2}{12} \quad J_y = \frac{m a^2}{12}$$

As frequências naturais são as raízes quadradas dos autovetores, assim:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k a^2}{J_y}} \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k b^2}{J_x}} \quad (17)$$

Vale lembrar na aplicação prática que:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \quad (18)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\delta$  a deflexão da placa devido ao seu peso próprio.

## 2.3 Transformação Modal e Desacoplamento das Equações Diferenciais

Adotando-se a matriz modal como matriz de transformação das coordenadas modais  $q_1$ ,  $q_2$ , e  $q_3$  para as coordenadas físicas  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , i.e.,

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{T} = [ \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3 ]$$

ou seja:

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

Donde se obtêm as transformações de coordenadas que desacoplam as equações diferenciais do sistema:

$$z_1 = q_1 + q_2 + q_3 \quad (19)$$

$$z_2 = q_1 - q_2 + q_3 \quad (20)$$

$$z_3 = q_1 - q_2 - q_3 \quad (21)$$

Ou escrevendo a transformação inversa com:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{T}|} [ \text{Cofatores} ]^T$$

vem:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}$$

Que fornece as expressões das coordenadas modais:

$$q_1 = \frac{z_1 + z_3}{2} \quad (22)$$

$$q_2 = \frac{z_1 - z_2}{2} \quad (23)$$

$$q_3 = \frac{z_2 - z_3}{2} \quad (24)$$

Substituindo as transformações modais no sistema de equações diferenciais vem:

$$m \ddot{q}_1 + 4k q_1 = 0 \quad (25)$$

$$J_y \ddot{q}_2 + k a^2 q_2 = 0 \quad (26)$$

$$J_x \ddot{q}_3 + k b^2 q_3 = 0 \quad (27)$$

## 2.4 Equações Diferenciais nas coordenadas $z$ , $\alpha$ e $\beta$

Da geometria do problema é fácil verificar que os deslocamentos  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$  podem ser escritos como:

$$z_1 = z + \frac{a}{2} \tan \alpha + \frac{b}{2} \tan \beta$$

$$z_2 = z - \frac{a}{2} \tan \alpha + \frac{b}{2} \tan \beta$$

$$z_3 = z - \frac{a}{2} \tan \alpha - \frac{b}{2} \tan \beta$$

$$z_4 = z + \frac{a}{2} \tan \alpha - \frac{b}{2} \tan \beta$$

considerando pequenas oscilações:

$$z_1 = z + \frac{a}{2} \alpha + \frac{b}{2} \beta$$

$$z_2 = z - \frac{a}{2} \alpha + \frac{b}{2} \beta$$

$$z_3 = z - \frac{a}{2} \alpha - \frac{b}{2} \beta$$

$$z_4 = z + \frac{a}{2} \alpha - \frac{b}{2} \beta$$

Logo as equações do *TMA* e do *TMB* ficam:

$$\begin{aligned}
 m \ddot{z} = & - k \left( z + \frac{a}{2} \alpha + \frac{b}{2} \beta \right) \\
 & - k \left( z - \frac{a}{2} \alpha + \frac{b}{2} \beta \right) \\
 & - k \left( z - \frac{a}{2} \alpha - \frac{b}{2} \beta \right) \\
 & - k \left( z + \frac{a}{2} \alpha - \frac{b}{2} \beta \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_y \ddot{\alpha} = & - k \left( z + \frac{a}{2} \alpha + \frac{b}{2} \beta \right) \frac{a}{2} \\
 & + k \left( z - \frac{a}{2} \alpha + \frac{b}{2} \beta \right) \frac{a}{2} \\
 & + k \left( z - \frac{a}{2} \alpha - \frac{b}{2} \beta \right) \frac{a}{2} \\
 & - k \left( z + \frac{a}{2} \alpha - \frac{b}{2} \beta \right) \frac{a}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_x \ddot{\beta} = & - k \left( z + \frac{a}{2} \alpha + \frac{b}{2} \beta \right) \frac{b}{2} \\
 & - k \left( z - \frac{a}{2} \alpha + \frac{b}{2} \beta \right) \frac{b}{2} \\
 & + k \left( z - \frac{a}{2} \alpha - \frac{b}{2} \beta \right) \frac{b}{2} \\
 & + k \left( z + \frac{a}{2} \alpha - \frac{b}{2} \beta \right) \frac{b}{2}
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$m \ddot{z} + 4k z = 0 \quad (28)$$

$$J_y \ddot{\alpha} + k a^2 \alpha = 0 \quad (29)$$

$$J_x \ddot{\beta} + k b^2 \beta = 0 \quad (30)$$

Comparando-se estas equações com as equações diferenciais nas coordenadas modais  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  deduzidas na seção anterior verifica-se que:

$$q_1 = z \quad q_2 = \alpha \quad q_3 = \beta$$



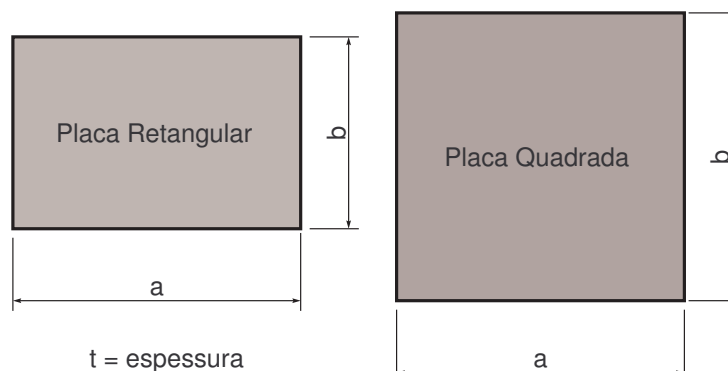


Figura 2: Dimensões das Placas

Tabela 1: Dimensões das Placas

Placa Retangular	Placa Quadrada
a = 390 mm	a = 400 mm
b = 260 mm	b = 400 mm
t = 5,0 mm	t = 7,4 mm

obviamente, pois são essas coordenadas que desacoplam o sistema de equações diferenciais.

Por serem as equações nas coordenadas  $z$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  desacopladas, as formas dos modos de vibração são os movimentos na direção dessas três coordenadas, isto é, translação vertical  $\{z\}$ , rotação em torno do eixo  $x$   $\{\alpha\}$  e rotação em torno do eixo  $y$   $\{\beta\}$ .

## 2.5 Resultados Numéricos

No laboratório dispomos de duas placas, a primeira retangular e a segunda quadrada (ver figura 2). As dimensões das placas são apresentadas na tabela 1. Ambas são fabricadas em aço, cujas propriedades nominais são apresentadas na tabela 2.

A rigidez das molas deverá ser obtida da medição da deflexão estática  $\delta$ , ou alternativamente à partir da frequência natural do modo de vibração vertical  $\omega_z$ .

### 2.5.1 Atividade Prática

Na atividade de laboratório deve-se obter os seguintes resultados para placa estudada:

Tabela 2: Propriedades do Aço

Módulo de Young	$E = 207 \text{ GPa}$
Módulo de Poisson	$\mu = 0,3$
Densidade	$\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$

- a) Medir a deflexão estática da placa  $\delta$  devido ao seu peso próprio.
- b) Estimar os valores das três frequências naturais do sistema,  $\omega_z$ ,  $\omega_\alpha$  e  $\omega_\beta$ .
- c) Identificar as seis frequências naturais do sistema real,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\omega_\alpha$ ,  $\omega_\beta$  e  $\omega_\gamma$ , através da apropriação de excitação manual senoidal.

Os resultados obtidos da vibração da placa sobre a deflexão das molas da suspensão elástica são chamados de modos de vibração de corpo rígido da placa em contraste com os modos de corpo flexível. No primeiro caso, estuda-se o movimento da placa, praticamente indeformada, onde toda deformação ocorre nas molas da suspensão. No segundo caso deseja-se estudar a vibração da placa propriamente dita, isto é, vibrações onde a placa se deforma. Esse segundo caso será objeto de estudo num segundo experimento.