1) Planeja-se estimar o parâmetro p de uma distribuição Bernoulli a partir de uma amostra aleatória simples. Sabemos que p é a proporção de "sucessos" na população. Selecione a(s) alternativa(s) que contém informação correta acerca do estimador "proporção de sucessos na amostra".

[X] $\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n}$

[X] $\hat{p}$ é não viciado

[X] $\hat{p}$ é consistente

[ ] $\hat{p}$ é viciado

[ ] $\hat{p}$ é não consistente

[ ] $\hat{p} = \frac{n}{\sum x_i}$

$\boxed{\text{EMV}}$ $f(x) = p^{x}(1-p)^{1-x}$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$\begin{aligned} l(p) &= \log(L(p)) \\ &= \log\left(\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log\left(p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \log(p) + (1-x_i)\log(1-p)\right) \\ &= \log(p)\sum x_i + \log(1-p)\sum(1-x_i) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell(p)}{\partial p} = \frac{1}{p}\sum x_i - \frac{1}{1-p}\sum(1-x_i)$$

$\log(1-p)$

$\mu = 1-p$

$\partial\mu = -\partial p$

$\frac{\partial}{\partial p} = -\frac{1}{\mu}$

$\Rightarrow -\frac{1}{1-p}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ell(p)}{\partial p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hat{p}}\sum x_i - \frac{1}{1-\hat{p}}\sum(1-x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hat{p}}\sum x_i = \frac{1}{1-\hat{p}}\sum(1-x_i)$$

$$\Rightarrow \frac{1-\hat{p}}{\hat{p}} = \frac{\sum(1-x_i)}{\sum x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hat{p}} \cancel{-1} = \frac{n}{\sum x_i} \cancel{-1} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$\boxed{\text{NÃO VIESADO}}$

$$\mathbb{E}[\hat{p}] = p\ ?$$

$$\mathbb{E}[\hat{p}] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum x_i}{n}\right]$$

$$= \frac{\sum \mathbb{E}[x_i]}{n}$$

$$= \frac{\sum p}{n}$$

$$= \frac{\cancel{n}p}{\cancel{n}}$$

$$= p$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{p}] = p$$

$\boxed{\text{CONSISTÊNCIA}}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\hat{p}] = p \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}ar[\hat{p}] = 0$$

$$\cdot) \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\hat{p}] = \lim_{n\to\infty} p$$

$$= p \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\hat{p}] = p$$

$$\cdot) \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}ar[\hat{p}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}ar\left[\frac{\sum x_i}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum \mathbb{V}ar[x_i]}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum p(1-p)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}p(1-p)}{n^{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}ar[\hat{p}] = 0$$

5) Analise as assertivas abaixo e marque a alternativa correta.

I) O EMV é sempre viesado. → para n grande

II) O EMV é sempre eficiente. → para n grande

III) O EQM pode ser visto como uma medida de espalhamento do estimador em torno da amostra. → população

a) Apenas I está correta

b) Apenas II está correta

c) Apenas III está correta

d) Todas estão corretas

e) Todas estão incorretas

3) O exercício 3 foi dividido em 4 outros exercícios

1) Em uma CIA eletrônica, a resistência média dos resistores é de 92 ohms e desvio padrão de 6 ohms. Sabendo-se que a distribuição é Normal e selecionando-se 31 resistores, qual é a probabilidade da média ser menor que 90 ohms? (Considere 3 casas decimais para a resposta)

Sabemos que $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, na qual $\mu = 92$, $\sigma = 6$ e $n = 31$. Portanto, $\bar{X} \sim N\left(92, \frac{6^2}{31}\right)$.

Precisamos calcular $P(\bar{X} < 90)$.

Sabemos que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, logo

$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ Dessa forma, temos

$$Z = \frac{90-92}{\frac{6}{\sqrt{31}}} = -2 \cdot \frac{\sqrt{31}}{6} = -\frac{\sqrt{31}}{3} = -1,8559$$

Na tabela, $Z = -1,8559$ corresponde à probabilidade 0,0329. Portanto,

$$P(\bar{X} < 90) = 0,0329$$
$$\simeq 0,033$$

No R podemos encontrar este resultado fazendo pnorm(90, 92, $6/\sqrt{31}$).

3.2) Qual é a probabilidade $P(T > 0,396)$ em uma amostra de $n = 12$? (Considere um número inteiro na resposta, sem símbolo de porcentagem).

Tabela T-Student para $n-1 = 11$ graus de liberdade e $0,396 = 70\%$

Ou seja $P(T > 0,396) = \frac{70}{2} = 35\%$

3.4) Qual é a probabilidade da estatística Q assumir um valor maior que 29,615 quando $n = 22$? (Considere um número inteiro para a resposta, sem o símbolo de porcentagem).

Tabela Qui-Quadrado para 29,615 e $n-1 = 21$ graus de liberdade $= 10\%$

Portanto $P(Q > 29,615) = 10\%$

3.3) Sabe-se que 5% das peças produzidas em uma determinada fábrica são defeituosas. Se uma caixa com itens vendidos tem 146 peças, qual é a probabilidade de que uma caixa tenha menos que 10% de peças defeituosas? (Considere três casas decimais para a resposta).

Sabemos que $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$. Dessa forma, como $p = \frac{5}{100}$ e $n = 146$, $\hat{p} \sim N\left(0{,}05, \frac{0{,}05(0{,}95)}{146}\right)$.

Queremos saber $P(\hat{p} < 0{,}10)$.

$$P(\hat{p} < 0{,}10) = P\left(Z < \frac{0{,}10 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}05(0{,}95)}{146}}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{0{,}05}{0{,}018}\right)$$

$$= P(Z < 2{,}78)$$

$$= 0{,}9973$$

$$\simeq 0{,}997$$

No R, podemos encontrar este resultado fazendo $\text{pnorm}\left(0.10, 0.05, \sqrt{\frac{0{,}05(0.95)}{146}}\right)$.