LISTA 5: VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS - SME0320

Exercício 1. Suponha que a tabela seguinte represente a distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y). Calcule todas as distribuições marginais e condicionais.

$Y \mid X$	1	2	3
1	1/12	1/6	0
2	0	1/9	1/5
3	1/18	1/4	2/15

Exercício 2. A função de probabilidade conjunta entre as variáveis aleatórias X e Y é apresentada na próxima tabela.

$X \mid Y$	-2	0	2	4
-1	0,1	0,2	0,1	0,2
1	0,2	0	0,1	0,1

(a) Obtenha as funções de probabilidade marginais das variáveis.
(b) X e Y são independentes?

Exercício 3. Suponhamos que X e Y tenham distribuição conjunta dada pela seguinte tabela:

$X \mid Y$	1	2	3
1	0	1/5	0
2	1/5	1/5	1/5
3	0	1/5	0

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.
(b) Qual a função de probabilidade condicional de X dado Y?
(c) X e Y são independentes?

Exercício 4. Considere a seguinte função de probabilidade conjunta de X e Y. Verifique se X e Y são independentes e encontre $E(X+Y)$.

$X \mid Y$	-3	2	4
1	0,1	0,2	0,2
3	0,3	0,1	0,1

Exercício 5. A função de probabilidade do vetor aleatório (X, Y) é dada a seguir

$Y \mid X$	0	1	2
0	1/12	1/60	7/40
1	1/8	1/12	1/30
2	1/24	1/24	1/4
3	1/12	1/40	1/24

Calcule:

(a) $P(X = 0 \mid 1 \leq Y < 3)$
(b) $E(X \mid Y = 3)$
(c) $Var(X + Y)$
(d) $Cov(X, Y)$
(e) $\rho(X, Y)$

Exercício 6. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de probabilidade conjunta dada por

$Y \mid X$	1	2	3
0	0,02	0	0
1	0,2	0,08	0,05
2	0,1	0,2	0,15
3	0	0,1	0,1

Calcule:

(a) X e Y são independentes?
(b) $E(Y/X)$
(c) $Var(X)$ e $Var(Y)$
(d) $Cov(X, Y)$
(e) $\rho(X, Y)$

Exercício 7. Na caixa I existem duas bolas numeradas 0 e 1, enquanto que a caixa II contém duas bolas numeradas -1 e 0. Uma bola é retirada aleatoriamente de cada caixa, de forma independente uma da outra. A esse experimento, associamos as variáveis aleatórias: X: número da bola retirada na caixa I, Y: soma dos valores das duas bolas retiradas, e Z: diferença, em módulo, desses valores.

(a) Determine a função de probabilidade conjunta entre X e Y e entre Y e Z.
(b) Verifique X e Y são independentes. Idem para Y e Z.

Exercício 8. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte função de probabilidade

$$P(X = x_i, Y = y_j) = \begin{cases} \frac{2x_i + y_j}{42} & \text{se } x_i = 0, 1, 2 \text{ e } \\ & \quad y_j = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha a tabela da distribuição de probabilidade conjunta.

Exercício 9. Uma moeda é jogada duas vezes. Considere X o número de caras na primeira jogada e Y o número total de caras nas duas jogadas. Se a moeda não for equilibrada, tal que cara tem 40% de chance de ocorrer, determine

(a) A distribuição de probabilidade conjunta e as distribuições marginais de X e Y.
(b) Qual a função de probabilidade condicional de X dado Y?
(c) A probabilidade de que pelo menos uma cara ocorra.

Exercício 10. Determine os valores de k de modo que as seguintes funções representem as distribuições de probabilidade conjuntas das variáveis aleatórias X e Y:

(a) $f(x, y) = kxy$, para $x = 1, 2, 3$ e $y = 1, 2, 3$.
(b) $f(x, y) = k(2x + y)$, para $2 < x < 6$ e $0 < y < 5$.

Exercício 11. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com a seguinte função densidade conjunta:

$$f(x, y) = cy^2, \quad \text{com} \quad 0 < x < 2 \text{ e } 0 < y < 1$$

(a) Calcule o valor da constante c.
(b) Calcule as marginais de X e Y, mostrando que realmente definem uma função densidade.
(c) Calcule $E(Y)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$.

Exercício 12. A densidade conjunta das variáveis aleatórias (X, Y), onde X é a unidade de mudança de temperatura e Y é a proporção de mudança de espectro que certa partícula atômica produz, é

$$f(x, y) = 10xy^2, \quad \text{com} \quad 0 < x < y < 1$$

(a) Determine as densidades marginais $g(x)$ e $h(y)$ e a densidade condicional $f(y \mid x)$.
(b) Determine a probabilidade de que o espectro mude em mais da metade do total de observações, dado que a temperatura é aumentada para $0,25$ unidade.

Exercício 13. Dada a função de densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{x + 3xy^2}{4}, \quad \text{com} \quad 0 < x < 2 \text{ e } 0 < y < 1$$

Determine $g(x)$, $h(y)$, $f(x \mid y)$ e calcule $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3}\right)$, $E(XY)$ e $E\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Exercício 14. Um serviço de facilidades opera com duas linhas de serviço. Em um dia selecionado aleatoriamente, considere X a proporção do tempo no qual a primeira linha é usada e Y a proporção do tempo no qual a segunda linha é usada. Suponha que a função de densidade probabilidade conjunta para (X, Y) seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3(x^2 + y^2)}{2}, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule a probabilidade de que nenhuma das duas linhas esteja ocupada mais do que a metade do tempo.
(b) Encontre a probabilidade de que a primeira linha esteja ocupada mais do que 75% do tempo.

Exercício 15. Determine o valor de c que torne a função $f(x, y) = ce^{-2x-3y}$ uma função de densidade de probabilidade conjunta no intervalo $x > 0$ e $0 < y < x$. Com isso, obtenha:

(a) As marginais de X e Y.
(b) $P(X < 2, Y < 2)$ e $P(1 < X < 2)$.
(c) $E(X)$ e $E(Y)$.

Exercício 16. As variáveis X e Y têm densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{6}{7}\left(x^2 + \dfrac{xy}{2}\right), & 0 < x < 1, \ 0 < y < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função densidade conjunta.
(b) Obtenha as marginais de X e Y.
(c) X e Y são independentes?

Exercício 17. Considere o Exercício 14. Há duas linhas de serviço. As variáveis aleatórias X e Y são as proporções de tempo em que a linha 1 e a linha 2 são usadas, respectivamente. Determine

(a) Se X e Y são independentes ou não.
(b) $E(X + Y)$ e $E(XY)$.
(c) $Var(X)$, $Var(Y)$, $Cov(X, Y)$ e $Var(X + Y)$.

GABARITO LISTA 5: VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS - SME0320

Exercício 1.

X	1	2	3
P(X)	5/36	19/36	1/3

Y	1	2	3
P(Y)	1/4	14/45	79/180

X | $Y = y$	1	2	3
y=1	1/3	2/3	0
y=2	0	5/14	9/14
y=3	10/79	45/79	24/79

Y | $X = x$	1	2	3
x=1	3/5	0	2/5
x=2	6/19	4/19	9/19
x=3	0	3/5	2/5

Exercício 2.

(a)

X	-1	1
P(X)	0,6	0,4

Y	-2	0	2	4
P(Y)	0,3	0,2	0,2	0,3

(b) Não.

Exercício 3.

(a) A distribuição é a mesma para ambas as variáveis:

X ou Y	1	2	3
P(X) ou P(Y)	1/5	3/5	1/5

(b)

X | $Y = y$	1	2	3
y=1	0	1	0
y=2	1/3	1/3	1/3
y=3	0	1	0

(c) Não.

Exercício 4.

Como P(X=1).P(Y=-3) $\neq$ P(X=1, Y=-3), então X e Y não são independentes. Além disso, $E(X + Y) = 2,6$.

Exercício 5.

(a) $P(X = 0 \mid 1 \leq Y < 3) = 20/69$.

(b) $E(X \mid Y = 3) = 13/18$.

(c) $V(X + Y) = 334/144$.

(d) $Cov(X, Y) = -19/720$.

(e) $\rho(X, Y) = 0,0235$.

Exercício 6.

(a) Não.

(b) $E(Y \mid X = 1) = 1,25$,
$E(Y \mid X = 2) = 2,0526$ *e*
$E(Y \mid X = 3) = 1,3$.

(c) $V(X) = 0,6196$ e $V(Y) = 0,5811$.

(d) $Cov(X, Y) = 0,2866$. **(e)** $\rho(X, Y) = 0,4776$.

Exercício 7.

(a)

X | Y	-1	0	1
0	1/4	1/4	0
1	0	1/4	1/4

X | Z	0	1	2
0	1/4	1/4	0
1	0	1/4	1/4

(b) Como P(X=0).P(Y=-1) $\neq$ P(X=0, Y=-1), então X e Y não são independentes. Assim como, P(X=0).P(Z=0) $\neq$ P(X=0, Z=0), implicando que X e Z também não são independentes.

Exercício 8.

X | Y	0	1	2	3
0	0	1/42	2/42	3/42
1	2/42	3/42	4/42	5/42
2	4/42	5/42	6/42	7/42

Exercício 9.

(a)

X | Y	0	1	2	P(X)
0	0,36	0,24	0	0,6
1	0	0,24	0,16	0,4
P(Y)	0,36	0,48	0,16	1

(b)

X | $Y = y$	0	1
y=0	1	0
y=1	0,5	0,5
y=2	0	1

(c) 0,64.

Exercício 10.

(a) k = 1/36. **(b)** k = 1/210.

Exercício 11.

(a) c = 3/2.

(b) $f(x) = 1/2$, para $0 < x < 2$ e
$f(y) = 3y^2$, para $0 < y < 1$.

(c) $E(X) = 1,\ E(Y) = \frac{3}{4},\ V(X) = \frac{1}{3},\ V(Y) = \frac{3}{80}$.

Exercício 12.

(a) $g(x) = (10x - 10x^4)/3$, para $0 < x < 1$,
$h(y) = 5y^4$, para $0 < y < 1$ e
$f(y \mid x) = 3y^2/(1 - x^3)$, para $x < y < 1$.

(b) 0,8889.

Exercício 13.

$g(x) = x/2$, para $0 < x < 2$;
$h(y) = (1 + 3y^2)/2$, para $0 < y < 1$;
$f(x \mid y) = x/2$, para $0 < x < 2$ e $0 < y < 1$;
$P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3}) = 3/16$,
$E(XY) = 5/6$, e $E(\frac{Y}{X}) = 10/16$.

Exercício 14.

(a) 1/16. **(b)** 53/128.

Exercício 15.

(a) $g(x) = 2e^{-2x}(1 - e^{-3x})$, para $x > 0$ e $h(y) = 3e^{-3y}$, para $y > 0$.

(b) $P(X < 2, Y < 2) = 0,9793$ e $P(1 < X < 2) = 0,1143$.

(c) $E(X) = 42/100$ e $E(Y) = 1/3$

Exercício 16.

(a) Demonstração.

(b) $g(x) = (12x^2 + 6x)/7$, para $0 < x < 1$ e $h(y) = (4 + 3y)/14$, para $0 < y < 2$.

(c) X e Y não são independentes.

Exercício 17.

(a) X e Y não são independentes.

(b) $E(X + Y) = 5/4$ e $E(XY) = 3/8$.

(c) $V(X) = V(Y) = 73/960$, $Cov(X, Y) = -1/64$ e $V(X + Y) = 161/960$.