

QUESTIONÁRIO 2 - Variáveis aleatórias

Jorge Bazán e Patrícia Stülp

Exercício 1: Seja X uma variável aleatória com um valor esperado de $\mathbb{E}[X] = 3$ e uma variância de $\text{Var}[X] = 5$. Assinale a opção que apresenta os respectivos resultados de $\mathbb{E}[3X^2 - 5X + 2]$ e $\text{Var}[2X + 9]$.

a) $\mathbb{E}[3X^2 - 5X + 2] = 14$ e $\text{Var}[2X + 9] = 29$

b) $\mathbb{E}[3X^2 - 5X + 2] = 12$ e $\text{Var}[2X + 9] = 10$

c) $\mathbb{E}[3X^2 - 5X + 2] = 29$ e $\text{Var}[2X + 9] = 20$

d) $\mathbb{E}[3X^2 - 5X + 2] = 27$ e $\text{Var}[2X + 9] = 10$

e) $\mathbb{E}[3X^2 - 5X + 2] = 29$ e $\text{Var}[2X + 9] = 101$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[3x^2 - 5x + 2] &= \mathbb{E}[3x^2] - \mathbb{E}[5x] + \mathbb{E}[2] \\ &= 3\mathbb{E}[x^2] - 5\mathbb{E}[x] + \mathbb{E}[2] \\ &= 3(\text{Var}[x] + \mathbb{E}[x]^2) - 5\mathbb{E}[x] + \mathbb{E}[2] \\ &= 3(5 + 3^2) - 5(3) + 2 \\ &= 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[2x + 9] &= \text{Var}[2x] + \text{Var}[9] \\ &= 2^2 \text{Var}[x] + \text{Var}[9] \\ &= 4(5) + 0 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Exercício 2: A porcentagem de álcool $100X$ num certo composto é uma função aleatória, na qual X apresenta a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} kx^3(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre k para determinar:

(Obs.: considere três casas decimais para cada resposta)

a) $\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2})$

b) $\mathbb{P}(X > \frac{3}{4} \mid X > \frac{1}{2})$

PARA ENCONTRAR O VALOR DE k , PRECISAMOS

CALCULAR

$$\int_0^1 kx^3(1-x) dx = 1$$

$$k \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow k = 20$$

$$a) \mathbb{P}(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 20x^3(1-x) dx$$

$$= 20 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = 0,172$$

$$b) \mathbb{P}(X > \frac{3}{4} \mid X > \frac{1}{2}) = \frac{\mathbb{P}(X > \frac{3}{4} \cap X > \frac{1}{2})}{\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})} = \frac{\mathbb{P}(X > \frac{3}{4})}{\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\frac{3}{4} < X < 1)}{\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X < 1)} = \frac{0,3672}{0,8325} = 0,452$$

Exercício 3: O custo de um produto de rara procura comercializado em um determinado estabelecimento é de R\$5,00 e o preço de venda é de R\$7,50. O abastecimento deste produto é feito no início de cada semana e sabe-se que tal produto torna-se irrecuperável se não for vendido na mesma semana em que foi abastecido no comércio. Considere a seguinte função de probabilidade para a procura semanal X , em unidades desse produto.

x	1	3	4	5	7
$f(x)$	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Admitindo-se que o estoque inicial seja de 4 unidades:

- a) calcule a probabilidade de haver falha de estoque,
 b) calcule a $\text{Var}[X]$.

ENTENDE-SE POR "FALHA DE ESTOQUE" QUANDO A PROCURA PELO PRODUTO É MAIOR QUE A QUANTIDADE DISPONÍVEL EM ESTOQUE, OU SEJA, QUANDO $P(X > 4)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 4) &= P(X=5) + P(X=7) \\ &= 0,3 + 0,1 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ \therefore E[X^2] &= 1^2(0,1) + 3^2(0,3) + 4^2(0,2) + 5^2(0,3) + 7^2(0,1) \\ &= 18,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore E[X] &= 1(0,1) + 3(0,3) + 4(0,2) + 5(0,3) + 7(0,1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 18,4 - 4^2 = 2,4$$