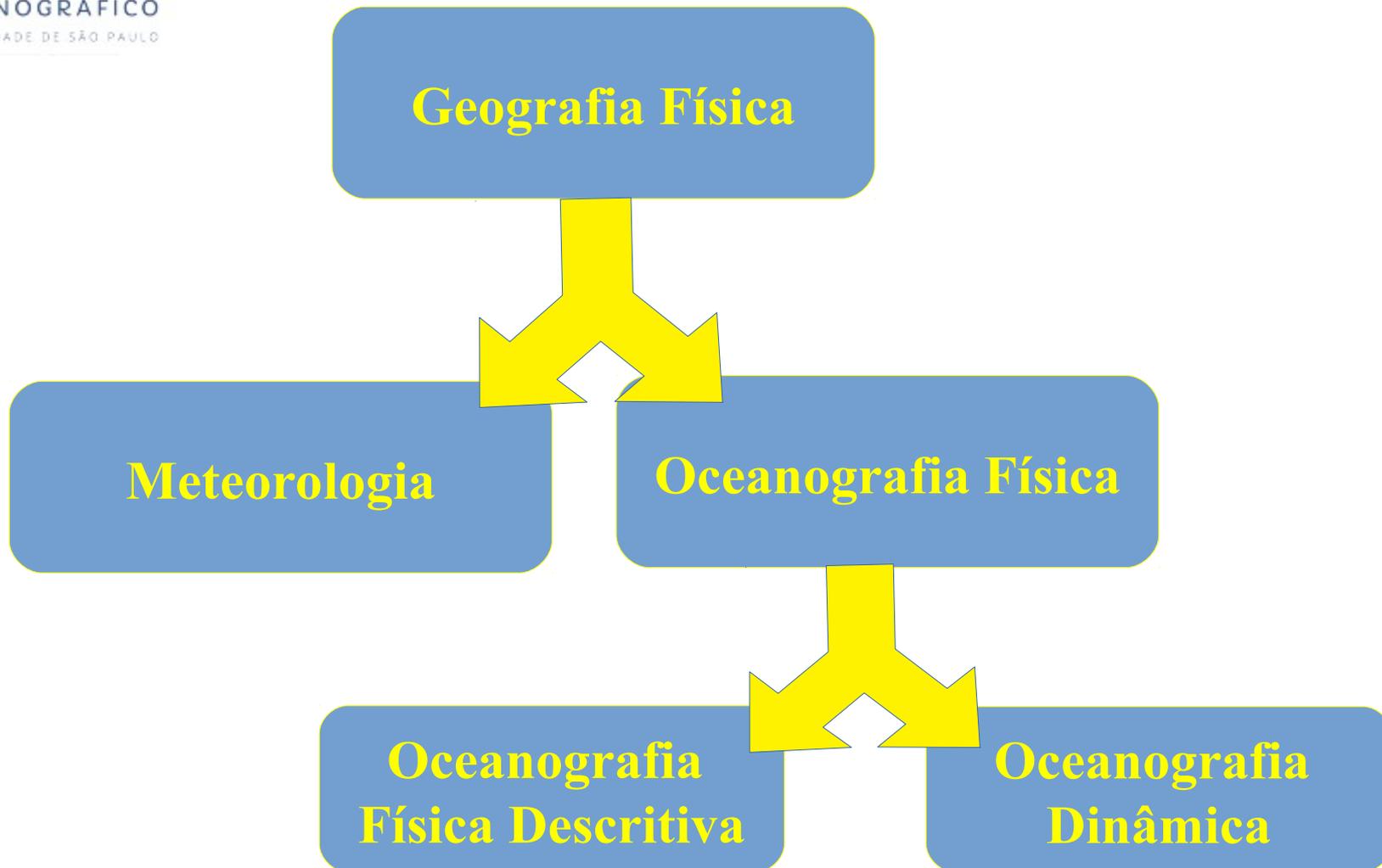


Oceanografia Dinâmica II

Ilson C. A. da Silveira

**Departamento de Oceanografia Física, Química e
Geológica do IOUSP**

A Oceanografia Física



A Oceanografia Dinâmica

- Oceanografia Dinâmica Analítica
- Oceanografia Dinâmica Numérica



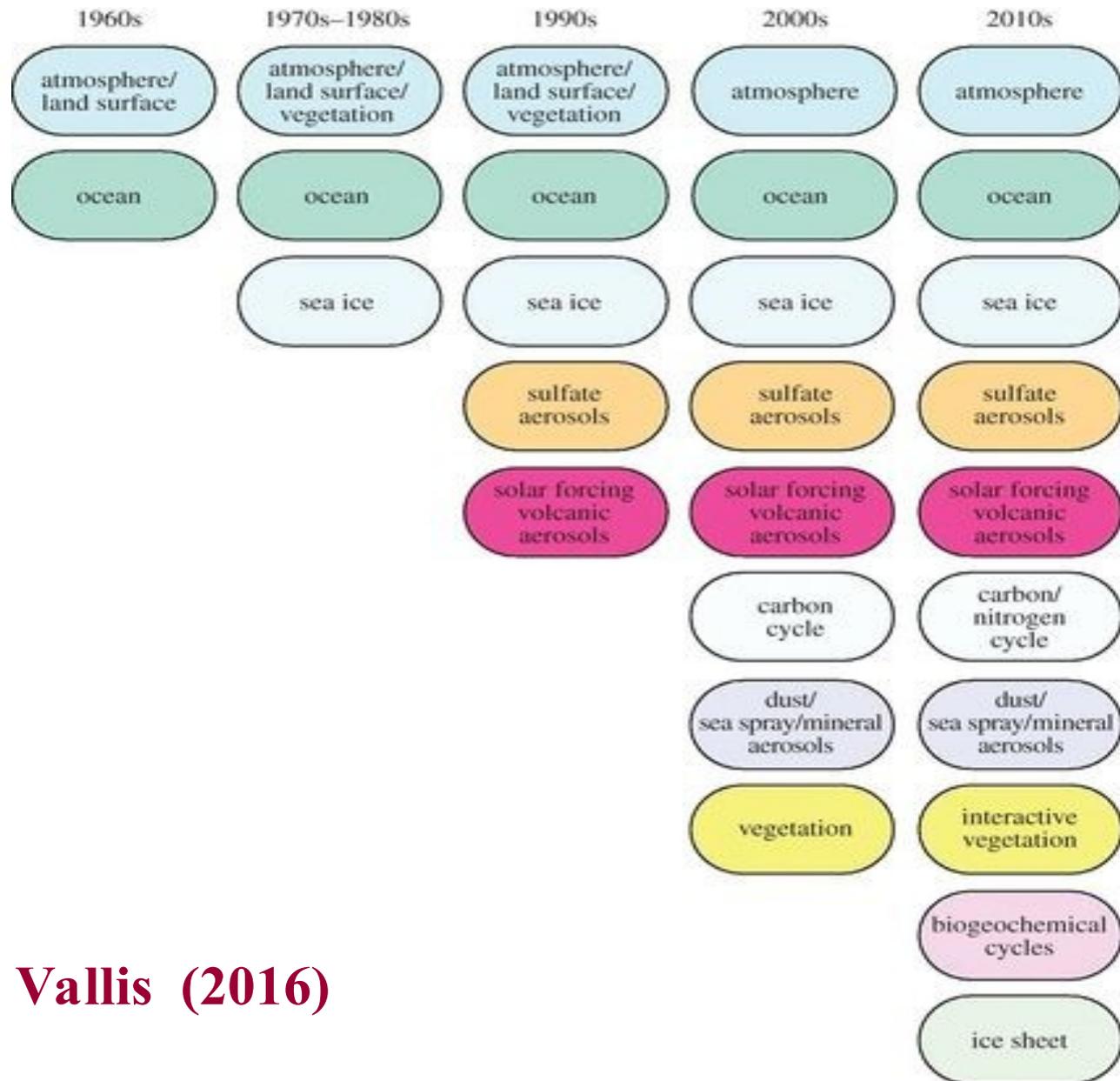
O que é um “*modelo*” do oceano?

- **Modelo Conceitual** – uma interpretação das suas observações segundo preceitos físicos;
- **Modelo Teórico** – uso de simplificações e equações para representar e provar o modelo conceitual;
- **Modelo Numérico** – resolução das equações numericamente tentando chegar o mais próximo da realidade o quanto possível.

Dinâmica de Fluidos Geofísicos

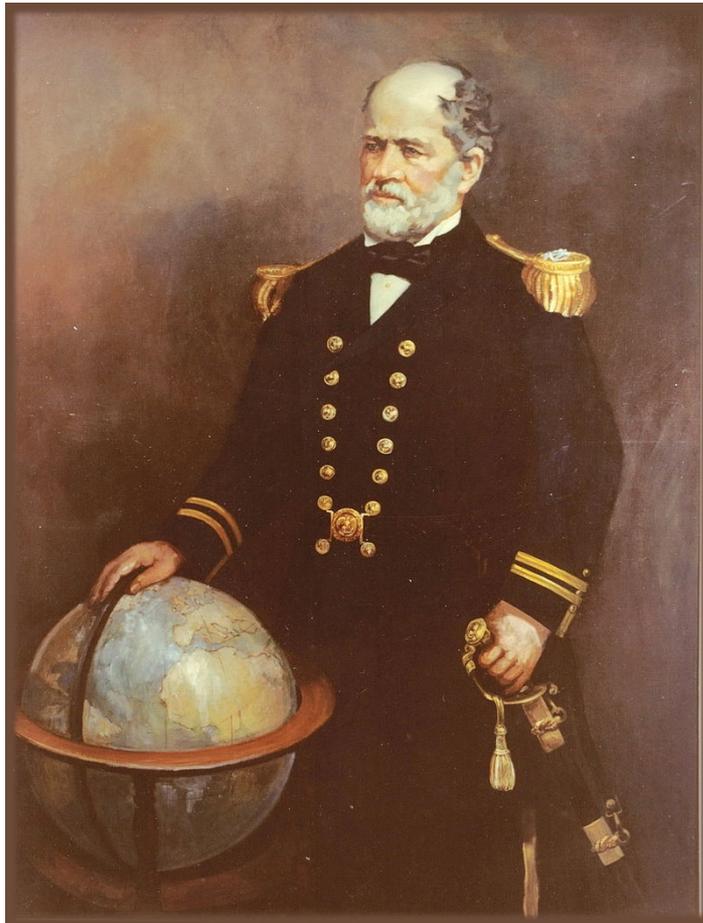
- É o ramo da mecânica de fluidos aplicado a fenômenos geofísicos, ou seja, **fenômenos físicos intrinsecamente ligados ao planeta Terra.**
- São estes fenômenos: movimentos do magma abaixo da crosta terrestre, escoamentos de lava, movimentos atmosféricos planetários, a circulação oceânica, etc.
- **“DFG” engloba portanto toda a Oceanografia Dinâmica!!**
- Na presente forma, a “DFG” foi organizada no final dos anos 50 do séc. XX entre Harvard Univ., MIT e Princeton Univ. Prof. Allan Robinson (HU) cunhou o nome.

Dinâmica de Fluidos Geofísicos



Fonte: Vallis (2016)

Um pouco de História...



Cdr. Matthew Fontaine Maury (1807-1873)

Considerado o “pai” da Oceanografia Física Moderna e da Meteorologia Naval

Publicou o que se considera o primeiro livro de Oceanografia Física propriamente dito: “A Geografia Física do Mar” (1855),

Fez muitas novas contribuições importantes mapeando ventos e correntes oceânicas, incluindo faixas oceânicas para a passagem de navios no mar.

O herói da Oceanografia

Prof. Fridtjof Nansen
(1861-1930)

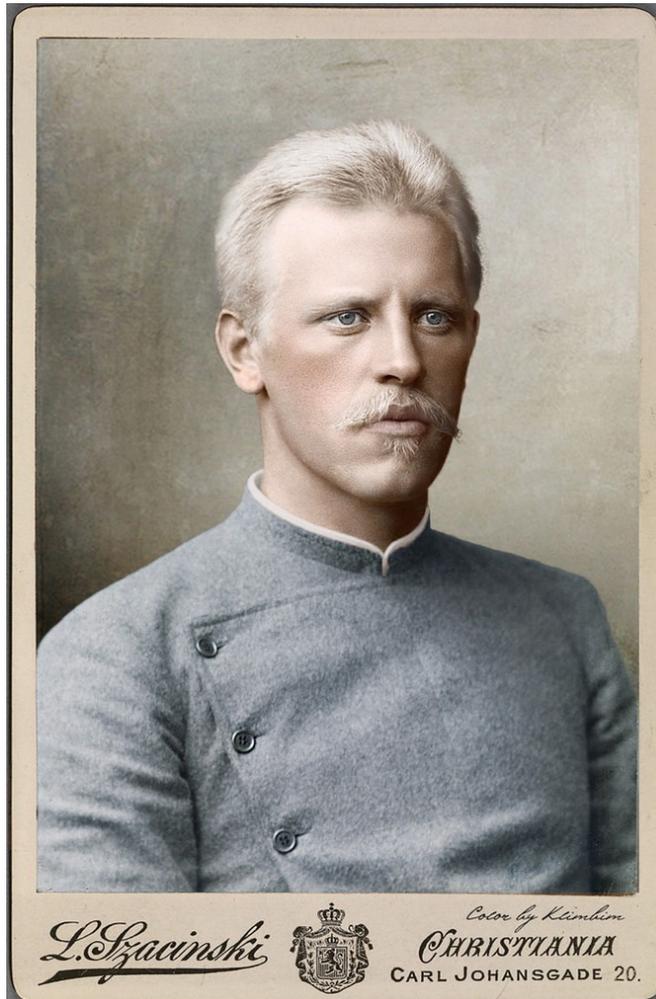
Doutor em Física pelo Museu de História Natural de Bergen

Considerado o “pai” da Oceanografia Biológica Moderna e da Meteorologia Naval

Desbravou o Ártico, explicou vários fenômenos oceanográficos físicos, químicos e biológicos.

Congelou-se com o lendário N.Oc. Fram por três anos.

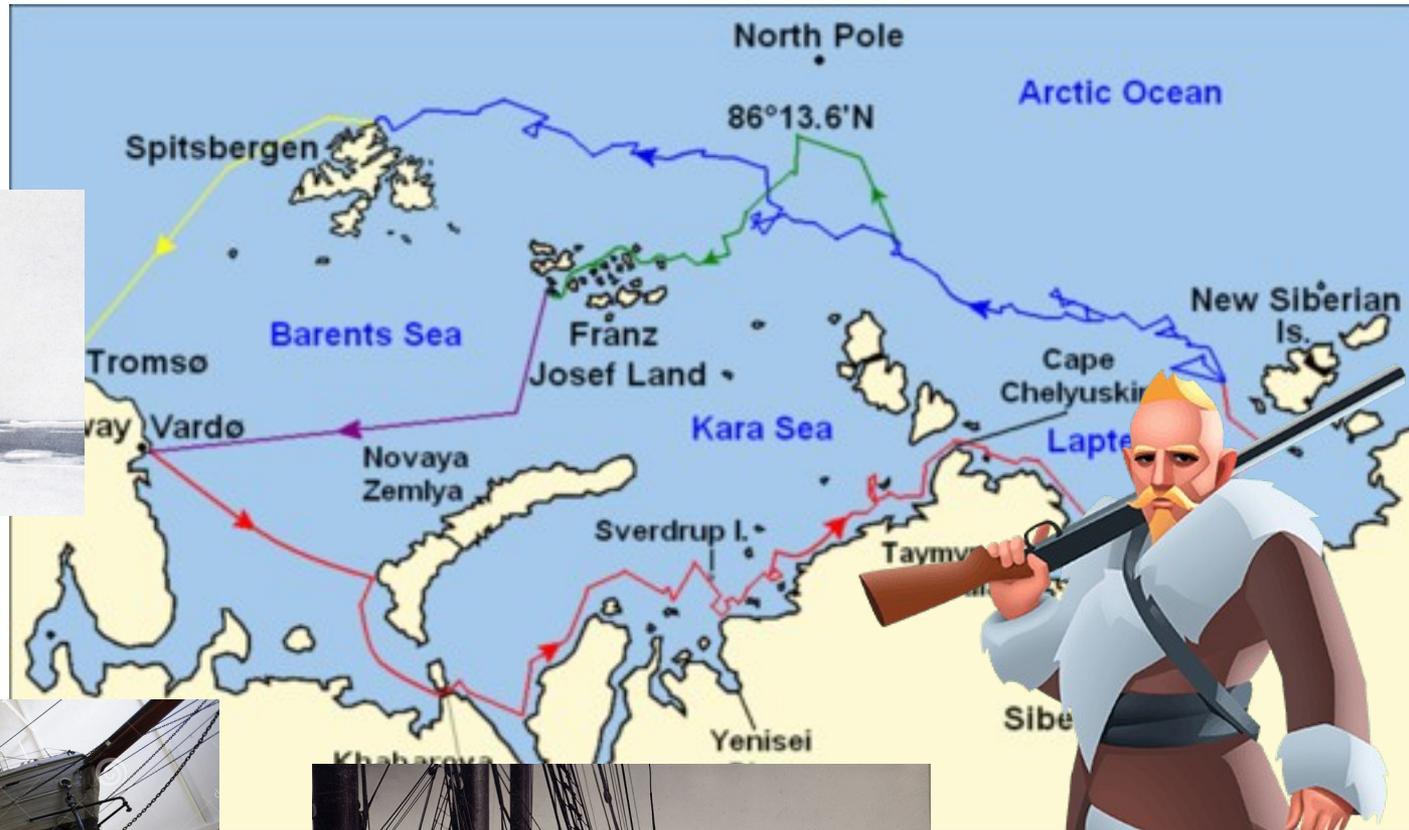
Foi o único oceanógrafo a receber o Prêmio Nobel da Paz





INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

A Expedição do N.Oc. Fram



Download from
Dreamstime.com

30791748

Dorland | Dreamstime.com

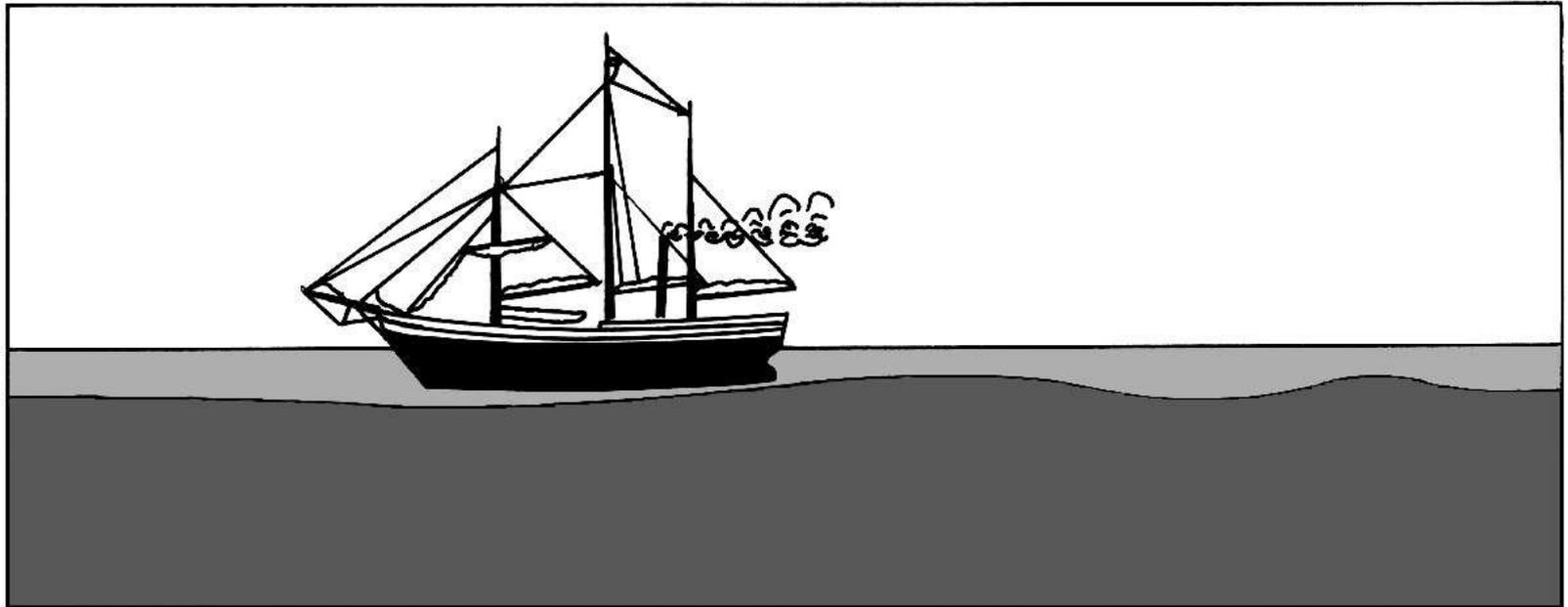


A Expedição do N.Oc. Fram

A expedição foi um verdadeiro êxito em todos os aspectos: desportivo, humano e científico:

- três invernos no **Ártico** por 13 membros da tripulação sem doenças nem desfalecimento moral,
- a marcha de dois exploradores até ao ponto mais setentrional jamais alcançado,
- o regresso são e salvo de toda a tripulação e do navio em perfeito estado.
- a descoberta de que o “oceano” que rodeia o polo é muito profundo,
- a descoberta do itinerário seguido pelas **banquisas** com o desvio posterior pelo **estreito de Bering** até o Atlântico,
- a descoberta de que a deriva se deve essencialmente aos ventos e muito menos às correntes,
- a descoberta, graças às observações hidrográficas, da existência, sob uma capa superficial fria, de mais camadas de água relativamente quentes (até + 1°) e mais salinas,
- o estudo da formação dos gelos.

O Fenômeno das Águas Mortas (Nansen & Ekman, 1904)



O Primeiro Modelador do Oceano



**Prof. Vagn Walfrid Ekman
(1874-1954)**

Doutor em Física pela Universidade de Uppsala (Suécia). Seu mentor foi Vilhelm Bjerknes.

Filho de oceanógrafo, **Fredrik Laurentz Ekman**

Formulou o primeiro modelo analítico completo da oceanografia dinâmica e/ou DFG, motivado pelas observações de Nansen.

Explicou, juntamente com Nansen, o fenômeno das “Águas Mortas”.

Junto com seu colega químico Knudsen, formulou a primeira equação de estado da água do mar.

Desenhou e produziu o primeiro correntógrafo.

Como é possível medir correntes no oceano através de T, S e p? **O Método Dinâmico (1903)**



Johan Sandström
(1874-1947)



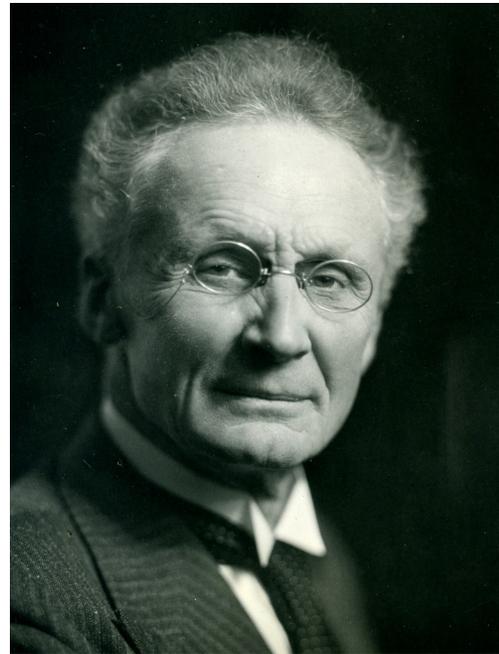
Bjorn Helland-Hansen
(1877-1957)



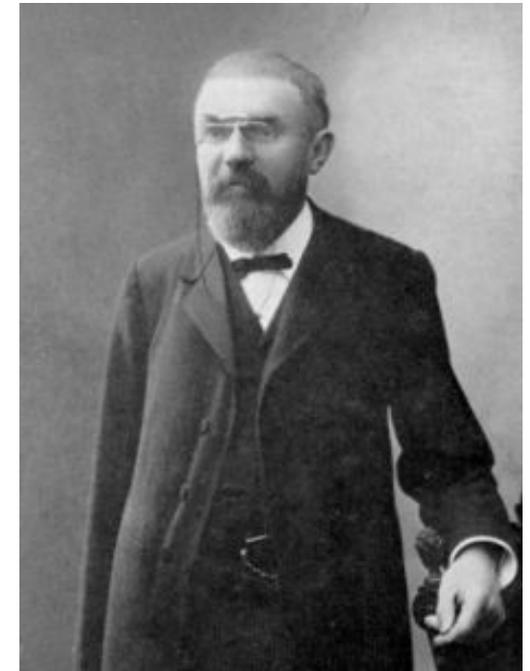
Outros Grandes nomes históricos da Oceanografia Dinâmica



Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)



Vilhelm Bjerknes
(1862-1951)



Jean Henri Poincaré
(1854-1912)

O inventor do computador era oceanógrafo!



William Thomson
- Lord Kelvin -
(1824-1907)

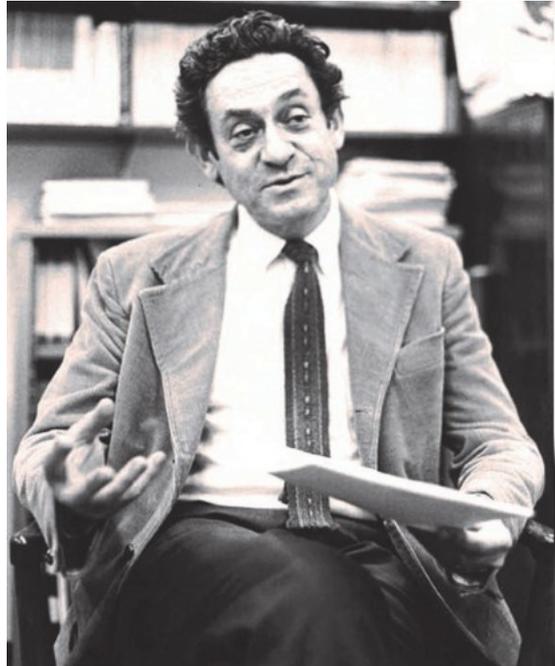


A máquina de marés o Lord Kelvin
[computador analógico para cálculo das
constantes harmônicas - 1872]

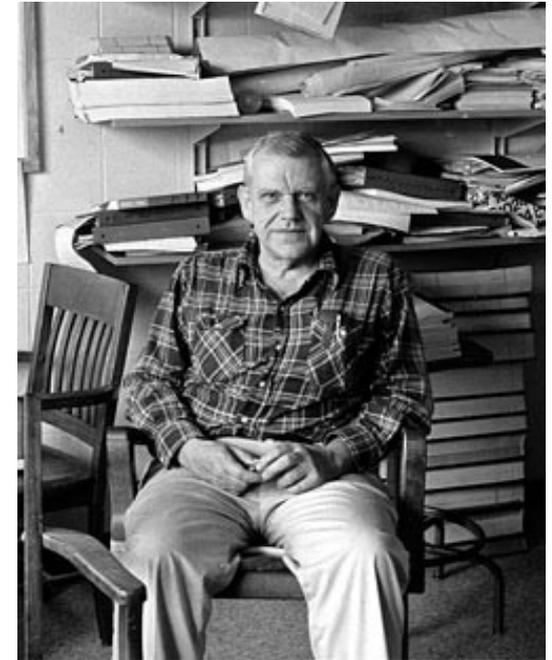
Grandes nomes históricos da Dinâmica de Fluidos Geofísicos



Carl-Gustaf Rossby
(1898-1957)



Jule Gregory Charney
(1917-1981)



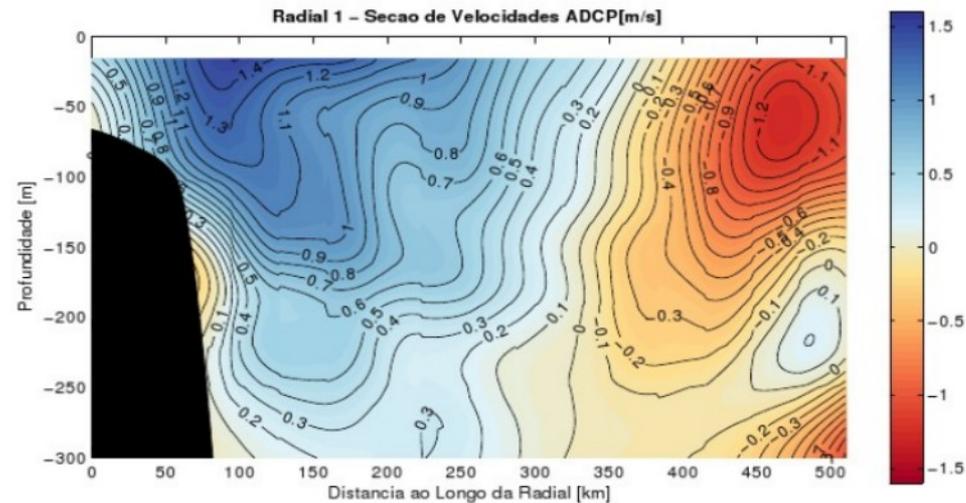
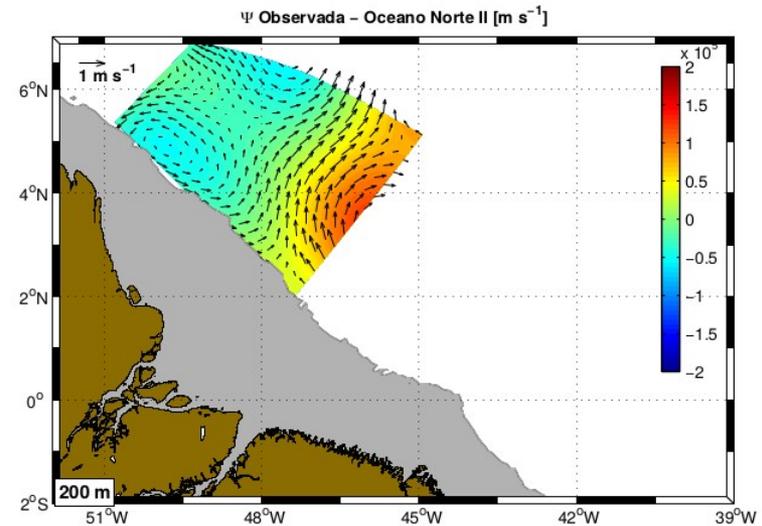
Henry M. Stommel
(1920-1992)

Fenômenos de Estudo da DFG

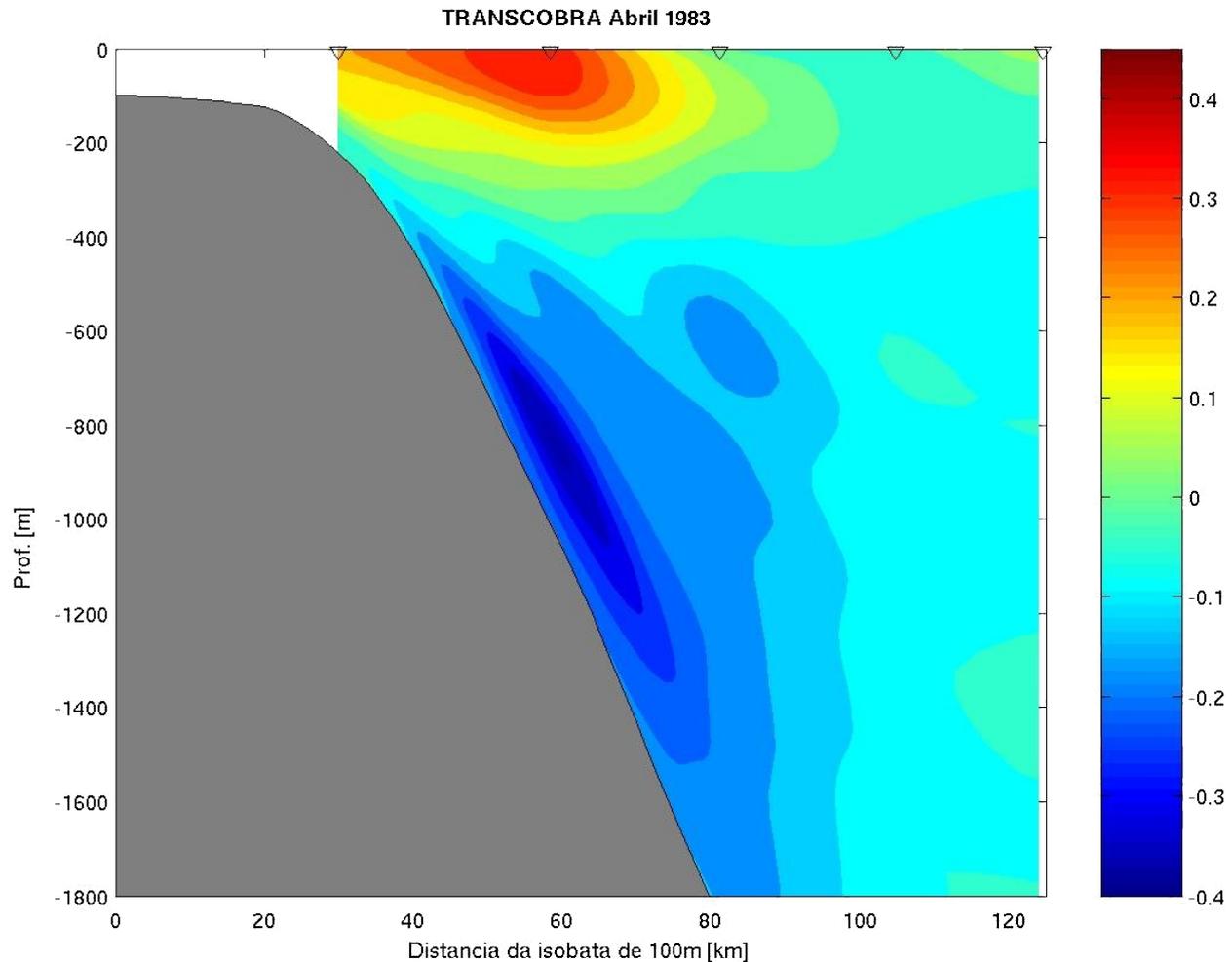
Vórtices da Corrente Norte do Brasil



Fonte: Garzoli et al. (2000)

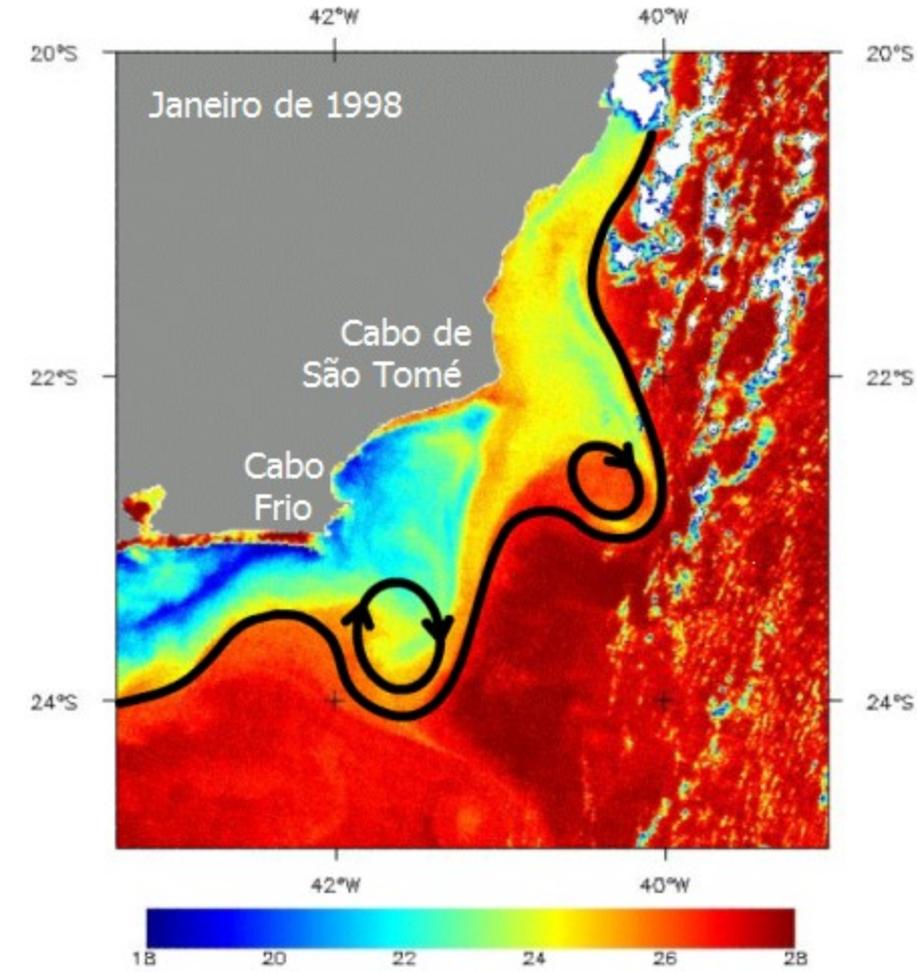


Seção Vertical -Corrente do Brasil em 22° S



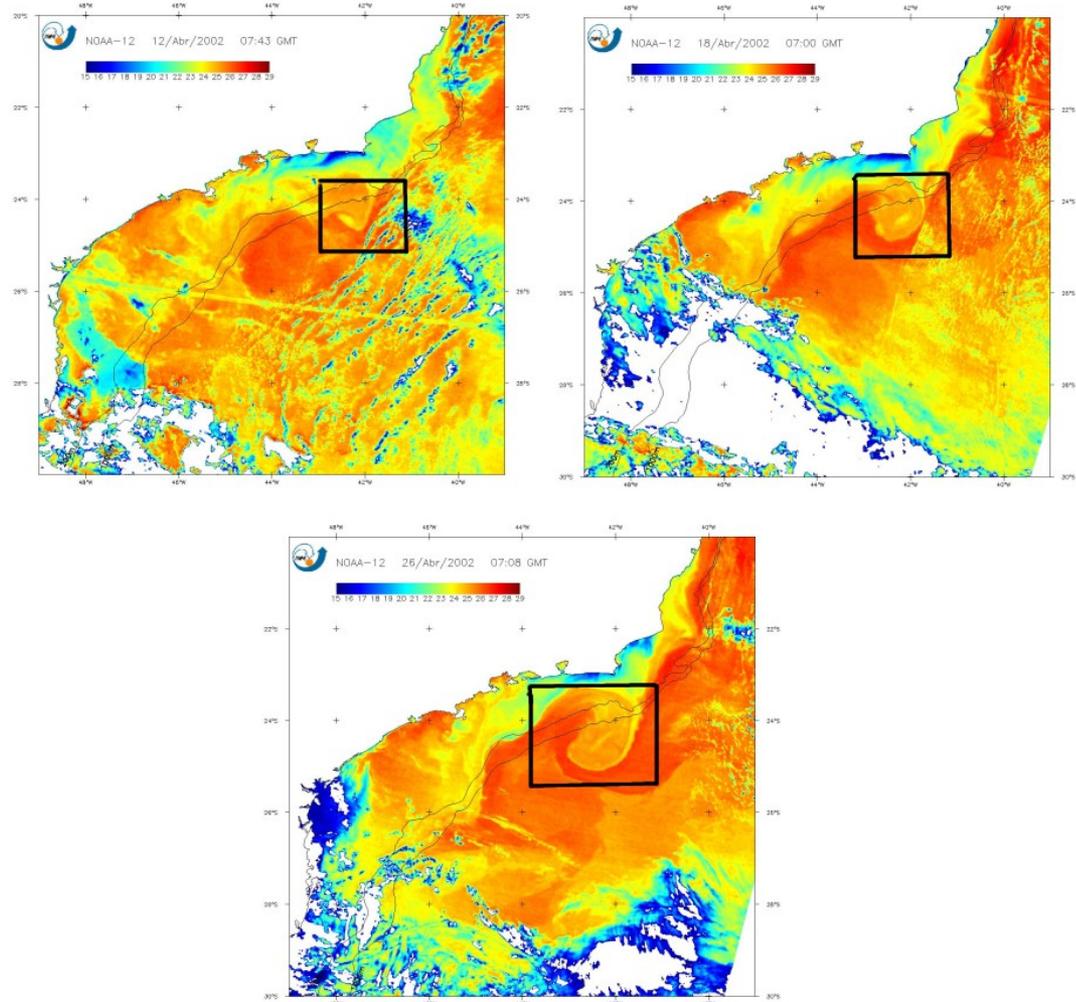
Fonte: Silveira et al. (2004)

Meandros da Corrente do Brasil



Fonte: Mahiques et al. (2005)

Meandros da Corrente do Brasil - Instabilidade



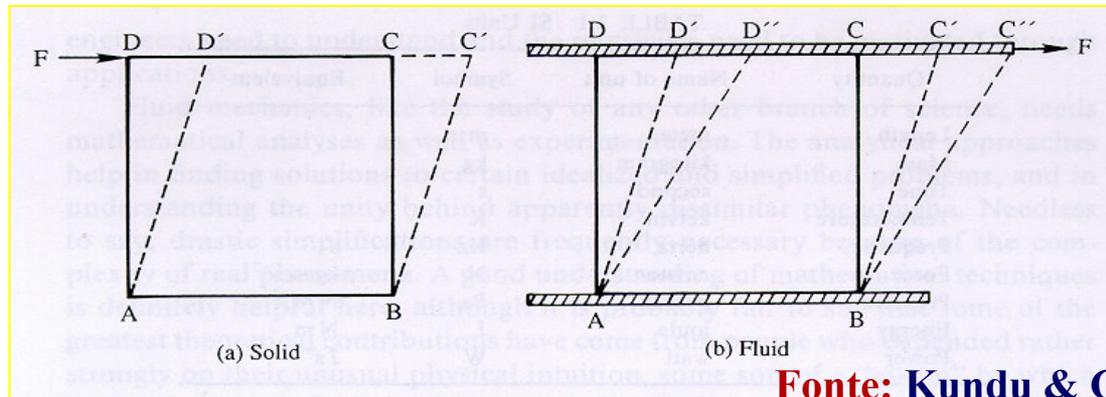
Fonte: Silveira (2007)

O Oceano como Fluido Geofísico

Fluidos e Sólidos

Definição

- Um elemento sólido tem um formato (feição) preferencial ao qual tende a retornar quando da remoção de forças externas.
- Um elemento fluido não possui nenhum formato preferencial. Irá se deformar continuamente ante a aplicação de força externa.



Fonte: Kundu & Cohen (2002)

A Hipótese do Continuum

- É possível ignorar a estrutura molecular discreta do fluido e tratá-lo como um meio contínuo - o continuum.
- Para que a hipótese seja válida, a escala de comprimento do sistema de fluxo tem de ser muito maior que a trajetória média livre das moléculas.

O Oceano como Fluido Geofísico

- **Geofísica** pode ser definida como a ciência que estuda a física das esferas que compõem o planeta terra (litosfera, atmosfera e hidrosfera) e, portanto, fortemente influenciadas por seu movimento de rotação, translação e inclinação de seu eixo, assim como as variações deste.
- O oceano compõe a quase totalidade da hidrosfera, ocupando cerca de 72% da superfície do planeta, apresenta-se com uma espessura média de 3,6 km (contra 6.400 km do raio da Terra), é aquecido de forma diferencial devido à inclinação do eixo face à irradiação solar e é “arrastado” junto com a Terra em seu movimento de rotação.
- Lema do nosso curso:
- **O oceano é um fluido raso, estratificado e em rotação**

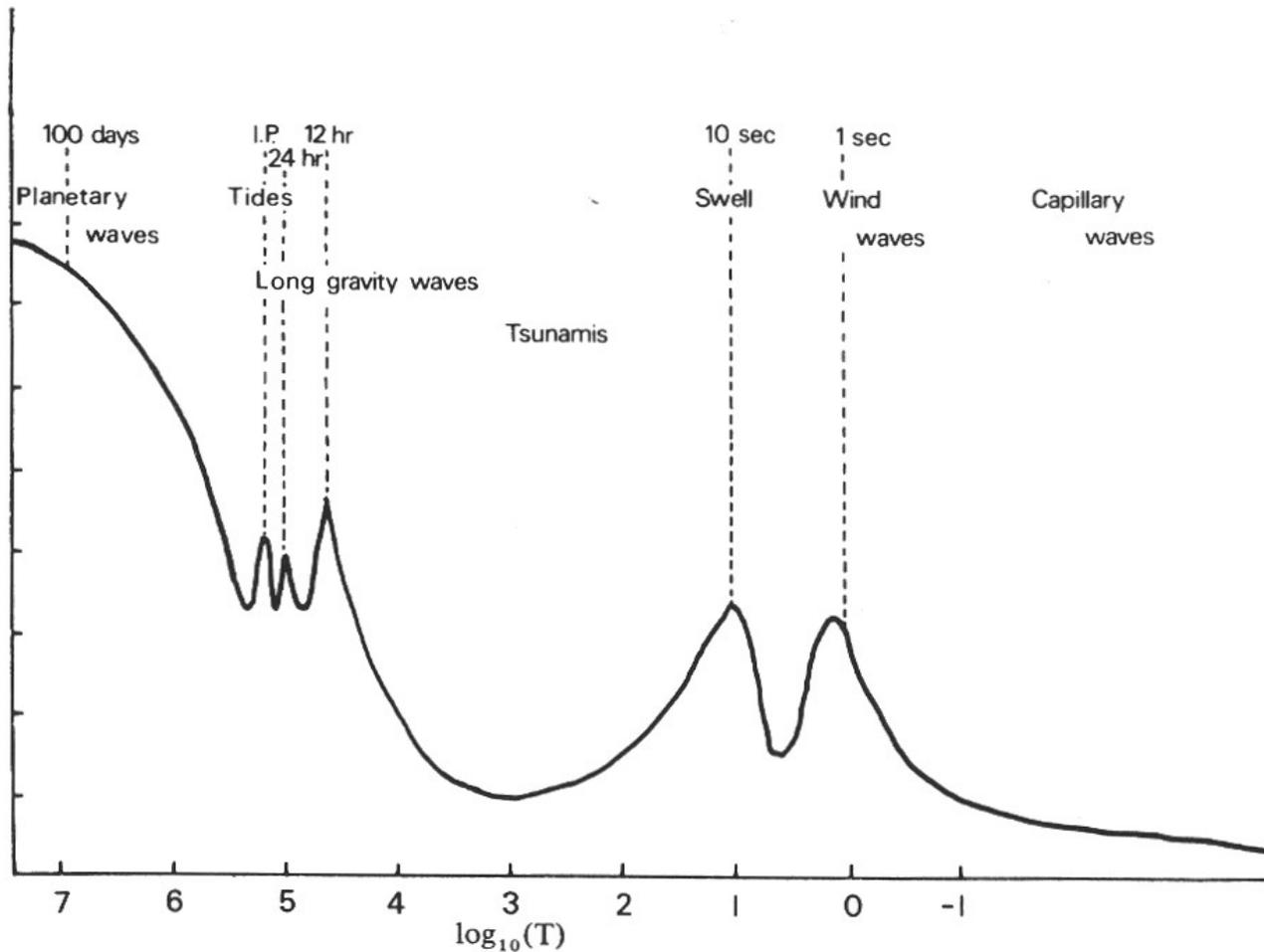
Para entendermos o que o lema significa, é necessário descrever o oceano como uma composição de fenômenos ocorrentes em diversas escalas de tempo e movimento.

Escalas de Tempo e Movimento

Dimensões Físicas e Unidades

- As leis fundamentais que governam os movimentos nos oceanos satisfazem ao princípio da homogeneidade dimensional.
- Todos os termos em equações que expressam as leis físicas têm de ter a mesma dimensão.
- Essas dimensões podem ser expressas em termos múltiplos e razões de três propriedades dimensionalmente independentes da Oc. Dinâmica:
comprimento (L), tempo (T) e massa (M).
- A análise de escalas permite a estimativa de cada termo que compõem as equações hidrodinâmicas, que são equações diferenciais parciais sem soluções gerais conhecidas. E, eliminando os termos pequenos nos balanços dinâmicos, conseguimos simplificá-las!

Espectro de Energia no Oceano



Escalas de Tempo e Movimento

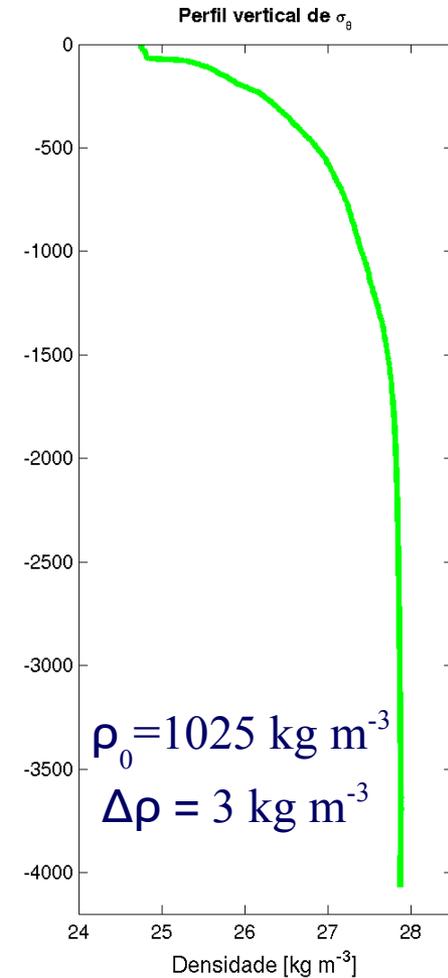
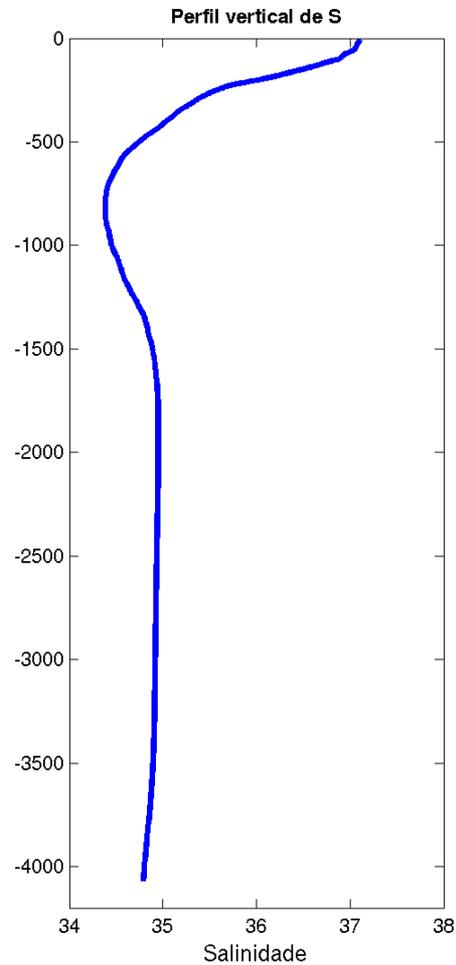
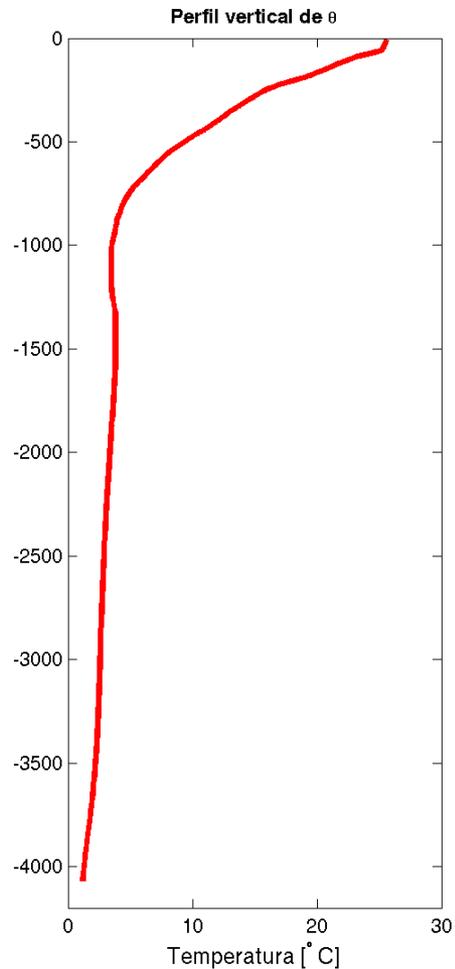
- Como no oceano é mais “fácil” estimar uma escala de velocidade que de tempo, as escalas-chave são geralmente **L**, **U** e **M**.
- A escala de tempo pode ser medida ou estimada a partir da definição de velocidade:

$$T = L U^{-1},$$

a chamada **escala advectiva do tempo**.

- Outras três escalas importantes são:
- **Escala da profundidade do movimento H**, visto que existe forte anisotropia entre as escalas horizontais e verticais de movimento no oceano.
- Obviamente por se tratar de um fluido, é apropriado representarmos a massa normalizada pelo volume da parcela de fluido oceânico, ou seja, pela densidade ρ .
- Mas, por ser a água do mar um fluido quase-incompressível, é usual utilizarmos duas escalas de densidade:
- **Escala da densidade média ρ_0** , e
- **Escala da variação de densidade $\Delta\rho$** .

Perfis Verticais – 23,25° S



Escalas de Movimento

<i>Fenômeno</i>	<i>L</i>	<i>U</i>	<i>T</i>
Ondas Internas	1-20 km	0,05-0,5 m s ⁻¹	minutos a horas
Ressurgência Costeira	1-10 km	0,1-1,0 m s ⁻¹	alguns dias
Vórtices	1-200 km	0,1-1,0 m s ⁻¹	dias-semanas
Correntes de Contorno	50-200 km	0,5 –2,0 m s ⁻¹	semanas-meses
Giros Oceânicos	milhares de km	0,01-0,1 m s ⁻¹	anos-décadas

Adaptado de: **Cushman-Roisin (1996)**

Valores Numéricos das Escalas do Oceano

<i>Escalas</i>	<i>L</i>	<i>U</i>	<i>T</i>
Pequena	<1 km	1 m s ⁻¹	até 10 ³ s
Submeso	1-10 km	1 m s ⁻¹	10 ³ -10 ⁴ s
Meso	100 km	0,1 m s ⁻¹	10 ⁶ s
Grande	1000 km	0,01 m s ⁻¹	10 ⁸ s

$$H=10^3 \text{ m}, \rho_0= 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \Delta\rho= 1 \text{ kg m}^{-3}$$

A Importância da Geometria do Movimento

Numa banheira:

H_B = profundidade da banheira $\sim 0,5$ m

L_B = largura ou comprimento da banheira $\sim 1,5$ m

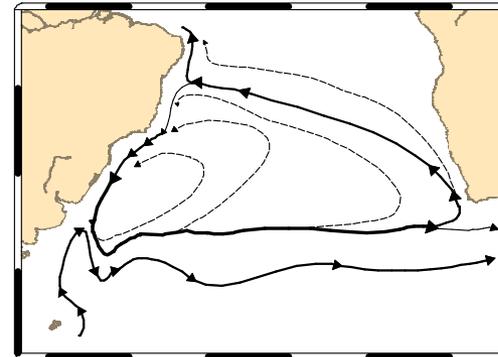
$$\delta_B = H_B / L_B \sim 0,33$$

No Giro Subtropical do Atlântico Sul:

H = profundidade média (3000 m)

L = dimensão horizontal (3000 km ou 3×10^6 m)

$$\delta = H/L \sim 10^{-3}$$



Se L fosse do tamanho de L_B , $H = 1.5$ mm!

O modelo para o oceano seria uma folha de papel, e não uma banheira!

Outra razão Importante:

$$\epsilon = H/a \sim 4,7 \times 10^{-4}$$

onde $a = 6400$ km é o raio médio da terra

A Importância da Geometria

O Número adimensional definido como:

$$\delta = H/L$$

é conhecido na DFG como “**razão de aspecto**”.

Relaciona-se com a **aproximação hidrostática** para os movimentos oceânicos, e portanto, condiciona o tamanho da aceleração vertical e da própria velocidade vertical cuja escala **W** será estudada mais à frente na disciplina

A Importância da Geometria

Podemos assim estabelecer que:

$\delta \gg 1$, a geometria não restringe movimentos verticais (águas profundas)

$\delta \sim 1$, a geometria apresenta restrições aos movimentos verticais

$\delta \ll 1$, a geometria restringe fortemente os movimentos verticais (águas rasas)

[O último caso se refere aos movimentos hidrostáticos]

A Importância da Rotação

A rotação da Terra e o efeito de Coriolis

- O período de rotação do planeta é $T_e \sim 24 \text{ h} \sim 86.400 \text{ s}$.
- A frequência de rotação ou velocidade angular da Terra é definida como

$$\Omega = 2\pi/T_e$$

- O valor numérico de Ω é $7,29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.
- A rotação da Terra em torno do seu eixo conduz ao chamado “efeito de Coriolis”
- No hemisfério Norte, objetos em movimento tendem a ser defletidos para a direita da direção de sua trajetória. No hemisfério Sul, é para a esquerda.
- O efeito é mais forte nos pólos, e decai na direção do equador para zero.
- O chamado **parâmetro de Coriolis** f se relaciona com Ω por:

$$f = 2\Omega \sin\theta$$

A Importância da Rotação

O Número de Rossby (Ro)

- É um dos números adimensionais mais importantes da DFG.
- Em sua versão “local”, pode ser entendido como a razão entre o período de rotação da Terra e a escala de tempo do movimento de interesse:

$$Ro_T = T_e / T \approx (\Omega T)^{-1} \\ \approx (f T)^{-1}$$

- Mas, como dissemos antes, é mais fácil observacionalmente medirmos a velocidade do que o período de movimentos, principalmente se forem muito longos. Assim, usando a escala advectiva do tempo obtemos:

$$Ro = U (f L)^{-1}$$

A Importância da Rotação

Podemos assim estabelecer que:

$Ro \gg 1$, a rotação não influencia nos movimentos. O efeito de Coriolis pode ser desconsiderado

$Ro \sim 1$, a rotação já influencia marcadamente os movimentos. O efeito de Coriolis precisa ser considerado no balanço.

$Ro \ll 1$, a rotação da Terra domina o escoamento e as acelerações devido são predominantemente ao efeito de Coriolis.

A Importância da Estratificação

- O oceano tipicamente consiste de camadas de fluido de diferentes densidades, que sob a ação da gravidade tendem a se arranjar em pilhas verticais correspondentes a um estado de energia potencial mínima.
- O movimento dos fluidos tendem a perturbar esse estado de equilíbrio soerguendo fluido mais denso e afundando fluido mais leve.
- Por conservação de energia, aumento de energia potencial tem de ocorrer às custas de decréscimos de energia cinética.
- Logo, **a importância da estratificação deve ser avaliada comparando energia cinética e potencial**
- Mas, antes disso, recordemos e exploremos como medimos a estratificação no oceano...

A Equação de Estado da Água do Mar

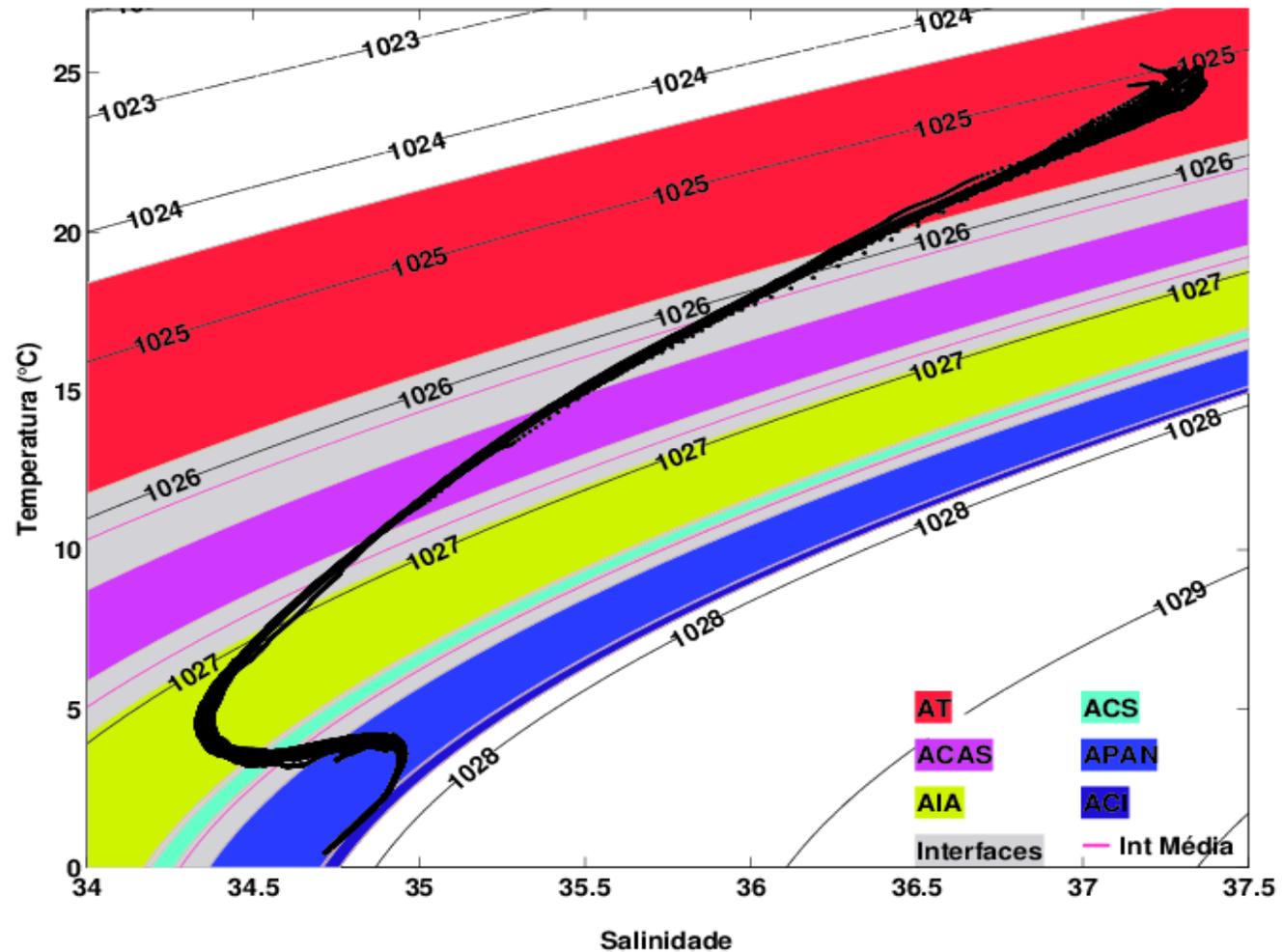
- **Forma genérica:**

$$\rho = \rho(S, T, p)$$

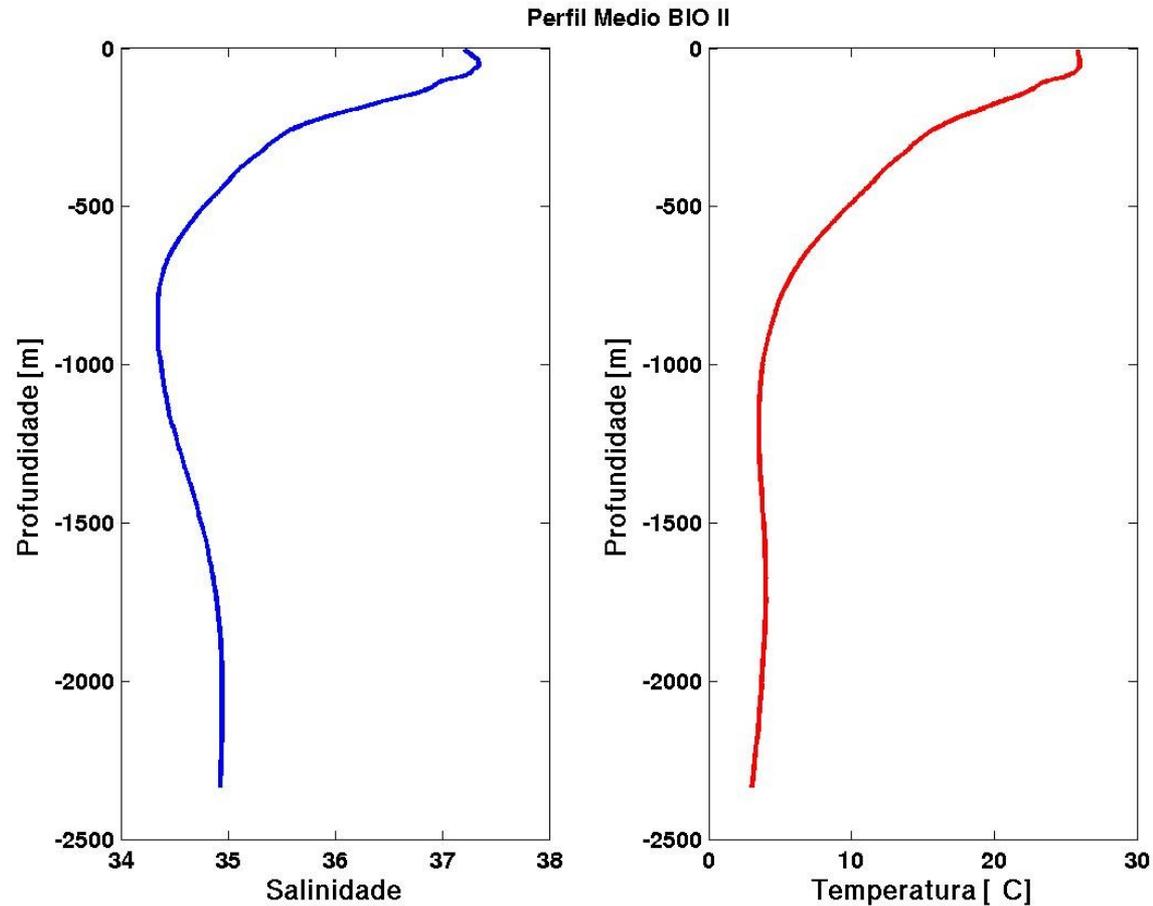
- **Forma diferencial:**

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = a dT + b dS + k dp$$
$$a = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{S,p}; \quad b = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{T,p}; \quad k = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S}$$

O diagrama de estado



Variações Verticais de T e S



Temperatura Potencial

- É a temperatura que um elemento de volume assume se o mesmo for elevado, sem mistura, de um nível isobárico p qualquer até um nível de referência p_0 sem troca de calor e de sal com o meio ambiente.

$$\theta = T - (\Delta T)_A$$

$$(\Delta T)_A = T - \int_p^{p_0} \Gamma dp$$

$$\Gamma = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)$$

Parâmetros Convencionais Associados à Densidade

$$\rho_0 = \rho(T, S, 0)$$

$$\rho_\theta = \rho(\theta, S, p)$$

$$\sigma = \rho - 1000$$

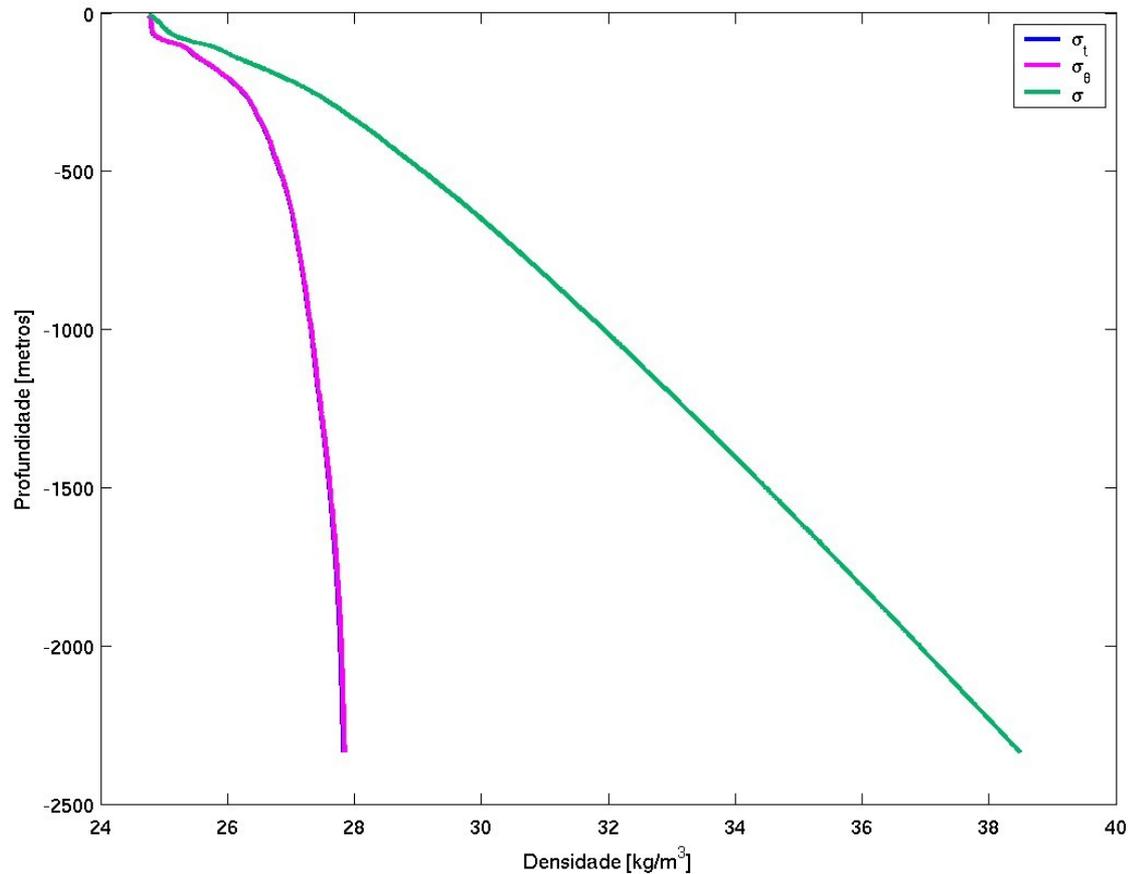
$$\sigma_\theta = \rho(\theta, S, p) - 1000$$

$$\sigma_0 = \rho_0 - 1000$$

$$\sigma_2 = \rho(T, S, 2000) - 1000$$

$$\sigma_4 = \rho(T, S, 4000) - 1000$$

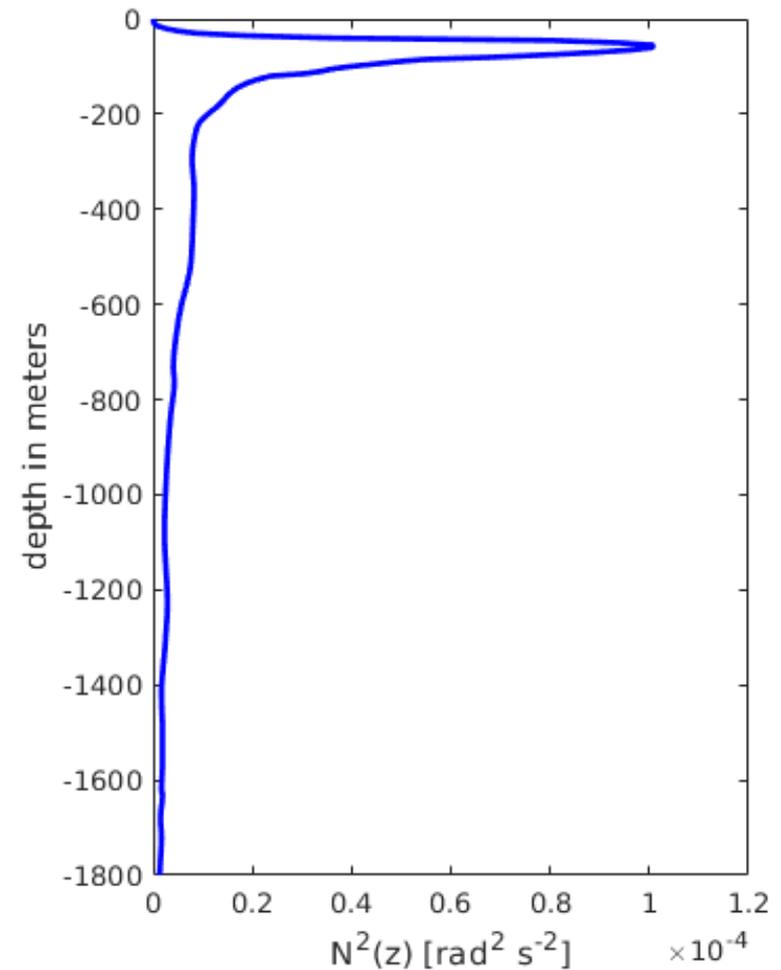
Varição Vertical de Densidade: Estratificação



Cruzeiro DEPROAS V – Setembro 2003

A Frequência de Estratificação

$$\begin{aligned} N^2(z) &= -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g^2}{c_s^2} \\ &= -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_\theta}{\partial z} \end{aligned}$$



Volume Específico: o Recíproco da Densidade

$$\alpha = \rho^{-1}$$

$$\Delta_{S,T} = \alpha(S, T, 0) - \alpha(35, 0, 0)$$

$$\delta_{\alpha} = \alpha(S, T, p) - \alpha(35, 0, p)$$

O que a TEOS-10 nos traz de novo?

- Há 50 anos, a EOS-80 trouxe maior precisão ao cálculo da salinidade, temperatura potencial, da densidade potencial e as análises subsequentes.
- Enquanto os cálculos teóricos são pouco alterados, os cálculos práticos vem sendo revisados periodicamente.
- Foi isso que aconteceu com a nova equação de estado da água do mar lançada pela COI em 2010. A **temperatura potencial** vem sendo substituída pela **temperatura conservativa**, a **salinidade prática** pelo **salinidade absoluta**, a **densidade potencial** pela **densidade neutra**.
- Mas o que significam essas novas grandezas físicas?

Novos conceitos da TEOS-10

- Salinidade Absoluta (S_A)
- Temperatura Conservativa (Θ)
- Densidade Neutra (γ^n)
- O conceito de densidade potencial (ρ_θ) ou sua anomalia (σ_θ) permanecem inalterados, portanto, as definições (ρ_θ) e (σ_θ) são equivalentes.

Salinidade Absoluta

A **salinidade absoluta** (S_A) expressa a massa (em g) de materiais dissolvidos em 1 kg de água do mar. Portanto, a S_A é medida em g/kg ou ‰.

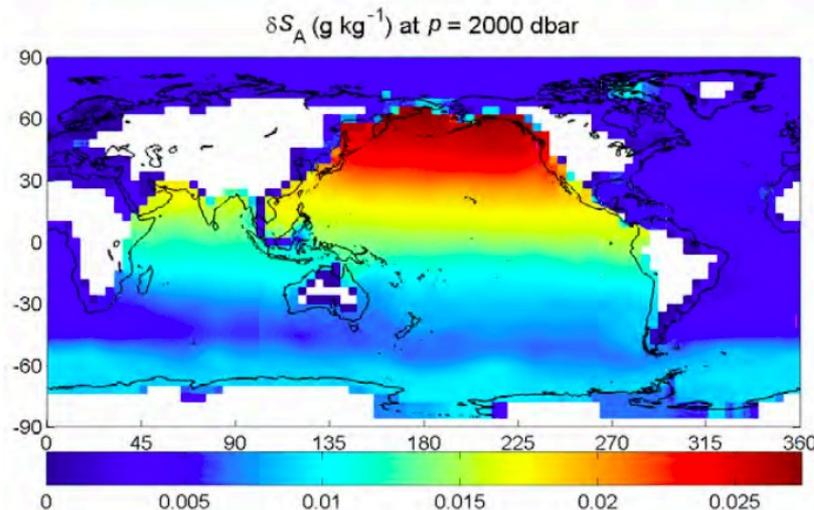
A **salinidade de referência** (S_R), que consiste no que a COI (vide Millero et al., 2011) considera a melhor estimativa da S_A e se relaciona com a salinidade prática (S_p) através da relação:

$$S_R = ups S_p; \quad ups = (35,16505/35)$$

Salinidade Absoluta

A **salinidade absoluta** (S_A) para uma determinada localidade é calculada a partir da “correção local” da S_R por uma anomalia de salinidade absoluta (δS_A), já mapeado mundialmente por McDougall et al. (2012). Assim, o cálculo se torna simplesmente

$$S_A = S_R + \delta S_A = S_A(S_P, x, y, p)$$



Fonte: McDougall et al. (2012)

Temperatura Conservativa

- A temperatura conservativa (Θ) é recomendada pela COI e calculada pelo pacote da TEOS-10 como substituta da temperatura potencial. Termodinamicamente representa em até 2 ordens de magnitude melhor o conteúdo de calor da amostra de água do mar.
- Fisicamente, é calculada a partir da **entalpia potencial**, uma nova forma de entalpia também introduzida pela TEOS-10.

Densidade Neutra (σ^n)

(Jackett & McDougall, 1997)

- Desenvolvida recentemente para estudo de massas de água;
- Adotada como substituta da densidade potencial em massas de água no oceano profundo pela **TEOS-10**;
- Seu cálculo depende tanto da **hidrografia** (T,S,p) quanto da **localização geográfica** (lat, lon);
- Uma superfície isopicnal neutra é aquela em que uma parcela de fluido permanece em situação de estabilidade estática neutra ao longo de seu movimento.
- Seu cálculo é trabalhoso, mas já existem códigos escritos em matlab+fortran capaz de realizá-lo com boa demanda computacional.

Densidade Neutra (γ^n)

massas de água do Atlântico Sul

(Valla et al., 2018)

<i>Neutral Density (γ, kg/m³) Range Assign for Each Water Mass Layer^a</i>				
Water mass	γ range	θ (°C)	S	O ₂ (μ mol/kg)
AT	< 26.35	19.75	36.09	225
ACAS	26.35–27.10	12.10	35.10	211
AIA	27.10–27.60	4.05	34.245	237
ACS	27.60–27.90	2.90	34.58	188
APAN	27.90–28.10	2.95	34.91	241
ACI	28.10–28.27	0.72	34.72	215
AFA	> 28.27	–0.10	34.67	226

Retornando à Importância da Estratificação

- Sejam e_K e Δe_P as energia cinética e variação de energia potencial, respectivamente, expressas por unidade de volume e dadas por:

$$e_K = \rho_0 U^2 ; \quad \Delta e_P = \Delta \rho gH.$$

- E consideremos agora um número adimensional formado pela razão entre as duas:

$$Fr^2 = (\rho_0 U^2) / (\Delta \rho gH),$$

- e que é conhecido como o quadrado do número de Froude interno.

O (quadrado do) número de Froude interno

Podemos assim estabelecer que:

$Fr^2 \gg 1$, mudanças de energia potencial ocorrem às custas de pouca energia cinética; o efeito da estratificação pode ser ignorado.

$Fr^2 \sim 1$, um acréscimo de energia potencial consome significativamente energia cinética; a estratificação causa modificação substancial no escoamento.

$Fr^2 \ll 1$, existe insuficiente energia cinética para perturbar a estratificação, e esta limita severamente o escoamento.

O Raio de deformação de Rossby interno

- Um dos casos mais interessantes e importantes da DFG é quando os efeitos de rotação e estratificação são simultaneamente relevantes à dinâmica do escoamento oceânico, mas nenhum dos dois é dominante.
- Matematicamente, podemos escrever essa condição como:

$$Ro \sim \mathcal{O}(1); Fr^2 \sim \mathcal{O}(1)$$

- E podemos nos perguntar qual seria a escala de comprimento a partir da qual tanto a estratificação e a rotação não podem ser desconsideradas no estudo da DFG...
- Para tanto, obtenhamos a escala horizontal de comprimento Rd_i a partir da primeira condição acima:

$$Rd_i = U f^{-1}$$

- E usemos a segunda condição para encontrar a escala de velocidade:

$$U = (\Delta\rho/\rho_0 gH)^{1/2}$$

O Raio de deformação de Rossby interno

- Combinando as duas expressões, chegamos a uma definição dessa escala de comprimento independente da escala da velocidade horizontal e que só depende da latitude e do empuxo característico (ou da estratificação):

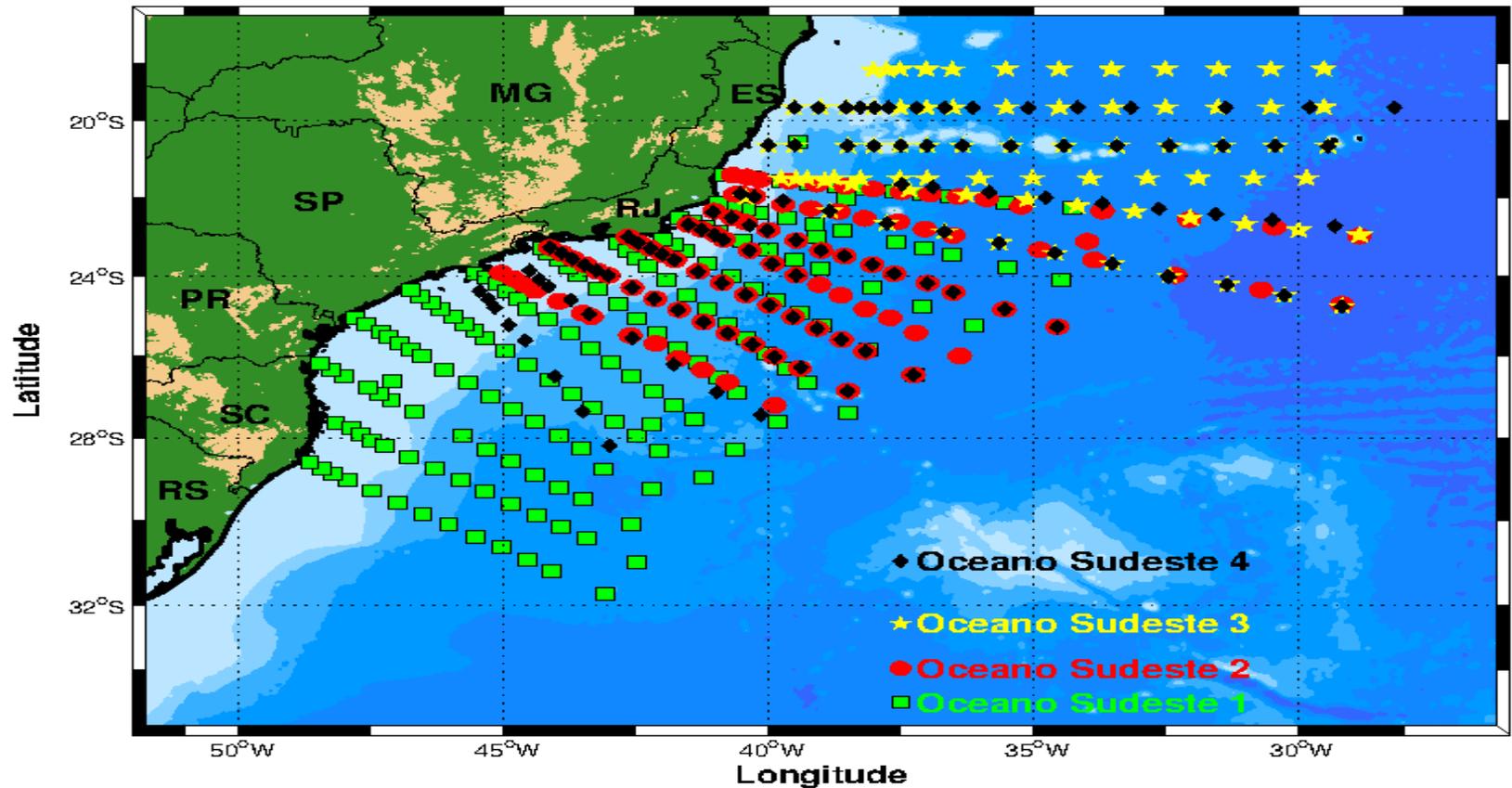
$$Rd_i = (\Delta\rho/\rho_o gH)^{1/2} / f$$

- **Significado físico:**

É a distância horizontal na qual a tendência gravitacional de manter as isopicnais planas é equilibrada pelo o efeito de rotação da Terra, que as impedem de retornar ao estado de energia potencial mínima.

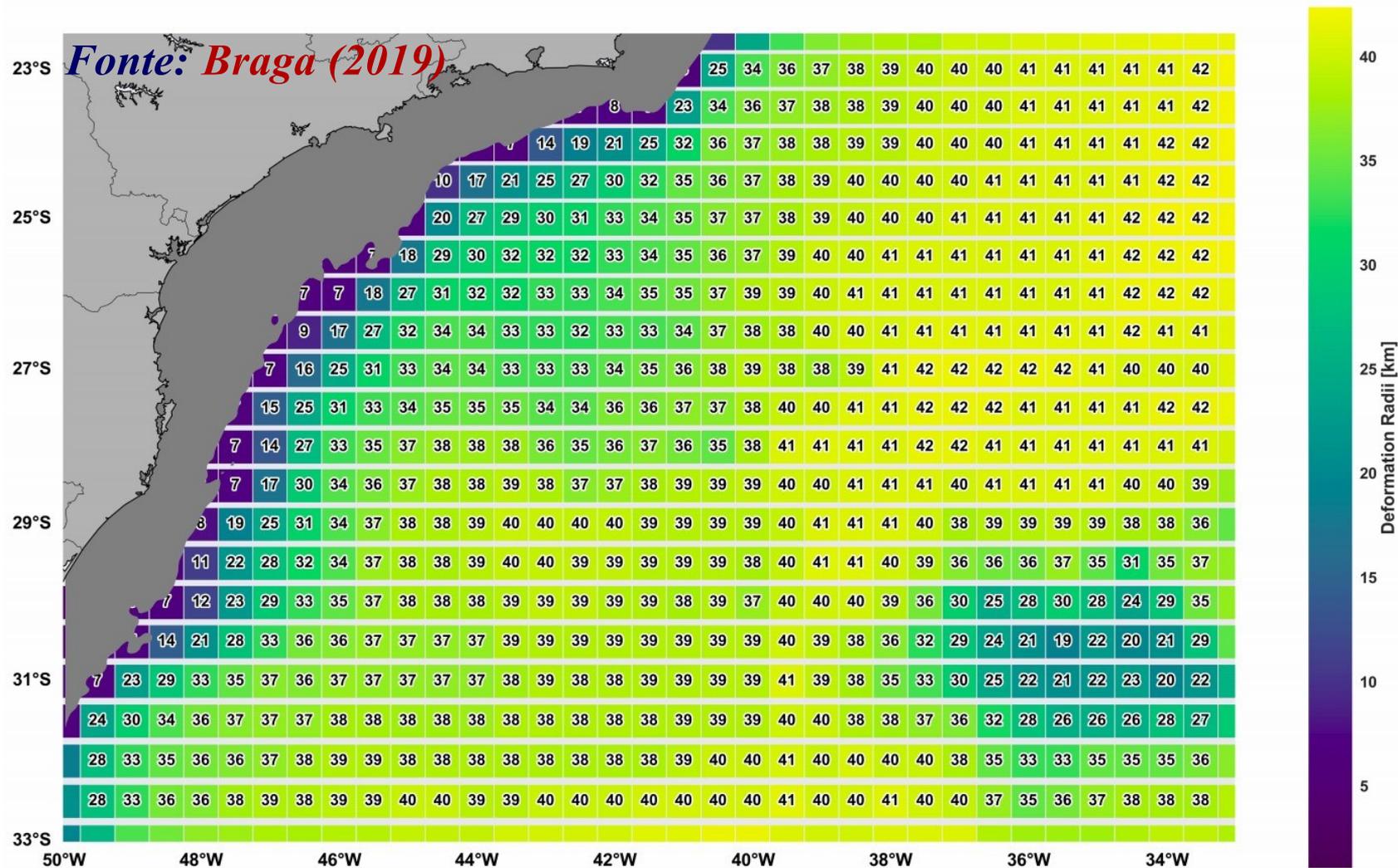
- Assim, em **pequena escala**, $L \ll Rd_i$, em **submesoescala**, $L \sim (0,1-1)Rd_i$; em **mesoescala** $L \geq Rd_i$ e, em **grande escala**, $L \gg Rd_i$.

Exemplo importante de aplicação



Em cruzeiros quase-sinóticos, o espaçamento entre as estações deve ser no **máximo** de um raio de deformação interno.

O Raio de Deformação Interno em nosso quintal oceânico



Existe um Raio de Deformação Externo?

Claro que sim!

- Consideremos agora que não estamos olhando para as variações de densidade no interior da coluna de água, mas sim examinando-as na interface ar-mar. Assim,

$$\Delta\rho = \rho_0 - \rho_{\text{ar}} \approx \rho_0$$

- Assim, a expressão do raio de deformação se torna

$$Rd_e = (gH)^{1/2} / f.$$

- Notem que o raio de deformação externo é muito (muito mesmo) maior que o raio de deformação interno. E, por conseguinte, não é tão relevante em oceanografia dinâmica.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



Sistemas de Referência

Sistemas de Referência

- Antes de iniciarmos o estudo dos fenômenos oceânicos, cabe-nos estabelecer sistemas de orientação sobre os quais nossas medidas serão realizadas.
- Como vimos na primeira aula, a DFG se dedica à investigação de fenômenos físicos intrinsecamente ligados ao **planeta Terra**.
- Logo, o sistema natural de referência é aquele esférico, que acompanha a orientação sobre a superfície de nosso planeta.
- Mas, **será que para todas as escalas de movimento é necessário levarmos em consideração a superfície da esfera terrestre?**
- Esse é o assunto que iremos discutir a seguir.

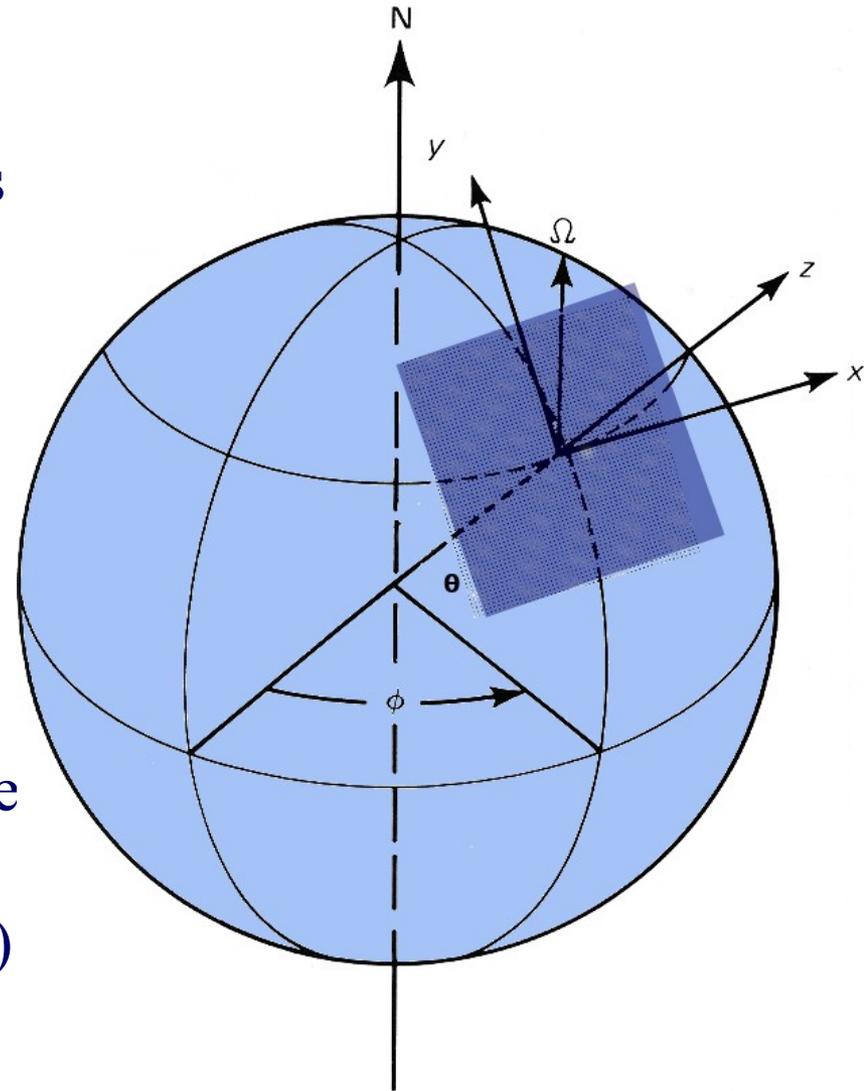
Coordenadas Esféricas

- Neste referencial, as coordenadas um ponto são identificadas por

$$(\phi, \theta, r)$$

- Φ é a longitude (medida na direção leste-oeste)
- θ é a latitude (medida na direção norte-sul)
- r é distância do ponto de interesse ao centro da Terra.
- Os versores (ou vetores unitários) correspondentes são:

$$(\vec{m}, \vec{l}, \vec{n})$$



Coordenadas Esféricas

- Como exemplo de aplicação das coord. esféricas, consideremos o gradiente de uma propriedade escalar qualquer Ψ , que é dado por

$$\nabla\psi = \frac{1}{r\cos\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \vec{m} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \vec{l} + \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{n}.$$

Notem que existem coeficientes não constantes associado às derivadas dos versores.

- Mas, a maioria dos problemas em DFG em oceanografia podem ser investigados utilizando um plano tangente à superfície da esfera na latitude central $\theta = \theta_0$: **o plano β** .

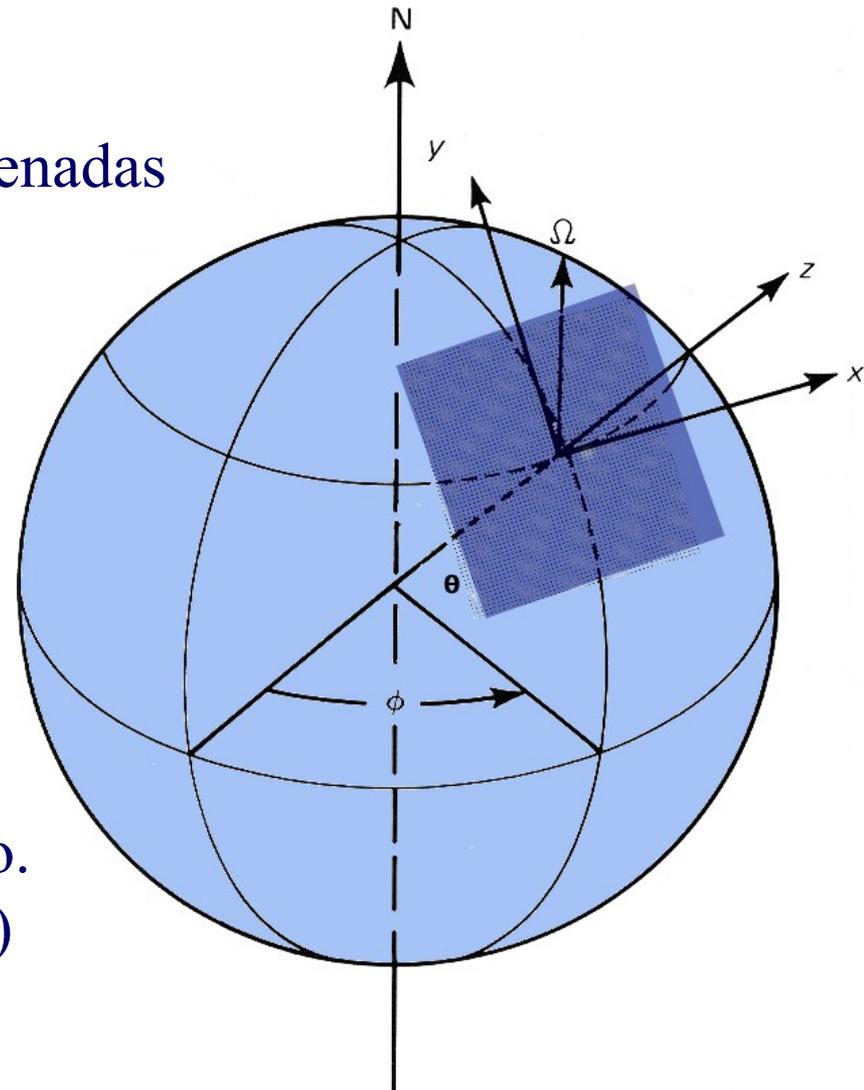
O plano β

- Neste novo referencial, as coordenadas de um ponto são identificadas por

$$(x, y, z)$$

- x é a distância zonal (medida na direção leste-oeste)
- y é a distância meridional (medida na direção norte-sul)
- z é distância vertical do ponto de interesse até a superfície do oceano.
- Os versores (ou vetores unitários) correspondentes são:

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$



O plano β

- Formalmente, a transformação de coordenadas esféricas as do plano tangente local envolve expansões trigonométricas usando séries tipo Taylor e considerações sobre as escalas de movimento L e H . Como base nestas, estabelecemos:

$$x = (a \cos \theta_0) (\phi - \phi_0)$$

$$y = a (\theta - \theta_0)$$

$$z = r - a.$$

onde $a=6370 \text{ km}$ é o raio médio da Terra, $\phi_0 = 0^\circ$ é a longitude do meridiano de Greenwich, e θ_0 é a latitude central (ou de tangência do plano)

O plano β

- Para a transformação de coordenadas, usamos a regra da cadeia. Exemplificando com a transformação de Φ para x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (a \cos \theta_0 \phi) \right] \frac{\partial}{\partial x} \\ &= a \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a \cos \theta_0} \frac{\partial}{\partial \phi} .$$

O plano β

- Analogamente para y e z , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}$$

- Assim, com essas correspondências, reescrevemos o gradiente de Ψ como

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k}.$$

Condições para o plano β

- Obviamente, há limites para o uso deste plano. E tais limites são dados, como previamente dito, por argumentos de análise de escalas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H}{a} \ll 1 \\ \left(\frac{L}{a}\right)^2 \ll 1 \\ \left(\frac{L}{a} \tan \theta_0\right) \ll 1. \end{array} \right.$$

Mas por que “plano β ”?

- A decomposição do vetor velocidade angular nos eixos do sistema cartesiano local é dada por:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$$

onde:

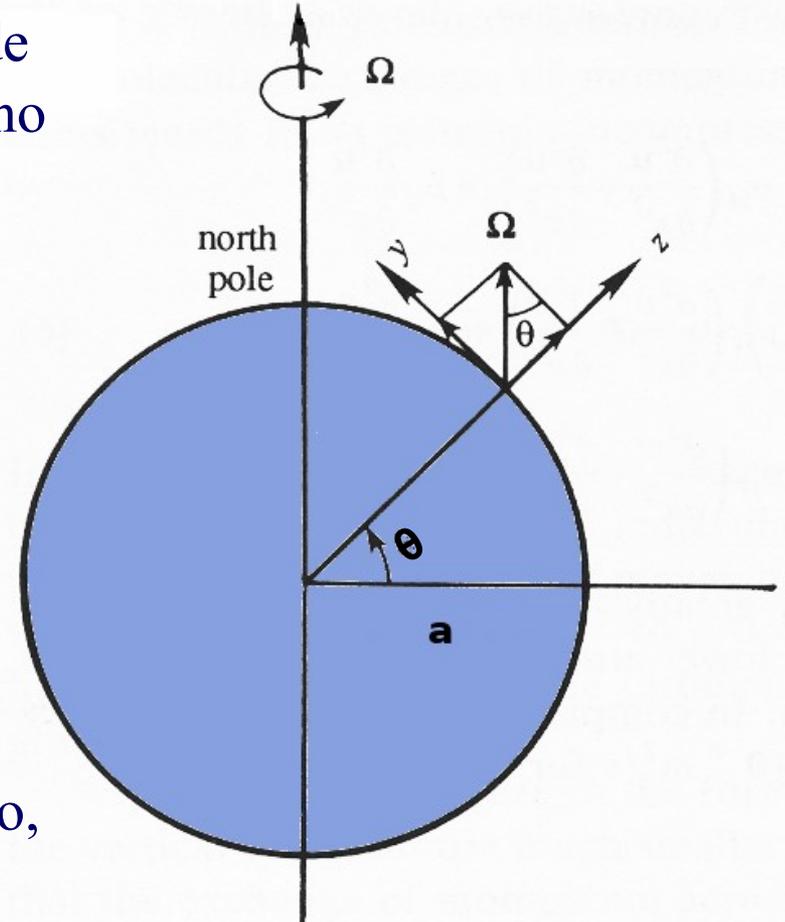
$$\Omega_x = 0$$

$$\Omega_y = \Omega \cos\theta$$

$$\Omega_z = \Omega \sin\theta$$

e considerando a definição de rotação,

$$\vec{\Omega} \cong \Omega \sin\theta \vec{k}$$



Mas por que “plano β ”?

- Rossby (1939) ponderou como fazer a velocidade angular variar no plano tangente local. Sua solução foi expandir a função seno da latitude em série de Taylor **em torno da latitude central θ_0** e colecionar a aproximação linear desta.
- Seu argumento de escala foi que, pela definição de y , temos que

$$\Delta\theta = (\theta - \theta_0) = \frac{y}{a} .$$

- Como $\left(\frac{L}{a}\right)^2 \ll 1 \Leftrightarrow \left(\frac{L}{a}\right) < 1,$

a diferença entre θ e θ_0 é pequena ao longo da escala do movimento no plano, ou seja, **o argumento $\Delta\theta$ é pequeno**, justificando a expansão.

Mas por que “plano β ”?

- Como sabemos a série de Taylor é dada por

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n} \frac{(\theta - \theta_0)^n}{n!}$$

- Considerando a série expandida em torno da latitude central,

$$f(\theta) = f(\theta_0) \frac{(\theta - \theta_0)^0}{0!} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{(\theta - \theta_0)}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!} + \dots$$

e aplicando-a à função seno, obtemos

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \text{sen } \theta_0 + \text{cos } \theta_0 (\theta - \theta_0) - \frac{\text{sen } \theta_0}{2!} (\theta - \theta_0)^2 + \dots \\ \text{sen } \theta &= \text{sen } \theta_0 + \text{cos } \theta_0 \frac{y}{a} - \frac{\text{sen } \theta_0}{2} \frac{y^2}{a^2} + \dots \end{aligned}$$

Mas por que “plano β ”?

- Vamos agora estabelecer a relação entre a **velocidade angular** do plano tangente local e o **parâmetro de Coriolis**.
- Para tanto, usemos a expressão da velocidade de uma parcela de fluido girar num círculo de latitude qualquer dada por

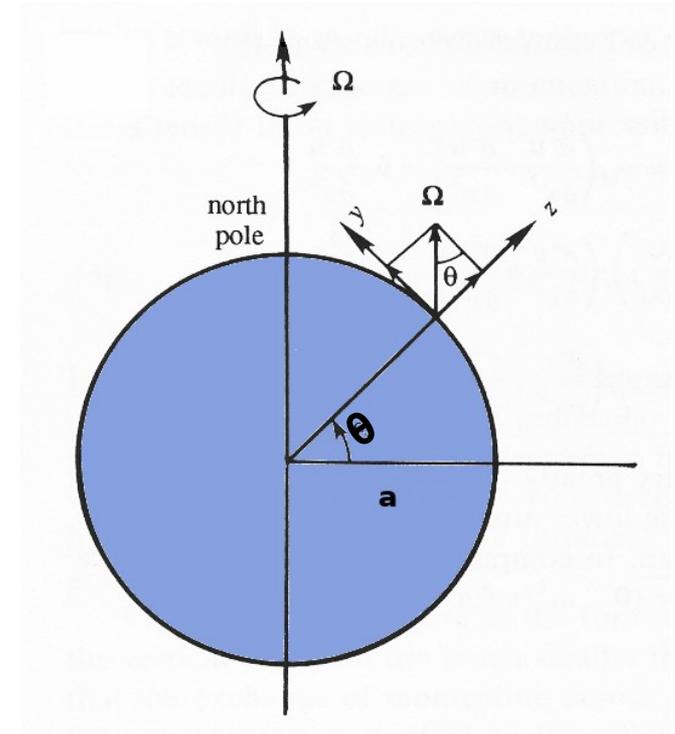
onde

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\Omega} \times \vec{x} \\ &= (\Omega \operatorname{sen} \theta \vec{k}) \times \vec{x}, \\ \text{e } \vec{x} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.\end{aligned}$$

- Apliquemos agora a definição de vorticidade

$$\begin{aligned}\vec{\zeta} &= \nabla \times (\Omega \operatorname{sen} \theta \vec{k} \times \vec{x}) \\ &= 2\Omega \operatorname{sen} \theta \vec{k} \\ &= f \vec{k},\end{aligned}$$

que corresponde à vorticidade de um fluido em rotação de corpo sólido e é igual ao **dobro** de sua velocidade angular.



Mas por que “plano β ”?

- Finalmente, expressamos o parâmetro de Coriolis por sua aproximação linear via série de Taylor:

$$f = \underbrace{2\Omega \sin\theta_0}_{f_0} + \underbrace{\frac{2\Omega \cos\theta_0}{a}}_{\beta} y$$

- O parâmetro de Coriolis representa também a **vorticidade planetária**.
- β é chamado de parâmetro de Rossby tem $O(10^{-11}) \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ e representa o **gradiente (meridional) da vorticidade planetária**.
- A razão entre os dois termos que compõem f é chamado número planetário, dado por

$$\hat{\beta} = \frac{\beta L}{f_0},$$

com valores de $O(10^{-2})$ em mesoescala e $O(10^{-1})$ em grande escala.

O plano f

- Ponderemos agora sobre dimensões de um plano que coincida aproximadamente com o superfície da Terra. Seriam movimentos de menor escala que aqueles do plano β .
- Para esses movimentos, podemos aproximar o parâmetro de Coriolis por seu termo médio apenas, ou seja,

$$f = f_0 = 2\Omega \operatorname{sen}\theta_0 .$$

- Esse é o chamado plano f , onde uma hipótese de escala mais restritiva (relativamente às do plano β) é imposta pelo número planetário pequeno:

$$\frac{L}{a} \operatorname{cotg}\theta_0 \ll 1 .$$

Especificações de Estudo de Dinâmica de Fluidos:

Lagrangiana e Euleriana

Especificação Lagrangiana

- A especificação Lagrangiana consiste em seguir a história de parcelas individualmente.
- Existem duas variáveis independentes: o tempo e a identificação da parcela de fluido a ser seguida.
- A identificação da parcela pode ser convenientemente escolhida como a posição desta no instante inicial $t=0$. Assim, qualquer propriedade do escoamento é expressa como

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{x}_0, t).$$

- Em particular, a posição desta parcela é descrita como

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t).$$

- Nessa especificação, velocidade e aceleração são simplesmente derivadas temporais:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}.$$

Especificação Euleriana

- Na especificação Euleriana, concentramo-nos em o que acontece ao fluido num determinado ponto do espaço físico, ou seja,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{x}, t) = \mathcal{P}(x, y, z, t).$$

- Logo, espaço e tempo são variáveis independentes, embora resguardem suas relações Lagrangianas através das relações de velocidade:

$$d\vec{x} = \vec{v} dt \left\{ \begin{array}{l} dx = u dt \\ dy = v dt \\ dz = w dt \end{array} \right.$$

- A derivada temporal não representa mais a taxa de variação total de uma propriedade qualquer do fluido. Outros termos são necessários para “simular” a especificação Lagrangiana na Euleriana.

Especificação Euleriana

- Para arbitrários e independentes incrementos de espaço e tempo, o diferencial da propriedade P é dado por

$$d\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} dz .$$

- Dividindo a expressão acima por dt e utilizando as definições Lagrangianas de velocidade, obtemos

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z}$$

- Note que o membro direito da equação acima é a representação da variação Lagrangiana na especificação Euleriana.

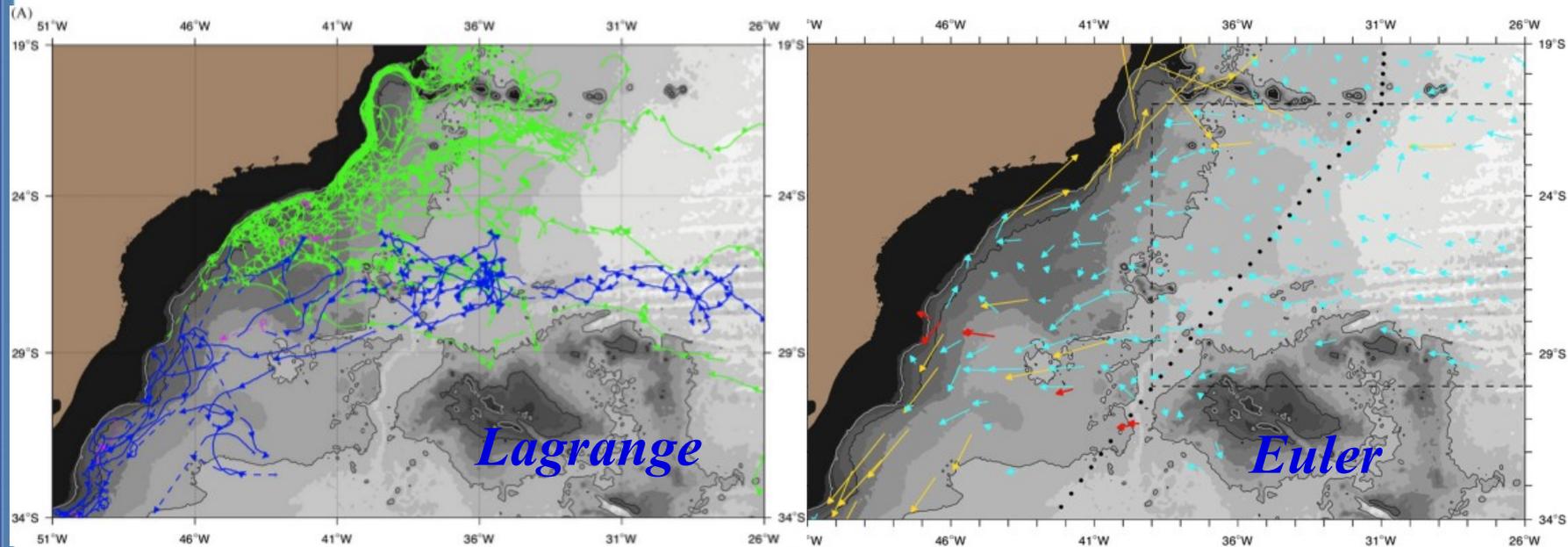
Especificação Euleriana

- Assim,

$$\underbrace{\frac{d\mathcal{P}}{dt}}_{Lagrange} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \mathcal{P}}_{Euler \left(\frac{D\mathcal{P}}{Dt} \right)}$$

- A expressão para a taxa de variação total na especificação Euleriana é conhecida justamente como derivada material ou Lagrangiana.
- O primeiro termo no lado direito se refere à taxa de variação local.
- O segundo termo do lado direito representa as mudanças na propriedade \mathbf{P} como resultado da advecção da parcela de fluido de uma localidade para outra onde o valor de \mathbf{P} é diferente.

Exemplo oceanográfico: Lagrange vs. Euler



Fonte: Legeais et al. (2012)

Equações de Conservação no Oceano

O que são equações de conservação?

- “Equação de conservação” rigorosamente significa que a taxa de variação total de uma propriedade P é nula. Se existirem fontes e sorvedouros que alterem P , a taxa de variação será diferente de zero, ou seja,

$$\frac{DP}{Dt} = \mathcal{F}_P,$$

$\mathcal{F}_P \equiv$ fontes e/ou sorvedouros.

- **Exemplos:** massa, volume, densidade, , calor, temperatura, sal, momentum linear, momentum angular, e energia mecânica.

Conservação da Massa

- Fazemos uso da chamada “**derivação lagrangiana ou material**” da equação da conservação da massa, apresentada originalmente por Kundu (1990) devido à sua simplicidade e elegância.
- Para tanto, consideremos um pequeno volume de fluido retangular com dimensões $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ e que possui massa Δm e densidade ρ .
- Se massa é conservada no elemento de volume, temos que

ou,

$$\frac{D}{Dt} \Delta m = 0$$

$$\frac{D}{Dt} (\rho \Delta V) = 0.$$

Conservação da Massa

- Utilizando a regra de derivação do produto e isolando os termos com densidade no lado esquerdo e o com volume no lado direito, obtemos

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\text{taxa de variação fracional de densidade}} = \underbrace{-\frac{1}{\Delta V} \frac{D(\Delta V)}{Dt}}_{\text{taxa de variação fracional de volume}}$$

- Agora expandemos o membro esquerdo da equação em termos de $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ e usamos novamente a regra de derivação do produto, que é triplo desta vez.



Conservação da Massa

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta V} \frac{D}{Dt}(\Delta V) &= \frac{1}{(\Delta x \Delta y \Delta z)} \frac{D}{Dt}(\Delta x \Delta y \Delta z) \\ &= \frac{1}{(\Delta V)} \left[\Delta y \Delta z \underbrace{\frac{D}{Dt}(\Delta x)}_{\Delta u} + \Delta x \Delta z \underbrace{\frac{D}{Dt}(\Delta y)}_{\Delta v} + \Delta x \Delta y \underbrace{\frac{D}{Dt}(\Delta z)}_{\Delta w} \right] \\ &= \frac{1}{(\Delta x \Delta y \Delta z)} [\Delta y \Delta z (\Delta u) + \Delta x \Delta z (\Delta v) + \Delta x \Delta y (\Delta w)] \\ &= \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\end{aligned}$$

Levando o volume ao limite infinitesimal,

$$\approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Conservação da Massa

- Reescrevendo a equação da conservação da massa com a nova forma da variação fracional do volume, chegamos a

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\mathcal{O}\left(\frac{\Delta\rho U}{\rho_0 L}\right)} = - \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\mathcal{O}\left(\frac{U}{L}\right)}$$

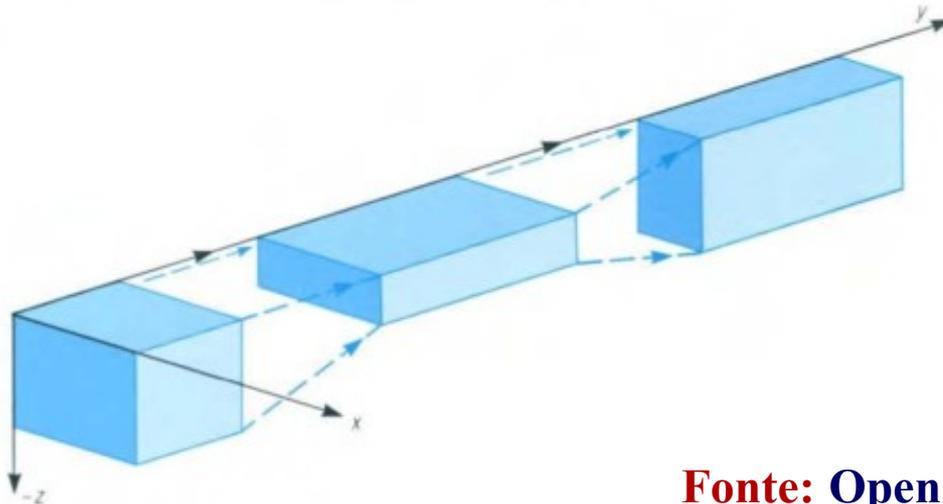
- Como a razão $\Delta\rho/\rho_0 = \mathcal{O}(10^{-3})$, o termo envolvendo a taxa de variação fracional de densidade é 1000 vezes menor do que a de volume.
- Isso é uma consequência da água do mar ser quase-incompressível.
- Com isso, podemos desprezar o termo do lado direito em comparação com o esquerdo.
- A consequência é que **conservação de massa no oceano é de fato conservação de volume!**

A Equação da Continuidade

- A equação da conservação do volume então pode ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

- Esta equação é apelidada de **equação da continuidade** pois a interpretação física é que o volume pode se deformar, mas continua constante ao longo da trajetória da parcela de fluido.



Uma escala para w

- Temos, com a eq. da continuidade, uma lei física que nos permite inferir uma escala para a velocidade vertical.
- Já comentamos o quanto difícil é esta estimativa. A escala a ser apresentada aqui é a primeira, mas nem sempre a mais adequada para a maioria dos fenômenos de meso e grande escala no oceano.
- A escala de w é obtida requerendo que a divergência vertical tenha a mesma ordem de grandeza da horizontal. Isto quer dizer que assumiremos (por hora) que os três termos da continuidade têm a mesma ordem!

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{O\left(\frac{W}{H}\right)} = - \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{O\left(\frac{U}{L}\right)}$$

Assim, a escala é dada por:

$$W = \frac{H}{L} U$$

ou

$$W = \delta U.$$

A Aproximação de Boussinesq

- É aproximação de Boussinesq que está por trás da condição de incompressibilidade.
- A hipótese de escala decorre de

$$\rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$$

$$\bar{\rho} = \mathcal{O}(\rho_0); \quad \rho' = \mathcal{O}(\Delta\rho) .$$

- Caso definamos um parâmetro adimensional pequeno como ϵ , conhecido como **salto de densidade normalizado** ou **parâmetro de Boussinesq**:

$$\epsilon = \mathcal{O} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right) ,$$

$$\epsilon = \mathcal{O}(10^{-3}) .$$

Aproximação de Boussinesq

- Assim, o desmembramento da Eq. da conservação da massa é feito colecionando os termos de ordem ϵ^0 e ordem ϵ^1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon)^0 &\implies \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \mathcal{O}(\epsilon)^1 &\implies \frac{1}{\rho_0} \frac{D\rho}{Dt} = 0. \end{aligned}$$

- O balanço de mais baixa ordem é a **equação da continuidade**. O balanço de ordem mais alta é a **Eq. da conservação de densidade**:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \implies \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Conservação de densidade

- É mais comum escrevermos a advecção da densidade média em termos da frequência de estratificação (ou de Brunt-Väisällä):

ou

$$\frac{D}{Dt}\rho' + w\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\rho' - w\frac{\rho_0}{g}N^2(z) = 0.$$

- Notem que também podemos obter uma escala para a velocidade vertical a partir da conservação da densidade:

$$W = g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\frac{1}{N^2}\frac{U}{L}; \quad N^2 = \frac{g}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{H}$$

$$W = \frac{H}{L}U = \delta U$$

Fontes e Sorvedouros

- Até agora examinemos equações de propriedades que são efetivamente conservadas, isto é, não há termos fonte e/ou sorvedouro.
- Para exemplificar equações de propriedade escalar que apresentem termos de fontes e sorvedouros, examinemos como ficam as **variações de temperatura e salinidade na superfície do oceano**.
- Essas propriedades são conservadas no interior da coluna de água, mas não na camada de mistura.

Conservação de Temperatura

- A Eq. de conservação de temperatura pode ser escrita como

$$\frac{DT}{Dt} = \nabla_H \cdot \mathcal{K}_H \nabla T + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{K}_V \frac{\partial T}{\partial z} + \nabla \cdot \vec{J}_R,$$

- Os termos lado direito são as fontes e sorvedouros de temperatura.
- O primeiro destes é a difusão lateral de temperatura, onde o \mathcal{K}_H é o coeficiente de difusão horizontal.
- O segundo termo é a difusão vertical de temperatura, onde \mathcal{K}_V é o coeficiente de difusão vertical. \mathcal{K}_V é algumas ordens de grandeza menor que \mathcal{K}_H .
- O terceiro termo corresponde ao fluxo de radiação de onda curta penetrando a coluna de água. Abaixo de certa profundidade (ex. abaixo da camada eufótica), este termo pode ser desprezado.

Conservação de Temperatura

- A Eq. de conservação de temperatura necessita obrigatoriamente de condições de contorno por conta das trocas de calor com a atmosfera, o recebimento de ondas curtas pelo sol e a emissão de ondas longas.

- Assim, em $z=0$,

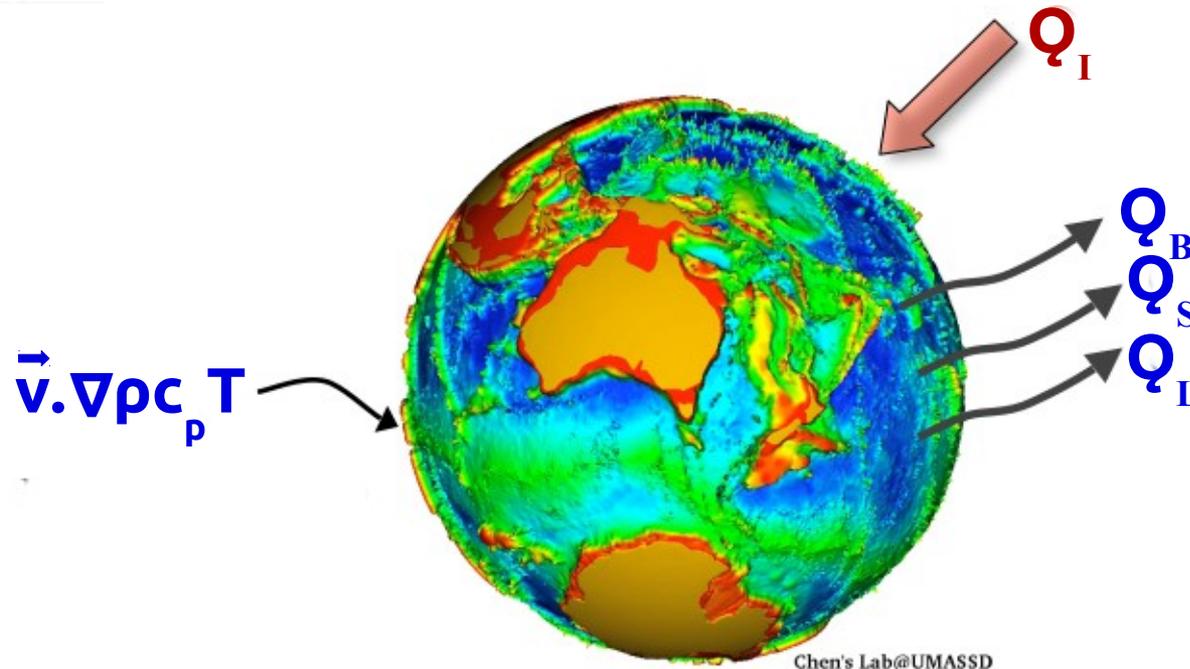
$$\frac{\partial}{\partial z} \kappa_V \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0 c_p} Q.$$

- Nesta expressão, c_p é o calor específico da água do mar à pressão constante e Q é o fluxo de calor total. Este é composto por várias partes:

$$Q = Q_S + Q_L + Q_B - Q_I,$$

- os fluxos de calor sensível Q_S , de calor latente Q_L , de radiação emitida Q_B , e de radiação incidente Q_I .

Balanço de Calor Global: Fontes e Sorvedouros



Os fluxos de calor sensível Q_S , de calor latente Q_L , de radiação emitida Q_B , e de radiação incidente Q_I . A advecção por correntes oceânicas redistribui o calor.

Fluxo de Calor Sensível

O fluxo de calor sensível é estimado por uma das *bulk aerodynamical formulae* da Meteorologia:

$$Q_S = \rho_a c_p [C_S U_{a10} (T_o - T_a)],$$

- $\rho_a \equiv$ densidade do ar sobrejacente
 $\approx 1,2 \text{ kg m}^{-3}$
- $c_p \equiv$ calor específico à $p=\text{const.}$
- $C_S \equiv$ coef. de transferência de calor sensível
 $= \begin{cases} 1,13 \times 10^{-3}, & (T_o - T_a) < 0 \\ 0,66 \times 10^{-3}, & (T_o - T_a) > 0 \end{cases}$
- $U_{a10} \equiv$ velocidade do vento a 10 m
- $T_o \equiv$ temperatura da superfície do oceano
- $T_a \equiv$ temperatura do ar sobrejacente

Fluxo de Calor Latente

O fluxo de calor latente é também estimado por uma das *bulk aerodynamical formulae* da Meteorologia:

$$Q_L = \rho_a L_e [C_L U_{a10} (q_o - q_a)],$$

- $\rho_a \equiv$ densidade do ar sobrejacente
 $\approx 1,2 \text{ kg m}^{-3}$
- $L_e \equiv$ calor latente de evaporação
 $\approx 2,5 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
- $C_e \equiv$ coeficiente de transferência de calor latente
 $\approx 1,15 \times 10^{-3}$
- $q_o \equiv$ umidade específica na superfície do oceano
- $q_a \equiv$ umidade específica do ar

Fluxo de Radiação Emitida (em ondas longas)

O fluxo de radiação emitida trata-se de uma correção da lei de radiação do corpo negro de Stefan-Boltzman para o oceano:

$$Q_B = \underbrace{(0,985 \sigma_{SB} T_o^4)}_{(I)} \underbrace{(0,39 - 0,05\sqrt{e})}_{(II)} \underbrace{(1 - 0,6N_c^2)}_{(III)},$$

- $\sigma_{SB} \equiv$ const. de Stefan-Boltzman
 $= 5,7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
- $T_o \equiv$ temperatura da sup. do oceano
- $N_c \equiv$ fração em $n/8$ do céu coberto.

(I) radiação de corpo cinza,

(II) radiação de retorno considerando céu sem nuvens, e

(III) correção para cobertura de nuvens.

Fluxo de Radiação Incidente (em ondas curtas)

O fluxo de radiação incidente é oriundo do sol sobre a superfície do oceano.

$$Q_I = Q_{I0} (1 - \bar{\alpha}) (1 - 0,7N_c),$$

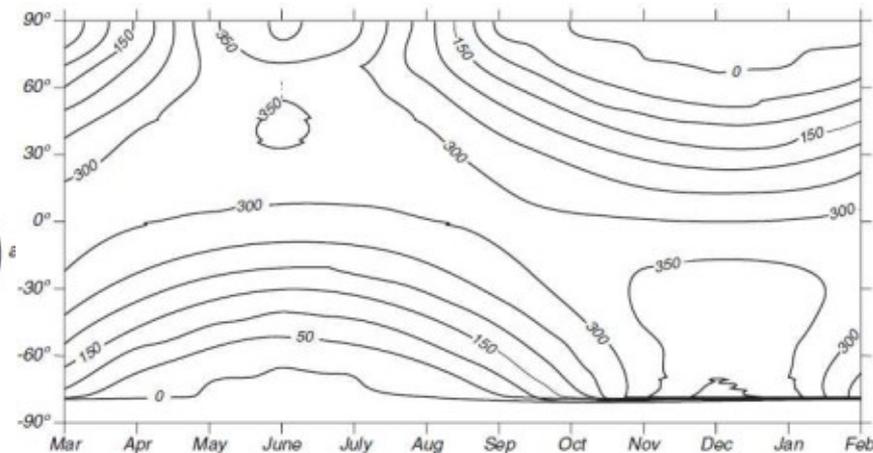
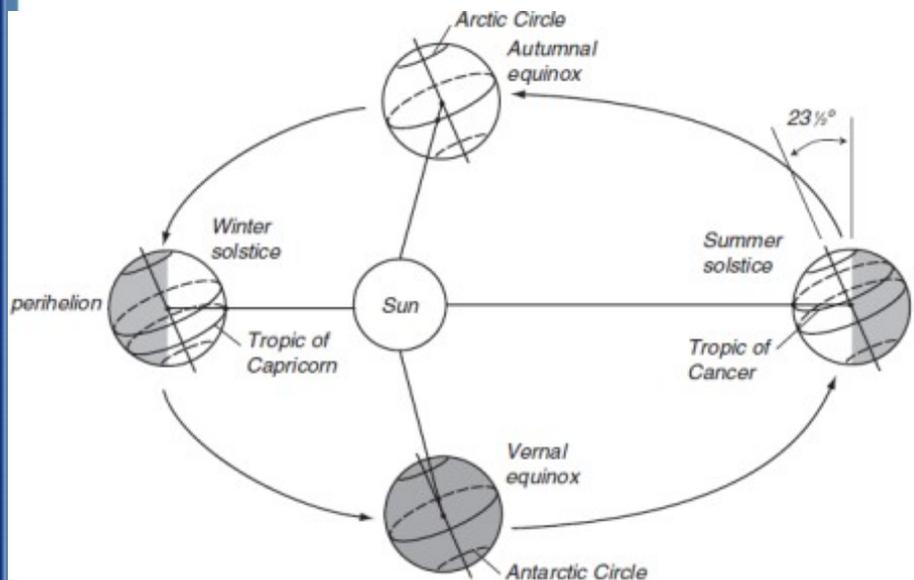
- $Q_{I0} \equiv$ radiação solar global ao nível do mar
 $\approx 1120 \text{ W m}^{-2}$
- $\bar{\alpha} \equiv$ albedo da superfície oceânica
- $N_c \equiv$ fração em $n/8$ do céu coberto.

Correções sazonais podem e devem ser incluídas na expressão para

Q_{I0} .

Fluxo de Radiação Incidente (em ondas curtas)

As variações sazonais em Q_{10} devem-se à inclinação do eixo da Terra trasladante em torno do Sol.

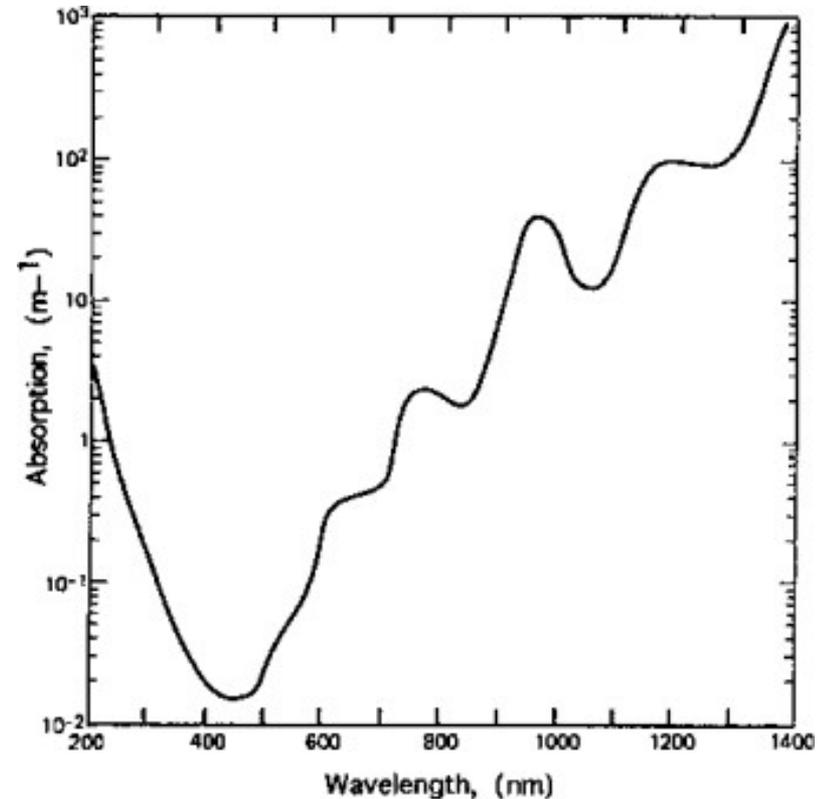
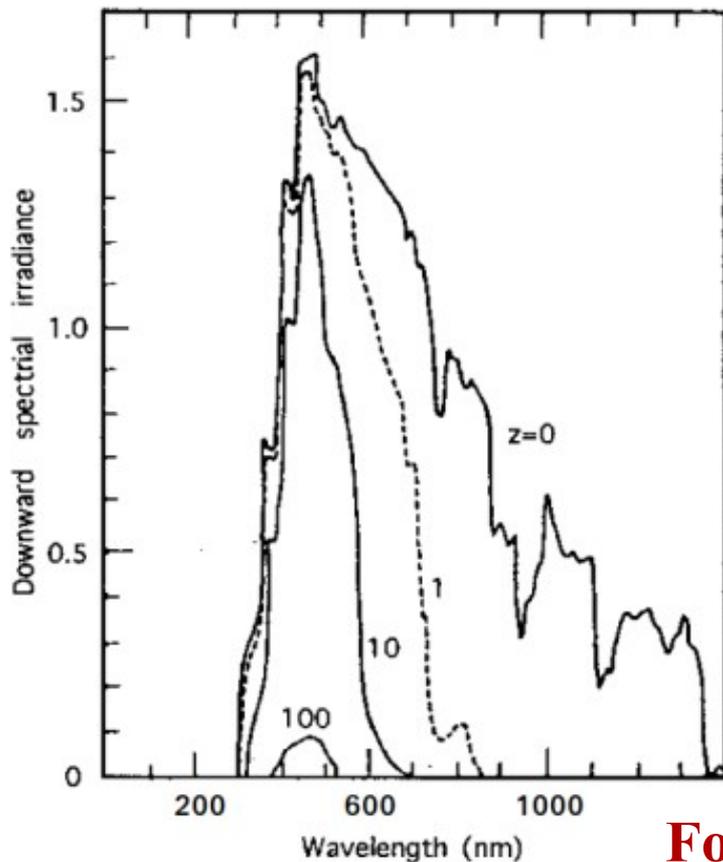


Em W m^{-2}

Fonte: Knauss (2005)

A Atenuação da Radiação Incidente com a Profundidade

O espectro da irradiância é o fluxo de energia em direção ao fundo oceano por comprimento. A irradiância é função de absorção e espalhamento.



Fonte: Knauss (2005)

Modelando a Atenuação...

- Seja

$$Q(z) = Q_{I0} (I_1 e^{\epsilon_1 z} + I_2 e^{\epsilon_2 z}),$$

- Os índices **1** e **2** se referem a ondas mais curtas e mais longas respectivamente;
- As constantes ***I1*** e ***I2*** são constantes de atenuação adimensionais devido ao tipo de água oceânica, seguindo - por exemplo - o trabalho clássico de ***Paulson & Simpson (1977)***. Valores característicos de ***I1*** e ***I2*** para águas oligotróficas seriam 0,62 e 0,38, respectivamente;
- Já os valores dos coeficientes atenuação ϵ_1 e ϵ_2 seriam $1,67 \text{ m}^{-1}$ e $0,05 \text{ m}^{-1}$, respectivamente.

Conservação do Sal

- A equação da conservação do sal é semelhante a da conservação de temperatura:

$$\frac{DS}{Dt} = \nabla_H \cdot \kappa_H \nabla_H S, + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_V \frac{\partial S}{\partial z}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z} \kappa_V \frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}.$$

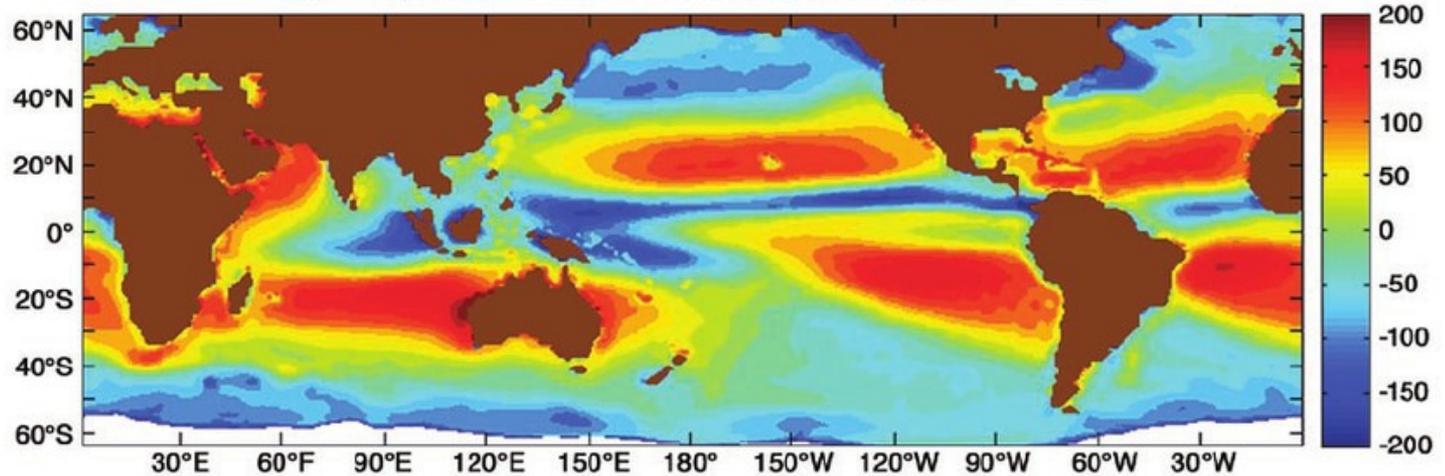
Na superfície do oceano,

$$\mathcal{S}(0) = S_0 (E - P).$$

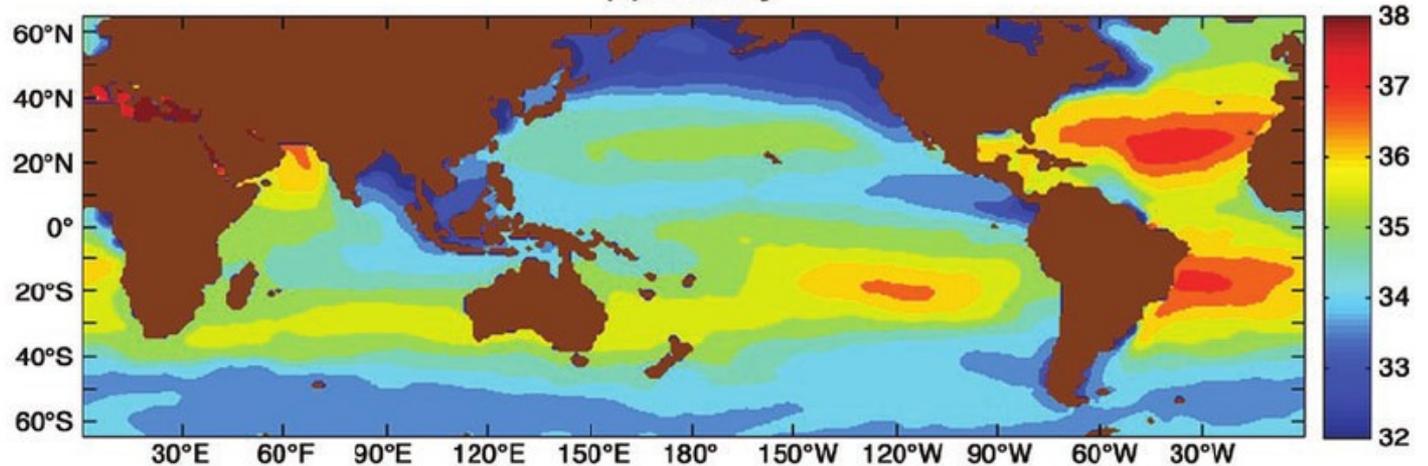
- $S_0 \equiv$ salinidade em superfície
- $(E - P) \equiv$ fluxo de água doce.

Evaporação - Precipitação

(a) Evaporation Minus Precipitation cm/yr CI = 20



(b) Salinity



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



A Equação Geral do Movimento no Oceano

O que é a equação geral do movimento?

- A equação geral do movimento é o apelido das *equação vetorial de Navier-Stokes* aplicada a um fluido em rotação, ou seja, as ditas “*forças fictícias*” de *Coriolis e centrífuga estão presentes na formulação*. São, como veremos, adaptações necessárias para aplicar a segunda lei de Newton a um referencial não-inercial.
- Por sua vez, este conjunto de três equações tem origem nas *equações de Euler* para um fluido não-viscoso (ou invíscido), que foram formuladas pelo brilhante *Leonhard Euler em 1738* como aplicação de sua especificação de estudo de fluidos.
- A inclusão dos termos de atrito nas equações de Euler deve-se a *Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes* para aplicações em engenharia.

Conservação do Momentum Linear

- Fazemos uso de nossa formulação básica para uma equação de conservação e apliquemo-a à grandeza vetorial conhecida por **momentum linear**.

$$\frac{D}{Dt}(m \vec{v}) = \vec{\mathcal{F}},$$
$$\vec{v} \underbrace{\frac{Dm}{Dt}}_{=0} + m \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\mathcal{F}},$$
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\vec{\mathcal{F}}}{m}.$$

- Note que a última equação é a **segunda lei de Newton** expressa em termos de que a aceleração da parcela de fluido no oceano ocorre em função de uma resultante de forças específicas atuando sobre esta.

Forças Atuantes no Oceano

- As forças atuantes no oceano são:

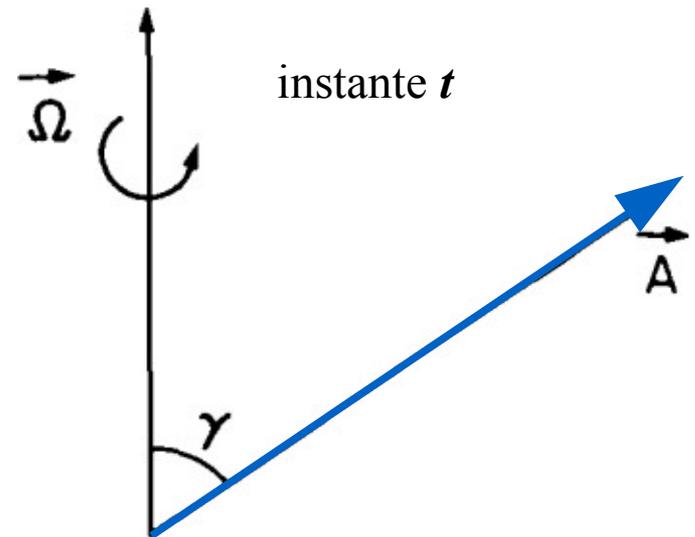
$$\frac{\vec{\mathcal{F}}}{m} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \vec{g} + \vec{g}_T.$$

onde:

- $-\frac{1}{\rho_0} \nabla p \equiv$ força do gradiente de pressão
- $\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} \equiv$ forças de viscosidade
[$\check{\mathcal{T}}$ é o tensor (de 2ª ordem) dos estresses]
- $\vec{g} = -g\vec{k} \equiv$ força gravitacional da Terra
 $\approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$
- $\vec{g}_T \equiv$ forças gravitacionais do sistema
Terra-Sol-Lua (forças geradoras de maré)

Referencial Não-Inercial

- Sabemos nós que as leis de Newton só valem num referencial inercial. Urge então “corrigi-las e expressá-las em termos de quantidades que giram junto com nosso planeta. Para tanto, consideremos a situação a seguir.
- Em primeiro lugar, devemos mencionar que uma **grandeza escalar independe do referencial**. Apenas grandes vetoriais são afetadas, pois dependem da direção que se altera mediante à rotação.
- Consideremos o vetor \vec{A} de magnitude constante e que faz um ângulo γ com o eixo de rotação do sistema. Na figura ao lado, o vetor se encontra no instante t .
- Este sistema gira com velocidade angular $\vec{\Omega}$.



Fonte: Pedlosky (1997)

Referencial Não-Inercial

- Tendo o tempo elapsado Δt desde o instante inicial t , o vetor \vec{A} girou $\Delta\theta$. A percepção de mudança no vetor é sentida por

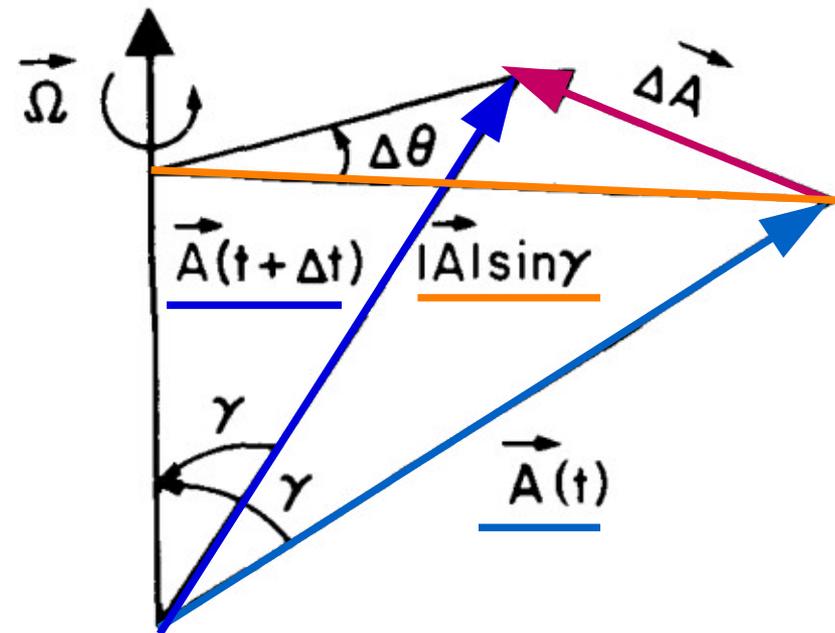
$$\underbrace{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}_{\Delta\vec{A}} = (R \Delta\theta) \vec{n},$$

$$= (|\vec{A}| \text{sen} \gamma \Delta\theta) \vec{n}$$

onde o versor na direção das mudanças de \vec{A} é dado por

$$\vec{n} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{A}}{|\vec{\Omega} \times \vec{A}|} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{A}}{|\vec{\Omega}| |\vec{A}| \text{sen} \gamma}.$$

Fonte: Pedlosky (1997)



Referencial Não-Inercial

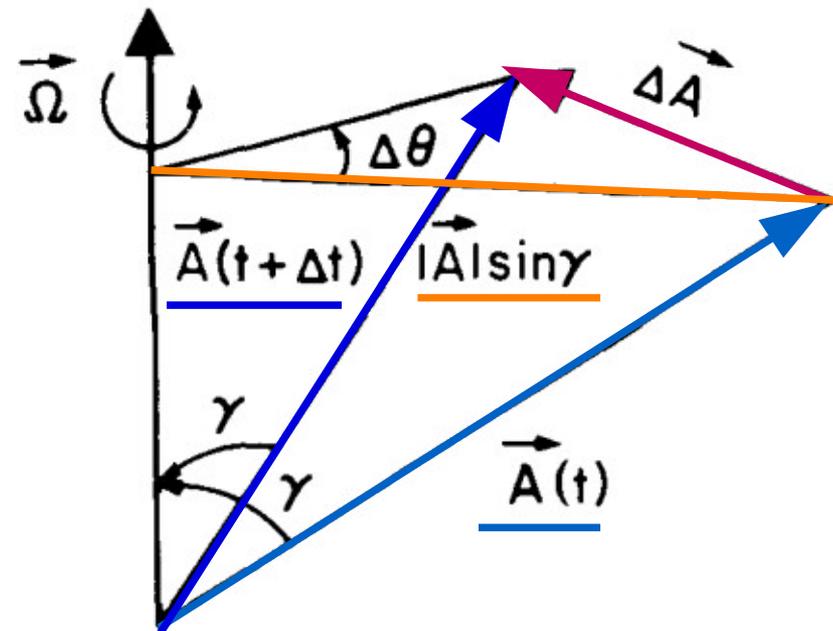
- Dividindo por Δt , obtemos a taxa de variação total do vetor \vec{A} , que pode ser escrita como

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \left(|\vec{A}| \sin \gamma \right) \underbrace{\frac{\Delta \theta}{\Delta t}}_{|\vec{\Omega}|} \frac{\vec{\Omega} \times \vec{A}}{|\vec{\Omega}| |\vec{A}| \sin \gamma}$$

Fonte: Pedlosky (1997)

- No limite infinitesimal ($\Delta t \rightarrow 0$), chegamos à seguinte expressão

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$



- Ou seja, a taxa de variação do vetor observada de um referencial inercial num sistema físico em rotação é igual ao produto vetorial entre o vetor velocidade angular e o próprio vetor.

Referencial Não-Inercial

- Assim, demonstramos, que para um vetor com magnitude de velocidade constante, sua percepção de variação nos sistemas girante e inercial são

$$\left[\frac{D\vec{A}}{Dt} \right]_R = 0 \quad \text{e} \quad \left[\frac{D\vec{A}}{Dt} \right]_I = \vec{\Omega} \times \vec{A}.$$

- Se relaxarmos essa restrição e permitir variações na magnitude do vetor \vec{A} , a taxa de variação no sistema inercial será aquela percebida no sistema girante somada à variação percebida devido à rotação:

$$\left[\frac{D\vec{A}}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\vec{A}}{Dt} \right]_R + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

O Vetor Velocidade

- Considerando a relação derivada e o vetor posição \vec{x} de uma parcela de fluido oceânico que se move relativamente à Terra, temos que um observador no sistema inercial descreverá a variação de \vec{x} como

$$\left[\frac{D\vec{x}}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\vec{x}}{Dt} \right]_R + \vec{\Omega} \times \vec{x},$$

ou usando a definição de velocidade,

$$\vec{v}_I = \vec{v}_R + \Omega \times \vec{x}.$$

- Notem que enquanto a primeira parte é a velocidade relativamente à Terra, a segunda que tem módulo $\Omega |\vec{x}|$ e corresponde à velocidade tangencial (ou azimutal) devido à rotação do planeta.

O Vetor Aceleração

- Derivamos a expressão da velocidade Lagrangianamente para obter a expressão do vetor aceleração para obter

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{D\vec{v}_I}{Dt} \right]_I &= \left[\frac{D\vec{v}_R}{Dt} \right]_R + \underbrace{\left[\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} \right]_R}_{\approx 0} \times \vec{x} \\
 &+ \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{v}_R}_{\text{ac. Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})}_{\text{ac. centrípeta}} .
 \end{aligned}$$

- O segundo termo do lado direito é associado à precessão dos equinócios e pode ser desconsiderado em termos das escalas mais comuns de DFG. O terceiro depende do movimento. O quarto tem módulo $\Omega^2 R$, onde R é distância da parcela ao eixo de rotação.

De volta à Eq. Geral do Movimento

- Originalmente, escrevemos a Eq. Geral do Movimento utilizando quantidades do sistema inercial tal qual previsto pelas leis da mecânica clássica:

$$\left[\frac{D\vec{v}_I}{Dt} \right]_I = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \vec{g}.$$

- Agora, reescrevemos o termo do vetor aceleração para considerar sua descrição em termos de quantidades do sistema girante:

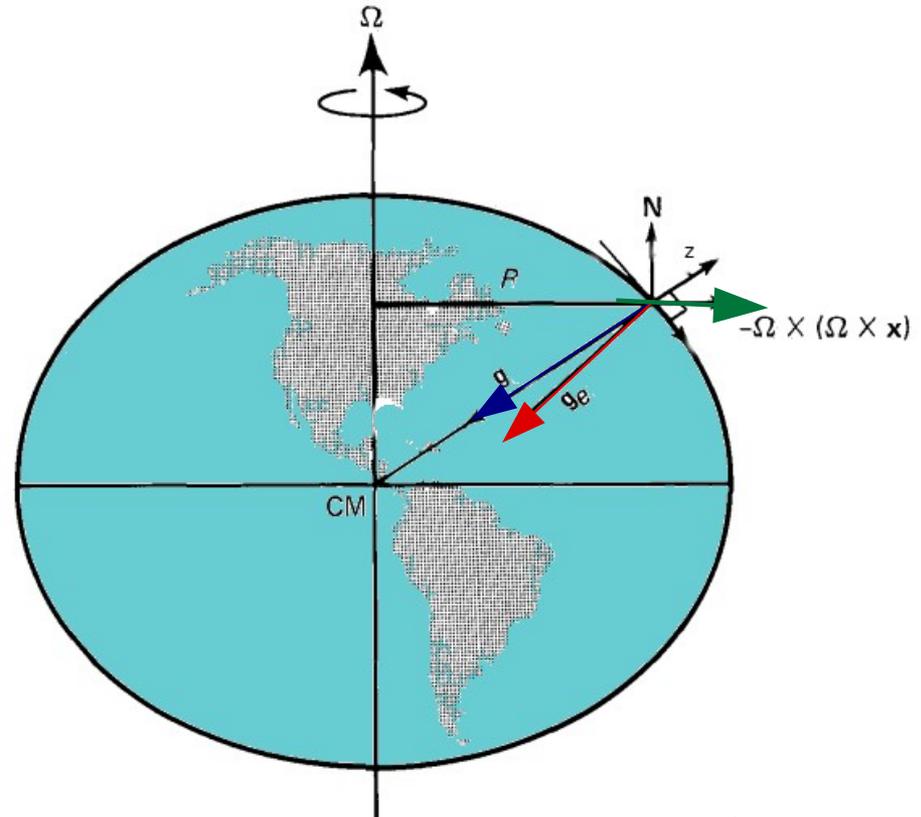
$$\left[\frac{D\vec{v}_R}{Dt} \right]_R + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_R = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \vec{g} - \Omega \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})$$



INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Força Gravitacional Efetiva

- A força centrífuga é somada à aceleração da gravidade Newtoniana para formar a gravidade efetiva. As diferenças entre \mathbf{g} e \mathbf{g}_e , como ilustra a figura são ínfimas. A força centrífuga é dinamicamente irrelevante.
- Assim, omitindo os índices \mathbf{R} podemos reescreva a eq. geral do movimento como



$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \underbrace{\vec{g} - \Omega \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})}_{\vec{g}_e}$$

A Equação Geral do Movimento no plano β

- Por fim reescrevamos a força de Coriolis usando a aproximação do plano β para obtermos

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + f\vec{k} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{1}{\rho_0}\nabla \cdot \check{\mathcal{T}} + \vec{g}_e.$$

- Recordamos aqui que f sobre a aproximação linear no plano tangente local é dado por

$$f = f_0 + \beta y.$$

- A seguir, exploraremos a forma que as forças do gradiente de pressão e de viscosidade tomam no oceano (e também na atmosfera).

A Força do Gradiente de Pressão no Oceano

- A força do gradiente de pressão é uma das mais importantes forças atuantes nas parcelas de fluido no oceano.
- A **força do gradiente vertical de pressão** é parte do **balanço hidrostático** na componente vertical da EGM.
- Já a **força do gradiente horizontal de pressão** participa do estado básico de equilíbrio dinâmico dos oceanos, o chamado **movimento geostrófico**.
- A força do gradiente de pressão horizontal atua de duas formas no oceano:
 - **Barotropicamente** – por **variações de altura da superfície do mar**, quase sempre causada pelo vento e pela presença de barreiras continentais ou topográficas. É um processo 2D.
 - **Baroclinicamente** – por **variações laterais de densidade interiores à coluna de água** e que variam podem variar demarcadamente na vertical. É um processo totalmente 3D.
- *Mas como identificar estas duas importantes porções na expressão da força do gradiente de pressão?*

A Força do Gradiente de Pressão no Oceano

- Para identificá-las, partamos do **balanço hidrostático**, que sabemos ser o balanço dominante na componente vertical da EGM:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

- Agora, integremos esta equação entre um profundidade z qualquer e a superfície livre do oceano $\eta(x,y,t)$ e tomemos o gradiente horizontal:

$$\nabla_H \int_{p(x,y,z,t)}^{p_a(x,y,t)} d\tilde{p} = -\nabla_H \int_z^{\eta(x,y,t)} \rho(x,y,z,t) g dz$$

- Assim,

$$\nabla_H p = \nabla_H p_a + \underbrace{[\rho g]_{z=\eta}}_{\approx \rho_0 g} \nabla_H \eta + g \int_z^{\eta(x,y,t)} \nabla_H \rho(x,y,z,t) dz$$

A Força do Gradiente de Pressão no Oceano

- Visto que queremos entender o papel dos gradientes laterais de densidade no gradiente de pressão, torna-se oportuno colocar o operador gradiente dentro da integral vertical.
- No entanto, como um dos limites da integração definida é função de x e y , urge que apliquemos a Regra de Leibniz:

No cálculo, a regra de Leibniz para a integral paramétrica, em homenagem a Gottfried Leibniz, afirma que para um integrante da forma

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt,$$

Fonte: Wikipedia (2020)

onde o derivado deste é expresso como integrante $-\infty < a(x), b(x) < \infty$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt,$$

onde o derivado parcial indica que no interior do integrante, somente a variação de $f(x, t)$ com x é considerado em tomar a derivada.

- Aplicando-a obtemos

$$\nabla_{HP} = \nabla_{HP_a} + \underbrace{[\rho g]_{z=\eta}}_{\approx \rho_0 g} \nabla_H \eta + g \int_z^{\eta(x,y,t)} \nabla_H \rho(z, y, z, t) d\tilde{z}.$$

A Força do Gradiente de Pressão no Oceano

- Para sairmos da expressão do gradiente horizontal de pressão para a força do gradiente horizontal de pressão basta que multipliquemos a equação anterior por $1/\rho_0$:

$$-\frac{1}{\rho_0} \nabla_H p = \underbrace{-\frac{1}{\rho_0} \nabla_H p_a}_{(I)} \underbrace{-g \nabla_H \eta}_{(II)} \underbrace{-\frac{g}{\rho_0} \int_z^\eta \nabla_H \rho(x, y, z, t) dz}_{(III)}$$

onde:

- (I)** Força do gradiente de pressão do barômetro invertido;
- (II)** Força do gradiente de pressão barotrópico; e
- (III)** Força do gradiente de pressão baroclínico.
- O barômetro invertido não tem conotação dinâmica e é usual representarmos o gradiente da pressão oceanográfica (ou seja, forças atuantes na água do mar)
- A seguir, buscaremos entender o efeito das comp. barotrópica e baroclínica.

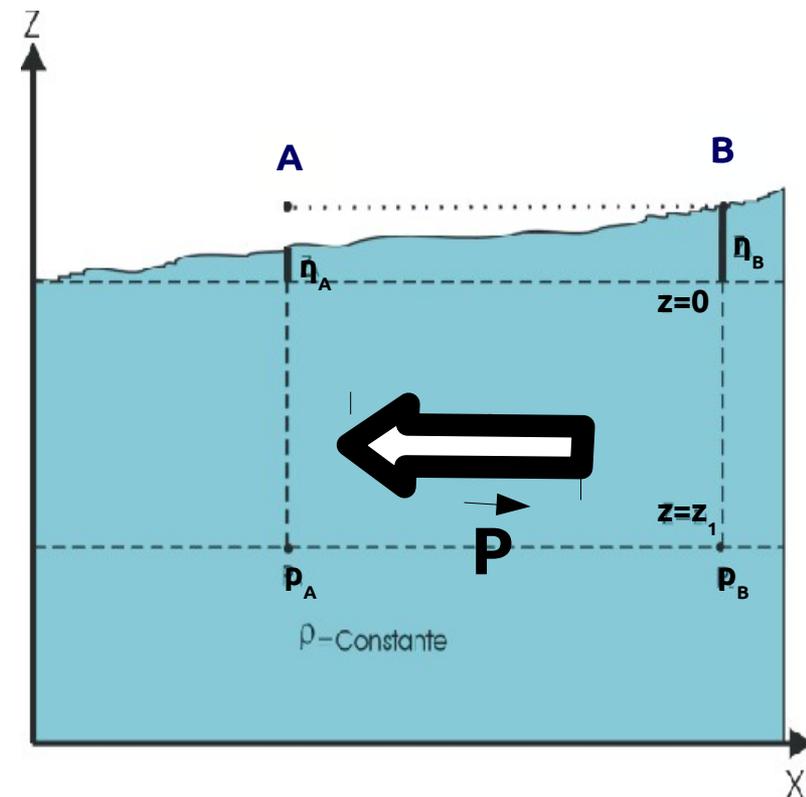
Força do Gradiente Barotrópico de Pressão

- Para exemplificarmos essa força, assumemos um exemplo simples em que $\eta = \eta(x)$ apenas e que $\rho = \text{constante}$.
- Pela equação hidrostática,
- **Estação A:** $p_A = \rho_0 g (z_I + \eta_A)$
- **Estação B:** $p_B = \rho_0 g (z_I + \eta_B)$
- **Diferença de pressão entre A e B:**

$$\Delta p = \rho_0 g (\eta_B - \eta_A)$$

$$= \rho_0 g \Delta \eta$$

- Logo, $\Delta p > 0$ (positivo para leste)
- O gradiente de pressão é **positivo**. Já força do gradiente é **negativa**, apontando para oeste.



Força do Gradiente Barotrópico de Pressão

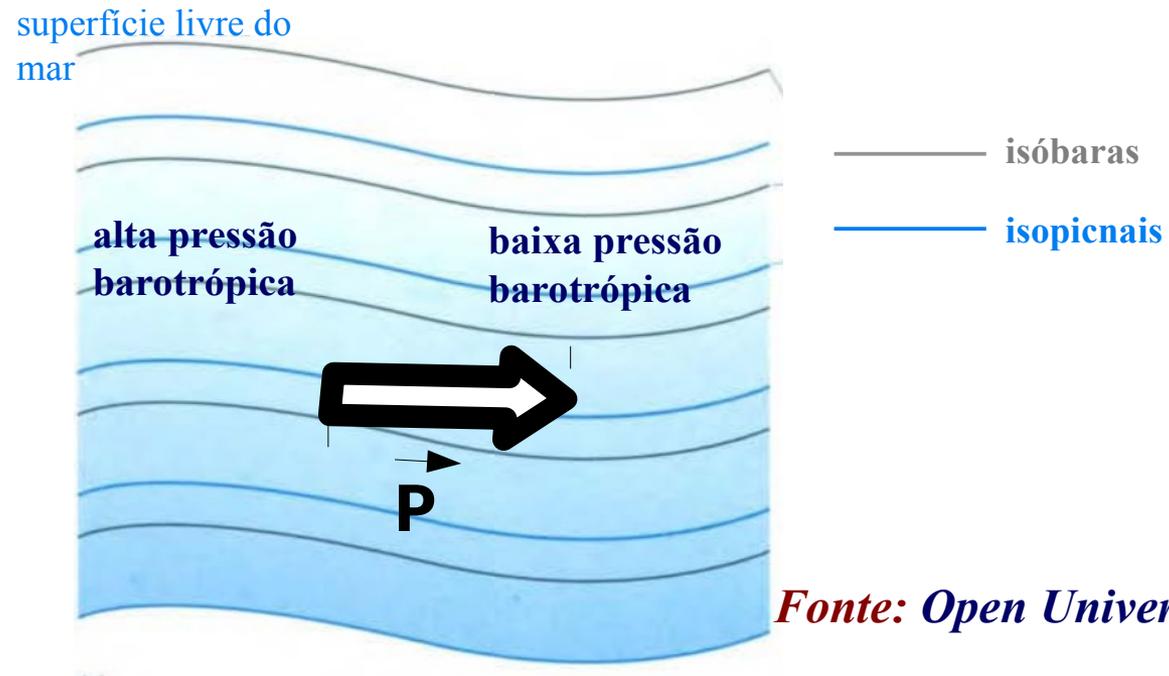
- Devemos observar que a perturbação de pressão barotrópica independe da profundidade, o que torna o problema abordando essa **dinâmica estritamente bidimensional** na ausência de atrito.
- As Equações de Euler sob essas considerações são usualmente referidas na literatura como o conjunto das “**Equações de Águas Rasas**”. São amplamente utilizadas por sua praticidade em estudos teóricos de fluidos e matemática aplicada:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + f\vec{k} \times \vec{v} = -g\nabla_H\eta.$$

- No exemplo dado, forçamos a aproximação do oceano homogêneo ($\rho=\rho_0$), pois assim há apenas a avaliação das isóbaras com a isopicnal que demarca a interface ar-mar.
- Mas, como seriam as condições barotrópicas no oceano real, que é quase sempre bastante estratificado?

Força do Gradiente Barotrópico de Pressão

- No caso do oceano estratificado, é a situação em que as isóbaras são paralelas à superfície do oceano, assim como as isopicnais são paralelas às isóbaras:



- Essa configuração é chamada pelo genial Adrian Gill em seu livro de 1982 como configuração auto-barotrópica, onde $\rho = \rho(p)$.

Força do Gradiente Baroclínico de Pressão

- Para simplificarmos essa força, assumemos em nosso exemplo que $\eta=0$ apenas e que $\rho=\rho(x,z)$.
- Pela equação hidrostática,

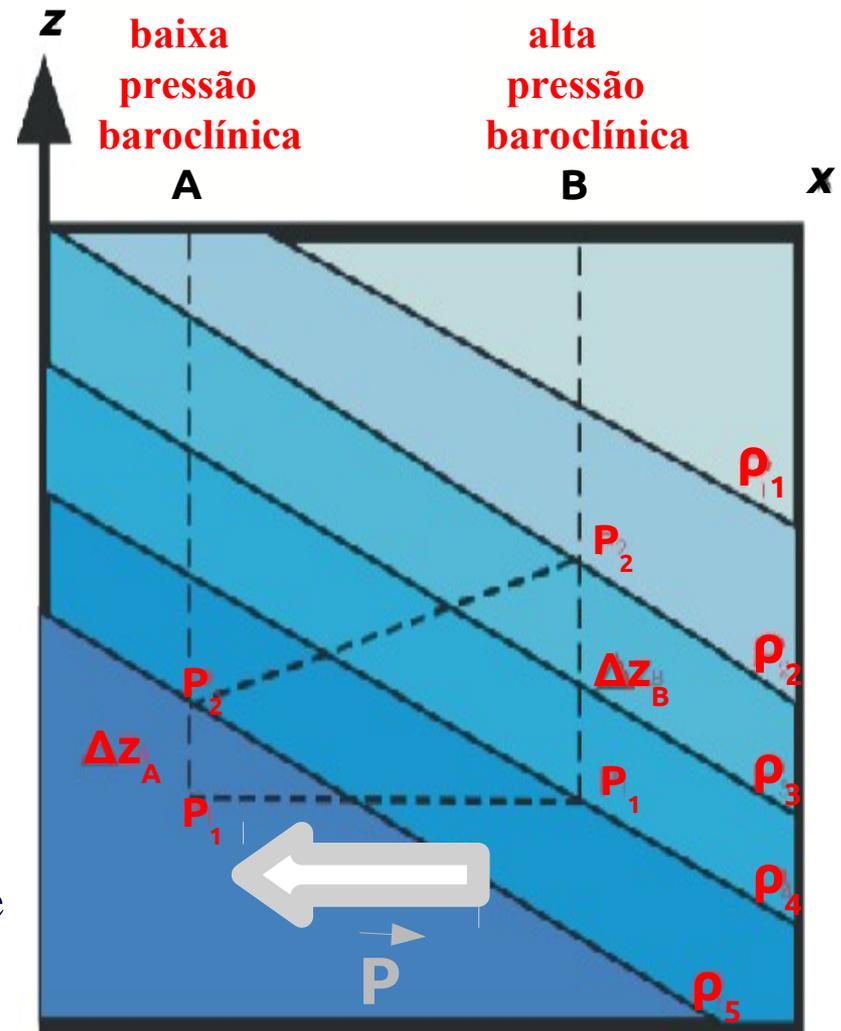
Estação A: $\Delta p_A = p_1 - p_2 = \bar{\rho}_A g \Delta z_A$

Estação B: $\Delta p_B = p_1 - p_2 = \bar{\rho}_B g \Delta z_B$

- Pela definição de isóbara, é necessário que $\Delta p_A = \Delta p_B$.

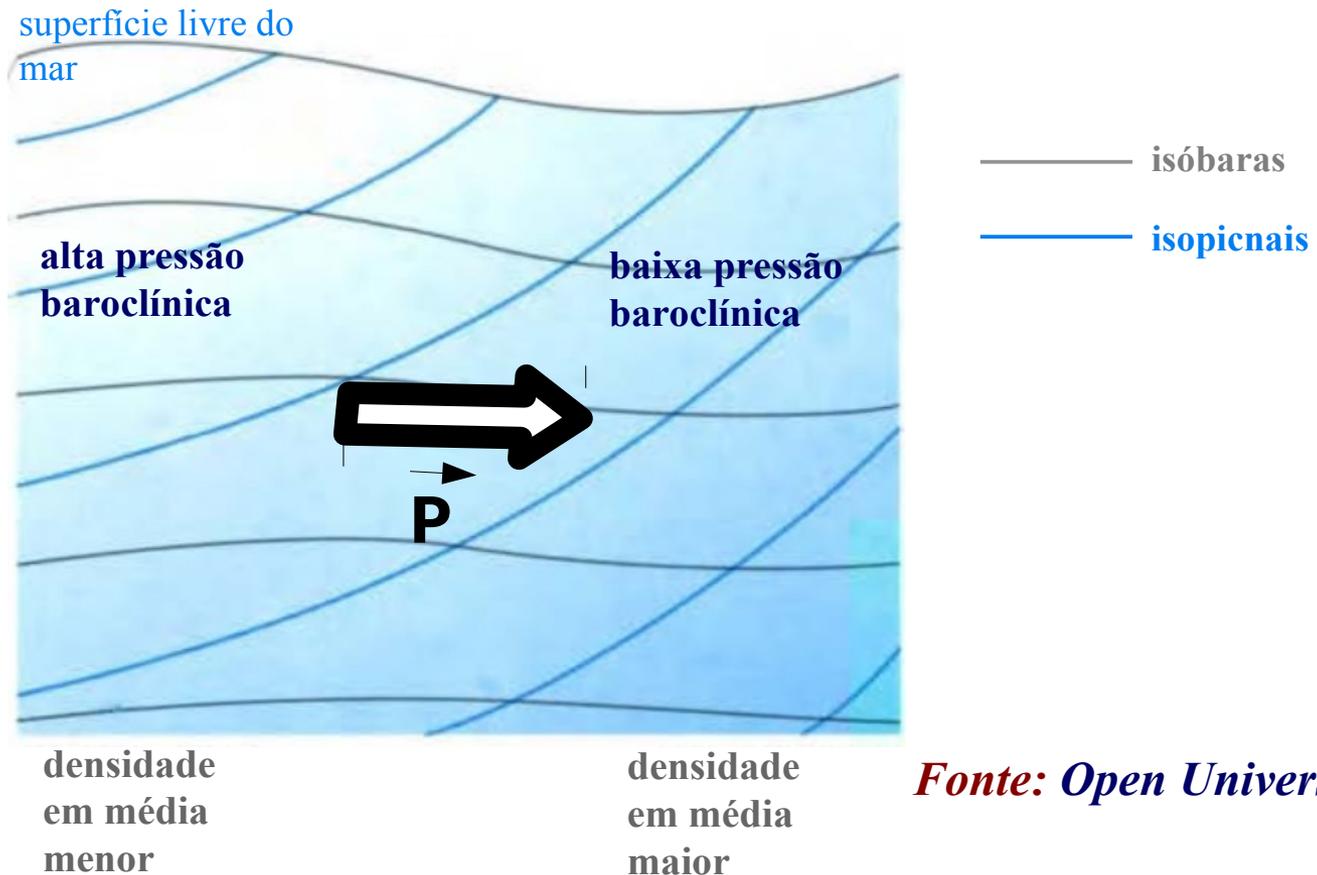
- Como consequência, $\bar{\rho}_A g \Delta z_A = \bar{\rho}_B g \Delta z_B$,

- Se temos que $\bar{\rho}_A > \bar{\rho}_B$, é necessário que $\Delta z_A < \Delta z_B$ obrigatoriamente.



Força do Gradiente Baroclínico de Pressão

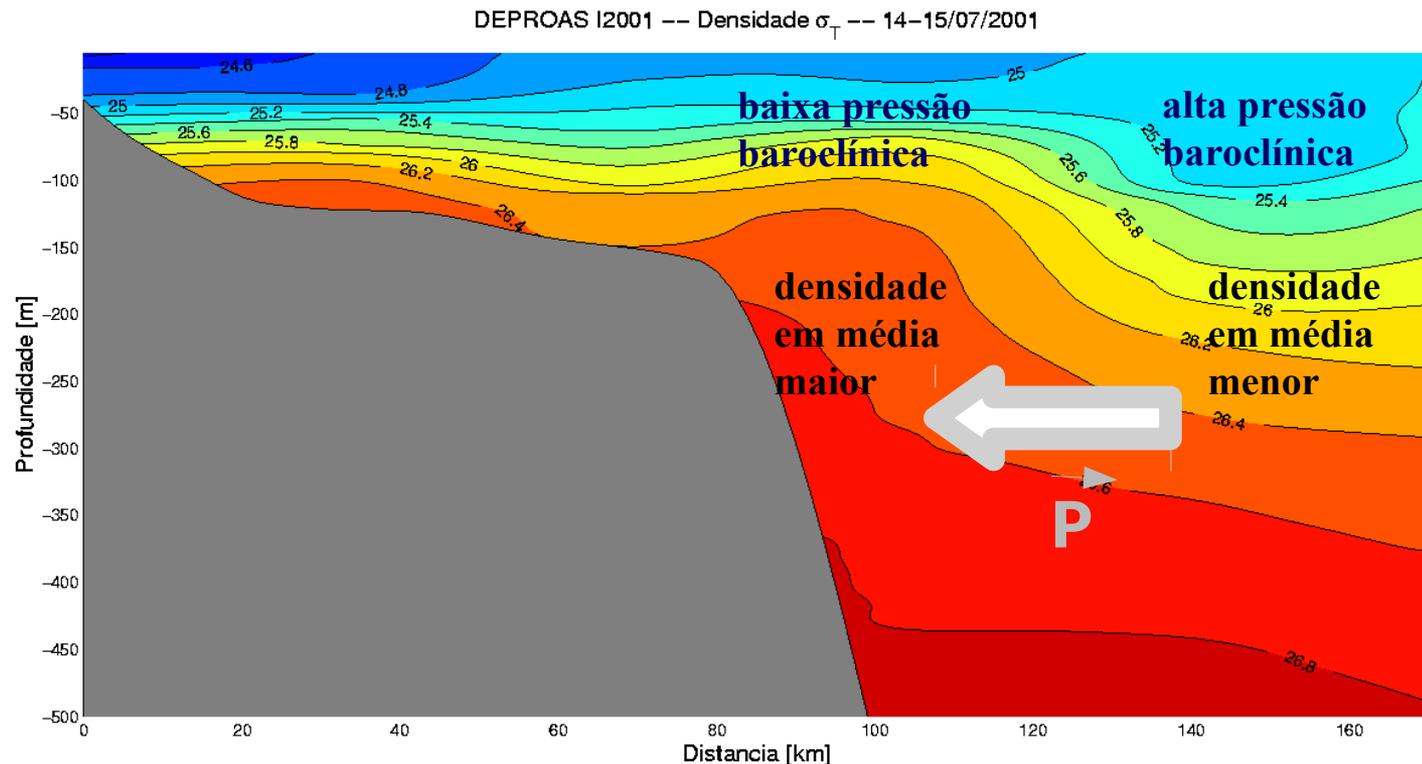
- O resultado do fenômeno descrito anteriormente é que as isóbaras se inclinam relativamente às isopicnais numa situação de baroclinidade.



Fonte: Open University (2001)

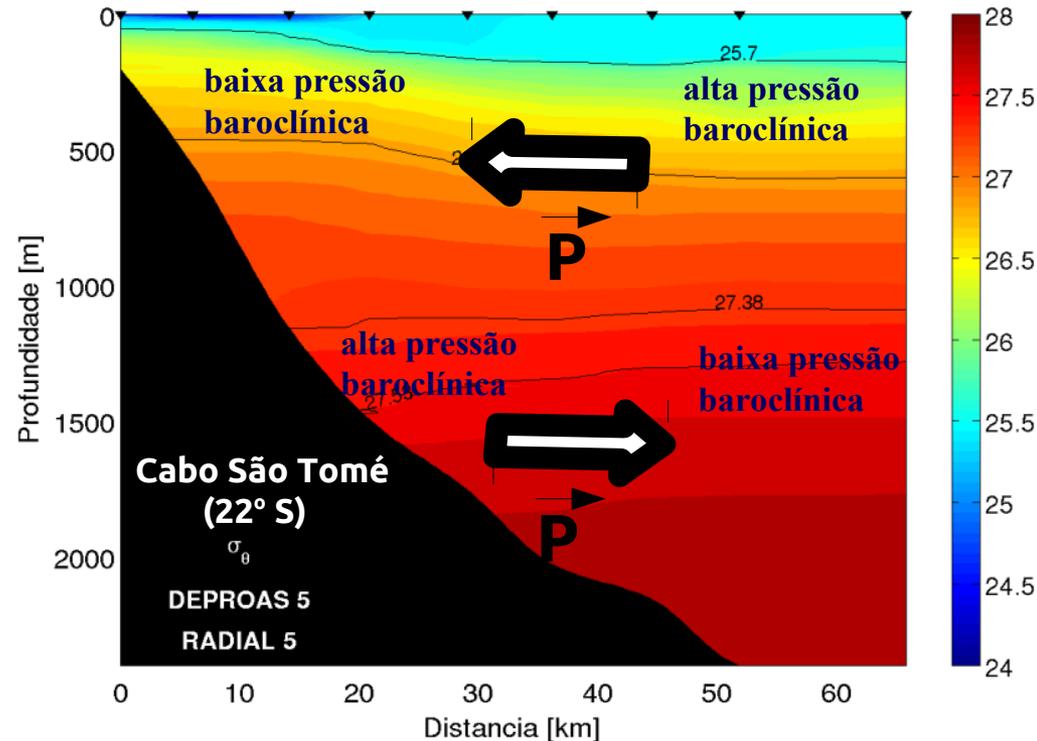
Força do Gradiente Baroclínico de Pressão

- É difícil calcular o sinal efetivo da perturbação de pressão por dados hidrográficos, mas é possível inferirmos onde estão altas e baixas baroclínicas simplesmente examinando a configuração de isopícnais numa seção de densidade.



Força do Gradiente Baroclínico de Pressão

- O gradiente horizontal baroclínico de pressão varia tridimensionalmente. É possível haver várias inversões na direção vertical, que como veremos mais tarde, implicam em reversão no sentido de escoamento das grandes correntes.
- Um exemplo clássico é a inversão do gradiente de pressão em nível intermediário que ocorre ao largo da costa sudeste do Brasil:



Semântica:

Barotrópico vs. Baroclínico

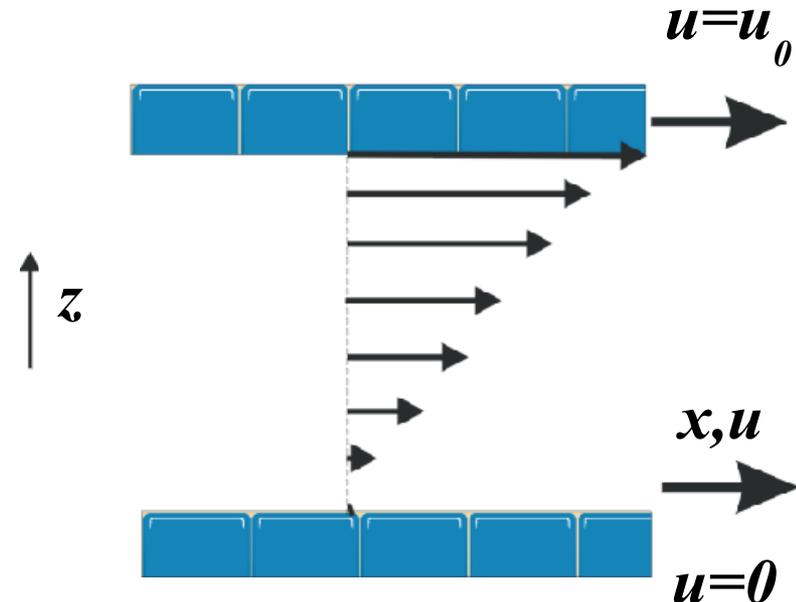
- O que significam “barotrópico” e “baroclínico” no *stricto sensu*?
- O sufixo “**trópico**” para adjetivo e “tropismo” para substantivo significa “na direção de”, vide o fototropismo das plantas. No caso de **barotrópico**, o significado é **na (mesma) direção da pressão (ou das isóbaras)**.
- Já o sufixo “**clínico**” para adjetivo e “clina” para substantivo significa inclinação, vide termoclina, termo do jargão oceanográfico associado à região inclinada do perfil de temperatura do oceano aberto. Assim, **baroclínico** significa **inclinado relativamente à pressão (ou às isóbaras)**.

Forças de Viscosidade

- Viscosidade é o termo que se aplica ao efeito de atrito nos fluidos. **Forças de viscosidade são, portanto, forças de atrito.**
- **As forças de viscosidade no fluido são** de duas naturezas: **molecular e turbulenta.** No oceano e na atmosfera, prevalecem as forças de viscosidade turbulenta.
- No entanto, é necessário que entendamos as duas formas.
- Também discutiremos a afirmação usual de que **a água do mar é um fluido Newtoniano** e o que isto significa.
- O fundamento das forças de viscosidade reside na lei de viscosidade de Newton, não por acaso. E é o que veremos a seguir.

A Lei da Viscosidade de Newton

- Sir Isaac Newton realizou o um experimento simples para medir a resistência do fluido a fluir na presença de contornos sólidos.
- Num tanque de fundo plano, arrastou uma placa de área A sobre sua superfície com velocidade constante u_0 até que se estabelecesse um escoamento estacionário laminar.
- Este escoamento apresentou um cisalhamento linear entre $z=0$ e $z=-H$.
- Newton testou várias velocidades na placa superior e reparou que a variação linear se dava entre a velocidade do fluido sob a placa [$u(0) \approx u_0$] e junto ao fundo [$u(-H) \approx 0$].
- Também observou que a velocidade do fluido junto aos contornos sólidos era aproximadamente a própria dos contornos sólidos!



A Lei da Viscosidade de Newton

- Newton, então, observou que a força necessária para manter o escoamento estacionário era diretamente proporcional à área da placa \mathcal{A} e à velocidade u_0 , desta, assim como era inversamente proporcional à distância entre os dois contornos sólidos do tanque. Ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{F} &\propto \mathcal{A} \frac{u_0}{H} \vec{i} \\ &\propto \mathcal{A} \left[\frac{u_0 - 0}{0 - (-H)} \right] \vec{i} \\ &\propto \mathcal{A} \frac{\Delta u}{\Delta z} \vec{i} .\end{aligned}$$

- Que pode ser reescrita como
- ou como
- Newton propôs-se reescrever essa força por unidade de área, o que quer dizer em termos de tensão tangencial $\boldsymbol{\tau}$, que está associada ao cisalhamento vertical do escoamento estacionário laminar.

A Lei da Viscosidade de Newton

- Em termos de magnitude, chegamos à definição da força e da tensão tangencial associada, dadas pela

força

$$F \propto A \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

e pela tensão

$$\tau \propto \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

- Usando um coeficiente de proporcionalidade, obtemos

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

- O coeficiente de proporcionalidade μ é conhecido como **coeficiente dinâmico de viscosidade molecular** e tem unidades de $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$.
- Fluidos que obedecem essa lei são chamados de **fluidos Newtonianos**. Todos os gases e a maioria dos fluidos são dessa natureza, ainda que aproximadamente. A água do mar não é exceção.

A Lei da Viscosidade de Newton

- Fazendo $\Delta z \rightarrow 0$, a expressão para a tensão pode ser reescrita como

$$\tau^{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z},$$

onde atribuímos dois índices à tensão. O primeiro índice indica a direção onde a tensão é aplicada, o segundo se relaciona com a direção do cisalhamento. Assim, trata-se de uma tensão aplicada na direção zonal devido ao cisalhamento vertical da corrente.

- Portanto, é natural presumir que podemos ter uma tensão aplicada na direção zonal devido também aos cisalhamento zonal e meridional, respectivamente:

$$\tau^{xx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$\tau^{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

O Tensor das Tensões Tangenciais

- Analogamente, é possível haver tensões aplicadas nas direções vertical e meridional devido a cisalhamento das correntes nas três direções cartesianas.
- Logo, generalizando, podemos definir o tensor das tensões tangenciais dado por

$$\check{\tau} = \begin{pmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} & \tau^{xz} \\ \tau^{yx} & \tau^{yy} & \tau^{yz} \\ \tau^{zx} & \tau^{zy} & \tau^{zz} \end{pmatrix} .$$

- De uma forma mais compacta, o tensor pode ser escrito como

$$\check{\tau} = \mu \nabla \vec{v} .$$

De volta à EGM

- Mostramos as forças de viscosidade molecular na EGM como a divergência do tensor das tensões tangenciais. Agora, podemos utilizar a lei de Newton e reescrever esse termo apenas em termos de grandezas vetoriais:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\tau} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) .$$

- Considerando o coeficiente dinâmico de viscosidade molecular μ isotrópico, podemos retirá-lo da operação divergente e chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \check{\tau} &= \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v} \\ &= \nu \nabla^2 \vec{v} . \end{aligned}$$

- Aqui, ν é o coeficiente cinemático de viscosidade.

De volta à EGM

- Reescrevemos a equação de Navier-Stokes usando a lei da viscosidade de Newton para obter

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + f\vec{k} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{g}_e.$$

- O coeficiente cinemático de viscosidade molecular depende da espécie do fluido. Este é função do espaço intermolecular e do movimento browniano. Portanto, temperatura o afeta.
- Os valores de ν para a água do mar na faixa de temperatura entre 0° e 30° C é de $0,6 \times 10^{-7}$ a $1,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

O Número de Reynolds

- O número de Reynolds Re é usado para determinar se o escoamento é laminar ou turbulento.
- Consiste na razão de dois termos da EGM: o advectivo e o de difusão molecular. Ou seja, é razão entre a não-linearidade e formação de vórtices e turbilhonamento e a viscosidade que pode frear e organizar estes.
- Assim, Re é dado por

$$Re = \mathcal{O} \left(\frac{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}{\nu \nabla^2 \vec{v}} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{UL}{\nu} \right)$$

- Em problemas de engenharia é usual utilizar a seguinte classificação:
- Escoamento **Laminar** $Re < 2000$
- Escoamento **Crítico** $2000 < Re < 4000$
- Escoamento **Turbulento** $Re > 4000$

O Número de Reynolds

- A tabela abaixo mostra que o **oceano em todas as escalas é intrinsecamente turbulento!** (Embora seja possível haver movimentos laminares de pequena escala em situações específicas)

<i>Escalas</i>	<i>L</i>	<i>U</i>	<i>Re</i>
Pequena	<1 km	1 m s ⁻¹	10 ⁹
Submeso	1-10 km	1 m s ⁻¹	10 ⁹ -10 ¹⁰
Meso	100 km	0,1 m s ⁻¹	10 ¹⁰
Grande	1000 km	0,01 m s ⁻¹	10 ¹⁰

- A pergunta que se põe é: *como estudar os escoamentos turbulentos? Como descrever as correntes oceânicas se estas são turbulentas?*
- A resposta é: ***precisamos usar uma abordagem estatística***, que foi aliás sugerida pelo próprio Osborne Reynolds. (Ah, e o número leva seu nome por ter sido o cientista que o popularizou. Quem criou ***Re*** foi George Stokes.)

As Tensões de Reynolds

- Por simplicidade, ao invés de considerarmos toda a EGM, tomemos apenas a sua **componente zonal** dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u .$$

- Para realizar a chamada **promediação de Reynolds** é usual reescrevermos as componentes da EGM com os termos advectivos na forma de fluxo.
- Ou seja, é necessário reescrevermos os termos inerciais como a divergência do fluxo de momentum zonal:

$$\nabla \cdot (\vec{v}u) \implies \text{divergência do fluxo de momentum zonal}$$

As Tensões de Reynolds

- Para tanto, basta fazermos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu) = u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

+

$$\frac{\partial}{\partial y}(vu) = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}$$

+

$$\frac{\partial}{\partial z}(wu) = w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) + \frac{\partial}{\partial z}(wu) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &+ u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= 0 \text{ pela continuidade} \end{aligned}$$

As Tensões de Reynolds

- Vamos agora desenvolver a **promediação de Reynolds**, na qual decompos todas as incógnitas numa média temporal e num desvio desta média:

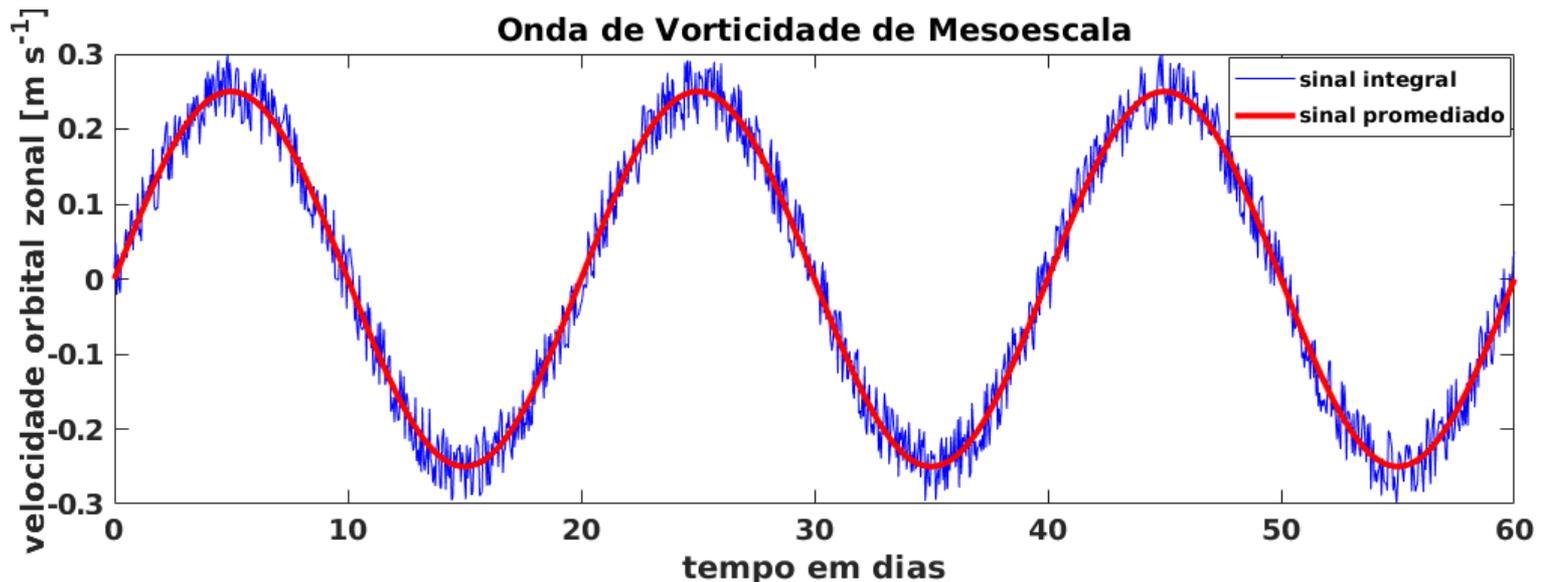
$$u = \bar{u} + u'$$

- Mas o que seria essa média? Seria uma média temporal do escoamento para eliminar as flutuações mais rápidas. Esta média deve ser calculada num intervalo de tempo suficiente para que seja significativa estatisticamente. No entanto, a escala de tempo dessa promediação (T_{Re}) deve ser bem menor que a escala de tempo característica da evolução do escoamento (T). Logo,

$$\bar{u} = \frac{1}{T_{Re}} \int_0^{T_{Re}} u dt \quad \text{onde } T_{Re} < T.$$

As Tensões de Reynolds

- Vejamos um **exemplo oceanográfico** do que é esta promediação. Consideremos ter um fundeio correntográfico em 250 m de profundidade sobre a Elevação do Rio Grande e vimos passar **ondas de Rossby se propagando para oeste** como sinal dominante.



- Existem, no entanto, movimentos associados a menores escalas também registrado pelo correntógrafo. São como que desvios pequenos relativamente ao sinal dominante.
- Visto que nosso interesse é de mesoescala, procedemos à promediação observando que a escala de tempo T da onda de Rossby é de **22 dias** enquanto as dos desvios de menor escala T_{Re} é da ordem de de pouco mais de **18 horas**, por exemplo.

As Tensões de Reynolds

- De volta à promediação, examinemos os termos quadráticos associados à advecção, aplicando a definição da média, por exemplo:

$$\begin{aligned}(vu) &= (\bar{v} + v')(\bar{u} + u') \\ &= \bar{v}\bar{u} + \bar{v}u' + v'\bar{u} + v'u' .\end{aligned}$$

- Agora tomemos a média desse produto para obter

$$\begin{aligned}\overline{(vu)} &= \overline{\bar{v}\bar{u}} + \overline{\bar{v}u'} + \overline{v'\bar{u}} + \overline{v'u'} \\ &= \bar{v}\bar{u} + \bar{v}\underbrace{\overline{u'}}_{=0} + \underbrace{\overline{v'}}_{=0}\bar{u} + \overline{v'u'} \\ &= \bar{v}\bar{u} + \overline{v'u'} .\end{aligned}$$

- Notemos que $u' = u - \bar{u} \implies \overline{u'} = 0$ e também $\bar{\bar{u}} = \bar{u}$ e $\overline{v'u'} \neq 0$.

As Tensões de Reynolds

- Como vimos, a média do produtos dos desvios não é zero. Se promediarmos toda a componente zonal da equação do movimento, obtemos

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w}\bar{u}) - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

$$+ \nu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial z}$$

- Os últimos 3 termos são chamados de **tensões de Reynolds**.
- Estes termos atuam de forma semelhante ao atrito molecular, no entanto, ao invés de transferirem momentum através de choque de moléculas em movimento browniano, a transferência na turbulência é macroscópica.
- Parcelas de fluido se chocam e trocam momentum, de uma forma muito mais vigorosa e eficiente que a viscosidade molecular!

Os Coeficientes de Viscosidade Turbulenta

- Stokes e Reynolds em função da troca de momentum parametrizar o efeito da turbulência em analogia ao experimento de viscosidade molecular de Newton.
- Entretanto, esses coeficientes dependem do estado do fluido (em termos de turbulência) e não da espécie deste.
- No caso da água do mar, os coeficientes tampouco podem ser isotrópicos visto que a estratificação inibe a troca de momentum na vertical. Este processo é muito mais efetivo na horizontal.

$$-\overline{u'u'} = \frac{\tau_{Re}^{xx}}{\rho_0} = A_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

$$-\overline{v'u'} = \frac{\tau_{Re}^{xy}}{\rho_0} = A_H \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$-\overline{w'u'} = \frac{\tau_{Re}^{xz}}{\rho_0} = A_V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$10 < A_H < 10^4 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

$$10^{-4} < A_V < 10^{-1} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

Fonte: Pedlosky (1979)

A Equação Geral do Movimento Em Oceanografia

- Finalmente, estamos aptos a escrever a EGM em sua forma final para as aplicações em Oceanografia:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w}\bar{u}) - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (\nu + A_H) \nabla_H^2 \bar{u} + (\nu + A_V) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$$

- A partir do próximo tema, desprezaremos os barras e consideraremos que sempre realizamos a promediação de Reynolds.

Análise de Escalas da Equação Geral do Movimento

O Oceano É Sempre Turbulento

- Neste tema, abordaremos a análise de escalas e definição dos números adimensionais formalmente, bem como as principais aproximações na Equação Geral do Movimento.
- Como discutido no tema anterior, estamos cientes de que **o oceano é sempre turbulento**, faz-se necessária a promediação de Reynolds e todas as quantidades constantes da EGM são médias de Reynolds. Assim, omitiremos a partir de agora a “barra” em cima das incógnitas.

As Componentes Escalares da EGM

- As componentes zonal, meridional e vertical da EGM sob as aproximações do plano β e de Boussinesq são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$+ (\nu + A_H) \nabla_H^2 u + (\nu + A_V) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$+ (\nu + A_H) \nabla_H^2 v + (\nu + A_V) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} \rho$$

$$+ (\nu + A_H) \nabla_H^2 w + (\nu + A_V) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

A Insignificância das Forças de Viscosidade Molecular

- As três componentes da EGM apresentam termos ligados às forças de viscosidade molecular e turbulenta. Em particular, dada a anisotropia dos coeficientes cinemáticos, os operadores diferenciais associados a estas são

$$\underbrace{(\nu + A_H)}_{(10^{-6} + 10^2)} \nabla_H^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{(\nu + A_V)}_{(10^{-6} + 10^{-2})} \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

- Portanto,

$$\approx A_H \nabla_H^2 \quad \text{e} \quad A_V \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

- Assim, a partir de agora, ignoraremos a participação das forças de viscosidade molecular se comparadas com as forças de viscosidade turbulenta.

Análise de Escala da Componente Zonal da EGM

- A componente zonal toma, então, a forma final de

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\frac{U}{T}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\frac{U^2}{L}} - \underbrace{fv}_{f_0 U} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\frac{P}{\rho_0 L}} + \underbrace{A_H \nabla_H^2 u}_{\frac{A_H U}{L^2}} + \underbrace{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\frac{A_V U}{H^2}}$$

- Em vermelho, estão a ordem de grandeza em termos das escalas típicas e valores típicos dos parâmetros.
- Para simplificar as equações é necessário comparar o “tamanho” de um termo relativamente a outro.
- A maioria dos números adimensionais em GFD advém de razões entre os termos das componentes escalares da EGM.
- Assim, definiremos e quantificaremos os termos para submesoescala, mesoescala e grande escala.

Números Adimensionais

- $$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{fv} = (f_0 T)^{-1} = Ro_T$$

Número de Rossby local

- $$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{fv} = \frac{U}{(f_0 L)} = Ro$$

Número de Rossby advectivo

- $$\frac{A_H \nabla_H^2 u}{fv} = \frac{A_H}{(f_0 L^2)} = E_H$$

Número de Ekman Horizontal

- $$\frac{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{fv} = \frac{A_V}{(f_0 H^2)} = E_V$$

Número de Ekman Vertical

Números Adimensionais e Escalas

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{A_H \nabla_H^2 u} = \frac{UL}{A_H} = \frac{Ro}{E_H} = Re_H$$

$$\frac{w \frac{\partial u}{\partial z}}{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = \frac{UH}{A_V} = \delta \frac{Ro}{E_V} = Re_V$$

Número de Reynolds Turbulento Horizontal

Número de Reynolds Turbulento Vertical

<i>Escala</i>	<i>L [m]</i>	<i>U [m s⁻¹]</i>	<i>T [s]</i>	<i>H [m]</i>
<i>Pequena</i>	10^2	1	10^2	10^3
<i>Submeso</i>	10^4	1	10^3	10^3
<i>Meso</i>	10^5	10^{-1}	10^6	10^3
<i>Grande</i>	10^6	10^{-2}	10^8	10^3

Parâmetros:

$$f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$A_H = 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$A_V = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Análise por Escalas

<i>Escala</i>	Ro_T	Ro	E_H	E_V	Re_H	Re_V
<i>Pequena</i>	10^2	10^2	10^2	10^{-4}	10	10^7
<i>Submeso</i>	1	1	10^{-2}	10^{-4}	10^2	10^4
<i>Meso</i>	10^{-2}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-4}	10^2	1
<i>Grande</i>	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-4}	10^2	1

- Considerando, $H=1000$ m, os termos de atrito vertical não são relevantes;
- Notemos que as meso e grande escalas são de movimentos quase-equilibrados. Isso não vale para a pequena e submeso.

Os Balanços da EGM zonal por Escalas

*Movimentos
Acelerados:*

Pequena

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 u$$

Submeso

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

*Movimentos em
Quase-Equilíbrio:*

Meso

$$-fv = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Grande

$$-fv = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

A Escala da Pressão Geostrófica

Vimos em aulas passadas que:

$$p(x, y, z, t) = \underbrace{\bar{p}(z)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{p}(x, y, z, t)}_{\text{geostrófica}}$$

E agora,

$$-\underbrace{fv}_{f_0U} = -\frac{1}{\underbrace{\rho_0}_{\frac{\tilde{P}}{\rho_0 L}}}\frac{\partial p}{\partial x},$$

Escala da pressão geostrófica

Portanto,

$$\tilde{P} = (\rho_0 L) f_0 U$$

<i>Escala</i>	\tilde{P} (Pa)
Meso	10^3
Grande	10^3

Análise de Escala da Componente Vertical da EGM

- A componente vertical toma, então, a forma completa e final de

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{\frac{HU}{LT}} + \underbrace{u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}}_{\frac{HU^2}{L}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}}_{\frac{P}{\rho_0 L}} - \underbrace{\frac{\rho'}{\rho_0} g}_{\frac{\Delta \rho g}{\rho_0}} + \underbrace{A_H \nabla_H^2 w}_{\frac{H A_H U}{L L^2}} + \underbrace{A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}_{\frac{H A_V U}{L H^2}}$$

- Em vermelho, estão a ordem de grandeza em termos das escalas típicas e valores típicos dos parâmetros.
- Note que subtraímos da equação os termos relacionados às pressão e densidade puramente hidrostáticos, pois estes se cancelam de forma exata.
- Importante reparar que a escalas das perturbação da pressão P' e as da pressão geostrófica \tilde{P} só serão coincidentes caso o escoamento esteja em situação de quase-equilíbrio (ou quase-balanço).
- Assim, $P' = \tilde{P}$ apenas em mesoescala e grande escala.

Razões entre os termos

- As razões entre os termos da derivada material e de atrito turbulento relativamente ao de empuxo dependem do parâmetro entre parênteses, que é função da razão de aspecto δ e do número de Boussinesq ϵ :

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \left(\frac{\delta}{\epsilon g}\right) \frac{U}{T} \quad ; \quad \frac{A_H \nabla_H^2 u}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \left(\frac{\delta}{\epsilon g}\right) A_H \frac{U}{L^2} ;$$

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \left(\frac{\delta}{\epsilon g}\right) \frac{U^2}{L} \quad ; \quad \frac{A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \left(\frac{\delta}{\epsilon g}\right) A_V \frac{U}{H^2}$$

- A exceção é o termo do gradiente vertical de pressão. A razão entre este e o empuxo nos permite encontrar a escala para P' de uma forma generalizada assumindo que ambos tem a mesma ordem:

$$\frac{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}}{\frac{\rho' g}{\rho_0}} = \frac{P'}{\Delta \rho g H} \quad \rightarrow \quad P' = 10^4 Pa.$$

Notem que a escala P' independe da escala horizontal do movimento.

A razão de aspecto e a aproximação hidrostática

- Como mostrado no slide anterior, o termo do empuxo (ou da gravidade reduzida) é aquele que é solidamente conhecido e independe da escala do movimento. Sua ordem de grandeza é tipicamente 10^{-2} .
- Portanto, podemos avaliar o coeficiente $\delta (\epsilon g)^{-1}$ para cada uma das escalas de interesse em oceanografia, com as escolhas de $L = 100$ m, 10 km, 100 km e 1000 km para pequena, submeso, meso e grande escalas, por exemplo.

	<i>Pequena</i>	<i>Submeso</i>	<i>Meso</i>	<i>Grande</i>
$\delta (\epsilon g)^{-1}$	10^3	10	1	10^{-1}
$\frac{Dw/Dt}{\text{empuxo}}$	10	10^{-3}	10^{-7}	10^{-11}
<i>Hidrostático?</i>	<i>Não</i>	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>

Os Balanços da EGM vertical por Escalas

*Movimentos
Acelerados:*

*Pequena
(L=100 m)*

*Submeso
(L=10 km)*

*Movimentos em
Quase-Equilíbrio:*

Meso

Grande

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \rho g + A_H \nabla_H^2 w$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \rho g$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \rho g$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \rho g$$

Comentários Finais sobre Hidrostática ($\delta \ll 1$)

- A análise de escalas é um instrumento poderoso para identificarmos os termos da EGM relevantes para o movimento de interesse.
- Simplificações são possíveis e tornam a EGM passível de solução analítica em casos específicos.
- Os exemplos aqui apresentados dependem fortemente dos valores de escolhidos de parâmetros e de T , U e L principalmente.
- Por exemplo, para $A_H = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, os termos de atrito seriam desprezados nas 3 componentes da EGM.
- Porcentagem significativa e relevante dos movimentos de **submesoescala** da faixa de $L=1-2 \text{ km}$ não são hidrostáticos. Mas, para $L=10 \text{ km}$, o limite superior, o balanço na vertical é sim hidrostático.
- O mesmo princípio se aplica às pequenas escalas, onde existem ondas grandes (as de água rasa) que são hidrostáticas na vertical.
- Já meso e grande escalas, por serem escoamentos em quase-equilíbrio são sempre hidrostáticos.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



Movimento Geostrófico

Movimento Geostrófico: O Balanço

- Como visto no tema anterior, a EGM sob a consideração de δ , Ro , E_V , E_H , $\hat{\beta} \ll 1$ nos leva a um balanço dominante que consiste em

$$\begin{aligned}
 -f_0 v &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{O}(Ro) \\
 f_0 u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{O}(Ro) \\
 \frac{1}{\rho_0} \rho g &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{O}(\delta^2 Ro).
 \end{aligned}$$

- Podemos assim dizer que em ordem mais baixas [$\mathcal{O}(Ro^0)$], o balanço dominante é entre a força de Coriolis e a força do gradiente de pressão horizontal. Os demais termos, de ordem $\mathcal{O}(Ro)$, são pelo menos 100 vezes menores que estes dois. Na vertical, o balanço é aproximadamente hidrostático.

Movimento Geostrófico: Definição

- Semanticamente, o termo geostrófico significa **geo** – Terra e **trófico** – que se nutre de. Ou seja, é o movimento que “se alimenta” a rotação do planeta.
- Como vimos, o **movimento geostrófico é estritamente horizontal**. E exhibe uma situação de equilíbrio (ou quase-equilíbrio) dinâmico.
- Consideremos novamente a EGM como uma expressão nos fluidos da segunda Lei de Newton: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Vimos também que $\vec{a} = \mathcal{O}(Ro)$.
- Ou seja, a aceleração é diminuta, o que nos leva a uma situação de quase-equilíbrio.
- A resultante das forças atuantes na parcela de fluido é praticamente zero: $\frac{\vec{F}}{m} \approx 0$
- Logo, $\implies \vec{F} \approx 0$, o que nos permite reescrever $\vec{C} + \vec{P} \approx 0$.
- Trata-se de um estado de quase-equilíbrio onde as forças de Coriolis e do gradiente de pressão horizontal se equilibram. No entanto, este **não é um estado de equilíbrio estático** (estado de repouso). **É um estado de movimento**, pois a força de Coriolis só atua sobre parcelas em movimento!

O Movimento Geostrófico e a Equação da Continuidade

- Escrevamos agora a EGM tomando o movimento da ordem mais baixa e eliminando o balanço hidrostático exato envolvendo \bar{p} e $\bar{\rho}$.
- As componentes zonal, meridional e vertical da EGM em termos da pressão geostrófica \tilde{p} e do desvio de densidade $\tilde{\rho}$ em balanço geostrófico aproximado, obtemos

$$-f_0 v_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

$$f_0 u_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho_0} \tilde{\rho} g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

- A equação da continuidade foi incluída e se resume à **não-divergência horizontal**.

O Movimento Geostrófico: Função de Corrente

- A condição de não-divergência horizontal permite a definição de uma função de corrente geostrófica ψ , cujas relações com as velocidades são dadas por

$$v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad e \quad u_g = - \frac{\partial \psi}{\partial y} .$$

- A mera comparação entre as eqs. do movimento geostrófico reescritas como

$$v_g = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right) \quad e \quad u_g = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right)$$

- e a definição da função de corrente nos leva a concluir que

$$\psi = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} .$$

- Ou seja, as linhas de corrente são coincidentes com as isóbaras!

Movimento Geostrófico: Escala

- Vimos em aulas passadas que:

$$p(x, y, z, t) = \underbrace{\bar{p}(z)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{p}(x, y, z, t)}_{\text{geostrófica}}.$$

- E que a escala da pressão geostrófica é

$$\tilde{P} = (\rho_0 L) f_0 U.$$

- Invocando a eq. hidrostática, obtemos a escala para o desvio de densidade, que está em balanço geostrófico:

$$\tilde{\rho} = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_0 U f_0 L}{gH}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_0 f_0 \Psi}{gH}\right).$$

O Movimento Geostrófico Barotrópico

- **O movimento geostrófico** é classificado em função do tipo de força do gradiente horizontal de pressão – **barotrópico ou baroclínico**.
- Começamos explorando o movimento geostrófico barotrópico assumindo oceano homogêneo e a pressão geostrófica dada por

$$\tilde{p}(x, y) = \rho_0 g \eta.$$

- As relações geostróficas então se tornam

$$\begin{aligned} -f_0 v_g &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ f_0 u_g &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} . \end{aligned}$$

- Notem que as velocidades geostróficas barotrópicas apenas variam bidimensionalmente em função de ser $\eta = \eta(x, y)$ somente.

O Movimento Geostrófico Barotrópico

- A função de corrente geostrófica barotrópica é dada por

$$\psi = \frac{g}{f_0} \eta$$

- Já a componente vertical da equação do mov. geostrófico barotrópico é

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = 0$$

- Combinando as duas equações anteriores, chegamos a

$$\frac{f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

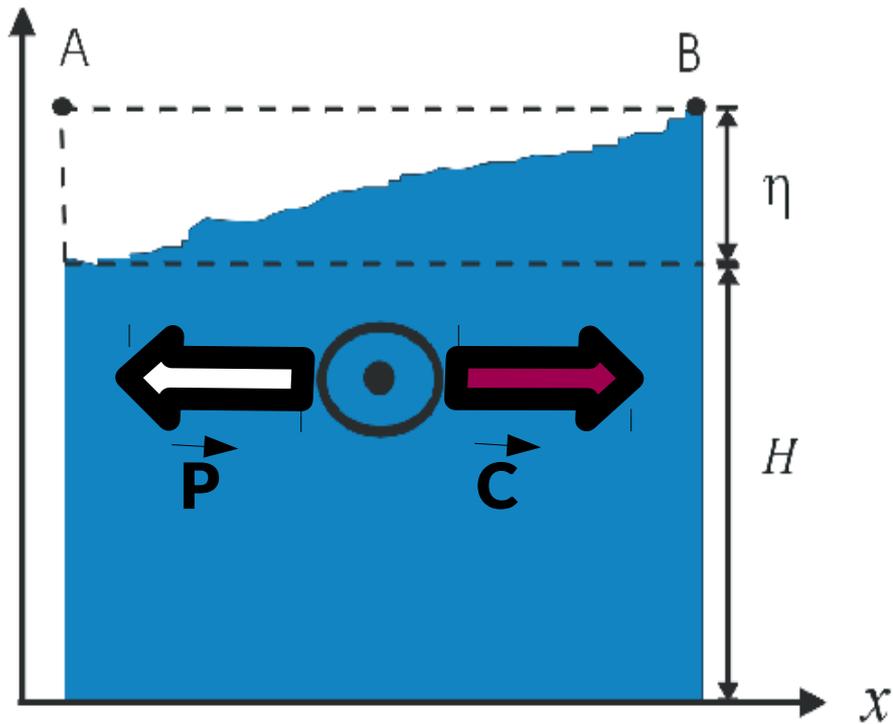
- Tomando $\left[-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right]$ da equação acima, obtemos:

$$\left[\frac{\partial u_g}{\partial z}, \frac{\partial v_g}{\partial z} \right] = 0$$

- Este princípio que confere ao mov. geostrófico barotrópico uma rigidez vertical é denominado como **Teorema de Taylor-Proudman**.

O Movimento Geostrófico Barotrópico

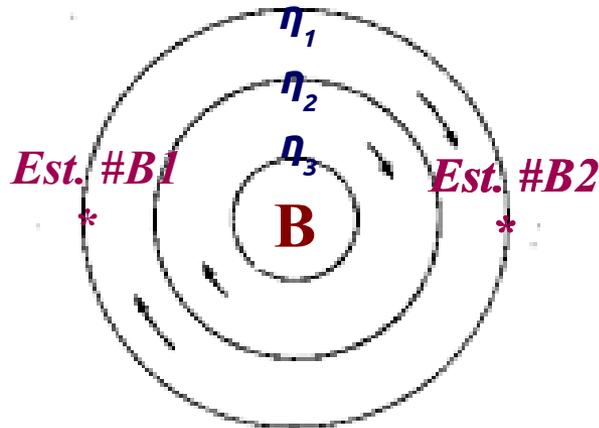
- Consideremos aqui o caso simples em que $\eta = \eta(x)$.
- O nível do mar sendo mais alto na estação **B** do que na **A**, a força do gradiente horizontal de pressão aponta para oeste.
- Como há equilíbrio entre a a força do gradiente horizontal de pressão e a força de Coriolis, a última precisa ter mesma magnitude e sentido oposto à primeira.
- Por estarmos no hemisfério sul, a força de Coriolis está sempre à esquerda do movimento.
- Assim, a corrente geostrófica barotrópica, que é invariável na vertical, aponta no sentido de sair do *slide* (ou para sul, se a orientação da seção for zonal).



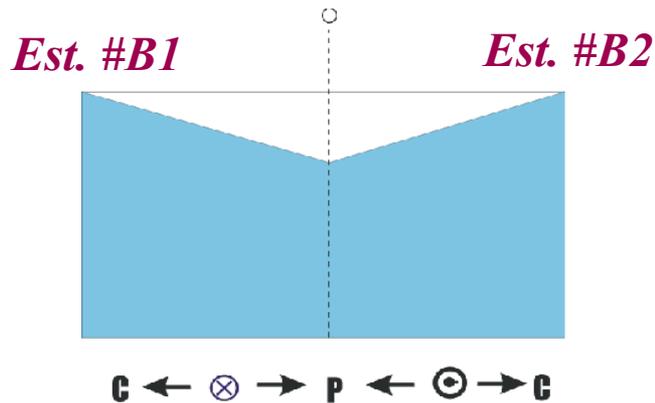
O Movimento Geostrófico Barotrópico

ciclônico

$$\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$$

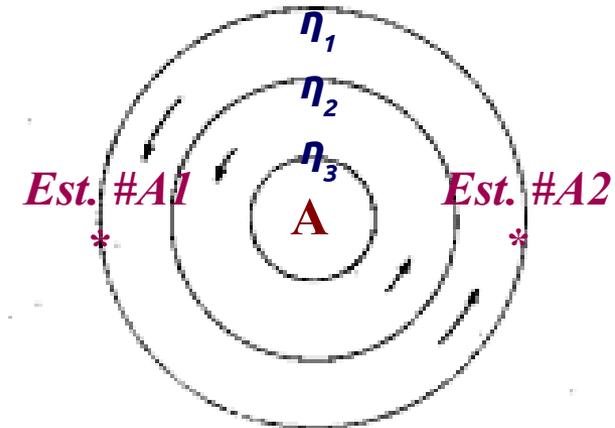


Região de baixa pressão

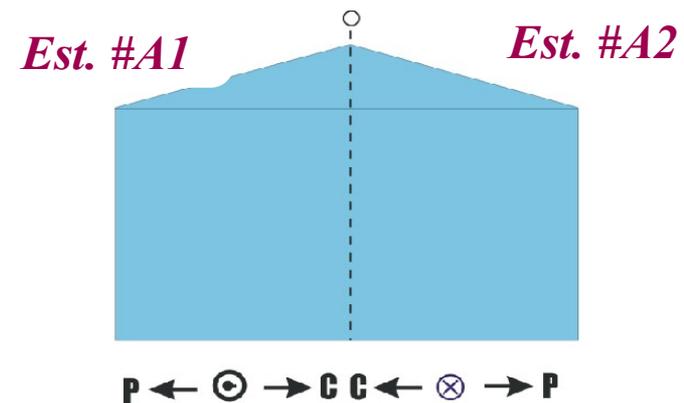


anticiclônico

$$\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$$



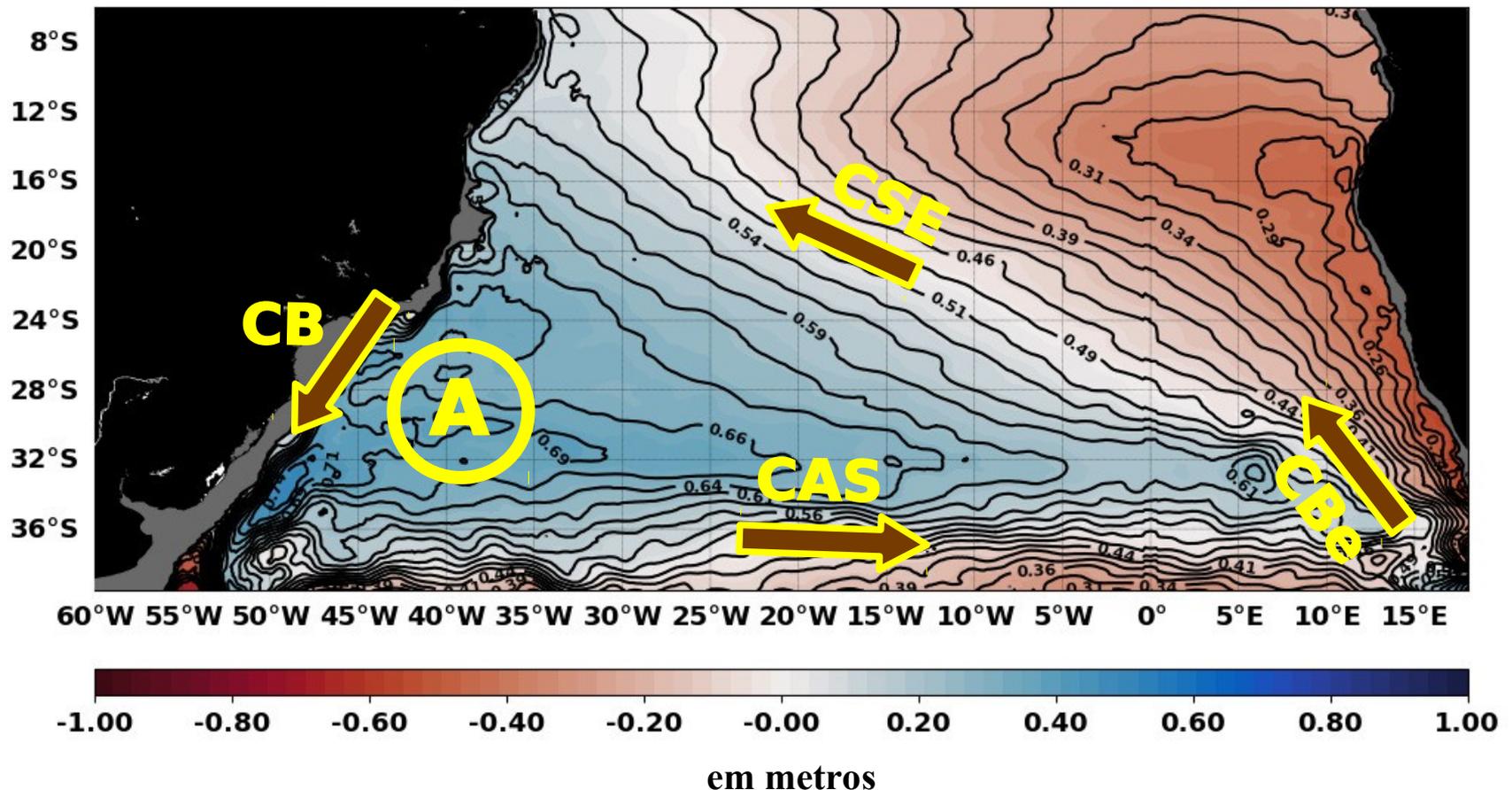
Região de alta pressão



Hemisfério Sul

O Movimento Geostrófico Barotrópico

Altura as Superfície do Mar – AVISO (1993-2019)



CB-Corrente do Brasil, CAS-Corrente do Atlântico Sul, CBe-Corrente de Benguela, CSE-Corrente Sul Equatorial

O Movimento Geostrófico Baroclínico

- Agora, examinemos o caso em que o movimento geostrófico é baroclínico e que a topografia da superfície do oceano devido a esses movimentos são muito pequenas se comparada aos do movimento geostrófico barotrópico.
- Assim, se fizermos $\eta=0$, eliminaremos a componente barotrópica do movimento e ficaremos apenas com a baroclínica para explorar.
- As relações de pressão e densidade, no presente caso, são dadas por

$$p(x, y, z) = \underbrace{\bar{p}(z)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{p}(x, y, z)}_{\text{geostrófica}}$$
$$\rho(x, y, z) = \underbrace{\bar{\rho}(z)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{\rho}(x, y, z)}_{\text{geostrófica}}$$

- Os campos de pressão e densidade geostróficas variam tridimensionalmente no oceano baroclínico.

O Princípio do Vento Térmico

- Derivemos agora um outro teorema de suma importância na dinâmica geostrófica baroclínica, tal qual foi Taylor-Proudman para o barotrópico.
- Para tanto, considere as três equações do movimento geostrófico baroclínico:

$$\underbrace{v_g = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right)}_{\text{zonal}}; \underbrace{u_g = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right)}_{\text{meridional}}; \underbrace{\frac{g}{\rho_0 f_0} \tilde{\rho} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0 f_0} \right)}_{\text{vertical}}.$$

- Usando o Teorema de Swartz, derivemos as componentes horizontais em relação a z e substituamos a eq. hidrostática nestas para obter

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y}.$$

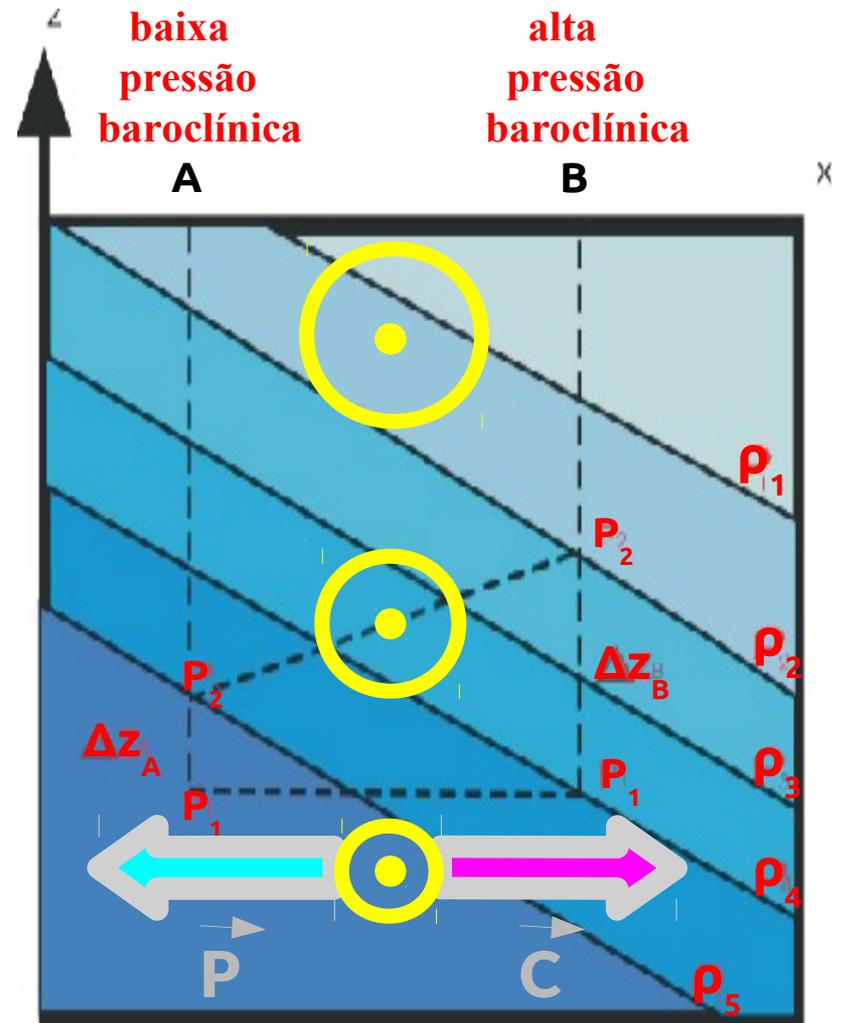
- Por terem sido derivadas inicialmente para meteorologia, as relações acima são conhecidas como as relações do vento térmico, visto que temperatura potencial é a variável de estado para a atmosfera.

O Princípio do Vento Térmico

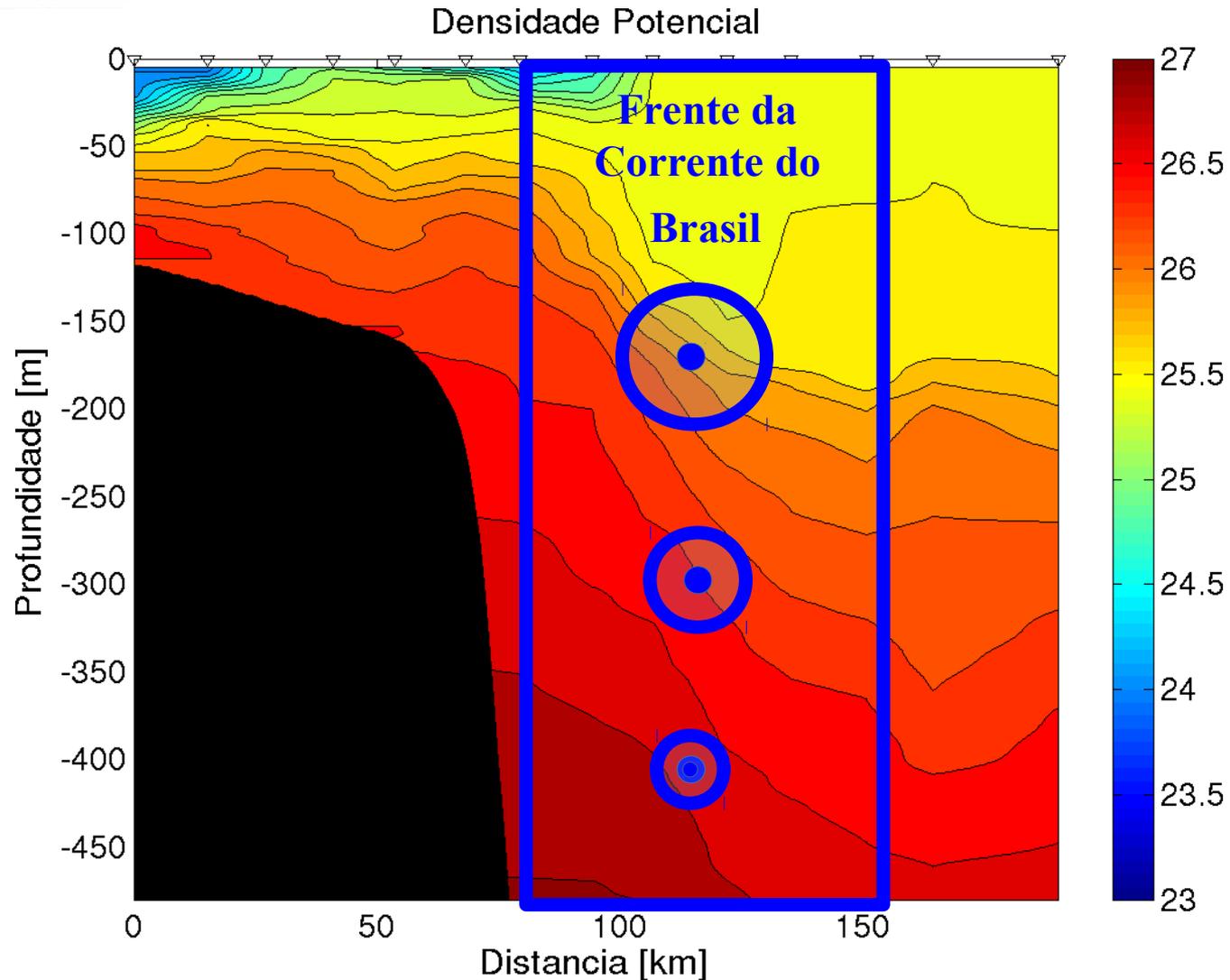
- O vento térmico estabelecer que a **corrente geostrófica só pode cisalhar na vertical caso haja gradiente lateral de densidade.**
- Assim, reexaminemos a figura ao lado vista quando definimos gradiente de pressão baroclínico, mas agora sob

$$\underbrace{\frac{\partial v_g}{\partial z}}_{<0} = - \frac{g}{\underbrace{\rho_0 f_0}_{<0}} \underbrace{\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}}_{<0}$$

- Notem que o gradiente diminui com o aumento da profundidade. Ou seja a velocidade se torna mais negativa à medida que a profundidade se torna menos negativa!



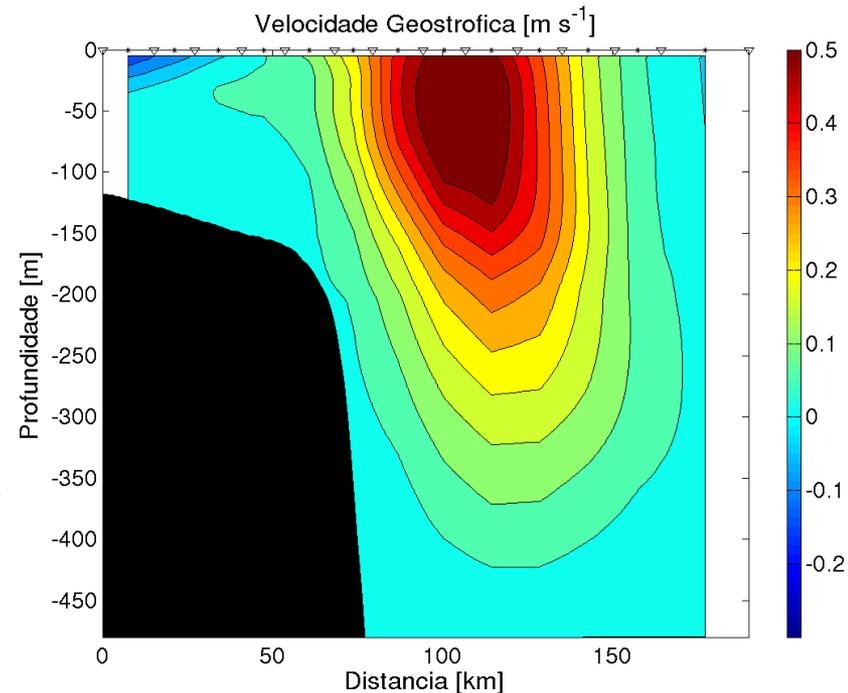
O Vento Térmico em Escoamento Reais



O Método Dinâmico

O Método Dinâmico

- Se conhecemos o campo de densidade e conhecermos ao menos a velocidade em uma profundidade, não seria possível integrar a expressão do vento térmico e obter o campo de velocidade geostrófica a partir dos perfis de temperatura e salinidade obtidos com CTD?
- A resposta é **sim**. Isso foi pensado no início do século passado por Sandström e Helland-Hansen (1903) do mesmo grupo de pesquisa de Nansen. **É o chamado Método Dinâmico.**
- A seção de velocidades ao lado corresponde à aplicação do Método Dinâmico à seção de densidade do slide anterior.
- Notem que o núcleo de velocidades da Corrente do Brasil coincide com a posição da frente de densidade.
- Aqui, assumiu-se que em torno de 480 m, zona de transição entre correntes a velocidade é zero. É o chamado **nível de movimento nulo**.



O Método Dinâmico -Formulação-

- A integração vertical entre o nível de interesse e aquele estabelecido como nível de movimento conhecido ou nulo $z=-H_0$ nos conduz a

$$v(z) - v(-H_0) = -\frac{g}{f_0} \int_{-H_0}^z \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz^*.$$

- Iniciemos a transformação para coordenadas isobáricas utilizando a definição de volume específico e examinando o integrando:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha^{-1}) = \alpha^{-2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \rho^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

- E substituindo,

$$v(z) - v(-H_0) = \frac{1}{f_0} \int_{-H_0}^z \frac{\partial \alpha}{\partial x} [-\rho g dz^*].$$

- Note que o termo entre colchetes na integral é essencialmente dp^* , via equação hidrostática.

O Método Dinâmico -Formulação-

- Assim, usamo-a e obtemos:

$$v(p) - v(p_0) = \frac{1}{f_0} \int_{p_0}^p \frac{\partial \alpha}{\partial x} dp^*$$

- Ou, deslocando a derivada,

$$v(p) - v(p_0) = \frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_{p_0}^p \alpha dp^*}_{\Phi(x,y,p|p_0)}$$

- A integral então toma a forma do geopotencial Φ referenciado a um nível isobárico de movimento conhecido $p=p_0$,

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, p) &= \int_{p_0}^p \alpha dp^* \\ &= \underbrace{\int_{p_0}^p \bar{\alpha}(p) dp^*}_{\bar{\Phi}(p|p_0)} + \underbrace{\int_{p_0}^p \delta_\alpha(x, y, p) dp^*}_{\Delta\Phi(x,y,p|p_0)}, \end{aligned}$$

- onde o primeiro termo é o geopotencial padrão e o segundo, sua anomalia.

O Método Dinâmico -Formulação-

- Assim, novamente com base em

$$\Phi(x, y, p|p_0) = \bar{\Phi}(p|p_0) + \Delta\Phi(x, y, p|p_0).$$

- Verificamos que, em coordenadas isobáricas, o geopotencial padrão $\bar{\Phi}$ corresponde à pressão hidrostática \bar{p} das coordenadas cartesianas. Por conseguinte, a anomalia do geopotencial $\Delta\Phi$ corresponde à perturbação de pressão p' . No caso do balanço geostrófico, a perturbação da pressão é a pressão geostrófica, assim como o será também.

$$[u, v] = \left[-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\Delta\Phi}{f_0}$$
$$\psi = \frac{\Delta\Phi}{f_0}.$$

- Fica claro pelas relações geostróficas em isobáricas, que a força do gradiente de pressão se torna a força do gradiente do geopotencial. Isso é consequência de estarmos ao longo de uma superfície isobárica avaliando as variações de uma superfície de nível.

O Método Dinâmico -Aplicação-

- Mas, vamos agora nos dedicar a entender como “transformamos” perfis de temperatura, salinidade e pressão medidos pelo CTD em informações sobre velocidades geostróficas.
- O primeiro passo é escrever a equação do Método Dinâmico aproximada por acréscimos finitos, ou seja, uma aproximação não-infinitesimal que nos permite calcular o perfil de velocidade geostrófica a partir da discretização da fórmula:

$$\begin{aligned}v(p_I) - v(p_0) &= \frac{1}{f_0 \Delta l} \left[\sum_{i=0}^I \delta_{\alpha B}(p_i) \cdot \Delta p_i - \sum_{i=0}^I \delta_{\alpha A}(p_i) \cdot \Delta p_i \right] \\ &= \frac{1}{f_0 \Delta l} [\Delta \phi_B(p_I) - \Delta \phi_A(p_I)] .\end{aligned}$$

- A expressão acima aplica o método entre as estações *A* e *B*, considerando dois perfis de CTD processados a intervalos de Δp dbar e consistindo de $i=0, 1, 2, 3 \dots N-1$ profundidades. Numa i -ésima profundidade I , a velocidade é obtida subtraindo a anomalia do geopotencial em cada estação e integrada verticalmente entre p_0 e p_i .

O Método Dinâmico -Aplicação-

- Vamos agora desenvolver uma “receita” para a aplicação do método. Antes estabeleçamos que:
 - a) o perfil da velocidade geostrófica é sempre obtido na distância média entre duas estações hidrográficas;
 - b) este perfil é sempre da componente da velocidade geostrófica normal ao par das estações;
 - c) os valores de velocidade são obtidos em pontos intermediários a dois níveis contíguos de pressão;
 - d) deve-se adotar um valor médio de f_0 para a região de estudo, a menos que esta esteja próxima ao cinturão de determinação equatorial onde β é muito grande.
 - e) para evitar contaminação por maré interna, a distância entre as estações deve ser aquela de aproximadamente o raio de deformação interno local.

O Método Dinâmico -Aplicação-

- Ok, então comecemos nossa receita:
 - a)** Usando as rotinas **Gibbs seawater** para Matlab ou Python, calculamos o perfil vertical anomalia do volume específico para cada estação a partir da TEOS10. A rotina é a **gsw_svanom**.
 - b)** Procedemos ao cálculo da anomalia do geopotencial utilizando a fórmula dada. Caso preferimos, usemos a rotina **gsw_gpan**. Esta calcula o valor de $\Delta\Phi$ relativamente à superfície. Para um nível de referência p_0 em profundidade, basta fazer: $\Delta\Phi(p|p_0)=\Delta\Phi(p_0|0)-\Delta\Phi(p|0)$.
 - c)** Estimemos a velocidade geostrófica usando a fórmula do Método Dinâmico. Podemos também utilizar a rotina **gsw_gvel**.
 - d)** Por fim, se tivermos informações de velocidade no nível de referência, somemo-o ao longo de toda a coluna de água às velocidades calculadas tão somente pelas observações hidrográficas.

O Método Dinâmico

-O nível de referência-

- Por tudo que falamos, devemos observar que a boa obtenção dos padrões de velocidade geostrófica calculadas a partir de T e S com os dados de correntes é dependente da escolha do nível de referência.
- Uma primeira questão é se o nível de referência ao longo de uma radial deve ser constante ou variável, ou seja, se $p_0(x,y)=const$. A resposta é dividida em duas partes. Caso desejemos uma seção de velocidades, sim, deve ser variável. Caso desejemos mapear topografia dinâmica ou ψ , precisa ser mantido constante ao longo de toda a malha de estações na maioria dos casos.
- Em sua original idealização e no caso mais frequente em que não temos observações de velocidade auxiliares, devemos utilizar o conceito de **nível de movimento nulo**, onde arbitramos que $v_g(p_0(x,y))=0$.
- Outra possibilidade é, como já dito, considerar um **nível de movimento conhecido** onde a velocidade foi obtida por perfilagem, por exemplo, por ADCP de casco. Ou seja, algo como $v_g(p_0(x,y))=v_{obs}(p_0(x,y))$.

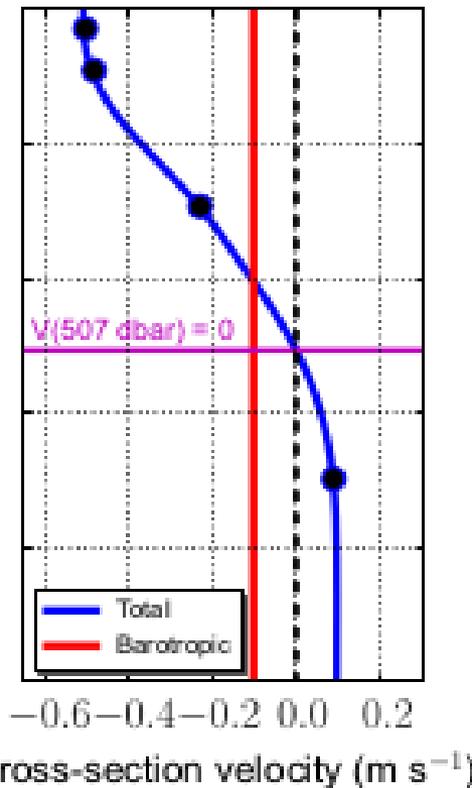
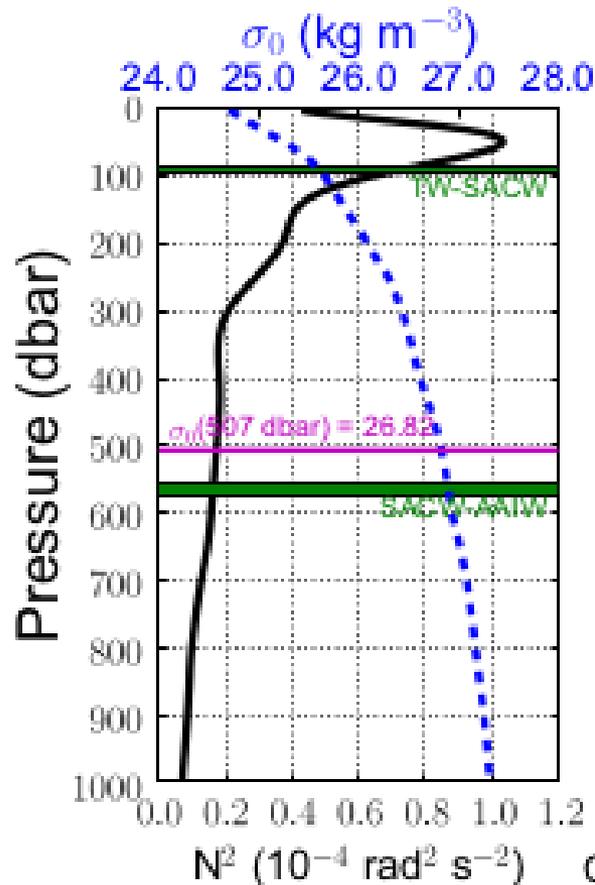
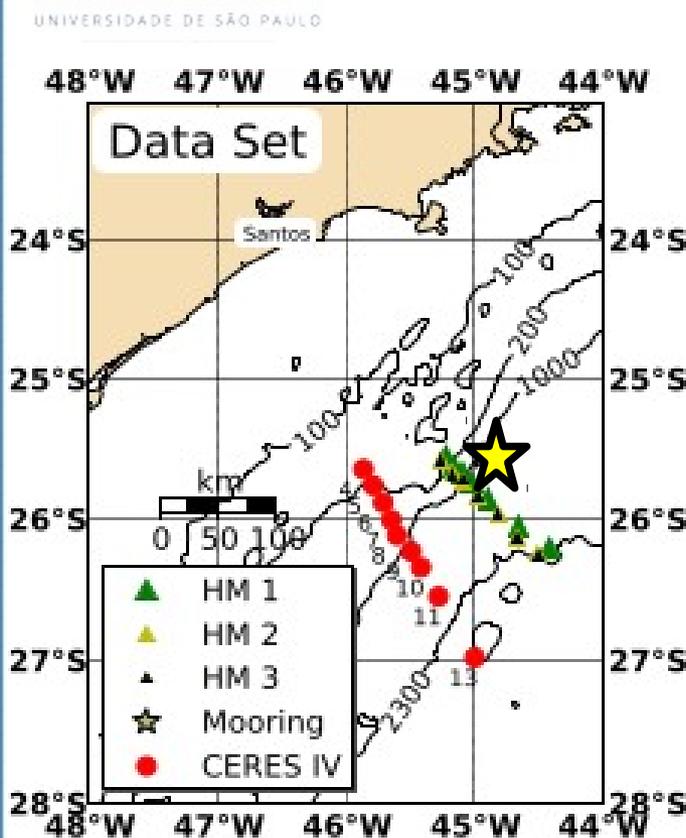
O Método Dinâmico

-O nível de movimento nulo-

- Este e os próximos slides irão utilizar o artigo de ***Biló et al. (2014)*** para demonstrar a aplicação do Método Dinâmico.
- Vamos primeiro examinar e utilizar o caso em que consideraremos o nível de movimento nulo variável com a localidade. Como escolhê-lo?
- Se há conhecimento prévio na região e as interfaces de massas de água rastreiam as interfaces entre as correntes, são a posição das isopicnais de interface que devemos considerar.
- Consideremos o estudo de ***Biló et al. (2014)*** que buscava mapear a CB e a CCI na Bacia de Santos, ao largo de Santos. Os autores dispunham de cruzeiros hidrográficos históricos (1992-1993) e um fundeio correntográfico da mesma época assentado sobre a isóbata de 1000 m.
- Como veremos no próximo slide, os autores compararam o padrão médio de correntes do fundeio, a profundidade de inversão das correntes e a relacionaram com a interface ACAS-AIA.

O Método Dinâmico

-O nível de movimento nulo-



Fonte: Biló et al. (2014)

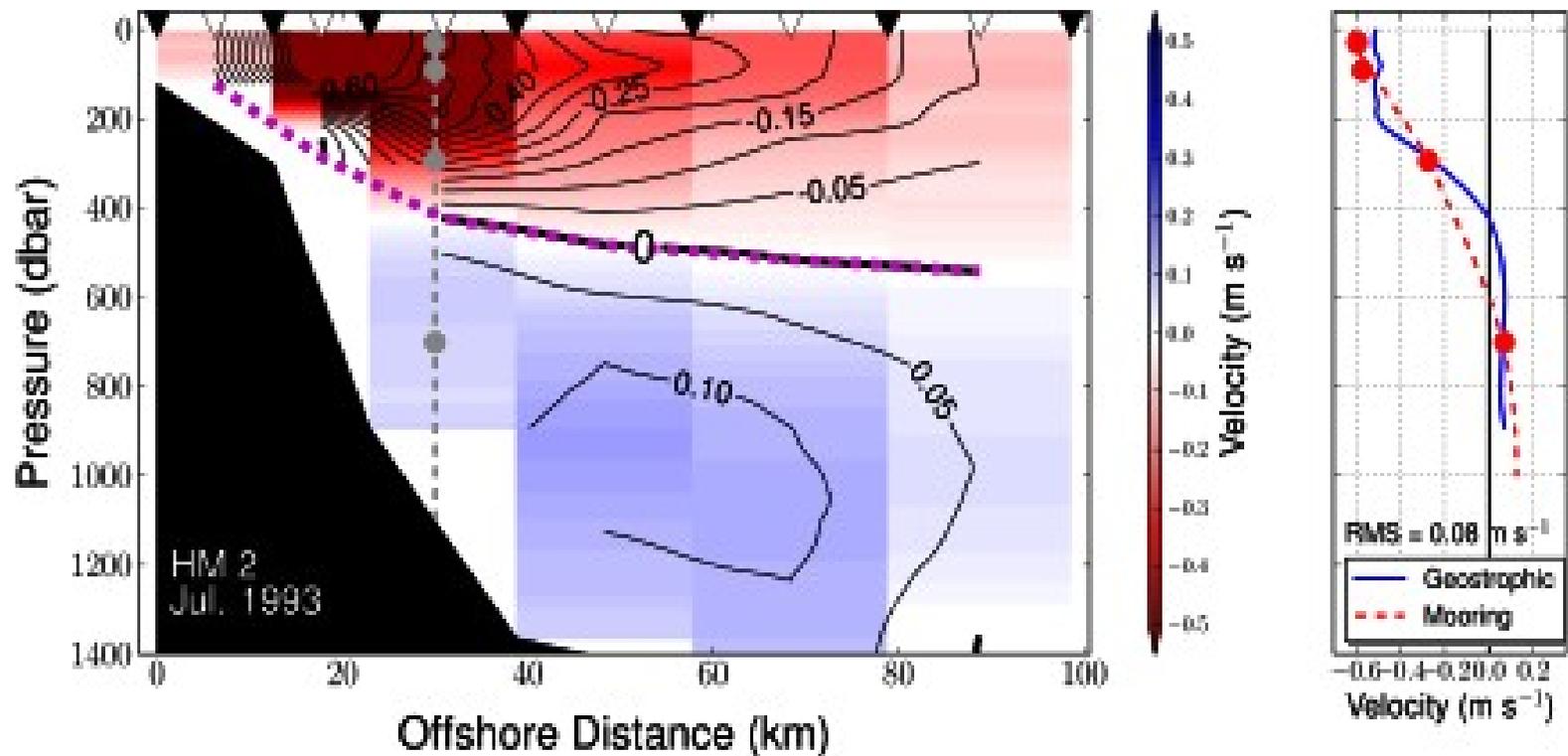


Adotamos aqui então a isopical de $26,90 \text{ kg m}^{-3}$, associada à interface ACAS-AIA e com profundidade média de **560 m**.

O Método Dinâmico

-O nível de movimento nulo-

- Resultados obtidos durante o cruzeiro HM2 do clássico Projeto COROAS usando o nível de movimento nulo associado à isopical de $26,90 \text{ kg m}^{-3}$.

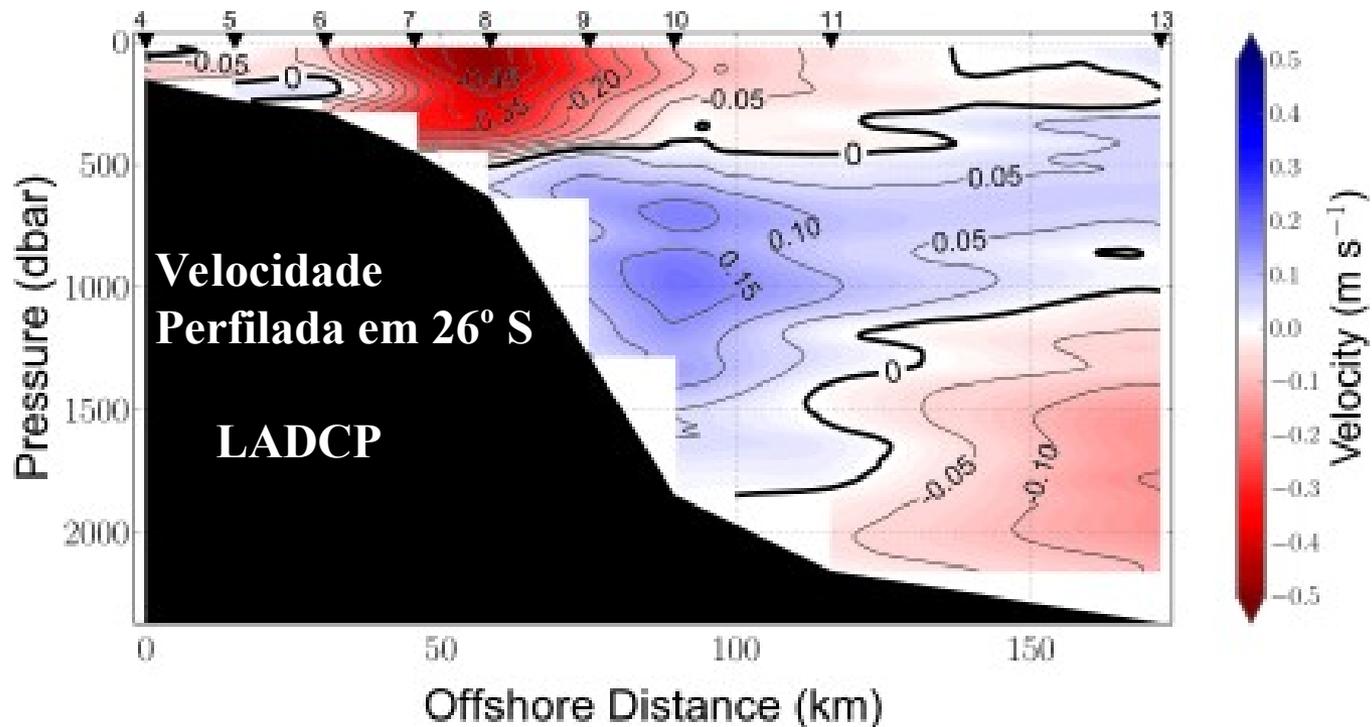


Fonte: Biló et al. (2014)

O Método Dinâmico

-O nível de movimento conhecido-

- *Biló et al. (2014)* usou uma seção hidro-correntográfica em 26° S para empregar vários tipos de dados sinóticos no monitoramento da Corrente do Brasil na região do pólo do Pré-sal, na Bacia de Santos.



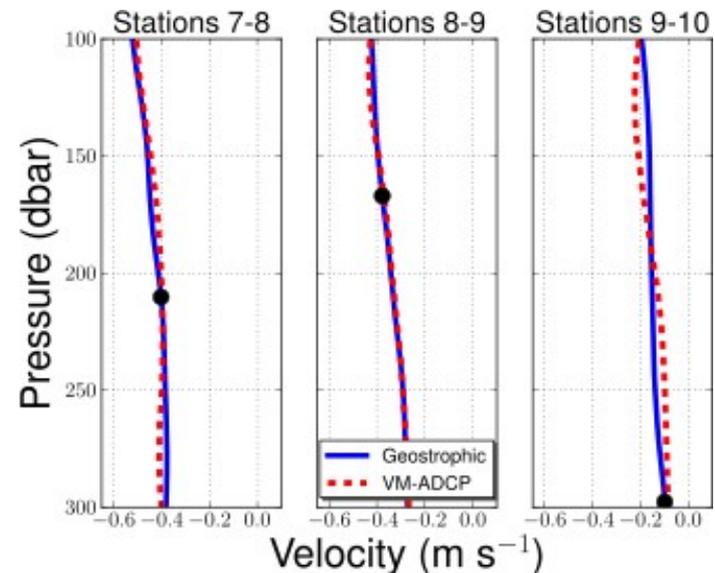
O Método Dinâmico

-O nível de movimento conhecido-

- *Biló et al. (2014)* utilizou a técnica de encontrar um nível de referência raso de *Pickart & Lindstrom (1994)* para utilizar como nível de movimento conhecido no Método Dinâmico.
- A técnica é simples: escolhemos várias profundidades onde o perfil médio do cisalhamento vertical de velocidades ADCP é igual ao cisalhamento das correntes geostroficas estimadas pelo método dinâmico clássico.
- Para decidir entre os possíveis candidatos, escolhemo-o usando mínimos quadrados. O resultado para o ADCP de 75 kHz e alcance de cerca de 350 m de profundidade é mostrado abaixo.

Stations	Offshore distance (km)	Bathmetry (m)	Reference Pressure (dbar)
4-5	8	196	128
5-6	23	325	133
6-7	38	587	172
7-8	52	937	210
8-9	66	1,418	167
9-10	82	1,876	298
10-11	102	2,299	212
11-13	143	2,431	160

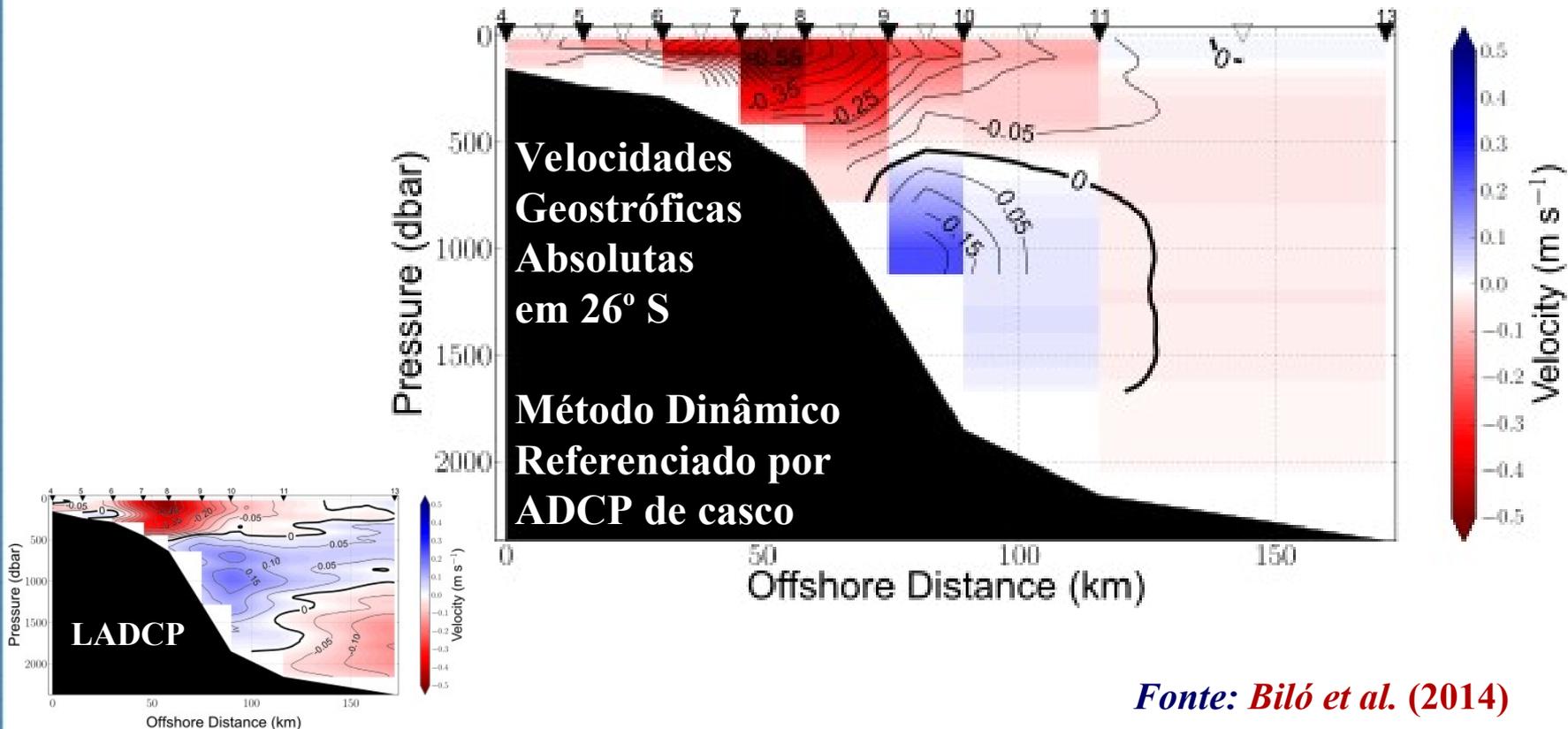
Fonte: *Biló et al. (2014)*



O Método Dinâmico

-O nível de movimento conhecido-

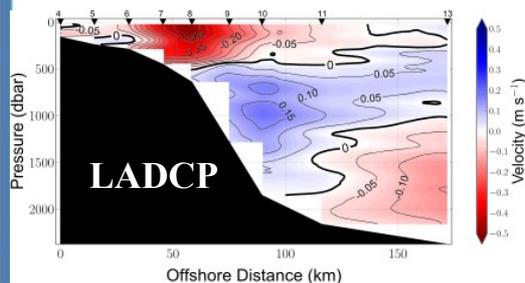
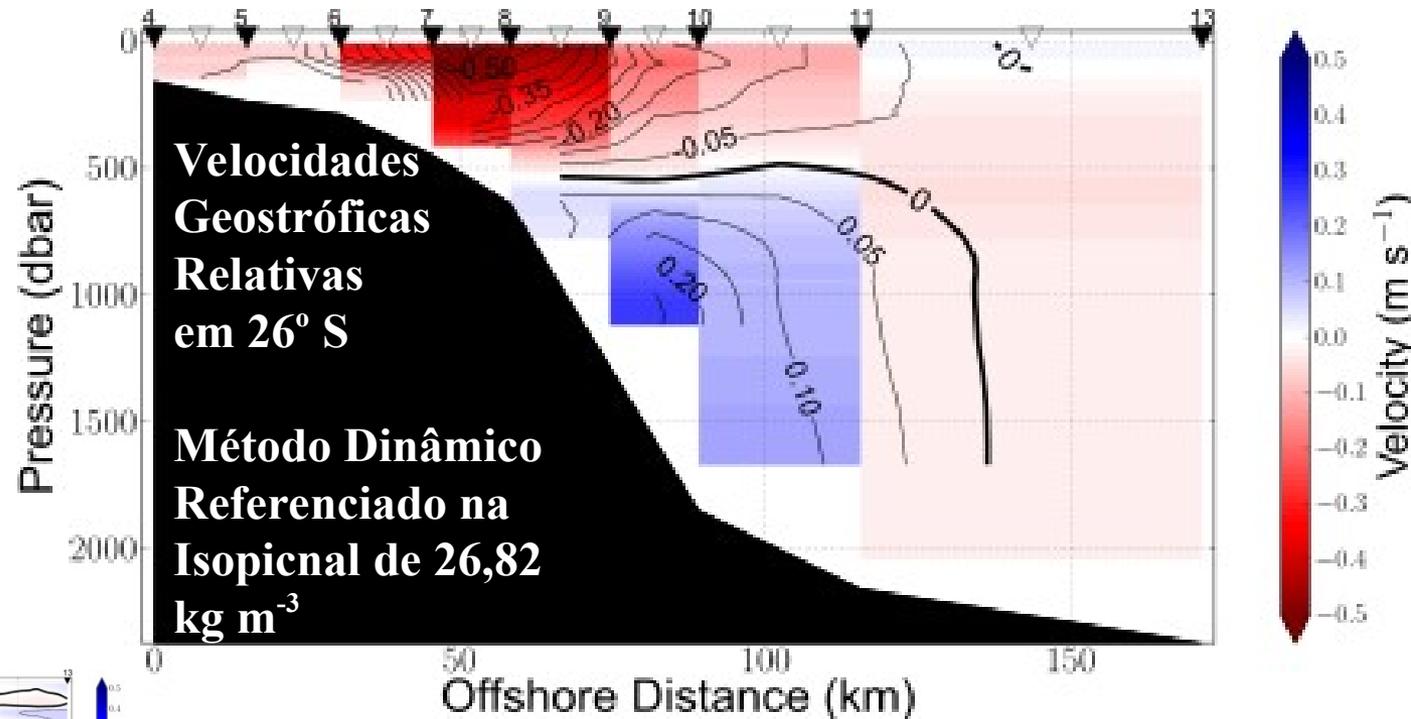
- Os autores calcularam a velocidade geostrófica até cerca de 1800 m.
- O resultado abaixo mostra que o padrão de correntes é corretamente reproduzido, embora as velocidades associadas a Corrente de Contorno Oeste Profunda estejam bastante subestimadas.
- O núcleo da CCI aparece mais próximo ao talude do que nas velocidades perfiladas.



O Método Dinâmico

-O nível de movimento nulo -

- Na figura abaixo, os autores calcularam o Método Dinâmico da forma clássica, referenciando na isopical de $26,82 \text{ kg m}^{-3}$.



O Método Dinâmico -Topografia Dinâmica -

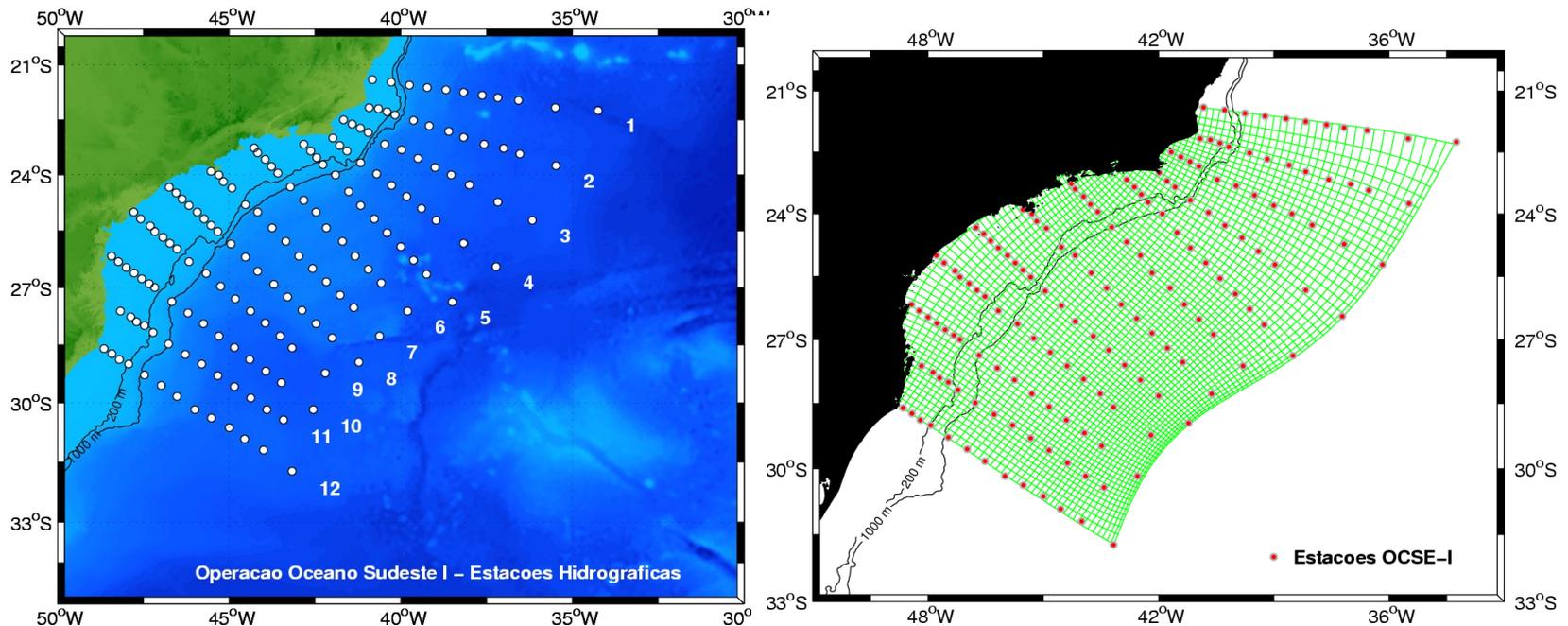
- O Método Dinâmico, quando aplicado a uma radial hidrográfica, só provê a velocidade normal a esta radial.
- Entretanto, se o cruzeiro dispuser de uma malha de estações, podemos usar

$$\psi = \frac{\Delta\Phi}{f_0}.$$

- Assim, obtemos um mapa da função de corrente geostrófica num dado nível isobárico. Logo, as duas componentes de velocidade são estimadas, obviamente.
- Nesta forma p_0 precisa ser mantido constante ao longo de toda a região a ser mapeada.
- Escolhemos, por exemplo, a pressão média da isopicnal de 26,82 kg m⁻³.

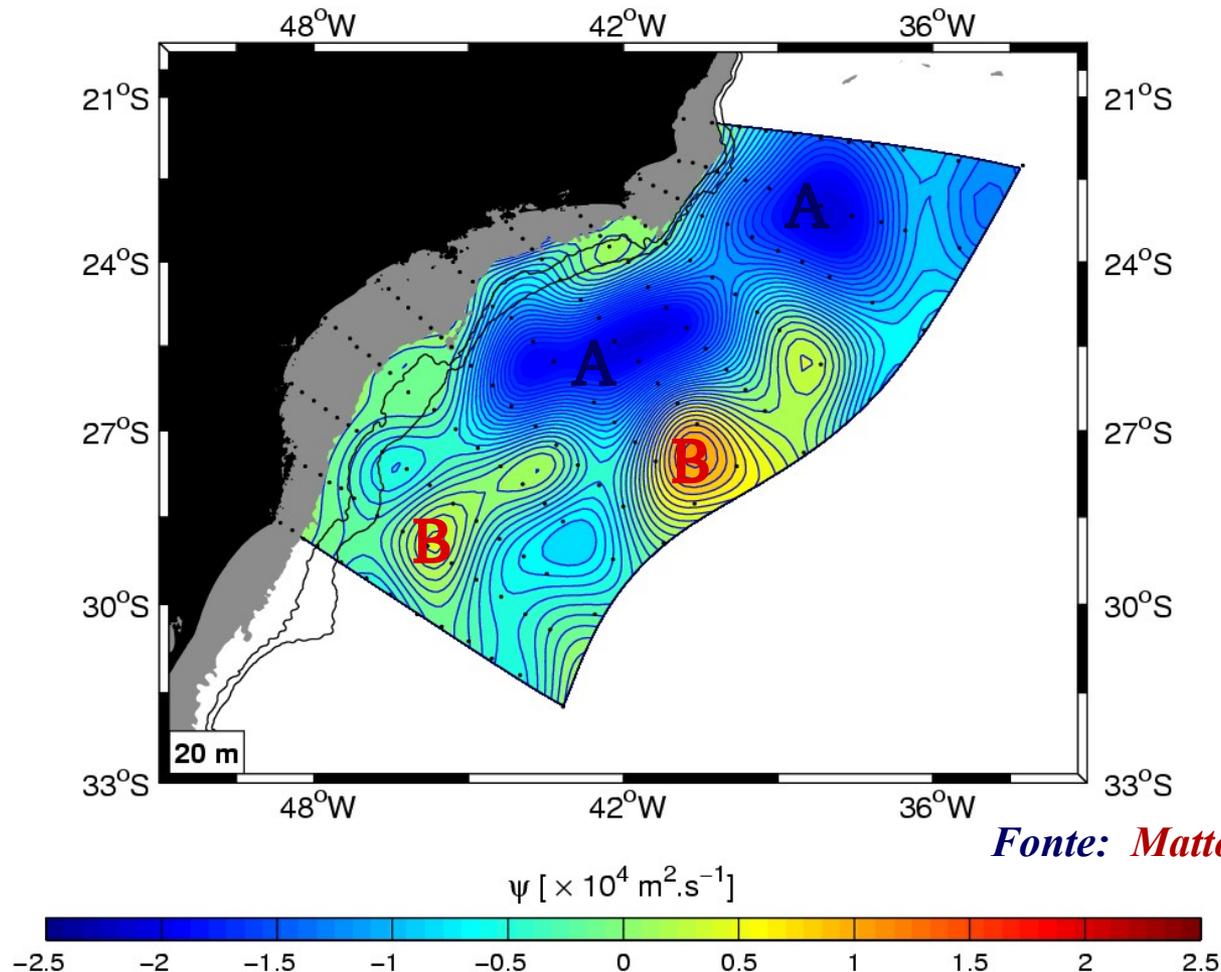
O Método Dinâmico -Topografia Dinâmica -

- Abaixo está representada a malha de estações oceanográficas do cruzeiro **Oceano Sudeste I**, realizado pelo N.Oc. Antares da Marinha do Brasil.
- Ao lado desta, está a grade curvilínea de interpolação sobre a qual o mapa de função de corrente geostrófica para o nível de superfície será construído.



O Método Dinâmico -Topografia Dinâmica -

- Abaixo está representada o campo de função de corrente geostrófica de superfície, referenciado em 560 dbar,



Fonte: Mattos (2006)

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



A Teoria de Ekman

A Importância do Atrito

- Como visto no tema 6, a EGM sob a consideração de $\delta, Ro, E_V, E_H, \beta \ll 1$ nos leva a um balanço geostrófico.
 - Em particular, ao considerarmos $H=10^3 \text{ m}$ e $L=10^5 \text{ m}$, os termos de atrito turbulento vertical e horizontal se tornam $O(Ro^2)$. E isso até vale para fenômenos de submesoescala e de pequena escala já sobre a influência da força de Coriolis.
 - Mas isso significaria que o atrito pode ser negligenciado no oceano? O oceano seria então como que invíscido na vasta maioria de seus movimentos?
 - Ora, todos vemos que basta o vento soprar sobre o oceano que correntes impulsivas se formam, o mar se levanta e a escala de Beaufort aumenta. Como então?
- ➔ Talvez estejamos simplesmente olhando para as escalas de profundidade H e de comprimento L inadequadas para verificar a atividade direta da viscosidade.

As Camadas-Limite de Prandtl

- Ludwig Prandtl, no início do século XX postulou que a viscosidade não é sentida homogeneamente no fluido. Ao invés disso, o efeito do atrito seria sentido fortemente apenas nas interfaces do fluido, ou seja, nos limites de contato com suas interfaces. A essas regiões, geralmente bem mais delgadas que o corpo de fluido integralmente, ele chamou de “*camada-limite*”.
- Assim, no fluido geofísico, de acordo com a teoria de Prandtl, seriam dois os regimes de escoamento:
 - o *regime interior* – região longe dos limites físicos (interfaces) do fluido, onde o efeito de viscosidade ou é muito pequeno (pela presença de cisalhamentos de correntes) ou pode ser totalmente negligenciado.
 - as *camadas-limite* – próxima ao limites físicos, onde a viscosidade tende a levar a velocidade à zero junto a esse contorno. É a expressão da condição de contorno de não-escorregamento (ou no slip). No caso do limitefísico ser entre dois fluidos distintos, assume-se continuidade das tensões de cisalhamento entre eles.
- As camadas-limite irrotacionais têm espessuras que variam com tempo e a velocidade, ao passo que as rotacionais, tem espessura pré-estabelecida pela rotação ambiente.

O Número de Ekman

- Como vimos no tema 6, e aplicamos no tema 7, os números adimensionais representam razões entre termos da EGM e, portanto, ditam a relevância de dois termos no balanço dominante.
- Assim, ao tratarmos a espessura de fluido total como a escala vertical da viscosidade, o número de Ekman vertical é muito pequeno:

$$E_V = \mathcal{O}\left(\frac{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{fv}\right) = \frac{A_V}{(f_0 H^2)}$$

$$= \mathcal{O}(Ro^2) = 10^{-4}.$$

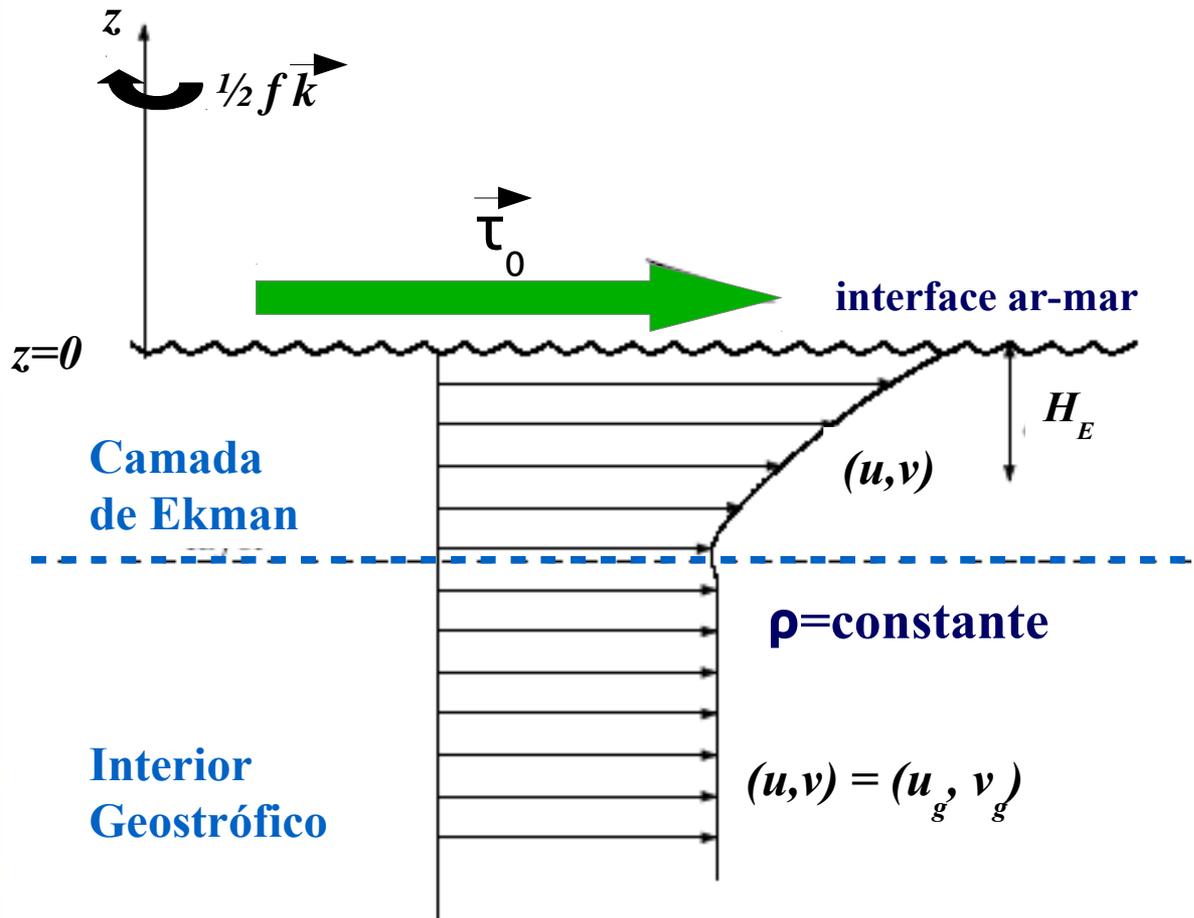
- Para que os termos de atrito turbulento tenham a mesma relevância da força de Coriolis, urge que consideremos $E_V = \mathcal{O}(1)$. Com isso, conseguimos estimar a ordem de grandeza da espessura da camada-limite rotacional H_E , onde o índice E se refere à Ekman.

$$E_V = \mathcal{O}(1) \implies \frac{A_V}{(f_0 H_E^2)} = 1$$

$$H_E = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{A_V}{|f_0|}}\right) = \mathcal{O}(10 \text{ m}).$$

o que nos leva a

A Camada de Ekman de Superfície: O Cenário



Na camada-limite:
 $(u, v) = (u_g + u_E, v_g + v_E)$

As Equações de Ekman

- A forma simplificada da EGM dentro da camada-limite de superfície, em suas componentes zonal e meridional, é dada por

$$\begin{aligned}
 -s|f_0|(v_g + v_E) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} \\
 s|f_0|(u_g + u_E) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

$$s = \frac{f_0}{|f_0|}$$

número hemisférico

- Por ser um sistema **linear**, podemos desmembrar as equações na parte geostrófica e na parte devido ao balanço de Ekman:

$$\begin{aligned}
 -s|f_0|v_g &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} & ; & & -s|f_0|v_E &= A_v \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} \\
 s|f_0|u_g &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} & ; & & s|f_0|u_E &= A_v \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

eq. geostrófica
eq. de Ekman

O Modelo de Ekman para a camada-limite de superfície

- Para a camada de superfície, as equações de Ekman

$$\begin{aligned} -s|f_0|v_E &= A_v \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau^x}{\partial z} \\ s|f_0|u_E &= A_v \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau^y}{\partial z} \end{aligned}$$

- são resolvidas em conjunto com as seguintes condições de contorno

$$\tau_0^x = \rho_0 A_v \frac{\partial u_E}{\partial z} \text{ e } \tau_0^y = \rho_0 A_v \frac{\partial v_E}{\partial z} \text{ em } z = 0$$

$$u_E \rightarrow 0 \text{ e } v_E \rightarrow 0 \text{ à medida que } z \rightarrow -\infty$$

- Essas duas condições nos garantem a continuidade das tensões entre atmosfera e oceano na superfície e que as velocidades de Ekman decaem a zero no interior geostrófico.

Solução do Modelo de Ekman (1)

- Resolvamos o modelo de Ekman da camada de superfície usando números complexos, tal qual Vagn Ekman o resolveu em 1902. Para tanto, definamos uma velocidade de Ekman que chamaremos de velocidade complexa definida por

$$\mathcal{V}_E = u_E + iv_E .$$

- Façamos agora *comp. x* + *i*comp. y* das Eqs. de Ekman para obter

$$s|f_0| \underbrace{(iu_E - v_E)}_{=i(u_E+iv_E)} = A_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_E + iv_E) .$$

- Usando a definição de velocidade complexa na equação acima, chegamos a

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{V}_E - i \frac{s|f_0|}{A_v} \mathcal{V}_E = 0 ,$$

cuja solução geral é

$$\mathcal{V}_E(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} .$$

Solução do Modelo de Ekman (2)

- Os argumentos dos termos exponenciais são encontrados via Método das Características e as constantes de integração por aplicação das condições de contorno.
- A equação característica correspondente à Eq. de Ekman é:

$$\lambda^2 - i \frac{s|f_0|}{A_V} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{i \frac{s|f_0|}{A_V}},$$

- que pode ser reescrita como

$$\lambda = \pm \sqrt{i} \sqrt{s} \sqrt{\frac{s|f_0|}{A_V}}.$$

- Agora devemos manipular a expressão acima para escrever a raiz do número complexo de forma mais “amigável”:

$$(1 + i)^2 = 2i \Rightarrow i = \frac{(1 + i)^2}{2} \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{(1 + i)}{\sqrt{2}}.$$

Solução do Modelo de Ekman (3)

- Devemos ainda tentar reescrever a raiz do número hemisférico para evitar a assimetria de forma das soluções para hemisférios sul e norte, ou seja,

$$\sqrt{i}\sqrt{s} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}} \cdot$$

- Assim, consideremos os casos dos dois hemisférios:

$$\begin{aligned} \text{para o HN } (s = 1) &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{is}{\sqrt{2}} \right) \\ \text{para o HS } (s = -1) &\Rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i^2}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{is}{\sqrt{2}} \right) \cdot \end{aligned}$$

- Como a solução das características tem duas soluções com sinais opostos e mesmo módulo, ao aplicarmos para os HN e HS, tudo o que faremos será inverter (sem nenhuma consequência) “±” pelo seu inverso.

Solução do Modelo de Ekman (4)

- Finalmente, reescrevemos as duas raízes na forma de

$$\sqrt{i}\sqrt{s} = \frac{1 + is}{\sqrt{2}}$$

- A solução da equação característica, então toma a forma de

$$\lambda = \pm(1 + is) \sqrt{\frac{|f_0|}{2 A_V}} = \pm \frac{(1 + is)}{h_E}.$$

- A quantidade h_E é chamada **escala de decaimento das velocidades de Ekman**. A solução geral toma então a forma de

$$\mathbf{v}_E(z) = C_1 e^{\frac{(1+is)}{h_E} z} + C_2 e^{-\frac{(1+is)}{h_E} z}.$$

- A aplicação da condição de contorno de “fundo” exige velocidades decaindo a zero, o que inviabiliza o segundo termo da solução, pois $z < 0$ em nosso modelo. Para atender esta condição, basta que façamos:

$$C_2 = 0.$$

Solução do Modelo de Ekman (5)

- Agora, apliquemos a condição de contorno de superfície para determinar a constante integração C_1 . Antes, no entanto, devemos definir a tensão de cisalhamento do vento complexa por

$$\mathcal{T}_0 = \tau_0^x + i \tau_0^y .$$

- A condição de contorno passa a ter a forma complexa de

$$\mathcal{T}_0 = \rho_0 A_v \frac{\partial \mathcal{V}_E}{\partial z} \text{ em } z = 0 .$$

-

- A derivada da solução geral é

$$\frac{\partial \mathcal{V}_E}{\partial z} = C_1 \left[\frac{(1 + is)}{h_E} e^{\frac{(1+is)}{h_E} z} \right] ,$$

- Que quando combinada com a condição de contorno, leva-nos a

$$C_1 = \frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 A_v} \left[\frac{h_E}{(1 + is)} \right] .$$

Solução do Modelo de Ekman (6)

- Lancemos mais uma vez mão de um pouco de álgebra para escrever a solução na forma obtida por Ekman. Para tanto, considere

$$\frac{1}{(1 + is)} \times \frac{\sqrt{2}(1 - is)}{\sqrt{2}(1 - is)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - is \frac{\sqrt{2}}{2} \right) .$$

- Com base nessa, usamos a fórmula de Euler para números complexos dada por

$$\begin{aligned} e^{i\gamma} &= \cos(\gamma) + i \operatorname{sen}(\gamma) \\ e^{-i\gamma} &= \cos(\gamma) - i \operatorname{sen}(\gamma) . \end{aligned}$$

- Assim, reescrevemos a expressão para C_1 como sendo

$$C_1 = \frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 A_v} h_E \frac{e^{-is \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} .$$

- Notem que já aparece o termo envolvendo o familiar ângulo de 45° !

Solução do Modelo de Ekman (7)

- Finalmente, escrevemos a solução do modelo, em sua forma final complexa:

$$\mathcal{V}_E(z) = \left(\frac{\sqrt{2}\tau_0}{\rho_0 h_E |f_0|} \right) e^{\frac{z}{h_E}} e^{is\left(\frac{z}{h_E} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

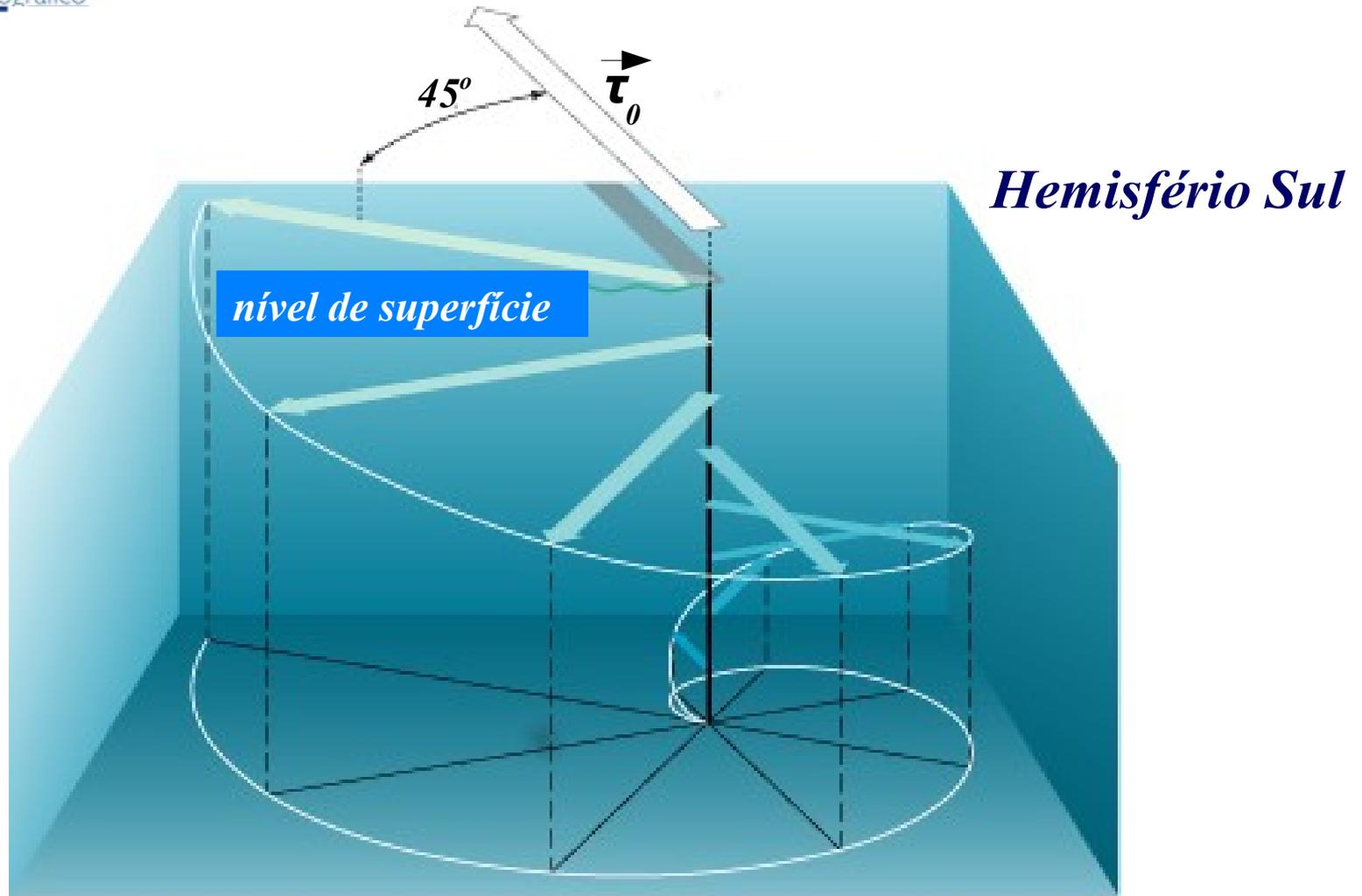
- Notem que há dois termos exponenciais. O primeiro denota decaimento em direção ao interior geostrófico – é o **termo das esvaecência**. O segundo já é trigonométrico, indicando variações a partir do ângulo de 45° na superfície. É o **termo do espiralamento**. As soluções para as componentes são obtidas simplesmente fazendo

$$\begin{aligned} u_E(z) &= \Re\{\mathcal{V}_E(z)\} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\rho_0 h_E |f_0|} \right) e^{\frac{z}{h_E}} \left[\tau_0^x \cos\left(\frac{sz}{h_E} - \frac{s\pi}{4}\right) - \tau_0^y \sin\left(\frac{sz}{h_E} - \frac{s\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_E(z) &= \Im\{\mathcal{V}_E(z)\} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\rho_0 h_E |f_0|} \right) e^{\frac{z}{h_E}} \left[\tau_0^x \sin\left(\frac{sz}{h_E} - \frac{s\pi}{4}\right) + \tau_0^y \cos\left(\frac{sz}{h_E} - \frac{s\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

A Camada de Ekman de Superfície: A Espiral



O Transporte de Ekman (1)

- Embora a solução da espiral seja o resultado mais famoso e divulgado da Teoria de Ekman, são o **Transporte e Bombeamento de Ekman** os resultados mais importantes e de direta aplicação na Oceanografia.
- A razão da importância das duas quantidades jaz no fato de que o cálculo independente do cálculo da profundidade de decaimento das correntes de deriva h_E e do emprego do coeficiente turbulento vertical de viscosidade A_V , quantidade de difícil mensuração no oceano ainda hoje apesar dos instrumentos mais modernos de medir microestruturas de cisalhamento de velocidade (como o *Velocity Microstructure Profiler* – VMP).
- O Transporte de volume (por unidade de comprimento) de Ekman é obtido através da integração vertical das velocidades associadas as correntes de deriva. Em termos da velocidade de Ekman complexa, seria

$$\mathfrak{V}_E = \int_{-\infty}^0 \mathfrak{v}_E(z) dz$$

O Transporte de Ekman (2)

- Substituindo a expressão da velocidade complexa de Ekman na integral, obtemos

$$\mathfrak{V}_E = \left(\frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 A_v \sqrt{2}} \frac{h_E}{\sqrt{2}} \right) e^{-is\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{(1+is)}{h_E} z} dz$$

- O resultado da integração é

$$\mathfrak{V}_E = \left(\frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 A_v \sqrt{2}} \frac{h_E}{\sqrt{2}} \right) \left[\frac{h_E}{(1+is)} e^{-is\frac{\pi}{4}} \right]$$

- Lembrando que

$$\frac{1}{(1+is)} = \frac{e^{-is\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

- chegamos a

$$\mathfrak{V}_E = \left(\frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0} \right) \left[\frac{h_E}{2A_v} e^{-is\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 |f_0|} e^{-is\frac{\pi}{2}}$$

O Transporte de Ekman (3)

- Podemos usar a fórmula de Euler novamente, desta vez aplicada ao ângulo de 90° ,

$$e^{-is\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - is \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -is$$

- e reescrevemos a expressão do transporte de volume complexo:

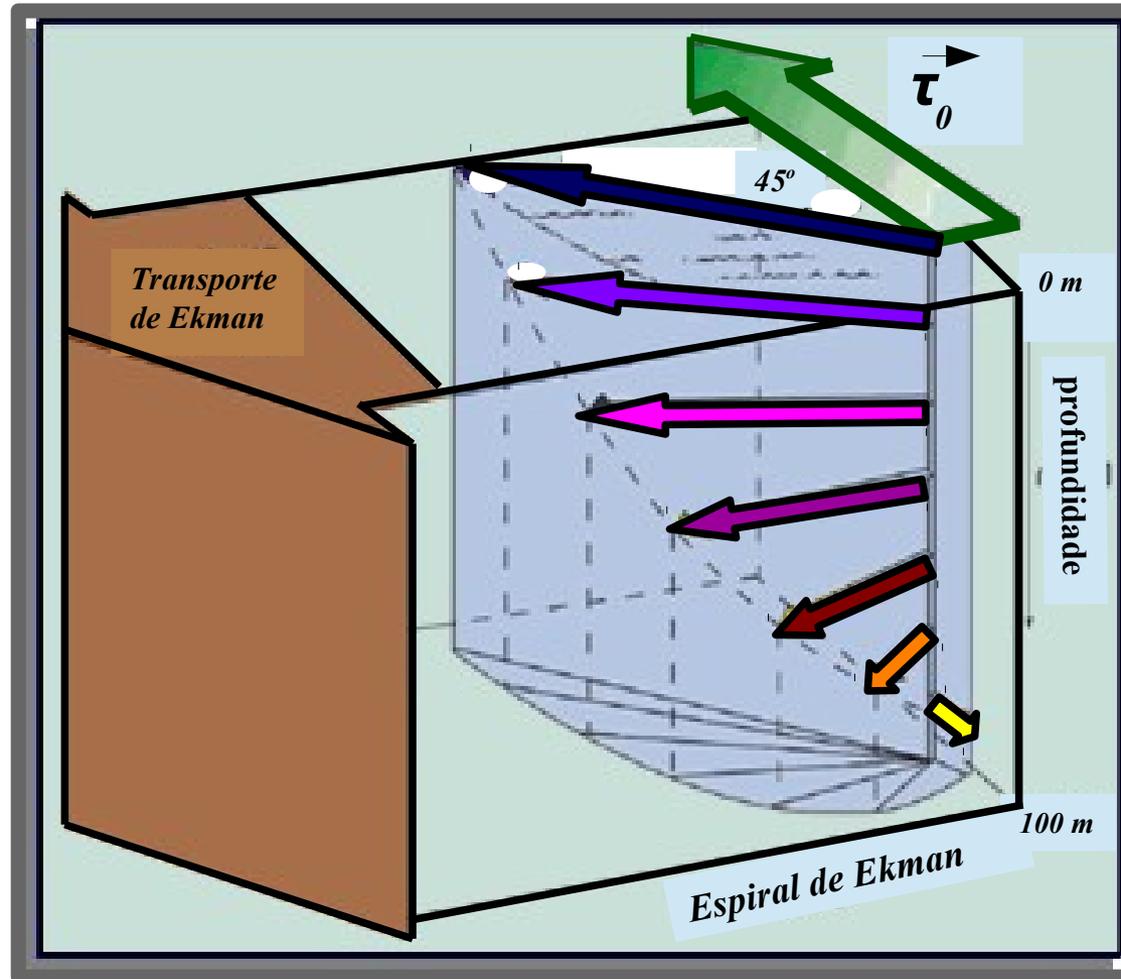
$$\mathfrak{V}_E = -is \frac{\mathcal{T}_0}{\rho_0 |f_0|}$$

- Para a obtenção das componentes zonal e meridional do transporte de Ekman, basta tomarmos, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da expressão acima:

$$\begin{aligned} U_E &= \Re\{\mathfrak{V}_E(z)\} \\ &= -is \left(i \frac{\tau_0^y}{\rho_0 |f_0|} \right) = s \frac{\tau_0^y}{\rho_0 |f_0|} \end{aligned}$$

$$V_E = \Im\{\mathfrak{V}_E(z)\} = -s \frac{\tau_0^x}{\rho_0 |f_0|}$$

Transporte de Ekman (4)



Hemisfério Sul

Adaptado de: **Open University (1993)**

Bombeamento de Ekman

- Ao contrário do movimento geostrófico, **as correntes de deriva podem ser divergentes ou convergentes** devido a variações espaciais da tensão de cisalhamento do vento. Ou seja, é possível que gradientes dessa tensão gerem divergências ou convergências na camada de Ekman causando injeção ou ejeção de água da camada-limite para o interior geostrófico.
- As velocidades verticais responsáveis que bombeiam água para dentro ou para fora da camada de Ekman são conhecidas, não por acaso, como “**bombeamento de Ekman**” (w_E).
- A solução do bombeamento de Ekman é obtida a partir da integração vertical da equação da continuidade dentro da camada-limite:

$$\int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial u_E}{\partial x} + \frac{\partial v_E}{\partial y} + \frac{\partial w_E}{\partial z} = 0 \right) dz .$$

Bombeamento de Ekman

- Podemos reorganizar a equação da continuidade integrada verticalmente de modo a reescrever os termos da divergência horizontal como transporte de Ekman:

$$w_E(-\infty) - w_E(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^0 u_E dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^0 v_E dz \right)$$

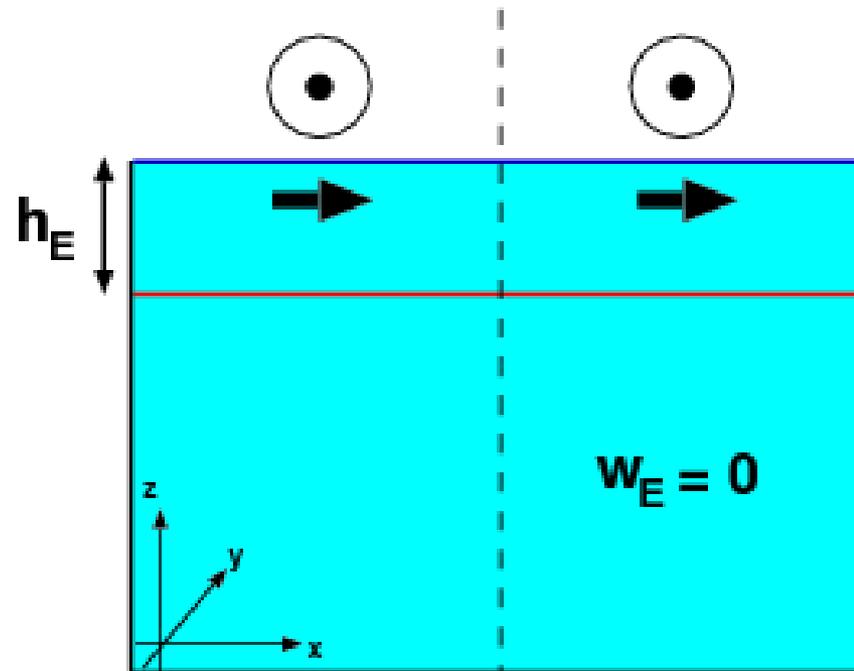
- Como a velocidade vertical é zero na superfície, obtemos o valor do bombeamento de Ekman na base da camada-limite por

$$\begin{aligned} w_E(-\infty) &= \left(\frac{\partial U_E}{\partial x} + \frac{\partial V_E}{\partial y} \right) \\ &= \frac{s}{\rho_0 |f_0|} \left(\frac{\partial \tau_0^y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_0^x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

- Mais usualmente, a expressão é apresentada como

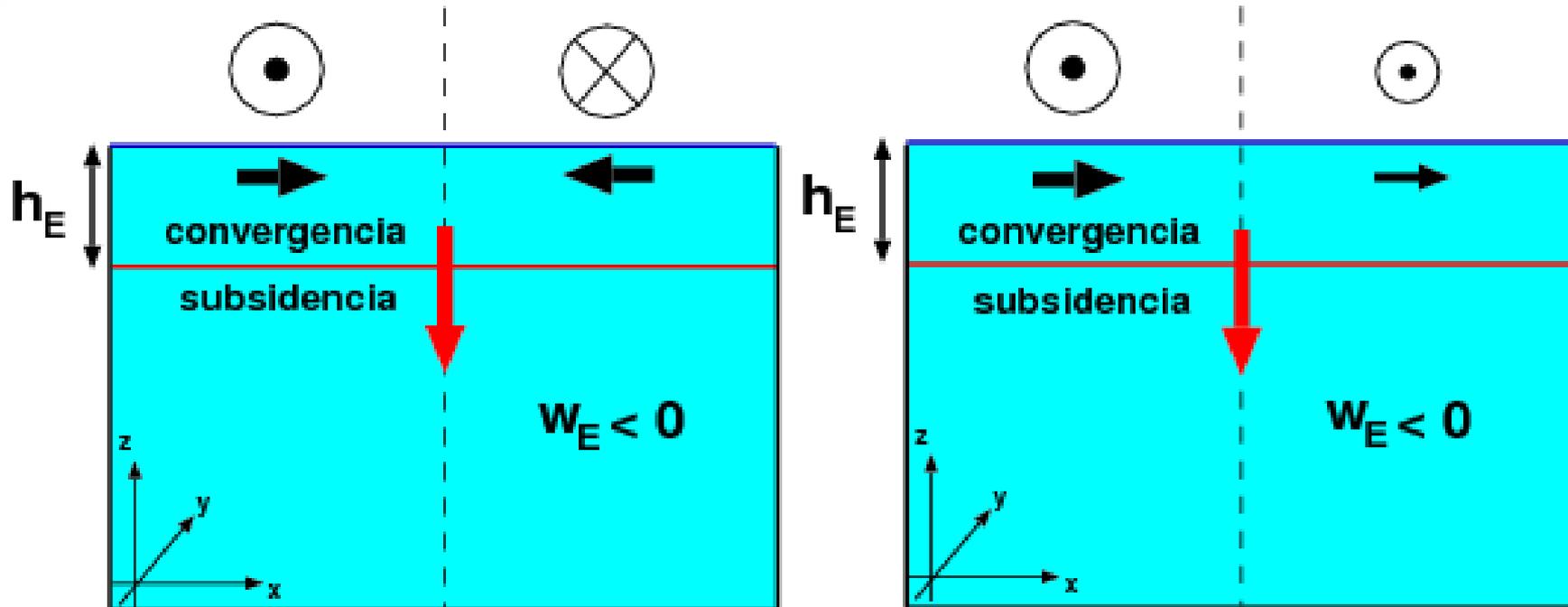
$$w_E(-\infty) = \frac{s}{\rho_0 |f_0|} \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_0)$$

Bombeamento de Ekman: Exemplos (1)



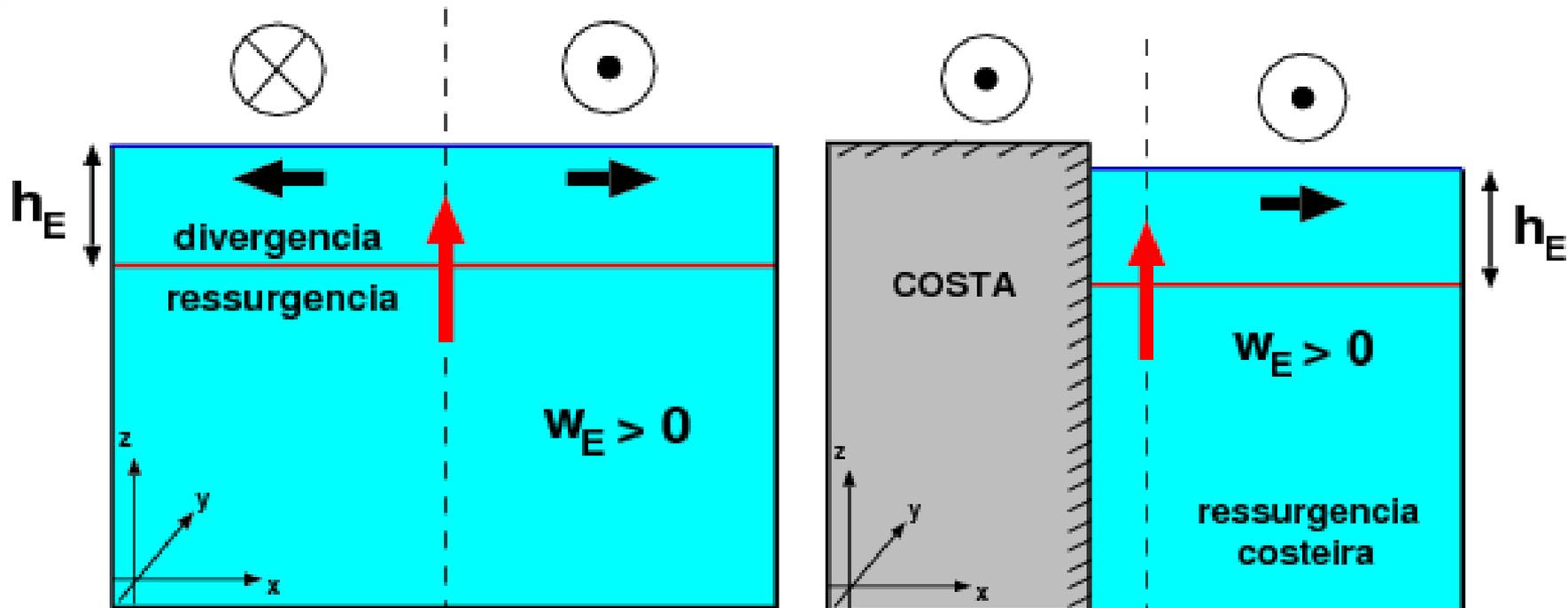
Hemisfério Sul

Bombeamento de Ekman: Exemplos (2) – Convergência



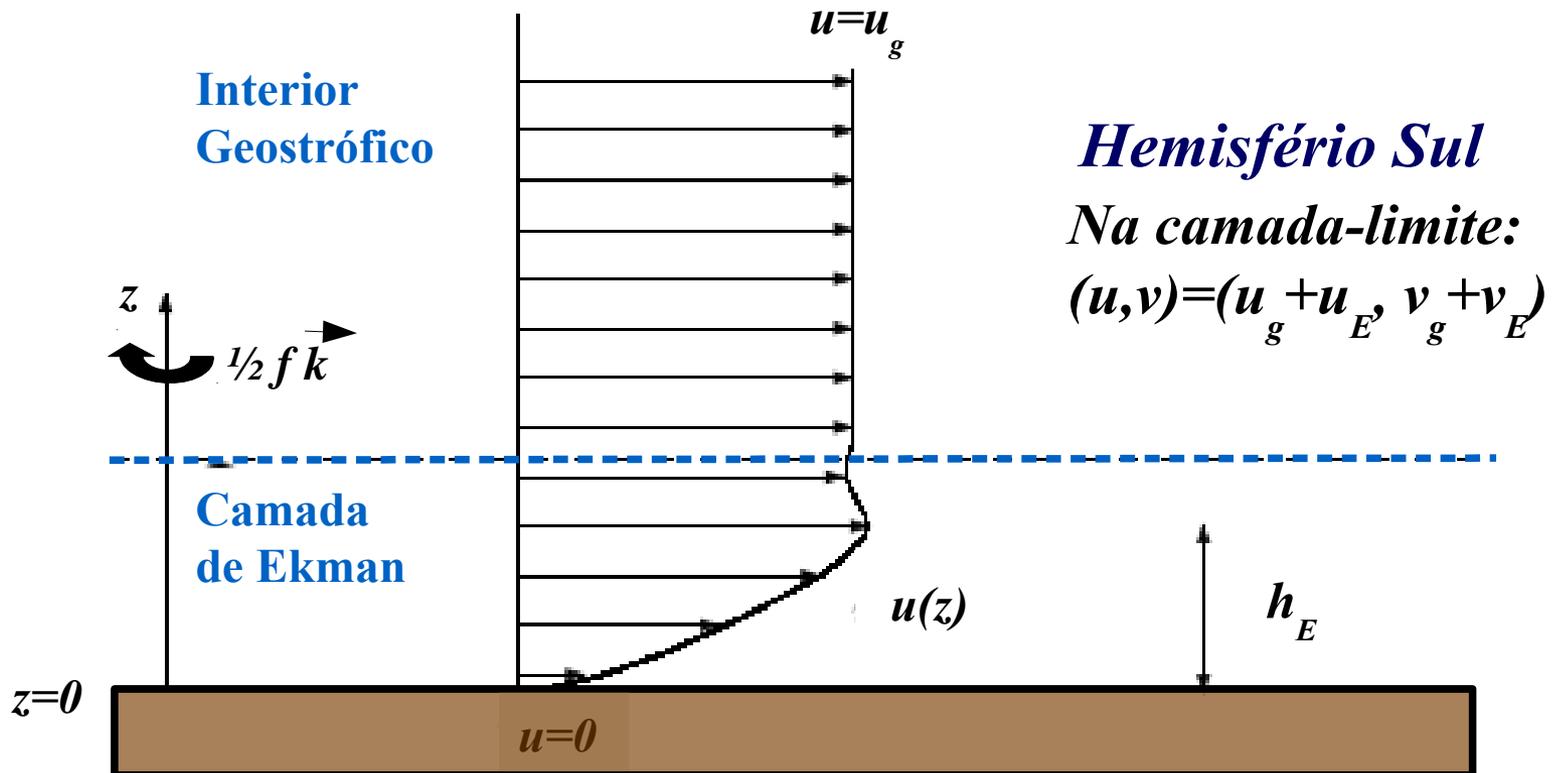
Hemisfério Sul

Bombeamento de Ekman: Exemplos (3) – Divergência



Hemisfério Sul

A Camada de Ekman Bêntica: Cenário



Adaptado de: Cushman-Roisin (1994)

A Camada de Ekman Bêntica (1)

- A camada de Ekman bêntica é formada mediante a excitação por uma corrente geostrófica. Cabe a esta levar, num ambiente em rápida rotação, o valor da velocidade total junto ao assoalho oceânico a zero. Na prática, é camada que faz satisfazer a condição de não-escorregamento junto ao limite inferior do oceano.
- Usemos aqui a mesma hipóteses simplificadoras do oceano homogêneo e no plano f , já usadas na camada de superfície. A corrente geostrófica, devido ao teorema de Taylor-Proudman é uniforme verticalmente e está associada aos gradientes de pressão, conforme as expressões abaixo:

$$-s|f_0|v_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad s|f_0|u_g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

A Camada de Ekman Bêntica (2)

- Solucionaremos o modelo da camada-limite bêntica novamente usando números complexos. Para tanto, precisamos definir a velocidade geostrófica complexa como

$$\mathcal{V}_g = u_g + i v_g.$$

- O modelo permanece o mesmo da camada-limite de superfície. Logo a equação de Ekman é a mesma:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{V}_E - i \frac{s|f_0|}{A_V} \mathcal{V}_E = 0.$$

- A solução geral desta equação é novamente aquela dada por

$$\mathcal{V}_E(z) = C_1 e^{\frac{(1+is)}{h_E} z} + C_2 e^{-\frac{(1+is)}{h_E} z}.$$

- As condições de contorno a fechar o problema é que serão distintas. Para guardarmos simetria com a camada de superfície, traslademos a origem de nosso sistema para o fundo. Ou seja, $z=0$ junto ao assoalho oceânico.

A Camada de Ekman Bêntica (3)

- As condições de contorno da camada de Ekman bêntica são mais simples que aquelas da de superfície. A condição de fundo é a de não-escorregamento. A condição de esvaecência é que a velocidade total tende à geostrófica no interior geostrófico. Ou seja, com a origem junto ao fundo,

$$\mathcal{V} = 0 \Rightarrow \mathcal{V}_E = -\mathcal{V}_g \text{ em } z = 0$$

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_g \Rightarrow \mathcal{V}_E \rightarrow 0 \text{ à medida que } z \rightarrow \infty.$$

- A aplicação da condição de esvaecência mostra que a solução física do modelo precisa permanecer finita, portanto, a constante multiplicando o termo da raiz característica positiva precisa ser zero. A aplicação da condição de *no slip*, é bastante simples, e as duas constantes são:

$$C_1 = 0 \text{ e } C_2 = -\mathcal{V}_g.$$



INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

A Camada de Ekman Bêntica (4)

- A solução da espiral de Ekman para a camada limite bêntica é dada por

$$\mathcal{V}_E = \mathcal{V}_g e^{-\frac{z}{h_E}} e^{-is\frac{z}{h_E}}.$$

- As componentes zonal e meridional da espiral são encontradas, novamente, tomando a parte real e a parte imaginária, respectivamente:

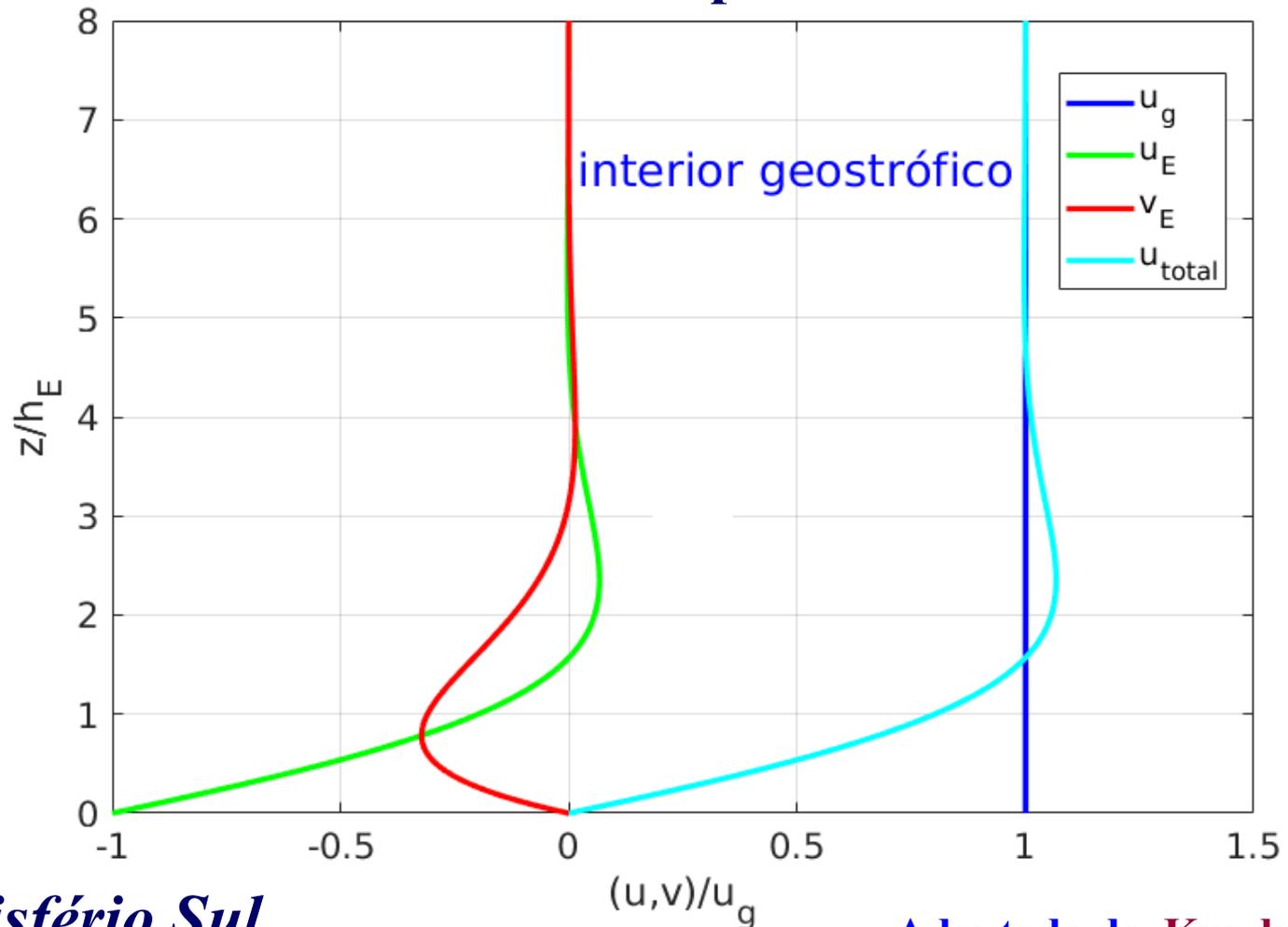
$$\begin{aligned}u_E(z) &= \Re\{\mathcal{V}_E(z)\} \\ &= -u_g e^{-\frac{z}{h_E}} \cos\left(\frac{sz}{h_E}\right) - v_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sen\left(\frac{sz}{h_E}\right) \\ &= -u_g e^{-\frac{z}{h_E}} \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) - sv_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sen\left(\frac{z}{h_E}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_E(z) &= \Im\{\mathcal{V}_E(z)\} \\ &= u_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sen\left(\frac{sz}{h_E}\right) - v_g e^{-\frac{z}{h_E}} \cos\left(\frac{sz}{h_E}\right) \\ &= su_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sen\left(\frac{z}{h_E}\right) - v_g e^{-\frac{z}{h_E}} \cos\left(\frac{z}{h_E}\right).\end{aligned}$$

A Camada de Ekman de Fundo:

Perfis de Velocidade

considerando corrente geostrófica estritamente zonal e para leste





INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Transporte de Ekman Bêntico (1)

- O cálculo do transporte de volume (por unidade de comprimento) da camada limite bêntica, para sua obtenção, segue os mesmos passos do da camada limite de superfície. Atentem simplesmente para a inversão dos limites de integração vertical devido ao traslado da origem para o fundo.
- Assim, o transporte bêntico complexo é

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_E &= \int_0^\infty \mathcal{V}_E(z) dz \\ &= -\mathcal{V}_g \int_0^\infty e^{\frac{-(1+is)}{h_E} z} dz \\ &= -\mathcal{V}_g \frac{h_E}{(1+is)} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{V}_g h_E e^{-is\frac{\pi}{4}} \\ &= -\mathcal{V}_g \frac{h_E}{2} (1-is) \cdot\end{aligned}$$



INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Transporte de Ekman Bêntico (2)

- As componentes zonal e meridional do transporte bêntico são obtidas, como sempre, tomando-se, respectivamente, a parte real e imaginária do transporte complexo.
- As soluções se tornam mais facilmente aplicáveis aos hemisférios se usarmos as propriedades do cosseno ser uma função par e o seno, uma função ímpar. Logo,

$$U_E = \Re\{\mathcal{V}_E\} = -u_g \frac{h_E}{2} - sv_g \frac{h_E}{2}$$

$$V_E = \Im\{\mathcal{V}_E\} = su_g \frac{h_E}{2} - v_g \frac{h_E}{2}$$



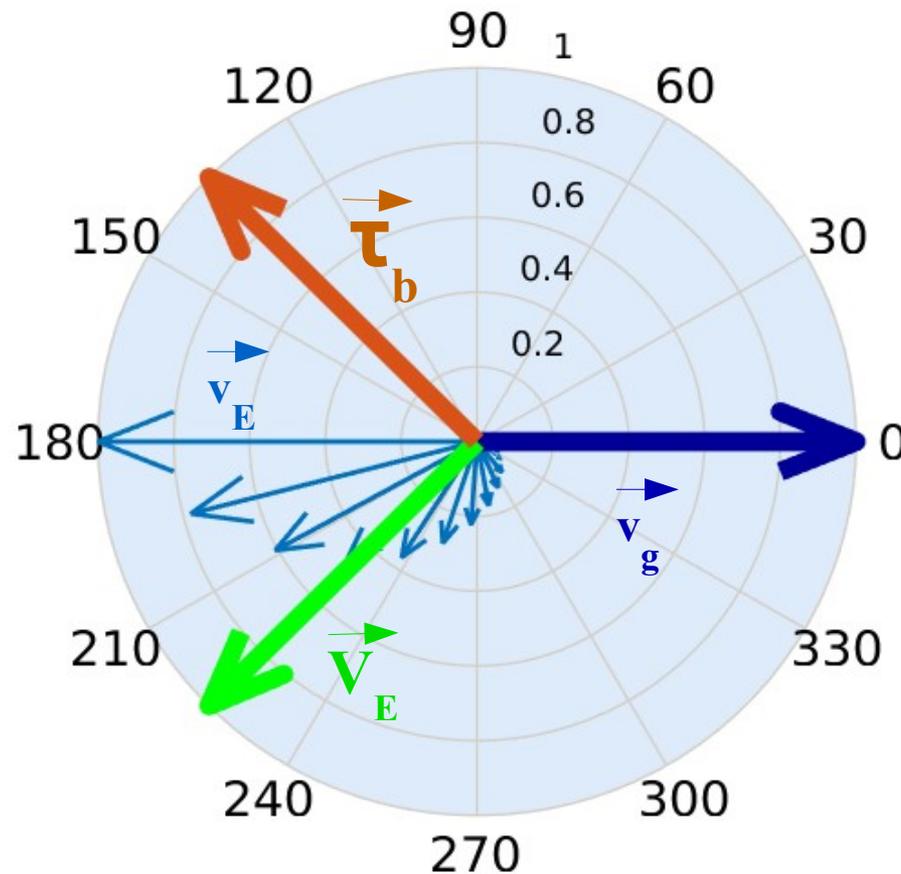
INSTITUTO
OCEANOGRÁFICO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Transporte de Ekman Bêntico (3)

- Um conceito que pode passar despercebido é que o **transporte de Ekman na camada limite** (seja de superfície ou bêntica) é sempre 90° da direção da tensão de cisalhamento imposta no limite oceânico. O conceito é hemisfério-dependente, sendo à esquerda no HS e à direita no HN.
- Na camada limite de superfície, referimo-nos ao transporte como sendo 90° à direita do vento. E, de fato, da forma como usamos a *bulk aerodynamical formula* para cálculo, a tensão de cisalhamento do vento e o vento têm forçosamente a mesma direção. E muitos meteorologistas discordam disso.
- A discordância é porque o vento junto ao oceano está dentro da camada limite planetária (ou seja, a camada de Ekman da atmosfera) e vai espiralar também. Não é por acaso que usamos dados de ventos a 10 m de altura para evitar isso. Mas, reconhecidamente é uma aproximação, apesar do A_V na atmosfera ser razoavelmente maior que o do oceano.
- De volta à camada bêntica. Assim, o transporte de Ekman bêntico está **90° da tensão de cisalhamento exercida pelo fundo do oceano!**

Transporte de Ekman Bêntico (4)

considerando corrente geostrófica estritamente zonal e para leste



Hemisfério Sul

Bombeamento de Ekman Bêntico (1)

- O bombeamento de Ekman depende das variações espaciais da corrente geostrófica, que causam divergências e convergências da camada limite bêntica. Para derivar esta quantidade, vamos novamente integrar a equação da continuidade verticalmente, atentando para a inversão dos limites de integração relativamente ao caso de superfície:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u_E}{\partial x} + \frac{\partial v_E}{\partial y} + \frac{\partial w_E}{\partial z} = 0 \right) dz .$$

- Realizando a integral, chegamos a

$$w_E(\infty) - w_E(0) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u_E dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} v_E dz \right)$$

- Observemos que os termos entre parênteses se referem à divergência do transporte de Ekman bêntico.

Bombeamento de Ekman Bêntico (2)

- Assim, substituímos os transportes zonal e meridional por suas as expressões matemática para obter

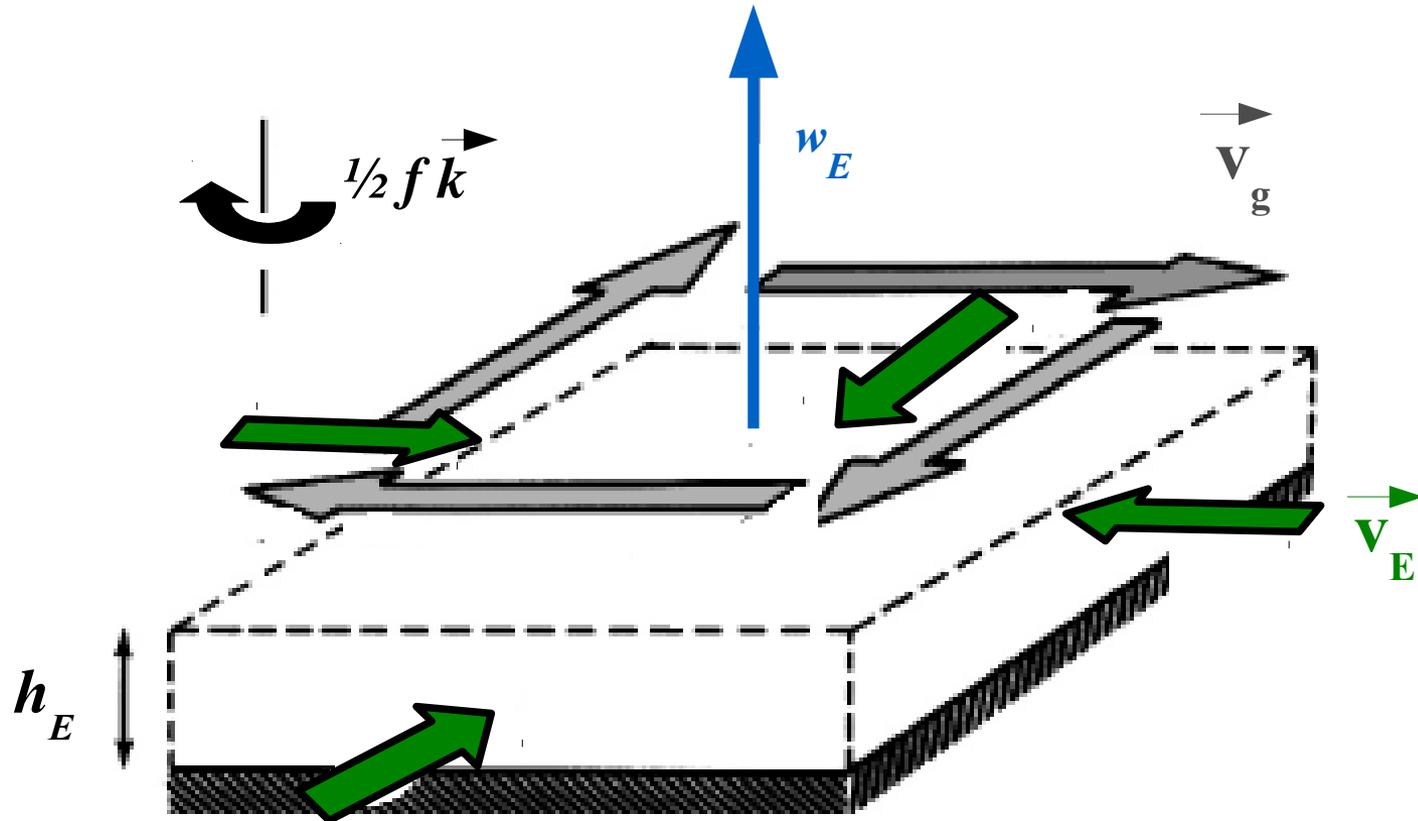
$$\begin{aligned}
 w_E(\infty) &= - \left(\frac{\partial U_E}{\partial x} + \frac{\partial V_E}{\partial y} \right) \\
 &= - \frac{h_E}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-u_g - sv_g) + \frac{\partial}{\partial y} (-v_g + su_g) \right] \\
 &= - \frac{h_E}{2} \left[\underbrace{- \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right)}_{\nabla \cdot \vec{v}_g = 0} - s \underbrace{\left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)}_{\nabla \times \vec{v}_g \neq 0} \right],
 \end{aligned}$$

- onde o primeiro termo do colchetes é a divergência do mov. Geostrófico, que é nula, e o segundo, a vorticidade deste. Esta só será nula no raro caso em que a corrente for espacialmente homogênea. Assim, finalmente, chegamos a

$$w_E(\infty) = s \frac{h_E}{2} \zeta_g.$$

Bombeamento de Ekman Bêntico (3)

induzido a um vórtice ciclônico no HS

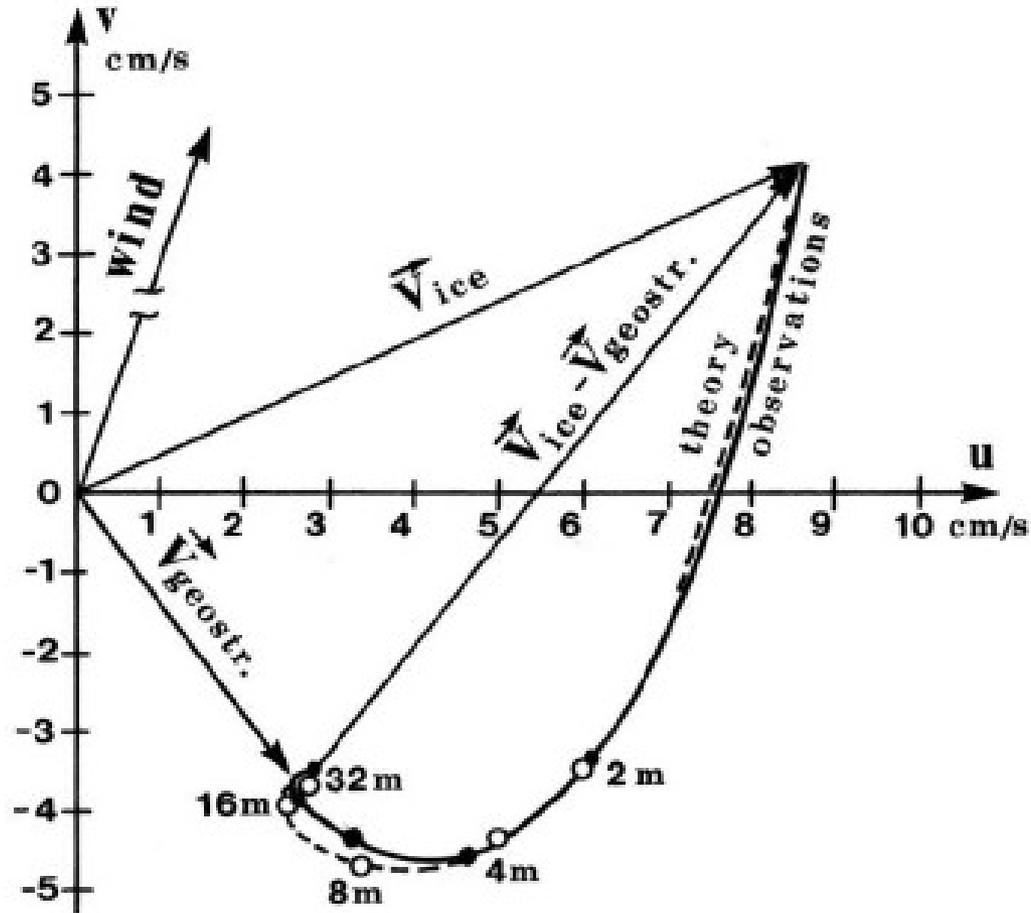


Hemisfério Sul

A Teoria de Ekman vs. Observações

- Os modelos da teoria clássica, apesar de geniais, carregam em si alto grau de idealização. Conseqüentemente, raramente são capazes em detalhe de reproduzir satisfatoriamente as observações.
- É por isso que os resultados mais robustos de Ekman são aqueles devido ao transporte de volume . Raras são as observações da espiral e quando são conseguidas, a teoria clássica apenas as reproduz qualitativamente. Um dos poucos casos de aparente sucesso na reprodução da espiral é devido à Huskins (1966) no Mar Ártico (lat. 83,4° N), exibido na página seguinte.
- Mas, na maioria dos escoamentos, dois são os fatores que são considerados responsáveis por substanciais diferenças entre as observações e sua reproducibilidade pela teoria clássica: **turbulência** e **estratificação**.

A Teoria de Ekman vs. Observações



Região do Mar Ártico: 84,3° N

Fonte: Huskins (1966)

A Teoria de Ekman vs. Observações

EFEITOS DA TURBULÊNCIA

- Como estudamos ao longo da disciplina, os escoamentos geofísicos são sempre turbulentos. Tanto assim que derivamos as tensões de Reynolds e as parametrizamos os coeficientes turbulentos A_V substituindo os muito menores coeficientes laminares ν .
- Entretanto, na camada de Ekman, a turbulência está longe de ser homogênea, como a aproximação por $A_V = \text{constante}$ sugere. A turbulência é maior onde o cisalhamento de velocidades é maior.
- Uma grande quantidade de modelos empíricos têm sido propostos para explicar e/ou se adaptar as frequentes discordâncias entre teoria e observações.
- De qualquer modo, as discordâncias estão centradas em dois resultados icônicos da teoria clássica: **o ângulo de 45°** entre a tensão de cisalhamento e a corrente de deriva em superfície e valor da **escala de decaimento da camada de Ekman (h_E)**, que se multiplicada por π nos fornece a profundidade efetiva.

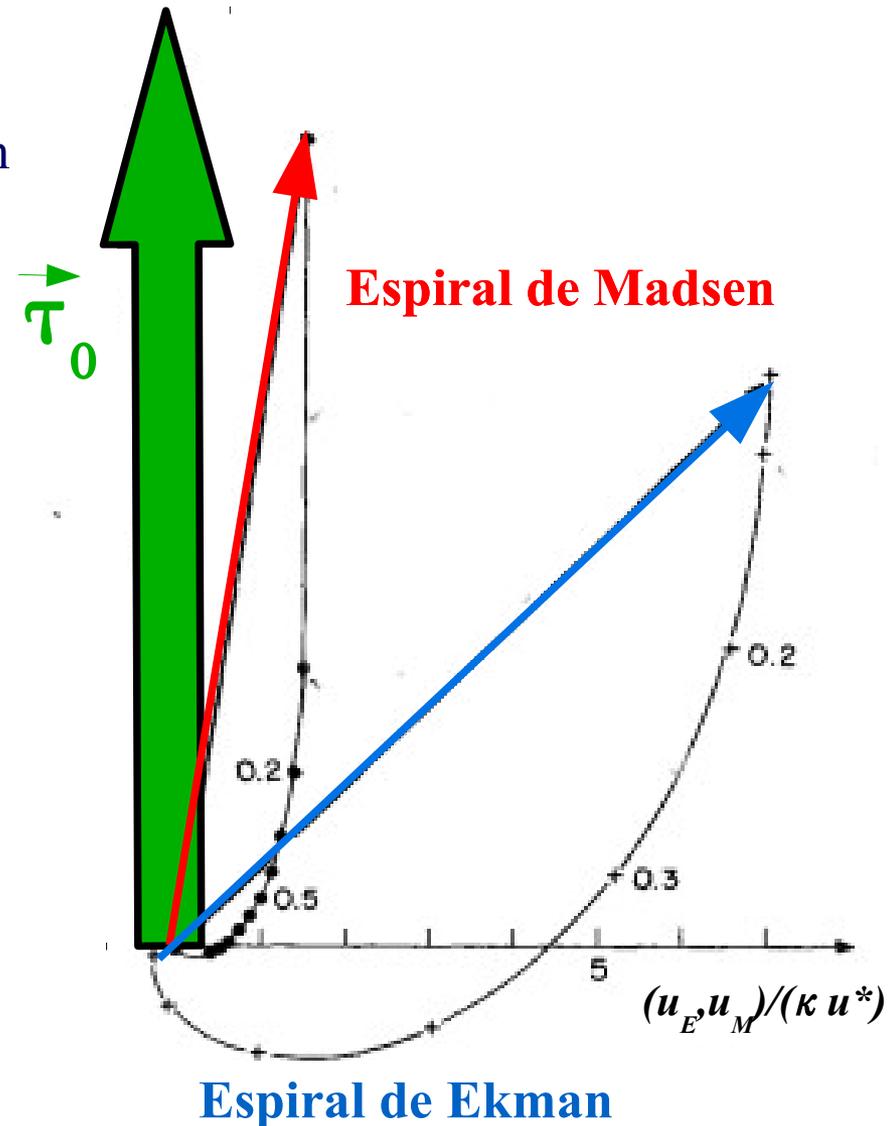
O Modelo de Madsen (1977)

- O modelo de Madsen (1977) foi um dos primeiros a tentar mostrar as diferenças no ângulo da corrente e a discordância nos valores da espessura de decaimento propondo uma variação linear para A_V . Valendo-se da teoria de comprimento de mistura, propõe que tenha o valor nulo na superfície e atinja seu máximo na base da camada de Ekman
- Embora, o conhecimento moderno de turbulência sugira o exato oposto, o modelo de Madsen mostrou que a não homogeneidade da turbulência na camada limite poderia sim ser uma das causas das importantes diferenças entre os resultados da teoria clássica e as observações.
- Suas duas principais conclusões foram: (i) o ângulo que a corrente de deriva em $z=0$ faz com a velocidade do tensão de cisalhamento vento é menor que o da teoria clássica (ele encontrou algo como 20°); e a espiral decai muito mais rapidamente que a espiral clássica, o que obviamente implica numa menor espessura de decaimento.
- Na página seguinte, apresentamos resultados obtidos analiticamente para o modelo de Madsen.

Modelo de Madsen (1977)

Resultados

- O ângulo que a corrente de deriva em superfície faz com a tensão de cisalhamento do vento é de $\sim 10^\circ$.
- A espessura de decaimento da camada de Ekman h_E estimada foi de cerca de apenas $1/3$ daquela da teoria clássica.
- Em termo da intensidade das correntes em superfície sua magnitude é cerca de 25% do que a da teoria clássica para várias intensidade de vento testadas.



Expressões Empíricas para h_E (1)

- A escala de decaimento da camada de Ekman vem sendo estimada usando conceitos de turbulência moderna e utilização da teoria do comprimento de mistura.
- A **formulação mais usada para a estimativa de h_E** é dada por

$$h_E = \kappa \frac{u^*}{|f_0|},$$

onde $\kappa = 0,4$ é a constant de von Kármán, e a velocidade friccional u^* é definida como

$$u^* = \sqrt{\frac{|\vec{\tau}_0|}{\rho_0}}.$$

-
-
- Essa expressão advém da teoria de turbulência onde se assume que A_V se relaciona com o diâmetro do maior vórtice possível turbulento d_ζ :

$$\begin{aligned} A_V &\approx u^* d_\zeta, \\ &\approx u^* h_E. \end{aligned}$$

A Teoria de Ekman vs. Observações

EFEITOS DA ESTRATIFICAÇÃO

- A presença da estratificação inibe movimentos verticais e, portanto, reduz o misturamento vertical por turbulência.
- Também é responsável por movimentos em níveis diferentes apresentarem menor coerência vertical.
- Como consequência, haverá redução da escala de decaimento da camada de Ekman e tenderá a fazer com que o giro do vetor velocidade na espiral com a profundidade aumente.
- Assim, outras fórmulas empíricas para h_E foram desenvolvidas com o objetivo de incluir o efeito da estratificação além dos conceitos de teoria de turbulência. Buckley et al. (2020) fez uma revisão sobre o tema e aplicou a neoclássica fórmula de Pollard et al. (1972) na Baía de Bengala onde há gradientes importantes na densidade na camada superior do oceano devido à salinidade.

Expressões Empíricas para h_E (2)

- A fórmula empírico-teórica usada para calcular a escala de decaimento da camada limite superior considerando o oceano estratificado, segundo Buckley et al. (2020), é

$$h_E = \gamma \frac{u^*}{|f_0|^\alpha N^{(1-\alpha)}},$$

onde γ e α são parâmetros a serem determinados por ajustes entre observações e perfis teóricos de aprofundamento da camada de mistura. Já N é o valor da estratificação da camada de mistura, ou seja, entre a densidade em superfície e aquela logo abaixo do seu máximo gradiente, que caracteriza o topo da pycnoclina sazonal ($z=h_{CM}$):

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\rho(z=0) - \rho(z=h_{CM})}{h_{CM}}},$$

- Por simplicidade é usual para termos práticos e avaliações rápidas considerarmos $\gamma=1$ e $\alpha=0,5$:

$$h_E = \frac{u^*}{\sqrt{|f_0| N}}.$$