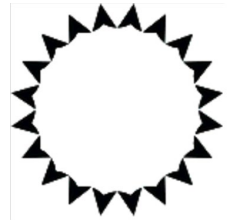




*PEF2602*  
*Estruturas na Arquitetura II - Sistemas Reticulados*



# *Estabilidade do Equilíbrio*

*Professores*

*Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís A.G. Bitencourt Jr.*

# Estabilidade do Equilíbrio



Bill Dan



Equilíbrio  
Estável



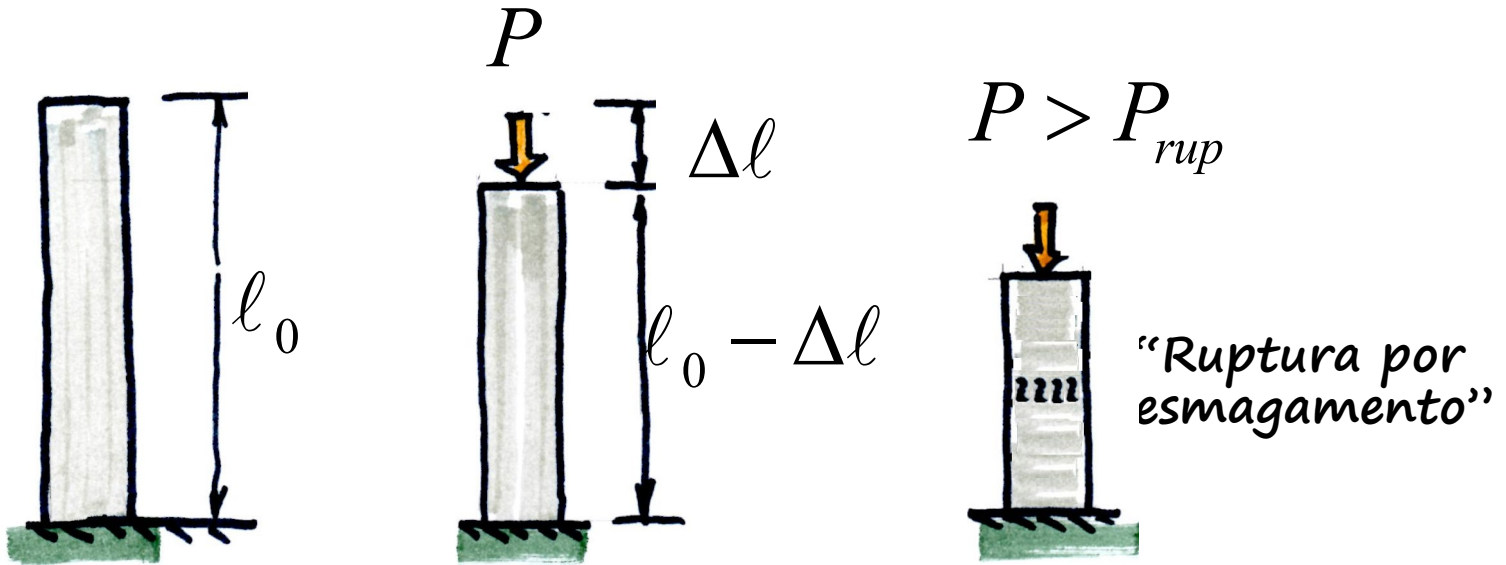
Equilíbrio  
Instável



Equilíbrio  
Indiferente

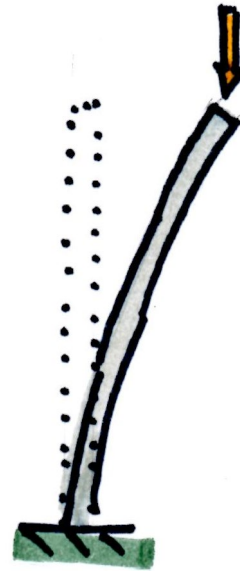
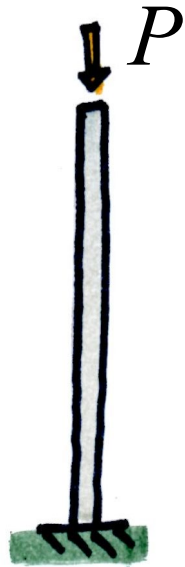
# Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar Curto:



# Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar  
Esbelto:



$P > P_{crit}$

“Flambagem”  
Instabilidade Elástica”

“Fórmula  
de Euler”:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_f^2}$$

$E$  : módulo de elasticidade do material

$I_{min}$  : mínimo momento de inércia da seção transversal

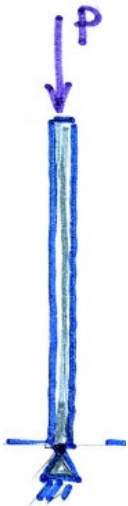
$l_f$  : comprimento de flambagem

O produto  $EI$  é denominado ‘módulo de rigidez à flexão’

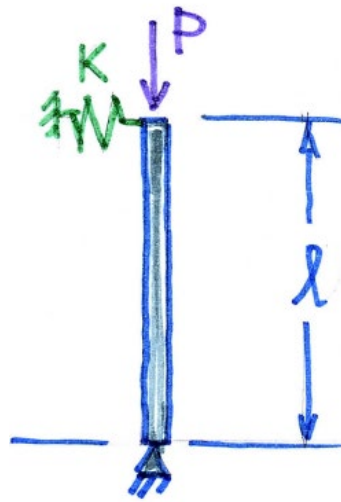
# Modelos simples de estabilidade de barras rígidas

A dedução da Fórmula de Euler para a estabilidade de barras comprimidas requer o estudo das deformações à flexão (assunto de PEF2603, no próximo semestre).

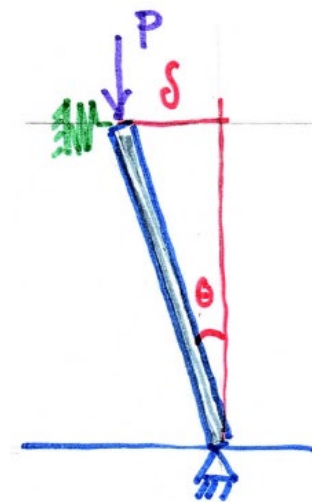
Problemas simples de estabilidade podem ser formulados considerando barras rígidas e molas.



Uma coluna rígida, articulada na base e sujeita a uma carga de compressão na extremidade livre é obviamente instável



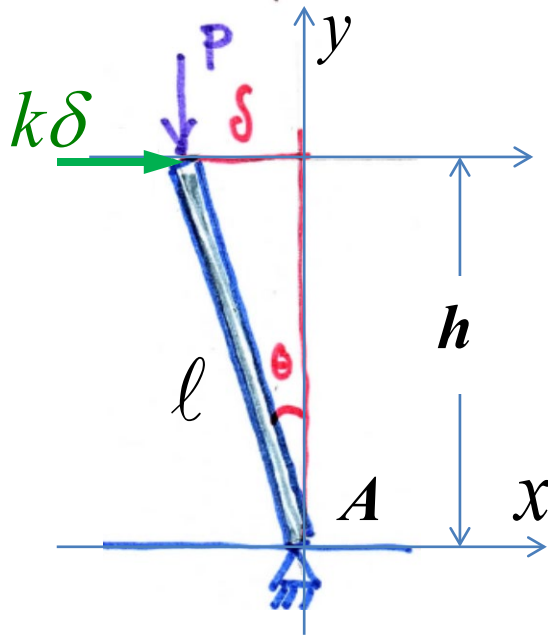
A inclusão de uma mola horizontal na extremidade livre é capaz de estabilizar a coluna, até um certo valor de carga  $P_{crit}$



Para determinarmos  $P_{crit}$ , imaginamos o que aconteceria se a coluna sofresse um deslocamento horizontal  $\delta$  muito pequeno, no topo.

# Modelos simples de estabilidade de barras rígidas

Pra garantir o equilíbrio da coluna, o momento das forças que atuam no topo se anulam:



$$\sum M_{(A)} = P\delta - k\delta \times h = 0$$

Para pequenos deslocamentos

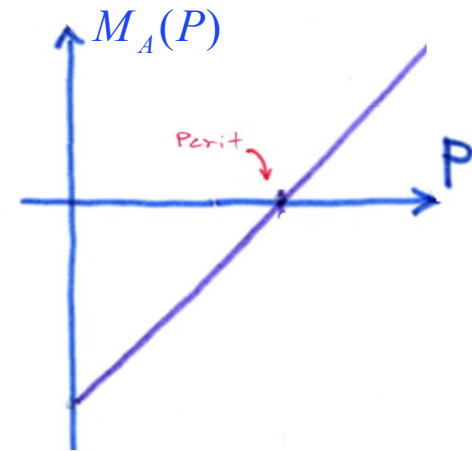
$$h \simeq l$$

$$(P - kl)\delta = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = 0 \quad (\text{'solução trivial'}) \\ \text{ou} \\ P = kl = P_{crit} \end{array} \right.$$

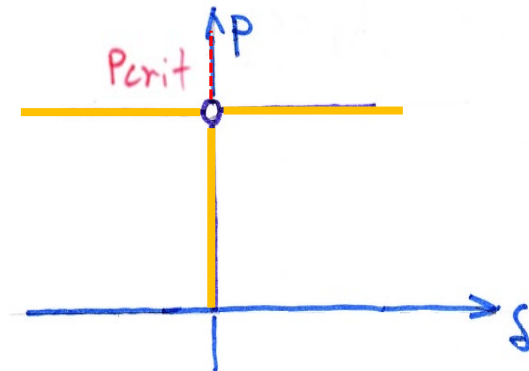
Momento desbalanceado:  $M_A(P) = (P - k\ell)\delta$

No gráfico ao lado, vemos que o momento  $M_A(P)$  é negativo para valores  $P < P_{crit} = k\ell$ , resultando em uma tendência de rotação horária, que restitui a configuração vertical da barra.



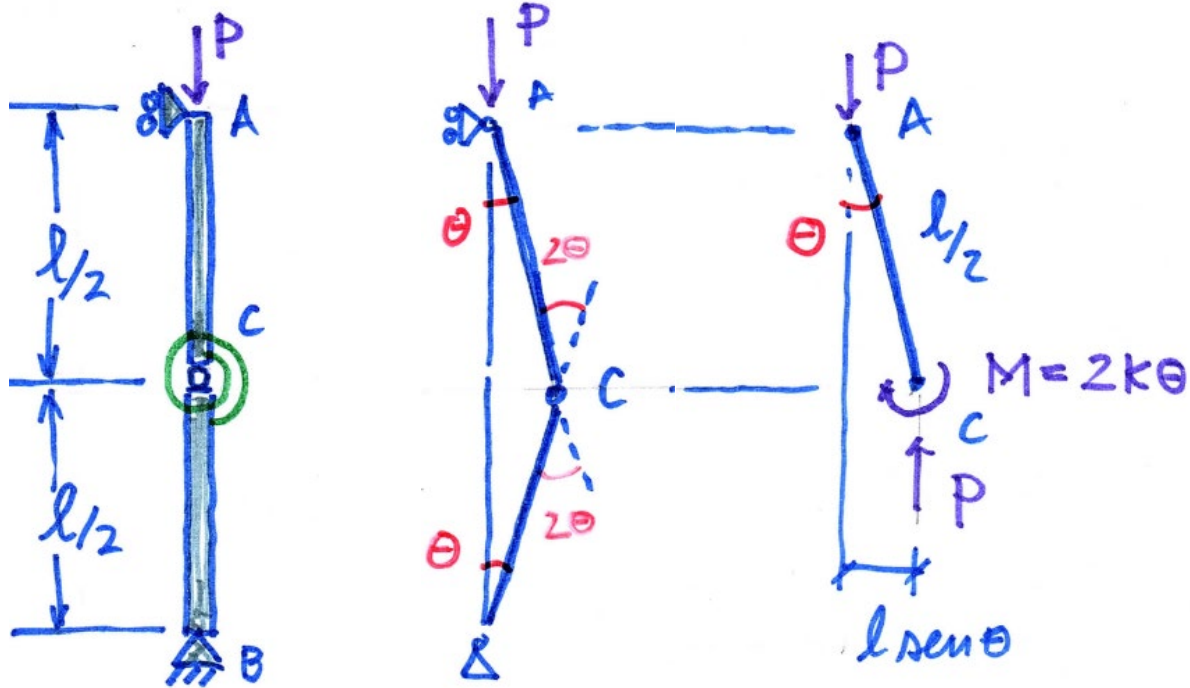
Por outro lado, quando  $P > P_{crit}$  o momento desbalanceado é positivo, tendendo a reforçar o giro anti-horário da barra. O equilíbrio se torna instável!

Para valores  $P < P_{crit}$ , o equilíbrio se dá com  $\delta = 0$  ficando o deslocamento lateral indeterminado a partir de  $P = P_{crit}$



Nota: Os deslocamentos da barra para  $P > P_{crit}$  poderiam ainda ser determinados, considerando grandes deslocamentos!

Exercício: mostre que para a estrutura composta de duas barras ligadas por uma mola de rigidez à rotação  $k$  (em  $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ), a carga crítica de estabilidade vale  $P_{\text{crit}} = \frac{4k}{l}$ .  
 Dica: considere que, para pequenos deslocamentos,  $\sin \theta \approx \theta$ .



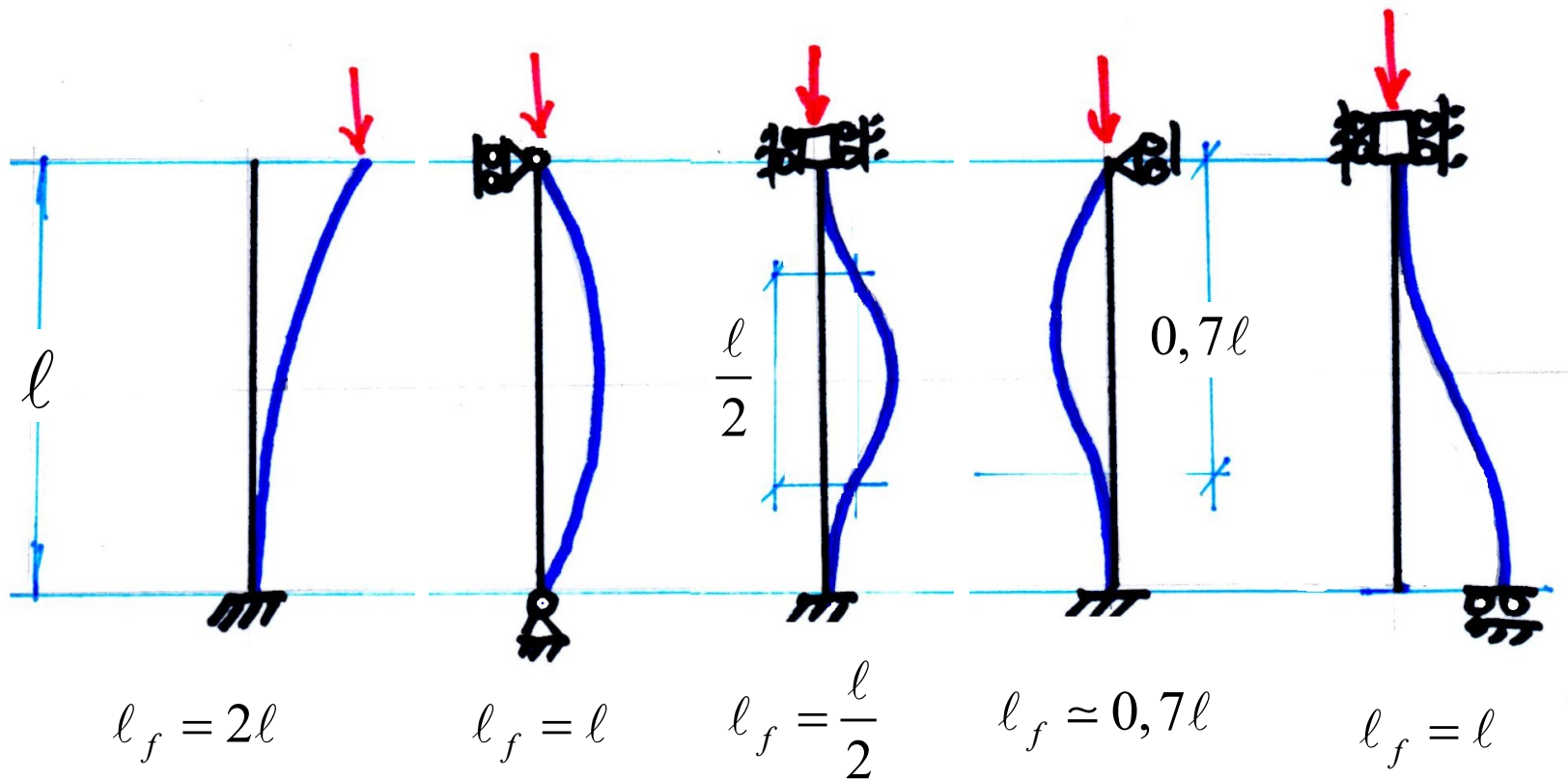
$$\left. \begin{array}{l} \sum M_{(A)} = P \frac{l}{2} \sin \theta - 2k\theta = 0 \\ \theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta = \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \left( P \frac{l}{2} - 2k \right) \theta = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \text{ou} \\ P_{\text{crit}} = \frac{4k}{l} \end{array} \right.$$

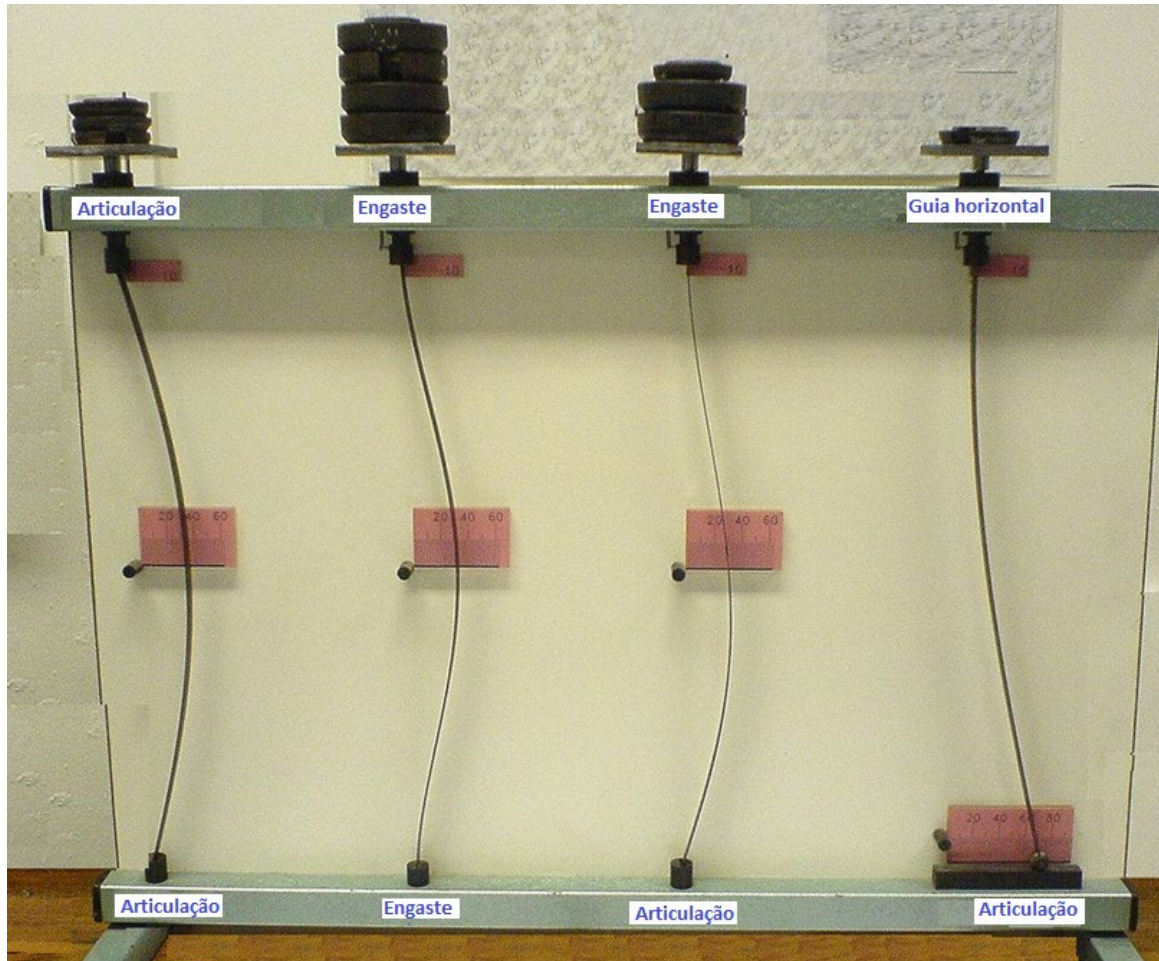


Carga crítica para colunas  
sujeitas à compressão:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_f^2}$$

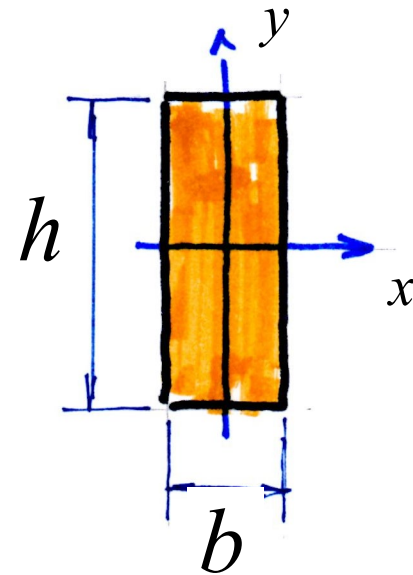
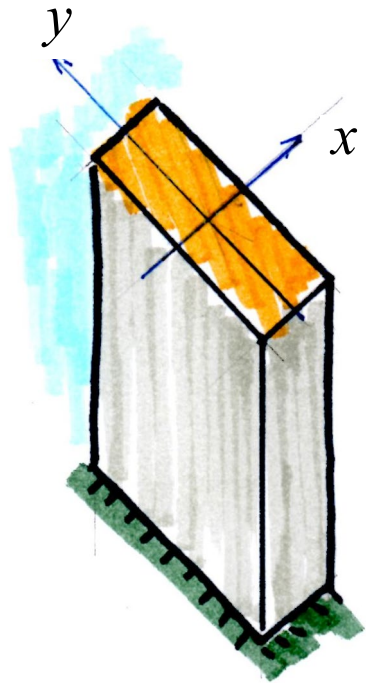
$l_f$  depende da vinculação:





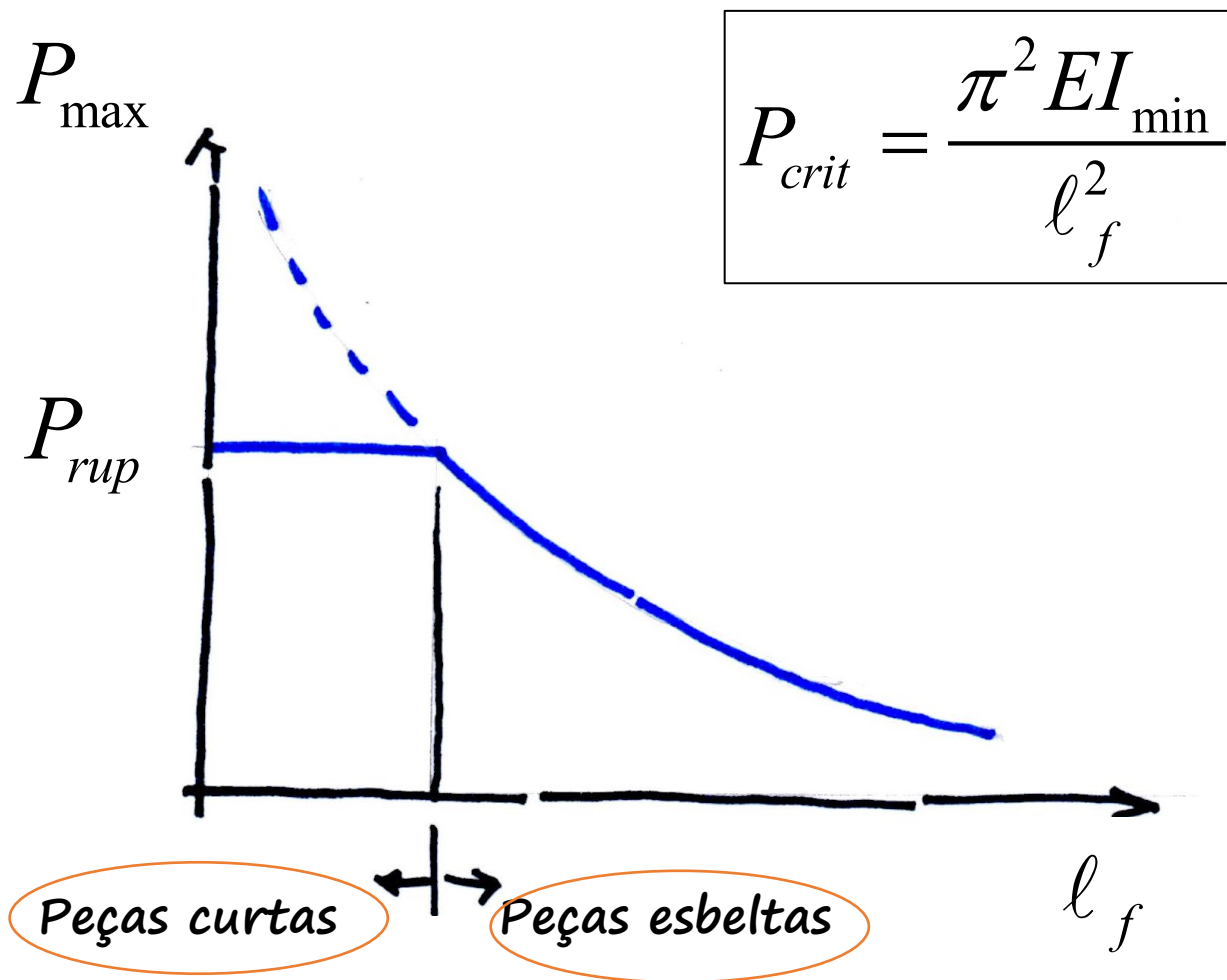
(foto adaptada (original: Grahams Child - <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1368026>

$P_{crit}$  depende do menor momento de inércia da seção transversal ( $I_{min}$ )



$$I_{max} = I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{min} = I_y = \frac{hb^3}{12}$$



# Verificação da segurança de barras comprimidas

Duas situações devem ser verificadas:

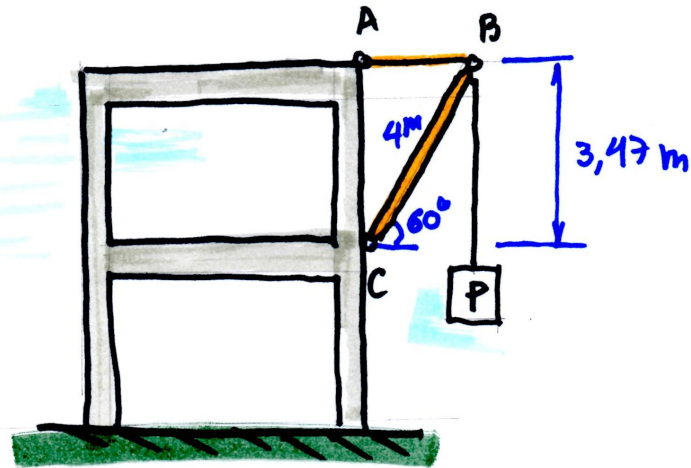
(1) Ruptura à compressão (“esmagamento”):

$$\sigma_{\max} < \bar{\sigma} \quad \therefore \quad \sigma_{\max} = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_{\text{lim}}^c}{s}$$

(2) Instabilidade (“flambagem”):

$$P \leq \frac{P_{\text{crit}}}{s} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\ell_f^2}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .



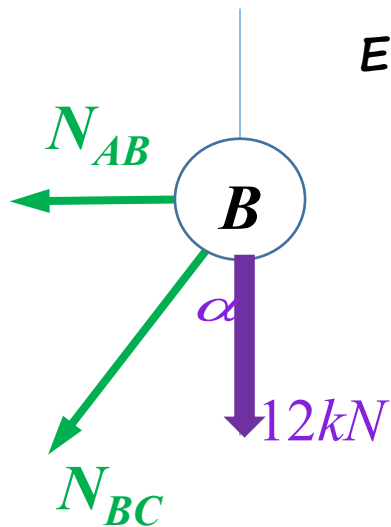
Cabo AB de Seção circular, diâmetro  $\phi$

Barra BC seção quadrada de lado "a"

Material:  $\sigma_R^t = 40\text{MPa}$ ;  $\sigma_R^c = 40\text{MPa}$

$E = 20\text{GPa}$

Coeficiente de segurança:  $s=2$



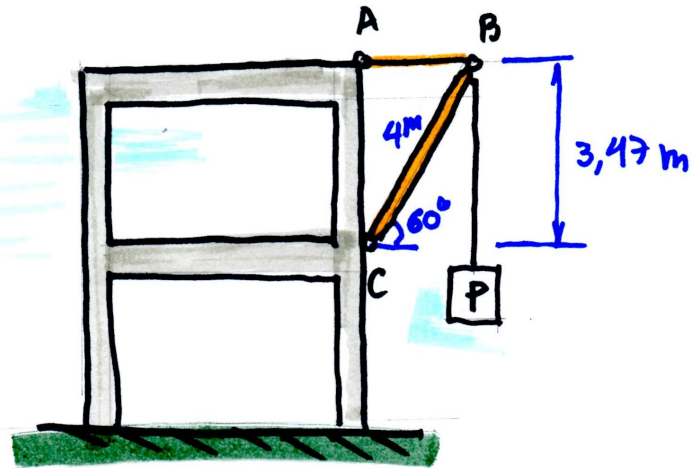
Equilíbrio do nó B:  $\sum_i F_X^i = -N_{AB} - N_{BC} \sin 30^\circ = 0$

$$\sum_i F_Y^i = -N_{BC} \cos 30^\circ - 12 = 0$$

$$N_{BC} = -\frac{12}{0,866} = -13,8\text{kN} \text{ (compressão!)}$$

$$N_{AB} = -(-13,8 \times 0,5) = +6,9\text{kN} \text{ (tração!)}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .



Dimensionamento:

(1) Cabo AB

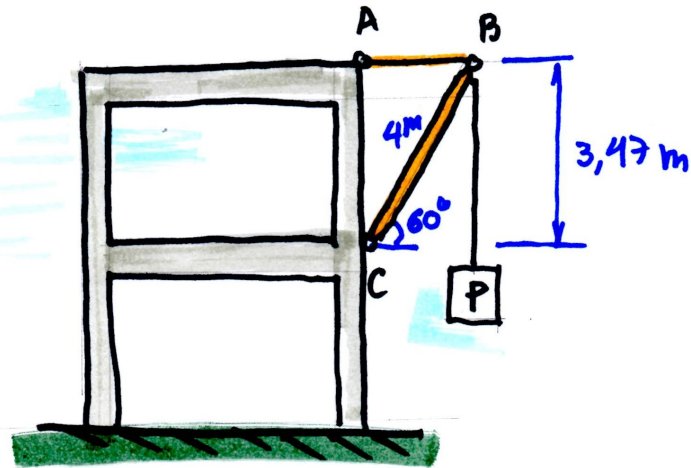
$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{cabo}} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{S}$$

$$\left( \frac{N_{AB}}{\frac{\pi\phi^2}{4}} \right) \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{S}$$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4SN_{AB}}{\pi\sigma_R^t}} = \sqrt{\frac{4 \times 2 \times 6,9 \times 10^3}{\pi \times 40 \times 10^6}} = 0,021\text{m}$$

$$\phi \geq 2,1\text{cm}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .



Dimensionamento:

(2) Barra BC  $A = a^2$  ;  $I = \frac{a^4}{12}$

(2.1) Esmagamento

$$\sigma = \frac{|N_{BC}|}{a^2} \leq \frac{\sigma_R^c}{s}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{s |N_{BC}|}{\sigma_R^c}} = \sqrt{\frac{2 \times 13,8 \times 10^3}{40 \times 10^6}} = 0,026\text{m}$$

(2.2) Flambagem

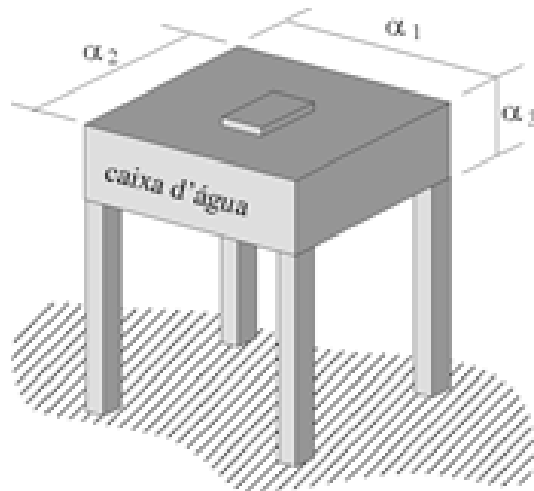
$$|N_{BC}| \leq \frac{P_{crit}}{s} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 EI}{\ell_f^2} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 E a^4}{\ell^2 12}$$

$$a \geq \sqrt[4]{\frac{12s\ell^2 |N_{BC}|}{\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{12 \times 2 \times 4^2 \times 13,8 \times 10^3}{\pi^2 \times 20 \times 10^9}} = 0,071\text{m} \quad \boxed{a \geq 7,1\text{cm}}$$



Exercício: A estrutura da figura abaixo consiste de uma caixa d'água sustentada por quatro pilares de 12m, cujo material possui módulo de elasticidade  $E = 21 \text{ GPa}$  e tensão de ruptura  $\sigma_R = 40 \text{ MPa}$ . Para obter o valor da carga sobre os pilares, considere que o peso próprio da caixa d'água corresponde a 30% do peso do líquido ( $\gamma_{\text{líquido}} = 10 \text{ kN/m}^3$ ) contido na mesma, ou seja,  $P_{\text{projeto}} = 1,3 \times P_{\text{líquido}}$ .

Três tipos distintos de condições das extremidades dos pilares devem ser analisadas (esquemas I, II e III na figura). Determinar a dimensão  $a$  da seção transversal dos pilares para cada uma das três situações ( $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ ), adotando um coeficiente de segurança  $s = 3$ .



Resp. (cm)	$a_1$	$a_2$	$a_3$



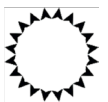
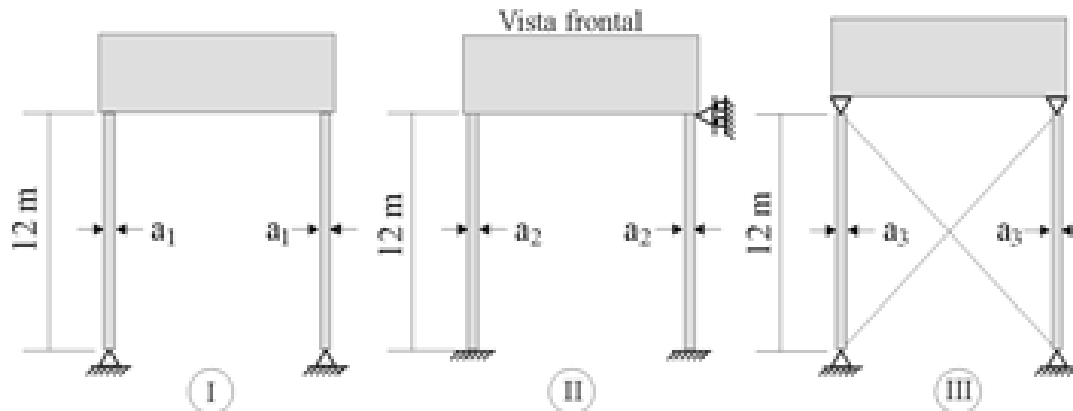
material  
 $E = 21 \text{ GPa}$   
 $\sigma_R = 40 \text{ MPa}$   
 Coef. seg.  
 $s = 3$

Adotar:

$$\alpha_1 = 5 \text{ m}$$

$$\alpha_2 = 6 \text{ m}$$

$$\alpha_3 = 4 \text{ m}$$



## Resolução:

(a) Levantamento das cargas atuantes:

$$P_{\text{líquido}} = V_{\text{caixa}} \times \gamma_{\text{líquido}} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \times \gamma_{\text{líquido}} = 5\text{m} \times 6\text{m} \times 4\text{m} \times 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} = 1200\text{kN}$$

A carga total de projeto é dada por:

$$P_{\text{projeto}} = 1,3 \cdot P_{\text{líquido}} = 1,3 \times 1200 = 1560\text{kN}$$

A carga em cada um dos pilares é dada por:

$$P_{\text{pilar}} = \frac{P_{\text{projeto}}}{4} = \frac{1560}{4} = 390\text{kN}$$

(b) Dimensionamento do pilar:

(b.1) 1º critério – Tensão normal:  $\sigma = \frac{|P_{\text{pilar}}|}{A} \leq \frac{\sigma_R}{s} \Rightarrow \frac{|P_{\text{pilar}}|}{a^2} \leq \frac{\sigma_R}{s}$

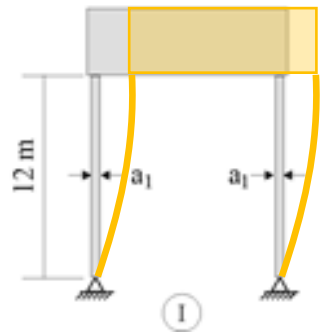
$$a \geq \sqrt{\frac{s \cdot P_{\text{pilar}}}{\sigma_R}} = \sqrt{\frac{3 \times 390 \times 10^3}{40 \times 10^6}} = 0,17\text{m} = 17\text{cm}$$



(b.2) 2º critério – flambagem:  $P_{pilar} \leq \frac{1}{s} P_{crit} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 E I}{l_f^2}$

$$I = \frac{a^4}{12} \geq \frac{s \cdot P_{pilar} \cdot l_f^2}{\pi^2 E} \Rightarrow a \geq \sqrt[4]{\frac{12 \cdot s \cdot P_{pilar} \cdot l_f^2}{\pi^2 E}}$$

(b.2.1) situação 1:



$$l_f = 2l = 2 \times 12 = 24m$$

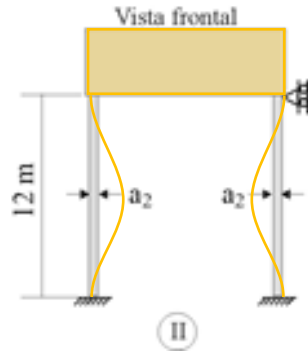
$$a_1 \geq \sqrt[4]{\frac{12 \times 3 \times 390 \times 10^3 \times 24^2}{\pi^2 \times 21 \times 10^9}}$$

$$a_1 \geq 0,44m$$

$$a_1 = 44cm$$



(b.2.2) situação 2:



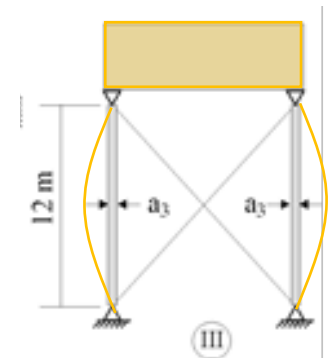
$$l_f = 0,5l = 0,5 \times 12 = 6m$$

$$a_2 \geq \sqrt[4]{\frac{12 \times 3 \times 390 \times 10^3 \times 6^2}{\pi^2 \times 21 \times 10^9}}$$

$$a_2 \geq 0,22m$$

$$a_3 = 22cm$$

(b.2.3) situação 3:



$$l_f = l = 12m$$

$$a_3 \geq \sqrt[4]{\frac{12 \times 3 \times 390 \times 10^3 \times 12^2}{\pi^2 \times 21 \times 10^9}}$$

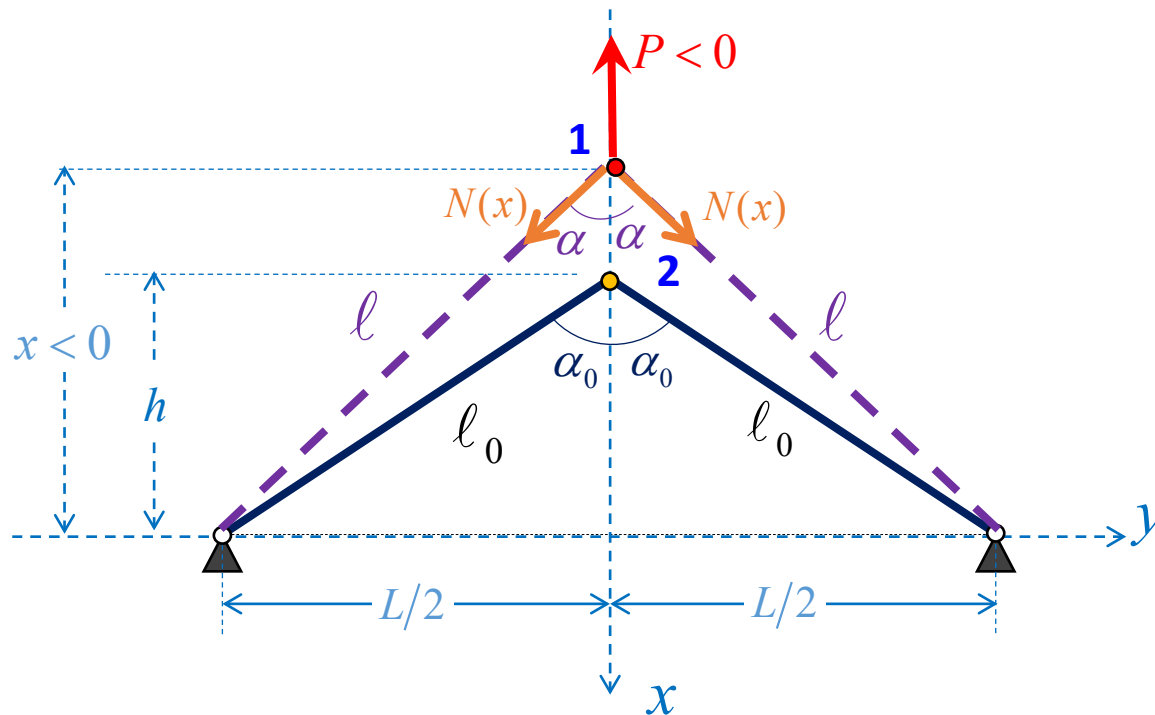
$$a_3 \geq 0,31m$$

$$a_3 = 31cm$$



# Não Linearidade Geométrica

Quando os deslocamentos não puderem ser desprezados, o problema se torna não-linear!



$$l_0 = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 + 4h^2}$$

$$l(x) = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 + 4x^2}$$

$$\cos \alpha(x) = \frac{x}{l(x)}$$

# Não Linearidade Geométrica

(1) As forças normais nas barras variam com a geometria:

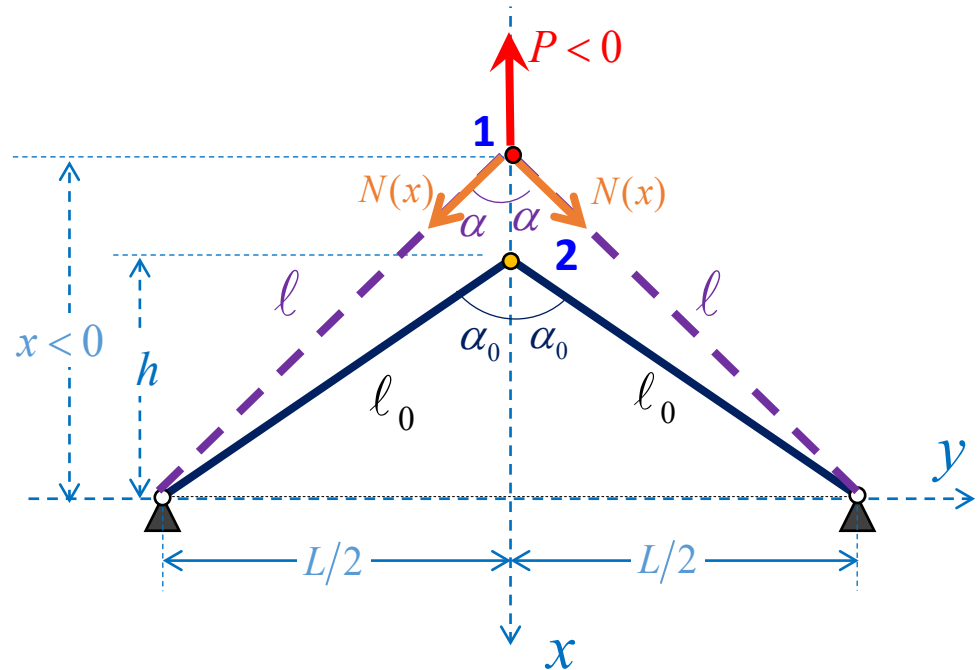
$$N(x) = EA \frac{\Delta \ell(x)}{\ell_0} = \frac{EA}{\ell_0} (\ell(x) - \ell_0)$$

$$N(x) = k (\ell(x) - \ell_0)$$

onde  $k = \frac{EA}{\ell_0}$

É uma 'rigidez de mola',  
de dimensão em [N/m]

E onde  $EA$  é o 'módulo de rigidez axial' das barras



(2) O equilíbrio vertical do nó central depende do ângulo  $\alpha(x)$

$$2N(x) \cos \alpha(x) - P = 0 \quad \therefore \quad 2k (\ell(x) - \ell_0) \frac{x}{\ell(x)} - P = 0$$

# Não Linearidade Geométrica

Substituindo valores:

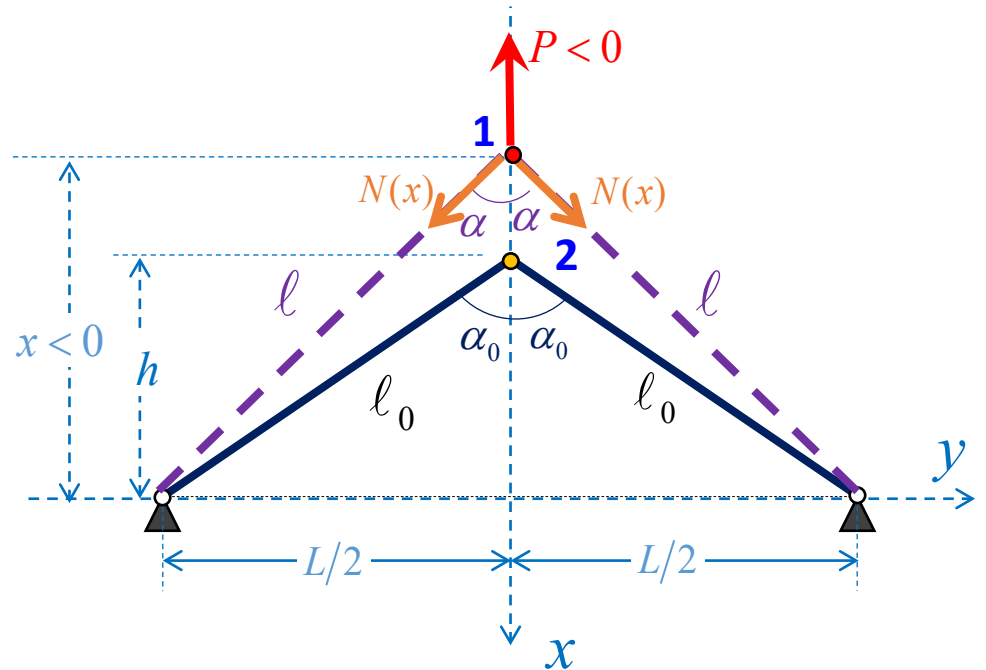
$$2k \left( 1 - \frac{2\ell_0}{\sqrt{L^2 + 4x^2}} \right) x - P = 0$$

Definindo a resultante das forças internas:

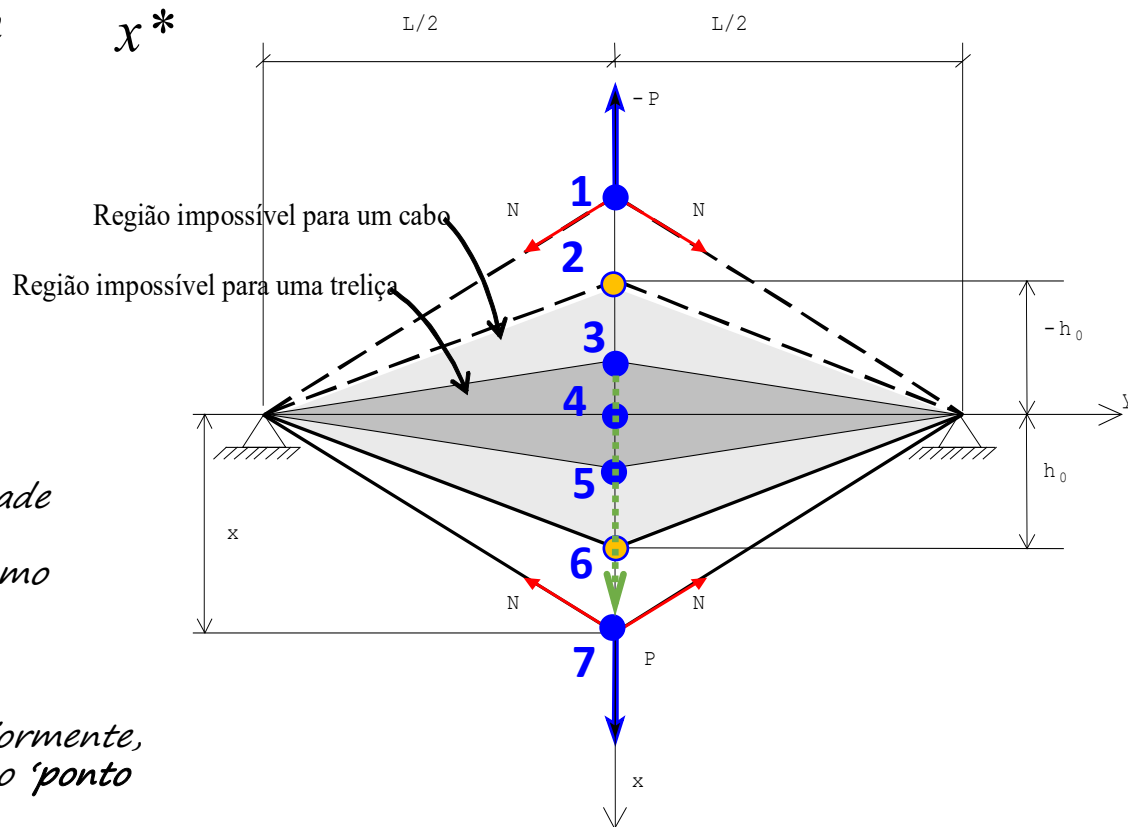
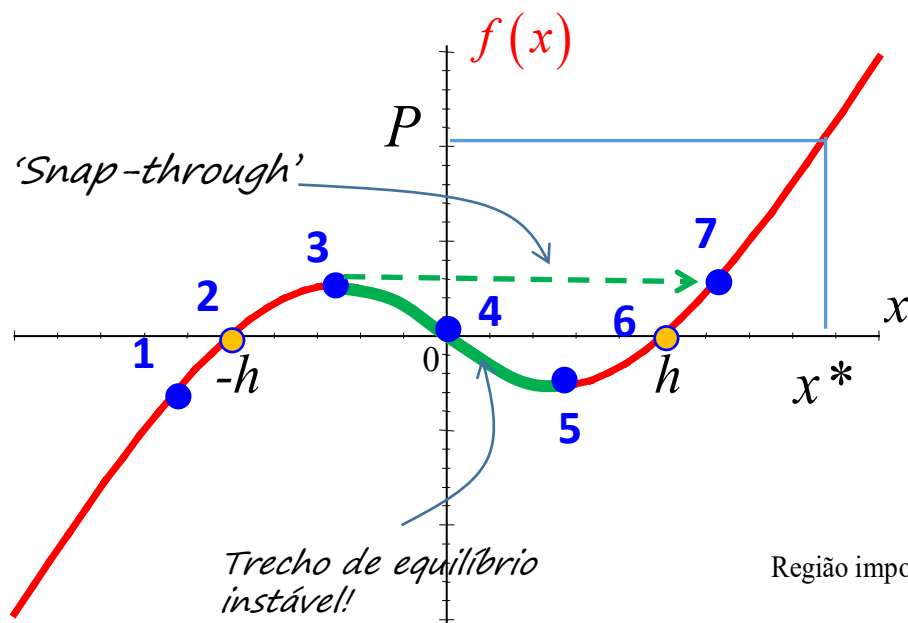
$$f(x) = 2k \left( 1 - \frac{2\ell_0}{\sqrt{L^2 + 4x^2}} \right) x$$

O equilíbrio é expresso por:

$$f(x) - P = 0$$



Para cada valor de  $P$ , encontra-se numericamente a configuração de equilíbrio  $x^*$ !



O 'snap-through' é um tipo de instabilidade característica de arcos e cascas abatidas esbeltas, matematicamente conhecido como 'ponto limite'.

Por outro lado, a flambagem, vista anteriormente, é um caso de instabilidade conhecido como 'ponto de bifurcação'.