

Lista I - Física II - Gabarito

1)

(a) $x_a = 0$ e $x_b = 2x_1/3$.

(b)

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + U''(0)\frac{x^2}{2} + U'''(0)\frac{x^3}{6} = -U_1 \left[\left(\frac{x}{x_1} \right)^3 - \left(\frac{x}{x_1} \right)^2 \right].$$

(c)

(d) Para uma partícula de massa m temos que a equação de movimento é dada por

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} = -\frac{U_1}{x_1^3}(3x^2 - 2xx_1) \quad (1)$$

(e)

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{dU}{dt} + m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$0 = \left(\frac{dU}{dx} + m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \frac{dx}{dt}$$

(f) Ao expandir 1 até segunda ordem obtemos a mesma equação. Isso equivale a expandir o potencial até terceira ordem e usar $F = -dU/dx$.

(g)

$$\begin{aligned} U(x) &= U\left(\frac{2x_1}{3}\right) + U'\left(\frac{2x_1}{3}\right)\left(x - \frac{2x_1}{3}\right) + U''\left(\frac{2x_1}{3}\right)\frac{\left(x - \frac{2x_1}{3}\right)^2}{2} + U'''\left(\frac{2x_1}{3}\right)\frac{\left(x - \frac{2x_1}{3}\right)^3}{6} \\ &= -U_1 \left[\left(\frac{x}{x_1} \right)^3 - \left(\frac{x}{x_1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

2)

(a) A equação de movimento é dada por

$$F\hat{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} = -kx\hat{x}$$

que tem como solução $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ com $\omega = \sqrt{k/m}$.

(b)

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

3)(a) $A^2 = C^2 + D^2$ e também $\tan(\phi) = -D/C$.

(b) A energia total é dada por

$$E = \frac{m}{2}A^2\omega^2$$

(c) ω

(d)

$$\overline{\cos(\omega t)} = 0$$

$$\overline{\sen(\omega t)} = 0$$

$$\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\sen^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$$

(e)

(f)

$$\overline{U} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\overline{\cos(\omega t + \phi)^2} = \frac{m}{4}A^2\omega^2$$

$$\overline{K} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\overline{\sin(\omega t + \phi)^2} = \frac{m}{4}A^2\omega^2$$

4)

$$\frac{4k}{3M}x + \ddot{x} = 0. \quad (2)$$

5)



Figura 1: Esquema exercício 5

- (a) Considerando no referencial do CM (inercial pois a soma das forças externas sobre o sistema é nula), temos que as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned} (1) \quad m_1 \ddot{x}_1 \hat{x}_1 &= -k((x_2 + x_1) - l) \hat{x}_1 \\ (2) \quad m_2 \ddot{x}_2 \hat{x}_2 &= -k((x_2 + x_1) - l) \hat{x}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

- (b) Podemos escrever a coordenada relativa como $\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ e definindo $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}$, a equação de movimento para a coordenada relativa é

$$\mu \frac{d^2(x - l)}{dt^2} = -k(x - l). \quad (4)$$

Nesse referencial a equação de movimento da coordenada do CM é simplesmente $\ddot{x}_{CM} = 0$.

(c)

(d)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt} (k(x - l) + \mu \ddot{x}) = 0. \quad (5)$$

6)

Subcrítico: Para o caso em que $b^2 < 4ac$ temos a solução mais geral da forma

$$x_H(t) = e^{-\frac{bt}{2a}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \quad (6)$$

Supercrítico: O caso em que $b^2 > 4ac$ tem como solução mais geral

$$x_H(t) = e^{-\frac{bt}{2a}} (A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}) \quad \text{com} \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (7)$$

Crítico: O caso em que $b^2 = 4ac$ tem $\alpha_+ = \alpha_-$ e portanto tem como solução mais geral

$$x_H(t) = e^{-\frac{bt}{2a}} (A + Bt). \quad (8)$$

Olhando agora para a solução particular, temos que $x_P = \frac{F_0}{c}$ é solução, de modo que a solução geral é dada por $x(t) = x_H(t) + x_P$. Em cada um dos diferentes casos descritos temos que as constantes A e B dependem das condições iniciais. Tomando $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$ temos que os valores dessas constantes em cada um dos casos é

$$\textbf{Subcrítico :} \quad A = -\frac{F_0 - cx_0}{c} \quad e \quad B = \frac{b(c x_0 - F_0)}{c\sqrt{4ac - b^2}}$$

$$\textbf{Crítico :} \quad A = -\frac{F_0 - cx_0}{c} \quad e \quad B = \frac{b(c x_0 - F_0)}{2ac}$$

$$\textbf{Supercrítico :} \quad A = -\frac{F_0\sqrt{b^2 - 4ac} - cx_0\sqrt{b^2 - 4ac} - bcx_0 + bF_0}{2c\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$B = -\frac{F_0\sqrt{b^2 - 4ac} - cx_0\sqrt{b^2 - 4ac} + bcx_0 - bF_0}{2c\sqrt{b^2 - 4ac}}$$