FLUIDOS - AULA 5

Lembrete : Eq. de Euler : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}u}{\rho}$

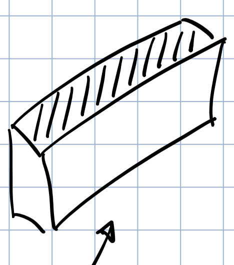
Eq. de continuidade : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$

Hoje : vamos finalmente ligar a viscosidade

1. Eq. de Navier-Stokes

Navier-Stokes = generalização da eq. de Euler para fluidos viscosos

Fato experimental importantíssimo :



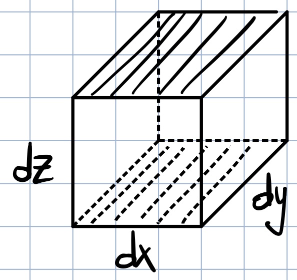
elemento de fluido

força de atrito (viscoso) que o elemento de fluido adjacente aplica na superfície colorida é

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} A_{\perp}$$

esquematicamente : depende da variação da velocidade ao longo da direção $\vec{\ell}$ e da área $\perp$ à direção $\vec{\ell}$

Para um elemento infinitesimal de fluido :



$$\vec{F}_{superior} = \eta \frac{\partial \vec{v}(x,y,z+dz)}{\partial z} \, dx\, dy$$

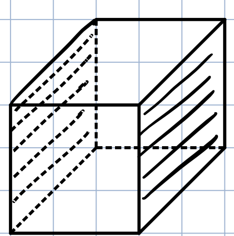
$$\vec{F}_{inferior} = - \eta \frac{\partial \vec{v}(x,y,z)}{\partial z} \, dx\, dy$$

porque o elemento de fluido aplica $\eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dx\, dy$ na camada inferior

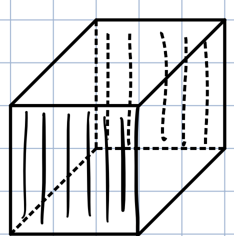
$\Rightarrow$ ação/reação requer o sinal −

$$\Rightarrow \vec{F}^{(1)}_{TOT} = \eta \, dx\, dy \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} dz - \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right] = \eta \, dV \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$$

Nas outras faces :



$$\vec{F}^{(2)}_{TOT} = \eta \, dV \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2}$$



$$\vec{F}^{(3)}_{TOT} = \eta \, dV \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2}$$

Juntando :

$$\vec{F}_{TOT} = \eta \, dV \left(\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{f}_{visc} = \eta \, \vec{\nabla}^2 \vec{v}}$$

Obtemos então a

EQ. NAVIER-STOKES

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{f}_V + \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \vec{v}}$$

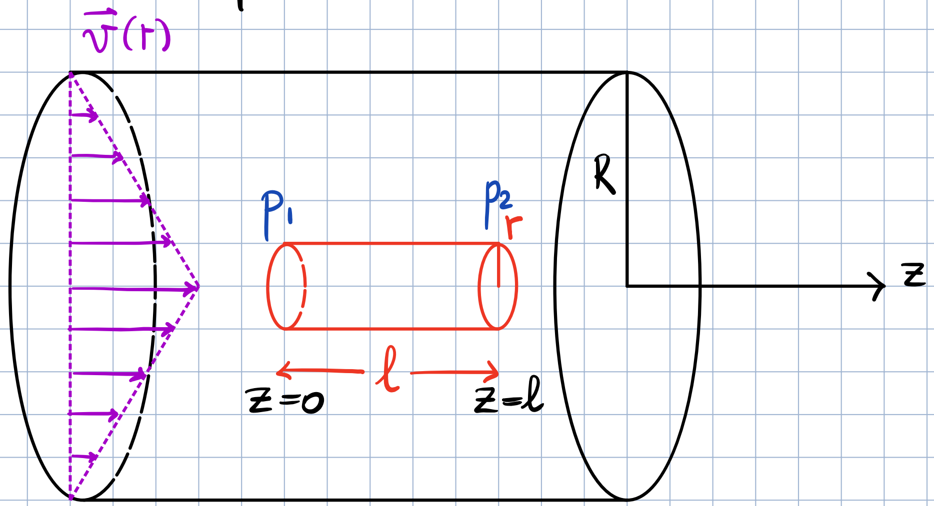
Tomando o rotacional :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \vec{\Omega}$$

pode-se mostrar que esse termo pode gerar redemoinhos!

2. Eq. de Hagen - Poiseuille

Vamos aplicar a eq. de Navier-Stokes a um caso simples :



As coordenadas melhores são as coordenadas cilíndricas, nas quais

$$\begin{cases} \vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{\nabla}^2 f(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{cases}$$

Parêntese: como obter $\vec{\nabla}$?

Lembramos que $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$

Em coordenadas cartesianas,

$$\vec{\nabla} = \underbrace{\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y}}_{\text{suficiente focar nesses termos}} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Novos versores: $\begin{cases} \hat{e}_r = \cos\varphi\, \hat{e}_x + \sin\varphi\, \hat{e}_y \\ \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{e}_x + \cos\varphi\, \hat{e}_y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{e}_x = \cos\varphi\, \hat{e}_r - \sin\varphi\, \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_y = \sin\varphi\, \hat{e}_r + \cos\varphi\, \hat{e}_\varphi \end{cases}$$

Derivadas : usamos a regra da cadeia

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f\left(r(x,y), \varphi(x,y), z\right) &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{r\cos\varphi}{r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{r\sin\varphi}{r^2} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \hat{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \\
&= \overbrace{\left(\hat{e}_x \cos\varphi + \hat{e}_y \sin\varphi\right)}^{\hat{e}_r} \frac{\partial f}{\partial r} + \underbrace{\left(-\hat{e}_x \frac{\sin\varphi}{r} + \hat{e}_y \frac{\cos\varphi}{r}\right)}_{\hat{e}_\varphi / r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\
&\quad + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \\
&= \hat{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Para calcular $\vec{\nabla}^2 f$ procede-se de forma análoga.

Vamos considerar o regime estacionário : $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Navier-Stokes : com $\vec{v} = v_z(r)\,\hat{e}_z$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \frac{\vec{\nabla}u}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\vec{\nabla}^2\vec{v}$$

$$v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z(r) = 0$$

Vamos disprezar

$$\Rightarrow \vec{\nabla}p = \eta\,\vec{\nabla}^2 v_z(r) = \eta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{e}_z$$

Abrindo em componentes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial z} = \eta\,\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial v_z}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p = p(z)$$

integrando em z

$$p_2 - p_1 = \ell\eta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

integrando em r:

$$\frac{(p_2 - p_1)}{\ell \eta} \frac{r^2}{2} = r \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{(p_2 - p_1)}{2 \ell \eta} r$$

Integrando novamente em r:

$$v_z(r) = \frac{(p_2 - p_1) r^2}{4 \ell \eta} + C$$

fixamos usando $v_z(R) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_z(r) = \frac{(p_2 - p_1)(r^2 - R^2)}{4 \ell \eta}}$$

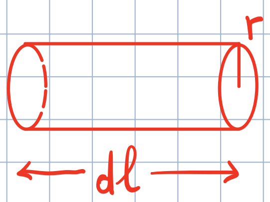
EQ. HAGEN-POISEULLE

é necessária uma diferença de pressão $p_1 - p_2 \neq 0$ para manter um escoamento viscoso estacionário

Vamos calcular a VAZÃO (lembrete: vazão = volume por unidade de tempo passando para uma superfície ortogonal à velocidade)

Vazão

$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_0^R dr\, 2\pi r \frac{dl}{dt} = \int_0^R dr\, 2\pi r\, v_z(r)$$



$$= \int_0^R dr\, 2\pi r \frac{(p_1 - p_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l}$$

$$= \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8 \eta l}$$

dependência muito forte da vazão no raio

APLICAÇÃO PRÁTICA: quando o raio de uma veia diminui, a vazão de sangue diminui drasticamente!

Obtemos portanto a eq. de Navier-Stokes:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \frac{\vec{\nabla} u}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\vec{\nabla}^2 \vec{v}}$$

Tomando o rotacional:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho}\vec{\nabla}^2 \vec{\Omega}$$

pode-se mostrar que esse termo pode gerar redemoinhos!

3. Número de Reynolds

O número de Reynolds quantifica a turbolência do escoamento. Para obter a expressão, vamos escrever a eq. para a vorticidade de uma forma "adimensional".

Quantidades importantes: v, η, ρ (fluido)

D (tamanho objeto)

Quantidades adimensionais: $\begin{cases} \vec{r}\,' = \dfrac{\vec{r}}{D} \\ t' = t\,\dfrac{v}{D} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x'} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial t'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{v}{D}\dfrac{\partial}{\partial t'} \end{cases}$$

Mas isso quer dizer que

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = D\,\dfrac{dt'}{dt}\,\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt'} = v\,\vec{v}\,' \\ \vec{\Omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\dfrac{1}{D}\,\vec{\nabla}'\right)\times\left(v\,\vec{v}\,'\right) = \dfrac{v}{D}\,\vec{\nabla}'\times\vec{v}\,' = \dfrac{v}{D}\,\vec{\Omega}' \end{cases}$$

A eq. portanto fica

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v}) = \frac{\eta}{\rho}\,\vec{\nabla}^2\vec{\Omega}$$

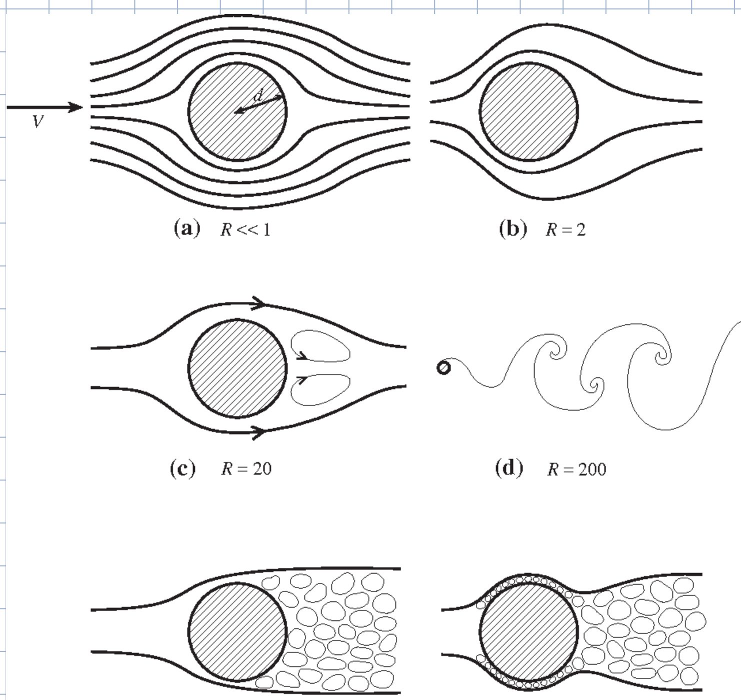
$$\downarrow$$

$$\left(\frac{v}{D}\right)^2\frac{\partial\vec{\Omega}'}{\partial t'} + \left(\frac{v}{D}\right)^2\vec{\nabla}'\times(\vec{\Omega}'\times\vec{v}\,') = \frac{\eta}{\rho}\,\frac{v}{D^3}\,\vec{\nabla}'^2\vec{\Omega}'$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial\vec{\Omega}'}{\partial t'} + \vec{\nabla}'\times(\vec{\Omega}'\times\vec{v}\,') = \underbrace{\frac{\eta}{\rho D v}}_{=\,1/R}\,\vec{\nabla}'^2\vec{\Omega}'$$

R = número de Reynolds



(a) $R << 1$ (b) $R = 2$

(c) $R = 20$ (d) $R = 200$

(e) $R = 2000$ (f) $R = 2\text{x}10^6$

Comportamento turbolento

Observamos um comportamento inesperado:

$\eta \to 0 \Rightarrow R \to \infty$ complexidade aumenta, em vez de diminuir.

Como é possível? A razão é que $\vec{\nabla}^2$ "amplifica" as irregularidades, compensando a diminuição de η

Mensagem: no limite $R \gg 1$ as soluções <u>não</u> se aproximam das soluções com viscosidade nula.