FLUIDOS : AULA 1

Primeira tarefa : definir o que é um fluido

- faremos isso comparando com um sólido com elasticidade
- nosso objetivo aqui é uma descrição macroscopica, não microscopica

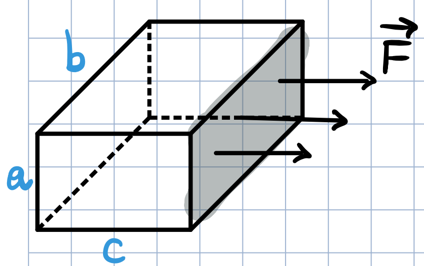
1. ELASTICIDADE EM SÓLIDOS (ISOTRÓPICOS)

↳ as propriedades não dependem da direção

Completamente descrita por 2 números :

$$\begin{cases} Y = \text{módulo de Young} \quad (\text{depende apenas do material}) \\ \sigma = \text{quociênte de Poisson} \end{cases}$$

Idea básica : aplicando uma força em um sólido suficientemente pequena (o sólido não quebra nem fica deformado permanentemente) vale a LEI DE HOOKE



$$|\vec{F}| = k\,\Delta c + \underbrace{k'\,\Delta c^2 + \dots}_{\text{muito pequenos}}$$

depende do material e da geometria

pode ser deixada explícita

observando que, fenomenologicamente

$$\begin{cases} \Delta c \propto c \\ \Delta c \propto \dfrac{1}{ab} \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta c = \frac{c\,|\vec{F}|}{ab}\,\frac{1}{y}}$$

Com

$$[y] = \frac{[F]}{[L^2]} \Rightarrow Pa = \frac{N}{m^2}$$

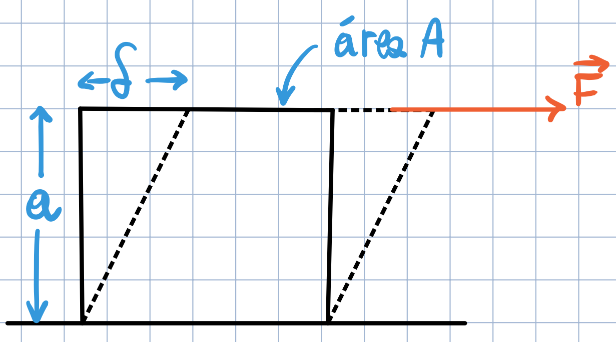
Na direção perpendicular à força temos (fenomenologicamente):

$$\frac{\Delta b}{b} = -\sigma\,\frac{\Delta c}{c} \qquad \frac{\Delta a}{a} = -\sigma\,\frac{\Delta c}{c}$$

Com $[\sigma] = 0$

Obs: o corpo rígido de física 1 corresponde a $y \to \infty$

EXEMPLO (IMPORTANTE): TENSÃO DE CISALHAMENTO



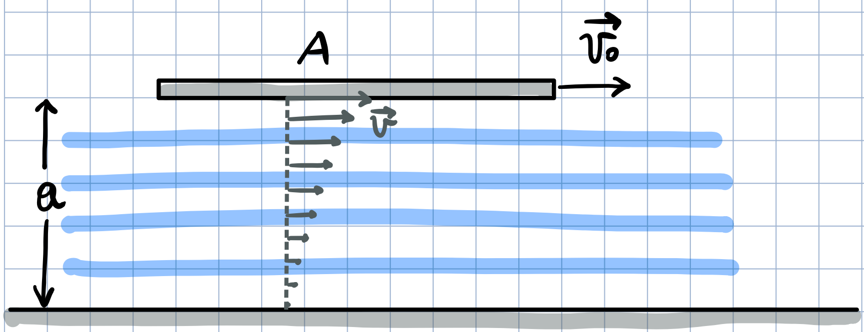
$$\frac{|\vec{F}|}{A} = \mu\,\frac{\delta}{a}$$

$$\mu = \frac{y}{2(1+\sigma)}$$

(ver Feynman, Vol. 2, 38.1 & 38.2)

2. FLUIDOS - DEFINIÇÃO

Fluidos são substâncias que não sustentam tensões de cisalhamento (porque fluem)



Fatos experimentais importantes:

(1) para manter a placa superior em movimento com velocidade $\vec{v}_0$ é preciso aplicar uma força

$$\frac{|\vec{F}|}{A} = \eta \frac{v_0}{a}$$

VISCOSIDADE (é uma forma de atrito)

(2) a velocidade relativa entre fluido e superfície é sempre zero

Ex: hélices de um ventilador ficam empoeiradas apesar do ventilador estar rodando

Classificação: $\begin{cases} \eta = 0 & \text{Fluido ideal} \\ \eta \neq 0 & \text{Fluido real} \end{cases}$

Unidades viscosidade: $[\eta] = \frac{Ns}{m^2} = P$ "poise"

Exemplos : $\eta_{H_2O} \simeq 1 \text{ cp}$

$\eta_{Piche} \simeq 2 \times 10^{11} \text{ cp} \longrightarrow$ experimento Queensland, Brisbane, Austrália

3. DINÂMICA DOS FLUIDOS IDEAIS (ou perfeitos, $\eta = 0$)

Para definir a eq. de movimento de um fluido (a dinâmica) precisamos primeiro definir

(a) forças que agem no fluido
(b) Conservação da massa
(c) lei de Newton

3.a - FORÇAS QUE AGEM NO FLUIDO

São de dois tipos:

(1) Volumétricas (= proporcionais ao volume)

$$d\vec{F}_V(\vec{r}) = \vec{f}_V(\vec{r})\, dx\, dy\, dz$$

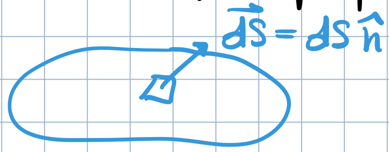
densidade de força

Ex: • peso $d\vec{F} = dm\, \vec{g} = \rho(\vec{r})\, dx\, dy\, dz\, \vec{g}$

$\Rightarrow \vec{f}_V = \rho(\vec{r})\, \vec{g}$

• atrito viscoso (ver mais para a frente)

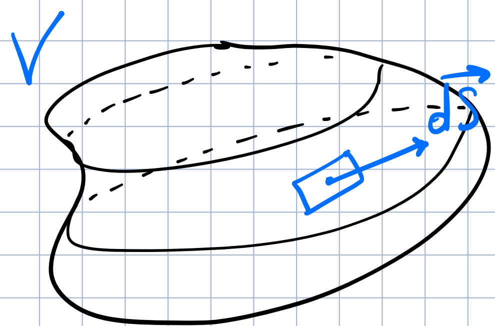
(2) superficiais (= proporcionais à superfície)



$$\vec{dF}_s = -p\,\vec{dS} + \underbrace{(\text{cisalhamento})\,\vec{dS}}_{=0 \text{ para fluidos perfeitos}}$$

3.b - CONSERVAÇÃO DA MASSA

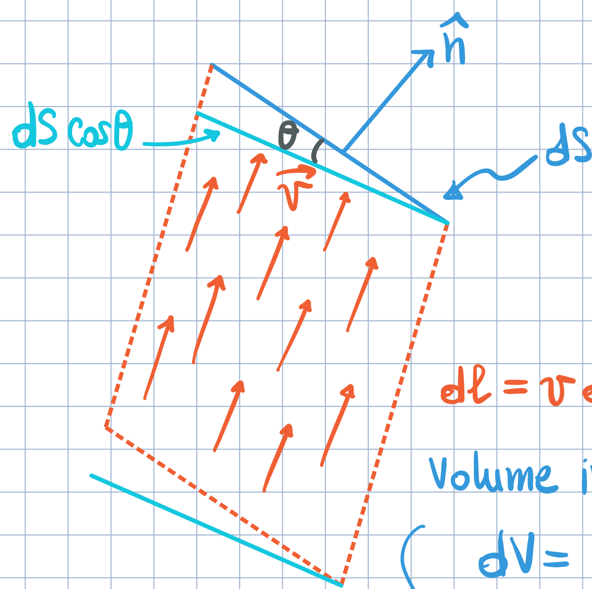
A ideia é a seguinte: dado um volume V no fluido em movimento, a taxa de variação da massa contida em V deve ser igual à massa que saiu de V



- massa contida em V

$$M = \int_V dV\, \rho(\vec{r})$$

- massa de fluido que atravessa $\vec{dS}$ no tempo dt:



$d\ell = v\,dt$

Volume infinitesimal

$$\left\{ \begin{aligned} dV &= d\ell\, dS\cos\theta \\ &= dt\, v\, dS\cos\theta \\ &= dt\, \vec{v}\cdot\vec{dS} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \int \rho \frac{dV}{dt} = \int \rho\, \vec{v}\cdot\vec{dS}$$

Para a massa ser conservada, as duas quantidades devem ser iguais:

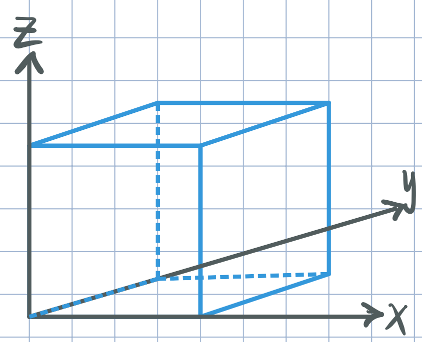
$$\boxed{\dot{M} = \int_V dV\,\dot{\rho} = -\int_S d\vec{S}\cdot\vec{v}\,\rho}$$

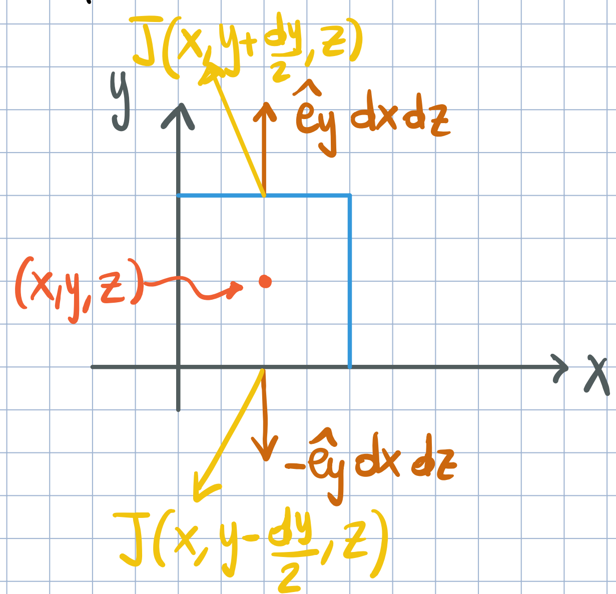
fluido sai, diminuindo a massa

EQ. DE CONTINUIDADE

$$\vec{J} \equiv \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)$$

É mais prático considerar a forma infinitesimal dessa eq.:





na direção y:

$$\vec{J}\cdot d\vec{S}_y + \vec{J}\cdot d\vec{S}_{-y} = \left\{J_y\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right) - J_y\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right)\right\}dx\,dz$$

$$= \left\{\cancel{J_y(x,y,z)} + \frac{\partial J_y}{\partial y}\frac{dy}{2} - \cancel{J_y(x,y,z)} + \frac{\partial J_y}{\partial y}\frac{dy}{2}\right\}dx\,dz$$

$$= \frac{\partial J_y}{\partial y}\,dV$$

Logo: $\dot{\rho}\,dV = -\underbrace{\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right)}_{\text{DIVERGENTE } \vec{\nabla}\cdot\vec{J}} dV$

(mesma estrutura do produto escalar mas com derivadas, ou seja $\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ = operador "nabla")

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}$$

Forma infinitesimal da eq. de Continuidade

3.C - LEI DE NEWTON

Para escrever a lei de Newton devemos escolher como descrever o fluido.

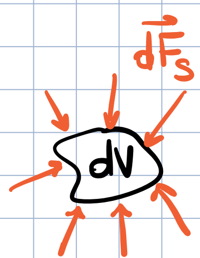
Aqui vamos usar a chamada "descrição euleriana" em termos de

$$\begin{cases} \text{um campo de velocidades} & \vec{v}(\vec{r},t) \\ \text{um campo de densidade} & \rho(\vec{r},t) \end{cases}$$

que satisfazem a conservação da massa

Vamos agora "acompanhar" um elemento de fluido (perfeito).

Dado um volume dV, quais as forças?

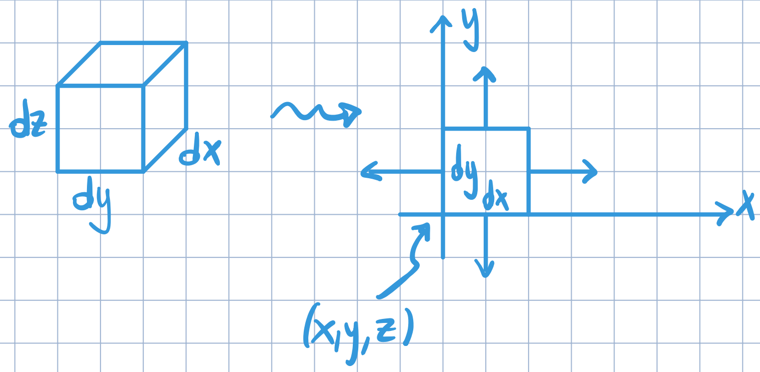


(força exercida pelos elementos de fluidos perto de dV)

$$\Rightarrow \vec{dF_T} = \vec{dF_S} + \vec{dF_V} = -p\,\vec{dS} + \vec{f_V}\,dV$$

porque a força é "de fora para dentro"

pode ser convertida em força volumetrica da seguinte forma:



$$\int p\, d\vec{S} = \left\{ p(x+dx,y,z) - p(x,y,z) \right\} dy\, dz\, \hat{e}_x$$

$$+ \left\{ p(x,y+dy,z) - p(x,y,z) \right\} dx\, dz\, \hat{e}_y$$

$$+ \left\{ p(x,y,z+dz) - p(x,y,z) \right\} dx\, dy\, \hat{e}_z$$

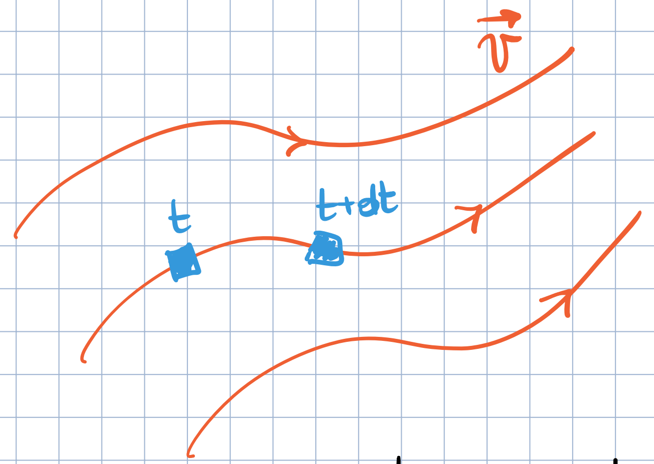
$$= \left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z \right) dx\, dy\, dz$$

$$= \vec{\nabla} p \; dV$$

gradiente

$$\Longrightarrow \quad d\vec{F}_T = \left(-\vec{\nabla} p + \vec{f_V} \right) dV$$

Qual é a aceleração "sentida" pelo elemento de fluido em dV?



	t	$t+dt$
posição	$\vec{r}$	$\vec{r}+\vec{v}(\vec{r},t)\,dt$
velocidade	$\vec{v}(\vec{r},t)$	$\vec{v}\big(\vec{r}+\vec{v}(\vec{r},t)dt,\, t+dt\big)$

Aceleração:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(\vec{r}+\vec{v}\,dt,\, t+dt) - \vec{v}}{dt}$$

expansão em série de Taylor:

$$\vec{v}(x+v_x\,dt,\ y+v_y\,dt,\ z+v_z\,dt,\ t+dt)$$

$$\|$$

$$\vec{v}(x,y,z,t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x\,dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y\,dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z\,dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\,dt + \mathcal{O}(dt^2)$$

$$\|$$

$$\vec{v} + \underbrace{\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\vec{v}\cdot\vec{\nabla}}\vec{v}\,dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\,dt$$

Logo,

$$\vec{a} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$$ (derivata material ou total)

Juntando tudo :

$$M\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \rho\,\vec{a} = \vec{f}_V$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla}p + \vec{f}_V}{\rho}}$$

EQ. DE EULER (versão 1)