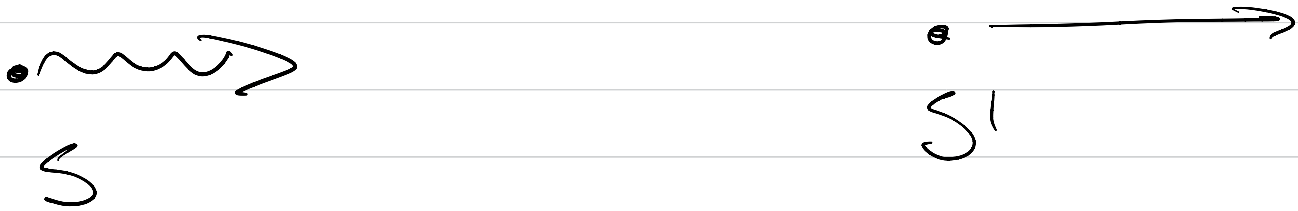
Relatividade (3):

Efeito Doppler Relativístico:

Efeito Doppler NR

$\vec{v} = v\hat{x}$



$\Rightarrow$ Emissão da luz em S' com frequência $\dfrac{1}{T}$ $\Rightarrow$ período T

$\Rightarrow$ Calcular a frequência em S'
ou o período em S'

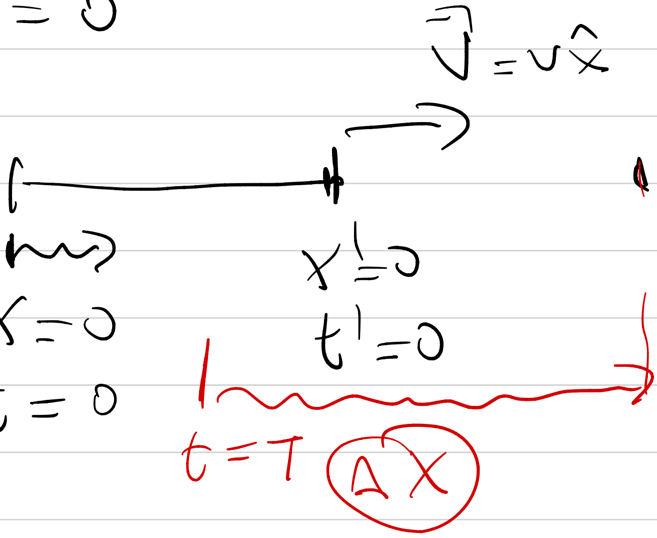
T em S' é

$$t' = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

A diferença entre a emissão dos dois flashes (ou picos)

Mas para chegar à origem de S' o segundo flash (ou 2º pico) deve percorrer uma distância adicional

se o receptor está na origem de S' $(x'=0)$ e as 2 origens coincidem em $t=0$



$$\frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\Delta X}{c}$$

$$x' = \frac{-vT}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ ← Posição da fonte no S' no momento da emissão do segundo flash (2º pico)

$$\Delta X = 0 - x'$$

$$\Rightarrow t' + \Delta t' = \frac{T + T v/c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow T' = \frac{T(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{ou}$$

$$T' = \frac{T(1+\beta)}{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1-\beta}} \Rightarrow$$

$$\boxed{T' = T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$$

$\Rightarrow$ se a velocidade relativa entre S e S' e $\beta > 0$ $\Rightarrow \nu' < \nu$

$$\Rightarrow \nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$ ou

$$\boxed{\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}$$ $\left(\begin{array}{l} \lambda = \frac{c}{\nu} \\ \lambda' = c/\nu' \end{array} \right)$

Se a fonte e o receptor estão se afastando $\Rightarrow$ { comprimento de onda é maior do que o emitido

$\Rightarrow$ Ex: Galáxias se afastando

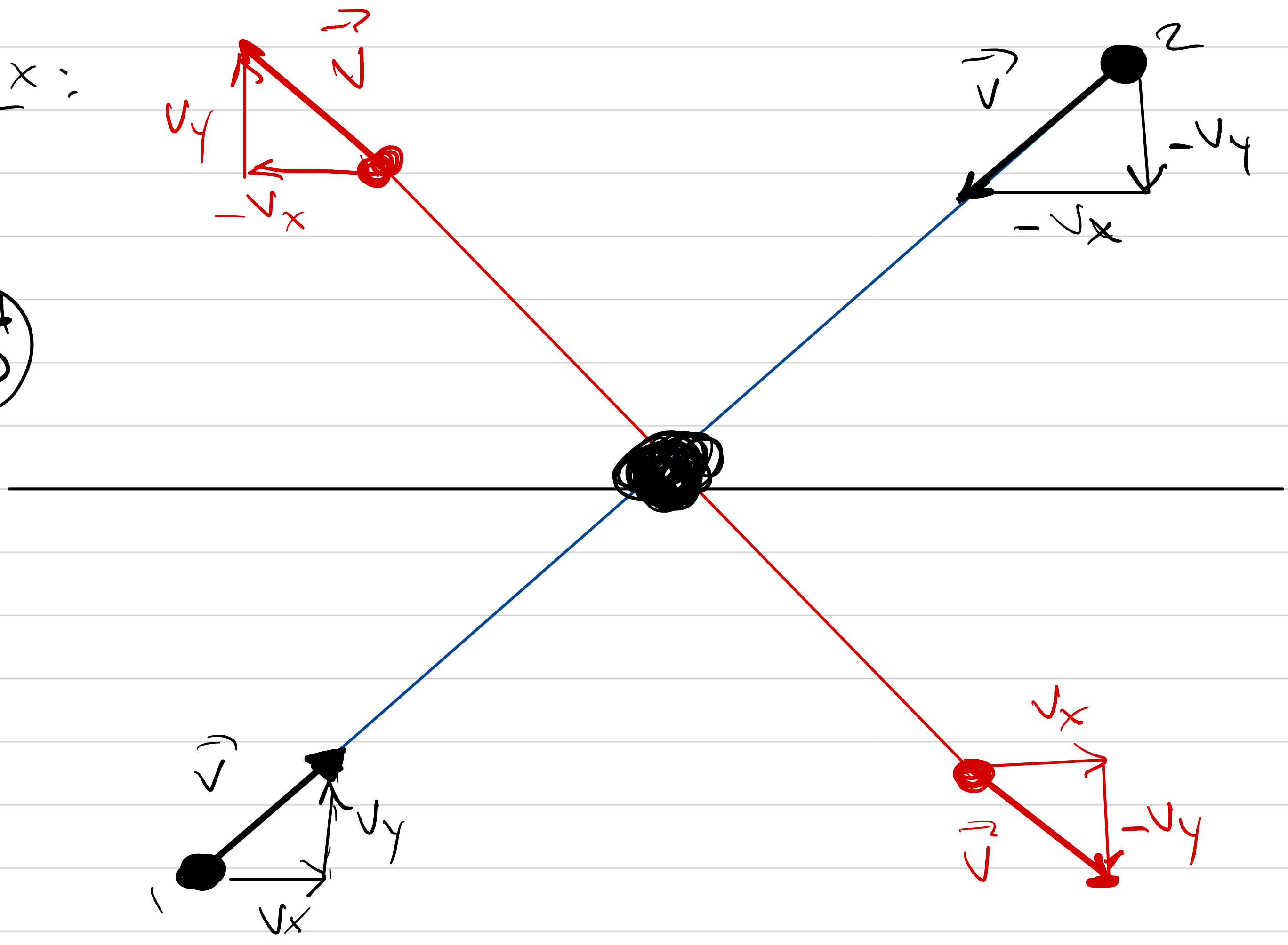
$\Rightarrow$ "Redshift" desvio

Momento Linear:

Como definir o momento relativístico?

Um dos postulados da Relatividade especial diz que as Leis da física devem ser as mesmas em todos os referenciais inerciais. Vamos considerar o exemplo de colisões.

Ex.:



Conservação do momento antes e depois da colisão:

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}.$$

A pergunta é: Podemos usar

$$\vec{P} = m\vec{v} ?$$

No sistema S' não vemos problemas. Em particular, o momento em $\hat{j}$ era zero antes da colisão e deve ser zero também depois

$$\underbrace{M v_{1y} + M v_{2y}}_{\text{antes}} = M \overset{v_{1y}}{v_y} + M \overset{v_{2y}}{v_y} = 0$$

$$\underbrace{M \overset{v_{1y}}{v_y} - M \overset{v_{2y}}{v_y}}_{\text{depois}} = 0$$

Mas se agora observamos a colisão desde um referencial S' com velocidade

$$\vec{v} = v_x \hat{x}$$

em relação à S, sabemos que, na direção $\hat{y}$:

<u>em geral</u>:
$$V_y' = \frac{V_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V_x V}{c}}$$

Mas aqui temos $v = v_x$

$\Rightarrow$ a partícula ① em S' tem

$$\begin{cases} V_{1y}' = \dfrac{V_y}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \\ \\ V_{2y}' = \dfrac{V_y}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} > V_{1y}' \end{cases}$$

Vemos que definindo $\vec{P} = M\vec{v}$
o momento na direção $\hat{y}$ não se
conserva no sistema S'

$\Rightarrow$ Definir o momento $\vec{P}$ tal que
a sua conservação seja
independente do referencial inercial

Para ver como fazer isso, vamos lembrar
que a razão pela qual $v'_y \neq v_y$ é
a variação do Δt no denominador
de

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Mas, se em lugar de usar Δt usamos
o tempo medido no referencial em
repouso da partícula, o tempo próprio
τ: $\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta \tau}$ deve ser invariante
sob transformações
de Lorentz

Mas sabemos que

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\Rightarrow$ a componente $\hat{j}$ de $\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

será a mesma em todos os referenciais com velocidade constante em $\hat{x}$.
O mesmo argumento pode ser feito para $\hat{z}$. Finalmente, dado que o momento não varia nos eixos $\hat{x}$ (ou $\hat{x}'$) a definição

$$\vec{p} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

terá todas as suas componentes conservadas em qualquer referencial inercial.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = m\vec{v}\gamma}$$

$\hookrightarrow$ Momento linear relativista

Claramente, $\underline{\vec{p} \rightarrow m\vec{v}}$ no limite

$$\frac{v}{c} \rightarrow 0.$$

Energia Relativista:

O momento pode ser escrito como

$$\vec{p} = mc\gamma\vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}\cdot\vec{p} = p^2 = m^2c^2\gamma^2\beta^2$$

Mas, dado que

$$\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad M^2 c^2 \gamma^2 - M^2 c^2 \beta^2 \gamma^2 = M^2 c^2$$

ou

$$M^2 c^2 \gamma^2 - P^2 = M^2 c^2$$

MAS, o lado direito é um invariante de Lorentz (é uma constante).

E o primeiro termo? Se multiplicamos por c^2, obtemos

$$M^2 c^4 \gamma^2 - P^2 c^2 = M^2 c^4$$

e todos os termos tem unidades de energia ao quadrado

Eg: $M c^2$: massa x (velocidade)^2
= [Energia]

O que é

$$\underline{M c^2 \gamma} \; ?$$

Sendo que

$$(Mc^2\gamma)^2 - (pc)^2 = (Mc^2)^2$$

Bom, expandindo para $\frac{v}{c} << 1$, obtemos

$$Mc^2\gamma = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq Mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots\right)$$

$$\simeq Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \cdots$$

$\Rightarrow E \equiv Mc^2\gamma$ é a energia relativística

$$E \simeq \underbrace{Mc^2}_{\text{Energia em repouso}} + \frac{1}{2}Mv^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \boxed{E_0 = Mc^2}$$

Transformações de Lorentz do Momento e a energia :

Para uma partícula de massa M, vemos que

$$p_x = M\frac{dx}{d\tau} \; ; \; p_y = M\frac{dy}{d\tau} \; ; \; p_z = M\frac{dz}{d\tau}$$

Para a Energia, podemos escrever:

$$E = Mc^2\gamma = Mc^2\frac{dt}{d\tau}$$

dado que

$$dt = \gamma \, d\tau$$

Da primeira linha, vemos que as componentes do vetor momento se transformarão como as componentes da posição $\vec{r} = (x, y, z)$.
Isto, porque

τ e M são invariantes de Lorentz!

Pelo mesmo argumento, vemos que E/c^2 se transformará como o tempo!

Então, partindo das transformações de Lorentz

$$x' = \gamma(x - \beta c t) \; ; \; y' = y \; ; \; z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right)$$

Para um S' com $\vec{v} = v\hat{x}$, e substituindo

$$\left.\begin{aligned} t &\to E/c^2 \\ x &\to p_x \\ y &\to p_y \\ z &\to p_z \end{aligned}\right\} \text{ obtemos}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p'_x &= \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right) \; ; \; p'_y = p_y \; ; \; p'_z = p_z \\ E' &= \gamma(E - \beta c p_x) \end{aligned}}$$

Transformações de Lorentz para $\vec{p}$ e E

Como sempre, as transformações inversas são obtidas usando

$$\beta \Longrightarrow -\beta$$

Relação entre Energia, momento e Velocidade

A velocidade pode ser escrita como

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$$

Mas vimos que

$$p_x = \frac{dx}{d\tau} m \quad \text{e} \quad E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{p_x}{m} \cdot \frac{mc^2}{E}$$

$$\Rightarrow \left\{ v_x = \frac{p_x c^2}{E} \right\}$$

O qual pode ser generalizado para todas as componentes de $\vec{v}$ e $\vec{p}$ $\Longrightarrow$

Em geral, então, podemos escrever

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\vec{v}}{c^2} E}$$

Por outra parte, vimos que

$$(Mc^2\gamma)^2 - (Pc)^2 = (Mc^2)^2$$

ou

$$\boxed{E^2 - P^2c^2 = M^2c^4}$$

<u>O que acontece quando $v \to c$?</u>

Eg:

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow ?$$

ou

$$\vec{P} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow ?$$

E e $\vec{P}$ parecem divergir, a não ser que $M \to 0$.

Para ver de fato o que acontece no limite $v \to c$, a relação

$$\vec{P} = \frac{E}{c^2}\vec{v} \Rightarrow$$

$$|\vec{P}| = \frac{E}{c^2}|\vec{v}| \to \frac{E}{c}$$

$$\Rightarrow |\vec{P}| \to \frac{E}{c}$$

MAS $E^2 - |\vec{P}|^2 c^2 = M^2 c^4$

$$\underset{v \to c}{\Rightarrow} \quad E^2 - E^2 = M^2 c^4$$

$$\Rightarrow \boxed{M \to 0}$$

$\Rightarrow$ Para ter $\boxed{v \to c,\ M \to 0}$

$\Rightarrow v \to c$ é possível só no limite

$$m \to 0$$

Conservação da Energia e o Momento

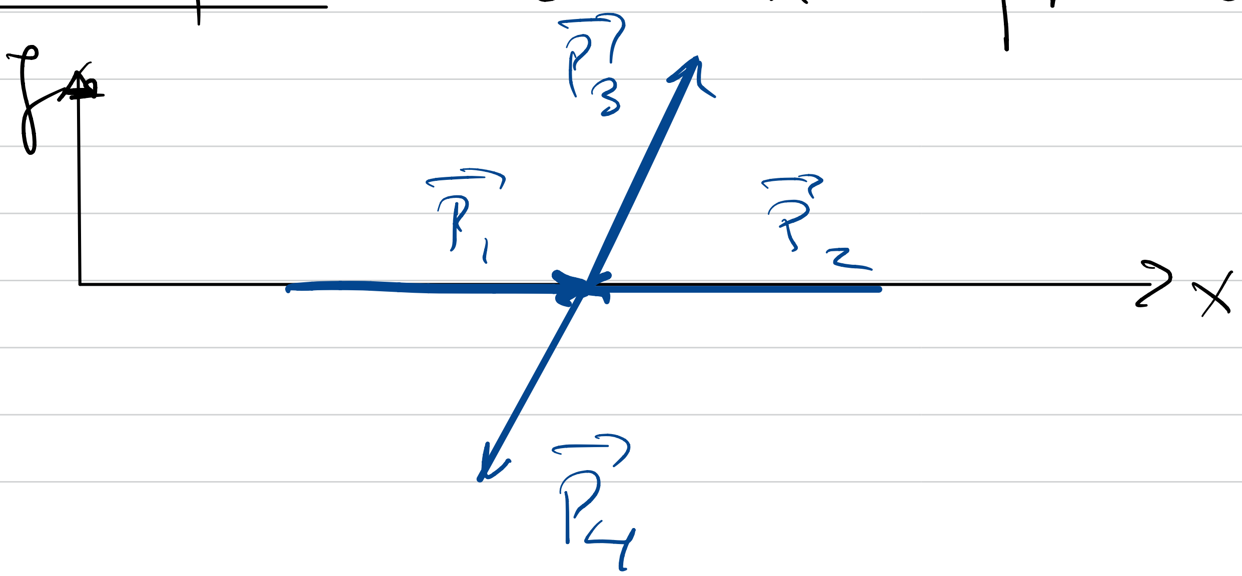
Conservação do Momento

$$\underbrace{\vec{P}_A}_{\text{antes}} = \underbrace{\vec{P}_D}_{\text{depois}}$$

Conservação da Energia

$$E_A = E_D$$

Exemplo colisão de 2 partículas



No centro de momentos

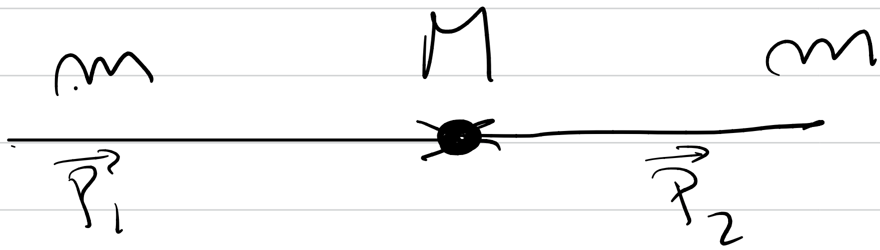
$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_{1x} + P_{2x} = 0 \Rightarrow \boxed{P_{1x} = -P_{2x}}$$

Mas depois da colisão

$$\vec{P}_3 + \vec{P}_4 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} P_{3x} &= -P_{4x} \\ P_{3y} &= -P_{4y} \end{aligned}$$

Exemplo: 2 partículas de massa m colidem e formam outra partícula.



No centro de momento:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2$$

A partícula 3 é criada com momento

$$\vec{P_3} = \vec{P_1} + \vec{P_2} = 0$$

$\Rightarrow$ em repouso no C.M.

A conservação da energia

$$E_1 + E_2 = E_3$$

$$\Rightarrow \quad mc^2\gamma + mc^2\gamma = Mc^2$$

onde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

e v é a velocidade de 1 ou 2 (igual no C.M.) e tal que

$$E_1^2 - P_1^2 c^2 = m^2 c^4$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2c^4}\ \frac{1}{c}$$

e $v = \dfrac{P_1 c^2}{E_1}$

$$\Rightarrow \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Mc^2$$

Energia antes = Energia Depois

Vamos que a massa da partícula ③ é <u>MAIOR</u> que $2m$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 2m$$

$$M = 2m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq$$

$$\simeq 2m\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\dots\right)$$

$$M \simeq 2m + 2\,\frac{\frac{1}{2}mv^2}{c^2}$$

energia cinética das partículas ①, ②

⇒ [Parte da energia cinética inicial dos partículas 1 e 2 é convertida em massa da partícula 3]