Princípio de Relatividade

Einstein (1905)

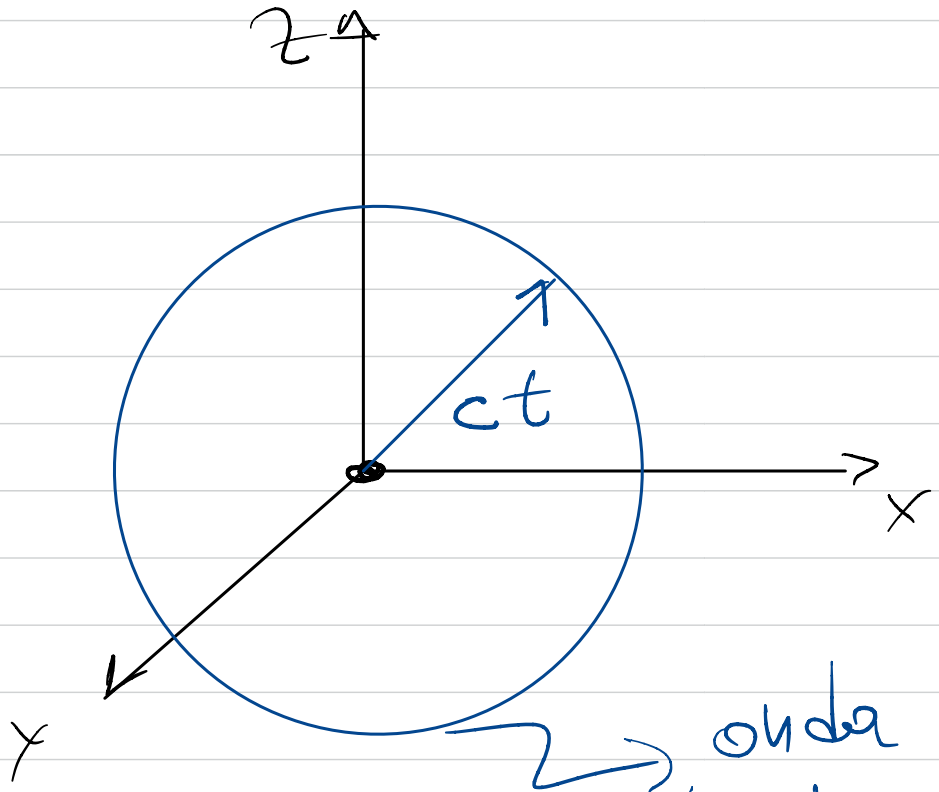
Postulados:

- As leis físicas têm a mesma expressão (são invariantes) em qualquer referencial inercial. Não existem referenciais inerciais preferenciais.

- A velocidade da luz (c) é a mesma em qualquer referencial, independentemente da velocidade da fonte ou do observador

MAS como implementar o postulado?

Mais uma vez, consideramos um sistema em repouso S, onde está a fonte de luz.



S

onda emitida desde a origem em $t = 0$

O raio da onda esférica satisfaz

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

O sistema S', se movimentando com velocidade

$$\vec{v} = v\,\hat{x}$$

e sua origem coincide com a origem de S para

$$\Rightarrow \begin{cases} t' = t = 0 \\ x' = y' = z' = 0 \end{cases}$$

Portanto, um observador em S' descreve a evolução da onda esférica da onda de luz pela equação

$$(ct')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

para tempos posteriores $t' > 0$.

Claramente as duas equações

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (S)$$

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \qquad (S')$$

são incompatíveis com as transformações de Galileu:

$$x' = x - vt \quad , \quad y' = y, \; z' = z$$

$$t' = t$$

Para ver isso, substituimos na eqn. para S'

$$c^2t^2 = x^2 + v^2t^2 - 2vxt + y^2 + z^2$$

e vemos que não é a equação para o referencial S. Aparecem dois termos novos, que dependem de v.

⇒ Precisamos de novas transformações entre S' e S, tal que elas se reduzam às transformações de Galileo no limite

$$\frac{v}{c} \to 0$$

mas que para valores finitos de $\frac{v}{c}$, transformem

$$c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

em

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

1. A transformação de y' e de z' deve continuar a mesma do que em Galileo.

2. t' e x' devem se transformar. Em particular, vemos que t' é necessário para remover os termos $v^2 t^2$ e $2vxt$.

3 - A transformação deve ser linear! Isto garante que a onda se expande com velocidade uniforme.

⇒ Tentaremos com

$$x' = x - vt \quad , \quad t' = t + kx$$

$$y' = y \quad , \quad z' = z$$

onde k é uma constante a ser determinada. Substituindo obtemos

$$c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$c^2 t^2 + c^2 k^2 x^2 = x^2 + v^2 t^2 - 2vxt + 2c^2 kxt + y^2 + z^2$$

⇒ Se escolhermos

$$\boxed{k = -\frac{v}{c^2}}$$

$$\Rightarrow c^2t^2 + \frac{v^2}{c^2}x^2 - 2vxt$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + v^2t^2 - 2vxt$$

$$\Rightarrow \left[c^2t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = x^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 \right]$$

Conseguimos cancelar o termo $-2vxt$ mas ainda temos uma discrepância.

Mas se modificarmos as transformações para

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

} os $\frac{1}{\sqrt{\ }}$ cancelam os fatores em ( )

Desta forma, vemos que as transformações

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad y' = y \; ; \; z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

deixam

$$c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$\downarrow$$

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Essas são as transformações de Lorentz.

Definindo

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad ; \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ou $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\Rightarrow$

$$x' = \gamma(x - \beta c t) \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right)$$

Vemos que:

1. As transformações de Lorentz se reduzem às transformações de Galileo no limite

$$\beta \longrightarrow 0 \quad \left(\frac{v}{c} \longrightarrow 0\right)$$

2. A transformação de Lorentz inversa, é

$$x = \gamma\left(x' + \beta c t'\right) \; ; \; y = y' \; ; \; z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right)$$

O que pode ser obtido refazendo o ~~argumento~~ desde o começo, ou notando que PARA S' S se movimenta com velocidade

$$\vec{v} = -v\,\hat{x}'$$

$$\Rightarrow \left\{\beta \longrightarrow -\beta\right\}$$

Algumas Consequências:

1) Lei de Adição de velocidades:

Partindo das transformações de Lorentz inversas:

$$\begin{cases} x = \gamma\left(x' + \beta c t'\right) & ; y = y' \; ; \; z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right) \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} x = \gamma x' + \gamma\beta c t' & ; y = y' \\ t = \gamma t' + \gamma \frac{\beta}{c} x' & ; z = z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = \gamma dx' + \gamma\beta c dt' \\ dt = \gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c} dx' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma \beta c dt'}{\gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c} dx'}$$

$$* \quad \frac{dt'}{dt'} \quad \Longrightarrow$$

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + v_x' \frac{v}{c^2}}$$

Vemos que a adição de velocidades no sistema S' + a velocidade do S' (v) é diferente da regra de Galileo:

$$x = x' + vt$$

$$\Rightarrow \{ v_x = v_x' + v \}$$

Mas dissemos isso no limite $\frac{v}{c} \to 0$

As componentes y e z também sofrem modificações:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' + \gamma \frac{\beta}{c} dx'} \quad \left(\times \frac{dt'}{dt'}\right)$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y'}{1 + v_x' \frac{v}{c^2}}$$

ou

$$v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + v_x' \frac{v}{c^2}}$$

Analogamente, temos na direção z:

$$v_z = \frac{v_z' \sqrt{1 - \frac{v^{2'}}{c^2}}}{1 + v_x' \frac{v}{c^2}}$$

E as transformações inversas, são obtidas com a troca

$$v \longrightarrow -v$$

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - v_x \frac{v}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - v_x \frac{v}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - v_x \frac{v}{c^2}}$$

Exemplo:

Uma partícula (fóton) com velocidade c no sistema S

$$\Rightarrow \quad v_x = c$$

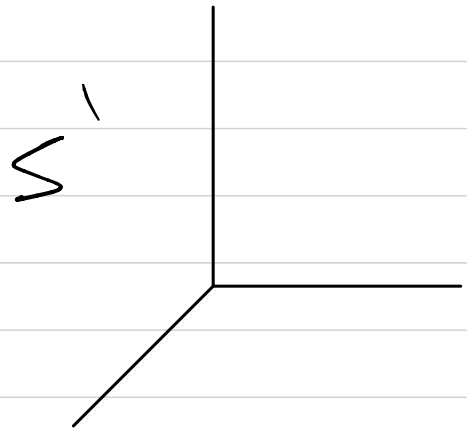
$\Rightarrow$ Qual a velocidade no S'?

$$v'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v'_x = c} \quad \text{!} \quad \Rightarrow \text{Funciona!}$$

A luz tem a mesma velocidade em todos os referenciais inerciais!

Exemplo: 2 Partículas ① e ②



$v'_{x_1} = 0.9c$

$v'_{x_2} = -0.9c$

Qual a velocidade relativa entre as 2 partículas?

Se assumimos S' como o referencial onde a partícula ② está em repouso:

$$\Rightarrow v_{x_2} = 0 = \frac{-0.9c + v}{1 - 0.9c\frac{v}{c^2}}$$

$$\Rightarrow v = 0.9c$$

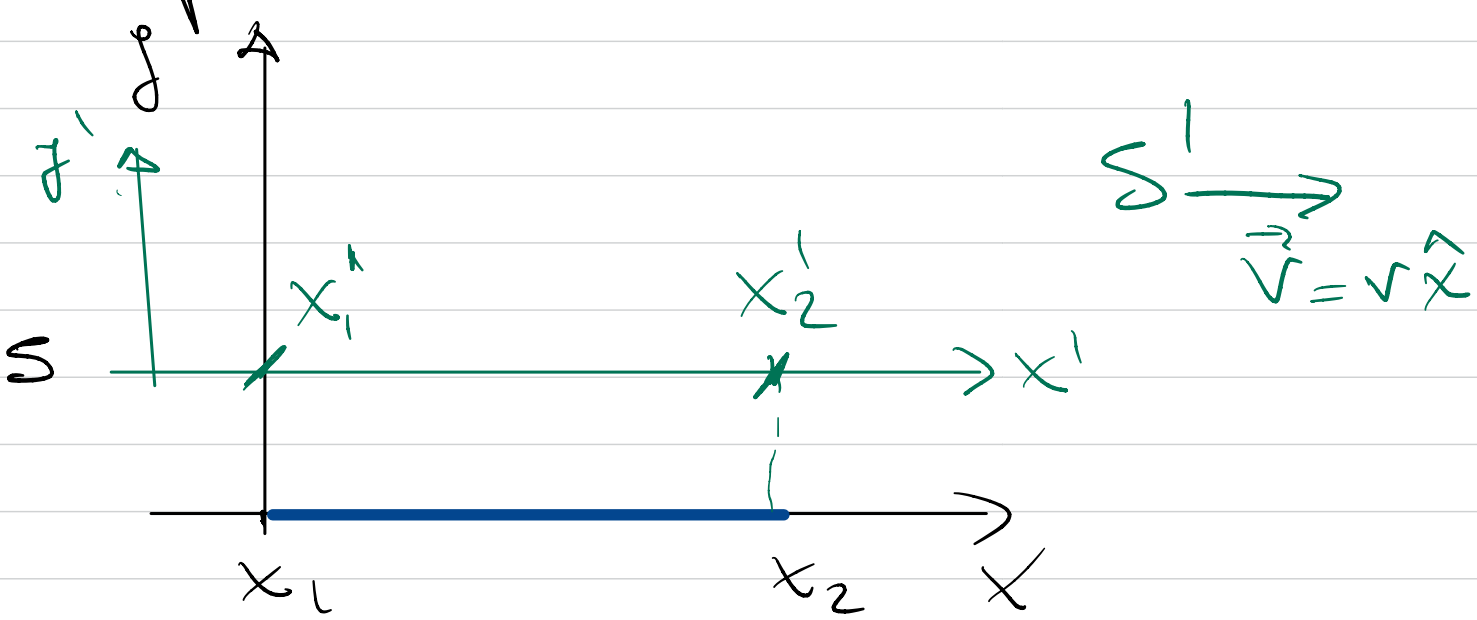
$$\Rightarrow v_{x_1} = \frac{v'_{x_1} + v}{1 + v'_{x_2}\frac{v}{c^2}} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + \frac{0.9c\,0.9c}{c}}$$

$$\Rightarrow v_{x_1} = \frac{1.8c}{1 + 0.81} \simeq 0.9945c < c!$$

$\Rightarrow$ A velocidade relativa em S' é menor que c!

Contração do Comprimento

Consideremos uma régua rígida de comprimento L_0:



$$L_0 = x_2 - x_1$$

No sistema S' (com $\vec{v} = v\hat{x}$ em S), os extremos da régua coincidem com x_1' e x_2' simultaneamente.

Pelas transformações de Lorentz:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \gamma x_2' + \gamma \beta c t' \\ x_1 &= \gamma x_1' + \gamma \beta c t' \end{aligned}\right\} \text{mesmo } t' !$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = \gamma (x_2' - x_2') = \gamma L$$

$$\Rightarrow L_0 = \gamma L \text{ ou}$$

$$\boxed{L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

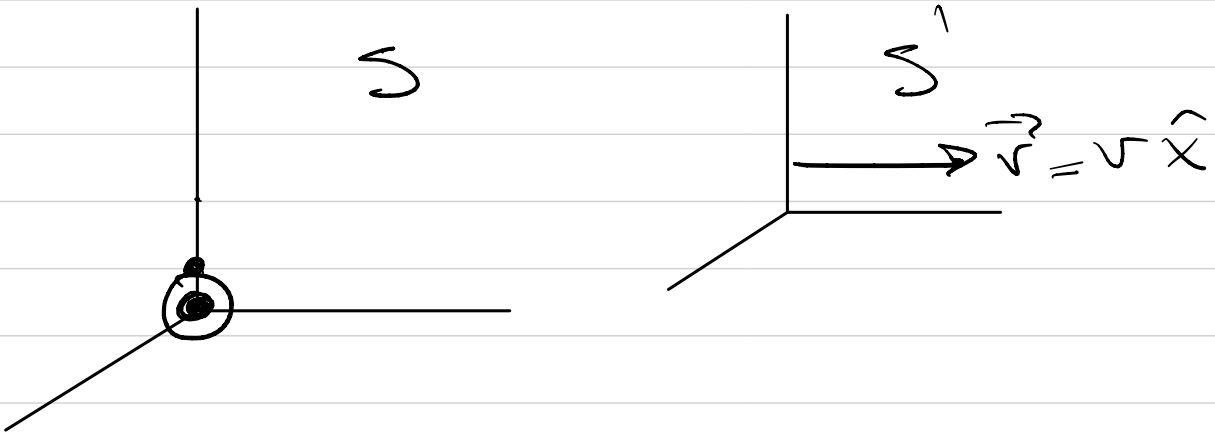
↳ contração de comprimento de Lorentz no sistema S' (em movimento)

ATENÇÃO:

L é o comprimento no sistema S' medido desde S. Um observador em S' ainda mede L_0!!!

Dilatação do tempo:

Consideremos um relógio em repouso na origem do sistema S



O tempo no sistema em repouso é definido como o "tempo próprio"

τ : tempo próprio

O tempo transcorrido no sistema S' será então

$$t' = \gamma \tau$$

Dado que $\gamma \geq 1$

$\Rightarrow t' > \tau \rightarrow$ dilatação dos intervalos de tempo

Exemplo: Múons (μ^-)

μ^- Partículas com as mesmas propriedades do eletrão (carga, spin, ...) mas mais massivas

$$\frac{m_{\mu^-}}{m_{e^-}} \simeq 200$$

μ^- decaem no laboratório, quando produzidos fruto em repouso num tempo característico (vida média) de

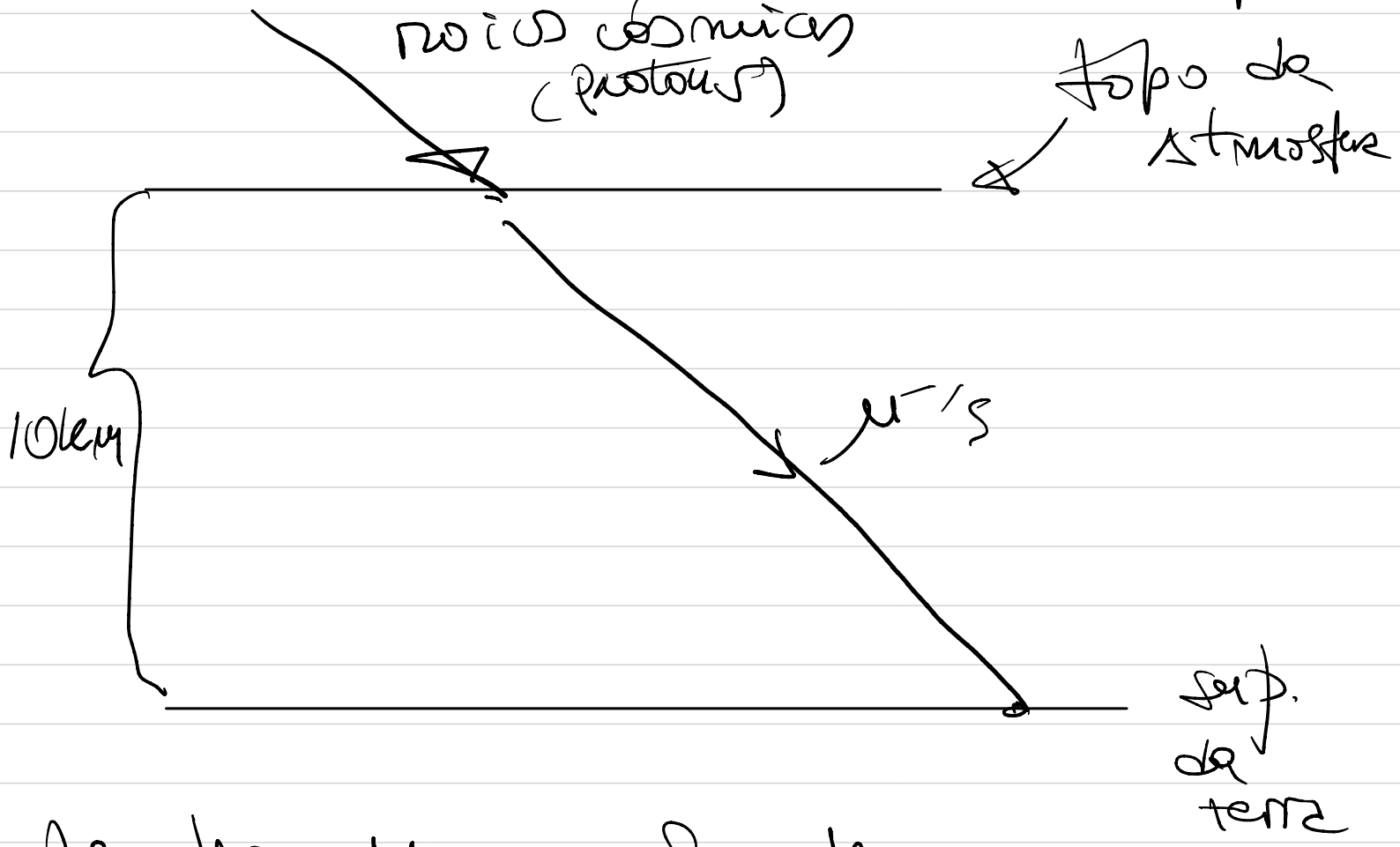
$$\tau_{\mu^-} = 2.2 \times 10^{-6} \, s$$

I.e se produzimos N_0 μ^- em $t=0$, o número de μ^-s depois de um tempo t é

$$N(t) = N_0 \, e^{-t/\tau_{\mu^-}}$$

$\Rightarrow$ Depois de $2.2\,10^{-6}$ segundos teremos $\frac{1}{2.71}$ μ^-s menos.

μ^-s são produzidos em grande número no topo da atmosfera



Se observam um grande número de μ^-s chegando à superfície da terra,

Mas se eles tivessem a velocidade $c \Rightarrow$ percorreriam só

$c\tau_\mu \sim 660\,m$

$$c\,\tau_{\mu^-} = 3\times10^{8} \times 2.2\,10^{-6}\ m$$

MAS eles percorrem $\simeq 10$ km sem problemas!

Como se explica?

A vida média dos μ^- em repouso é de τ_{μ^-}.

MAS eles se movimentam com

$$v \lesssim c$$

$$\Rightarrow \tau'_{\mu^-} = \tau_{\mu^-}\,\gamma$$

e $$c\,\tau'_{\mu^-} = c\,\tau_{\mu^-}\,\gamma$$

Por exemplo, para μ's com $v \sim 0.99\,c$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.98}} \simeq 7$$

=> CCT é a distância

relativa percorrida fazendo $r \leq c$.