Relatividade Especial

Aula 11: Noções Gerais

- A Teoria da Relatividade especial foi publicada em 1905 por Albert Einstein.

- Ela é a culminação de um período de vários décadas de descobertas que incluem os

  * Equações de Maxwell (1862) do Eletromagnetismo

  * ⇒ Equações de ondas eletromagnéticas.

  * Detecção / Produção de OEM (Do IV a UV) Hertz (Radio e MO)

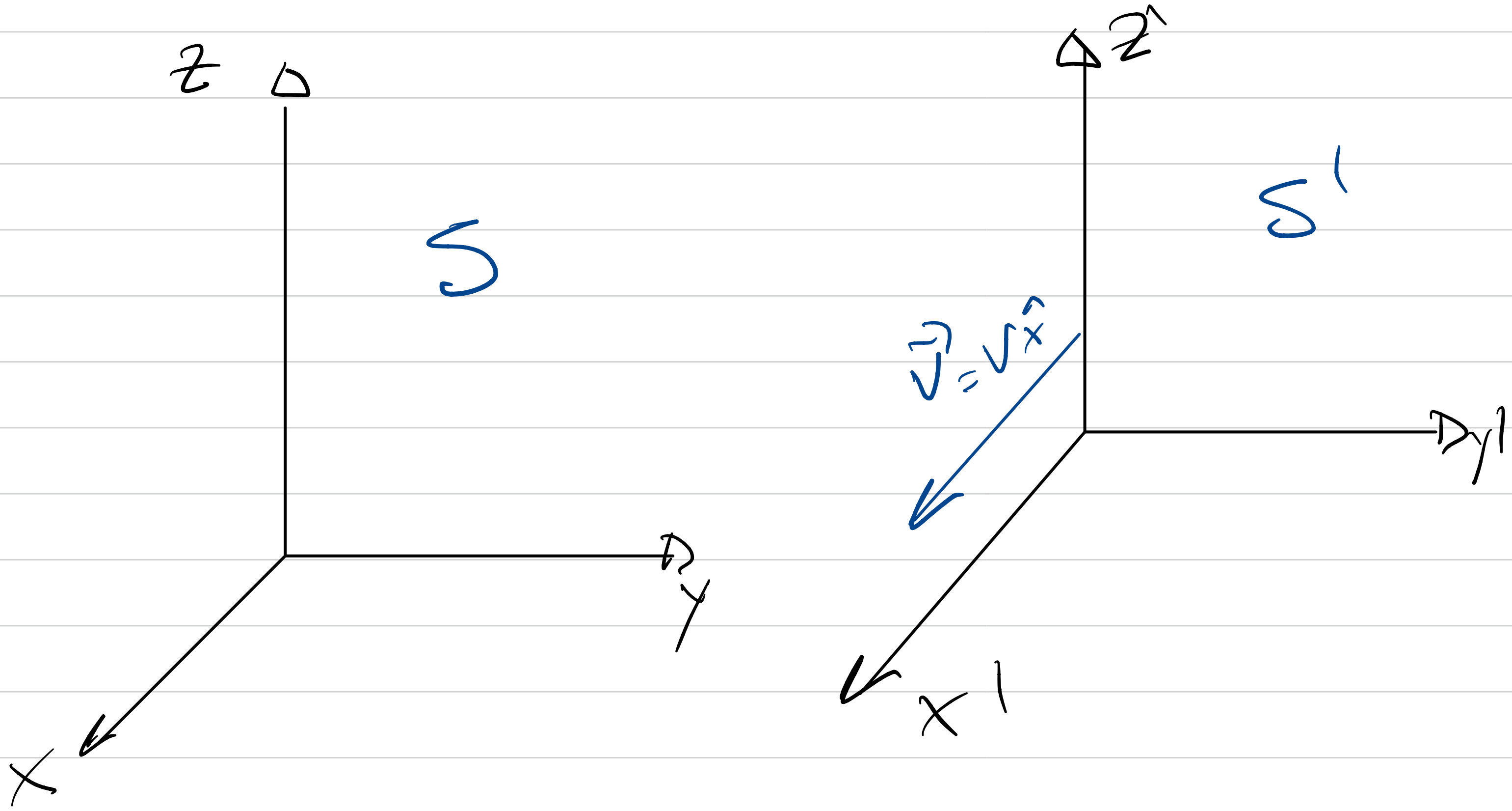
A descoberta das ondas eletromagnéticas (os quais podem se propagar no vácuo) apresenta um

Problema:

As equações descrevendo a propagação das OEM não são invariantes sob Transformações Galileanas

Transformações Galileanas:

Consideremos 2 sistemas referenciais inerciais S e S':



As coordenadas de S e S' estão relacionadas pelas transformações:

constante

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Transformações de Galileo

Princípio de Relatividade de Galileo

"A física é invariante sob essas transformações."

Exemplo:

Grupo de partículas interagindo com um potencial central entre elas,

$$V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Mas, $\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_i\,' - \vec{r}_j\,'$ ✓

$$\frac{dx_i'}{dt'} = v_{ix}' = \frac{dx_i}{dt} - v$$

t : $\dfrac{d^2 x_i'}{d t'^2} = \dfrac{d^2 x_i}{d t^2}$

$$\Rightarrow \boxed{m_i \frac{d^2 x_i'}{d t'^2} = - \vec{\nabla}_i' V_{ij}(|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|)}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = - \vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}$$

$\Rightarrow$ {A forma das equações é preservado.}

$\Rightarrow$ {Mesma Descrição em S' ou S

Mas as equações que descrevem a propagação de ondas, em geral, **não são invariantes sob transformações Galileanas!**

Lembrando equação de onda unidimensional (som):

$$\left[\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t^2} = 0\ \right] \quad (*)$$

onde $\psi(x,t)$ é a posição de um ponto do ar.

Vemos que se usarmos

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

Partindo de

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} = 0$$

Usando

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \overbrace{\frac{\partial x}{\partial x'}}^{=1} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \overbrace{\frac{\partial t}{\partial t'}}^{=1} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \overbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}^{=v}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t'}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + v \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$+ v \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x} + v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} v \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \right.$$

⇒ { Equação de onda não é invariante sob transformações de Galileo!

Mas isso não é necessariamente um problema. O que isto está apontando é a existência de um

Sistema Referencial Privilegiado

No caso do som, o sistema onde o ar está em Repouso

A propagação de ondas em meios elásticos sempre implica a existência de um Referencial em repouso

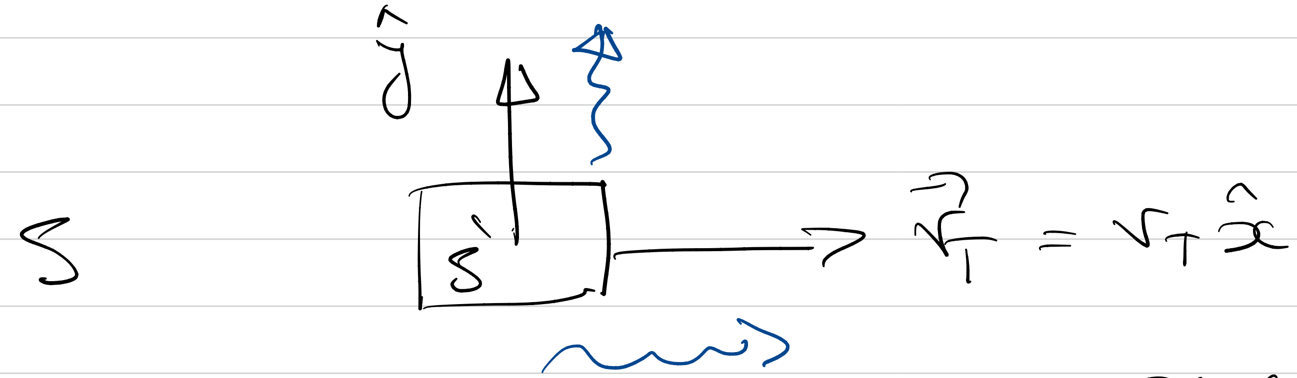
{ Mas e a propagação das OEM no vácuo? }

A Descoberta das OEM, as quais se propagam no vácuo, resultou no postulado da existência de um meio elástico no vácuo: o éter

Experimento de Michelson-Morley (1887)

- Desenhado para detetar a existência do éter, o sistema de referência em repouso onde as OEM se propagam.

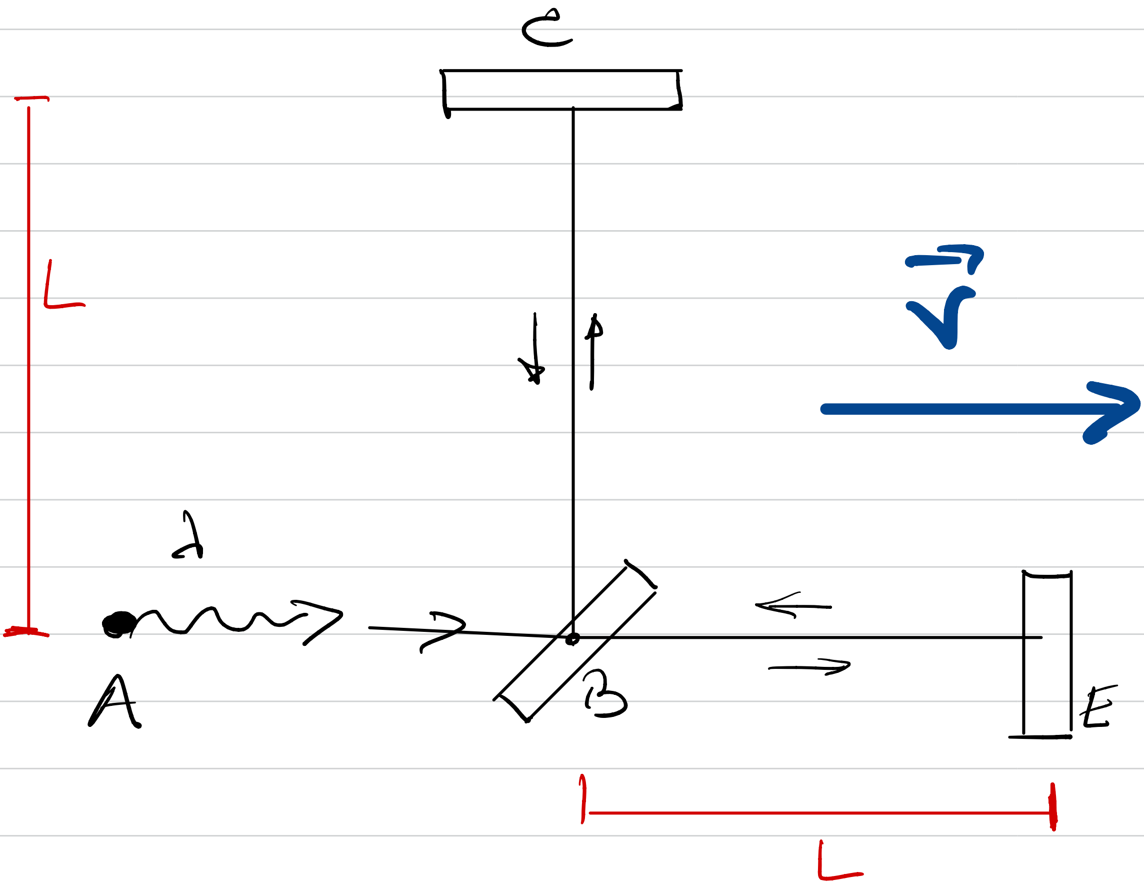
- O exp. assume que a velocidade da terra com respeito ao éter resultaria numa mudança da velocidade da luz ($c \to c'$) quando se propagando na direção do movimento.



Do acordo com as transformações de Galileo:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - v_T t \Rightarrow c' = c - v_T t \\ y' &= y \qquad\quad \Rightarrow c' = c \end{aligned}\right\}$$

Michelson-Morley

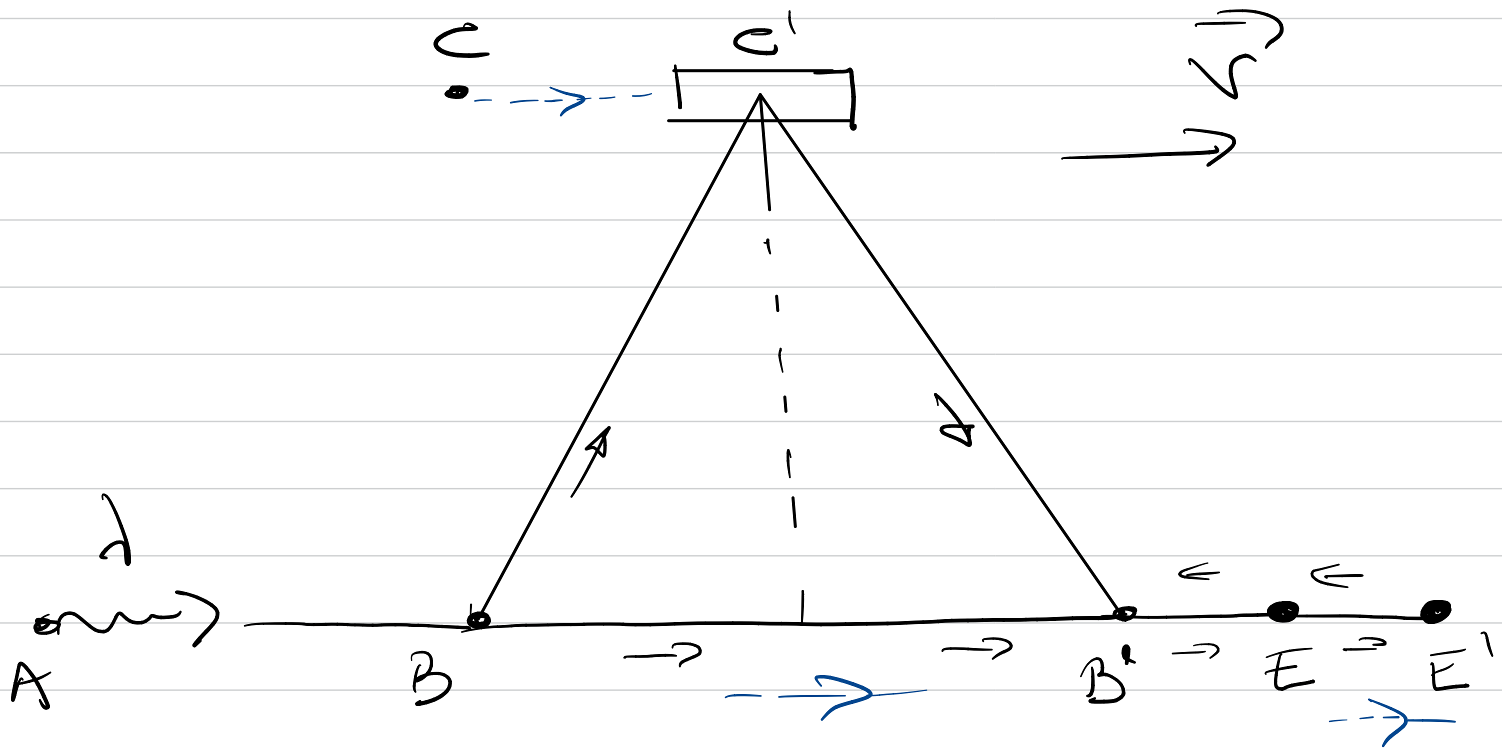


Se o aparelho estivesse em repouso:

- A luz se reflete (parcialmente) em B
- Se reflete em C e retorna a B (2L)
  $\Rightarrow$ interferencia construtiva
  $\uparrow$ e $\downarrow$ tem a mesma fase.
- A luz que atravessa B se reflete em E e volta a E (2L)

$\Rightarrow$ $\rightarrow$ e $\leftarrow$ tem também a mesma fase

Mas se o aparelho se movimenta na direção $\hat{x}$ em relação ao éter com v_T:



t_1: tempo p/ a luz ir de $B \to E$

t_2: tempo para ir de E para B

$\Rightarrow c t_1 = L + v t_1$ Galileo! $(x_1 = L + v t_1)$

ou $\boxed{t_1 = \dfrac{L}{c - v}}$

e $ct_2 = L - vt_2$ ou

$$\boxed{t_2 = \frac{L}{c+v}}$$

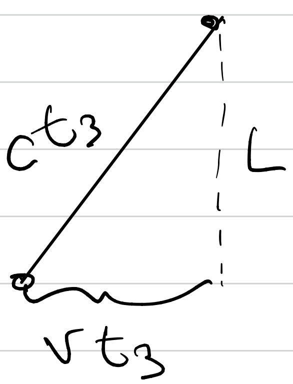
$$\Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$

ou $$\boxed{t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

— o —

t_3 : tempo para a luz ir de $B \to C$

t_3 : " " " " " " $C \to B$



$$\Rightarrow (ct_3)^2 = L^2 + (vt_3)^2$$

$$t_3^2 = \frac{L^2}{c^2 - v^2}$$ ou

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{L/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{2t_3 = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

é $\neq 2t_3$ $\Rightarrow$ feixes voltando de C e de E estarão fora de fase

$\Rightarrow$ observar interferência destrutiva!

Mas o experimento não observou nenhum efeito de interferência destrutiva!

$\Longrightarrow$?

O efeito de interferência é proporcional à diferença dos tempos na direção do movimento e a perpendicular

$$\Delta t \equiv t_1 + t_2 - 2t_3$$

$$= \frac{2L/c}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{2L/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

mas $v \simeq \begin{cases} 3 \cdot 10^4 \ m/s & \text{(terra orb. sol)} \\ 2.4 \ 10^5 \ m/s & \text{(sist. solar na via láctea)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} \sim \frac{10^4}{10^8} \rightsquigarrow \boxed{\frac{v^2}{c^2} \simeq 10^{-8}}$$

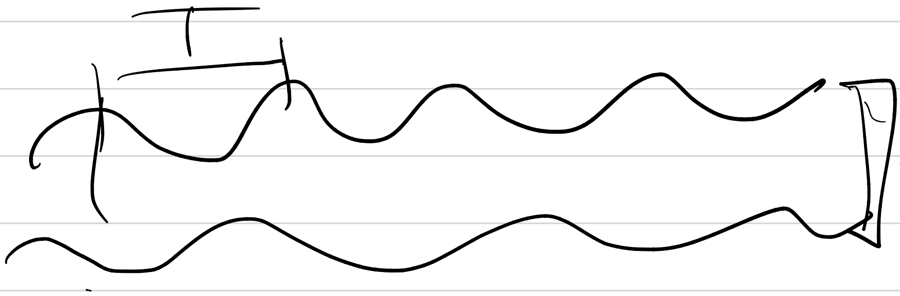
Expansão de Taylor

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^n} \simeq 1 + n\frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\Rightarrow \Delta t \simeq 2L/c\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) - 2L/c\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta t \simeq 2L/c \times \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \simeq \frac{L}{c}\frac{v^2}{c^2}$$

Efeito na interferência:



comparando $\Rightarrow \delta n$: # de cristas de deslocaram

$$\Delta t = \delta n\, T$$

$$\delta n \simeq \frac{\Delta t}{T} = \frac{L}{cT}\frac{v^2}{c^2} = \frac{L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

$v \simeq 3\ 10^4\ m/s$ $\qquad \lambda = 6.6\ 10^{-7}\ m$

(vermelho)

$$\Rightarrow \delta n \simeq \frac{10\,m}{6.6\ 10^{-7}\ m}\ 10^{-8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta n \simeq 0.2}$$

sensitividade do experimento era de 0.01

Aparato podia ser rotado 90°

para eliminar erros.

$$\delta n_1 + \delta n_2 \simeq \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} \simeq 0.4$$

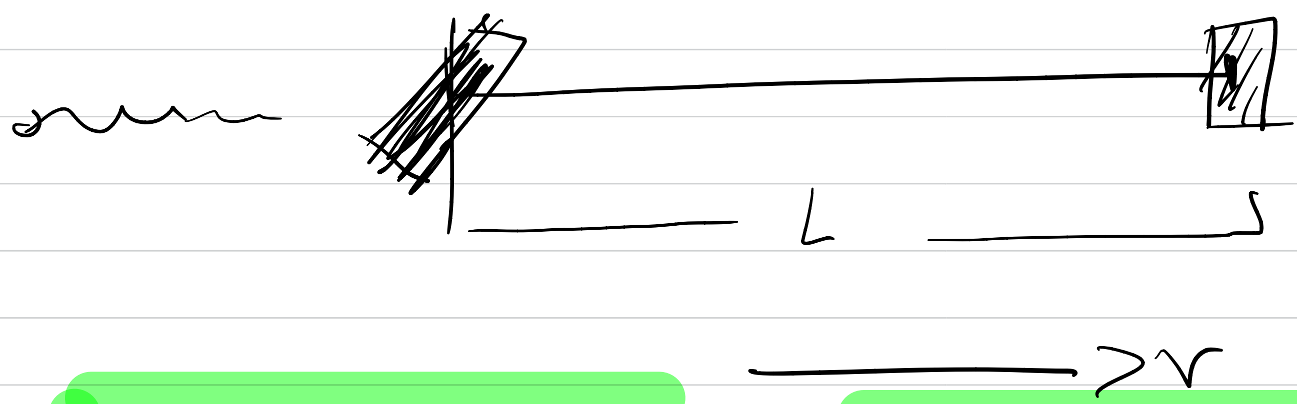
⇒ Após 1887 propostas p/ explicar o resultado negativo do experimento foram feita.

Vamos mencionar aqui uma:

Contração de Lorentz:

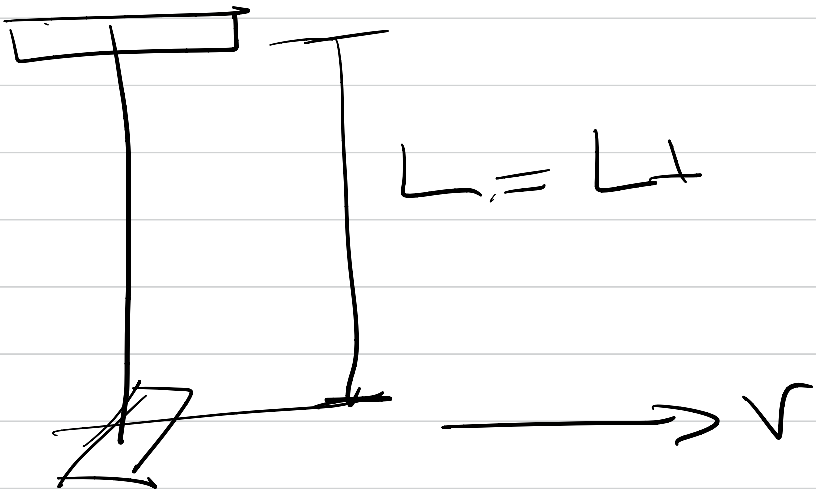
George Fitzgerald (1889) e Hendrik Lorentz (1892) propuseram que objetos contraem na direção do movimento:

⇒



⇒ $$\boxed{L_{\parallel} = L\sqrt{1 - v^2/c^2} < L}$$

Entanto que objeto $\perp$ à direção do movimento não sofrem alteração



$$\Rightarrow \quad 2t_3 = \frac{2L_\perp/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

mas

$$t_1+t_2 = \frac{2L_{\parallel}/c}{(1-v^2/c^2)} = \frac{\frac{2L}{c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1+t_2 = \frac{2L/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2t_3}$$

A contração de Lorentz-Fitzgerald era, porém ad hoc.

Para justificá-la, Lorentz mencionou o fato que (talvez) todos os materiais fossem governados pelas leis do eletromagnetismo. E, dado que tinha sido observado (pelo Heaviside) que campos eletrostáticos se contraem na direção do movimento.

Mas a contração de Lorentz não é o único efeito, se pensamos bem no problema

O tempo da luz ir de $B \to C \to B$

$$2t_3 = \frac{2L/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

é visto do referencial em "repouso" no "éter"
Mas um observador no referencial em movimento "mede" um ~~tempo~~

$$2 \times L/c = 2t'_3$$

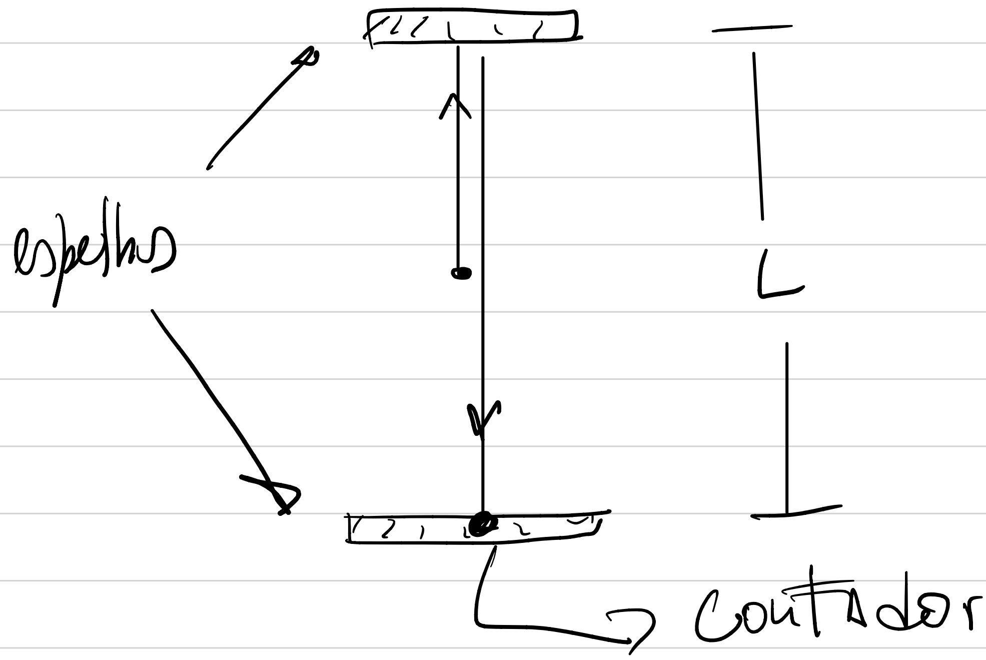
$$\boxed{t_3' = \frac{t_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

O tempo no sistema em movimento (observado desde o sistema em "repouso") é dilatado pelo fator γ

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Isto deve ser um mecanismo universal!
Como sabemos isso?
Imaginemos dois referenciais inerciais

Vamos construir um "relógio" baseado no experimento de Michelson-Morley



$$t = \frac{2L}{c}$$

em S'

2 relógios idênticos, um em S outro em S'. Syncronizamos eles p/ começar juntos em $t = t' = 0$.

Em S': (visto desde S)

$$\sqrt{c^2 - v^2}\, t = L$$

$$\Rightarrow t' = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

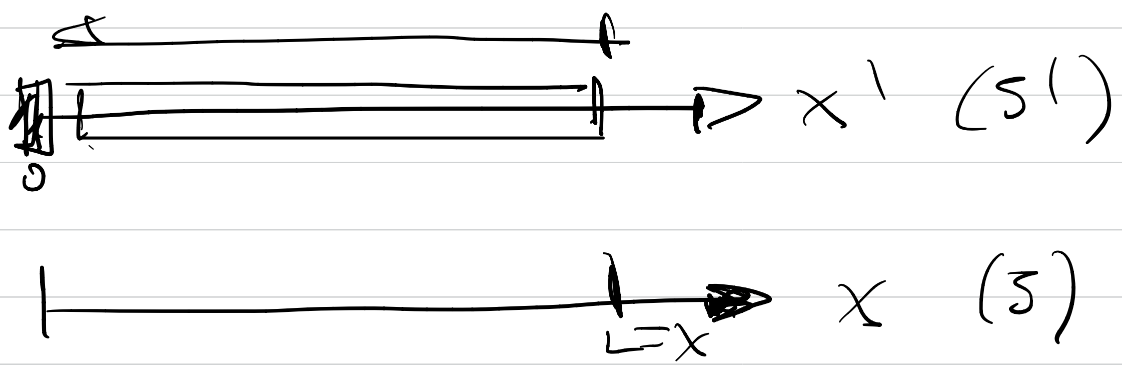
$$\Rightarrow \boxed{t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t}$$

⇒ O observador em S observa o tempo t' em S' como dilatado por γ.

Deve ser uma propriedade universal do tempo dado que o observador em S' não deve poder determinar o seu movimento.

Podemos reinterpretar a contração de Lorentz em termos de S e S':

. x' é a medição da posição (e.g. uma barra de madeira na direção $\hat{x}$ da $\vec{v} = v\hat{x}$)



$\Rightarrow$ Para S $\quad L = x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

ou $\quad x = x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + vt$

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorentz-Fitzerald (1889-1892)

Poincaré 1904