

Ondas V

Física II - Módulo II - Fenômenos Ondulatórios

Efeito Doppler

Até agora examinamos apenas situações em que **fonte** e **receptor** estão em **repouso**, um em relação ao meio em que as ondas se propagam

Note que a **velocidade de propagação** de uma onda sonora é **definida com relação ao referencial de repouso do meio**

Fonte Parada

Fonte em Movimento com $V_f < v_s$

Fonte em Movimento com $V_f = v_s$

.

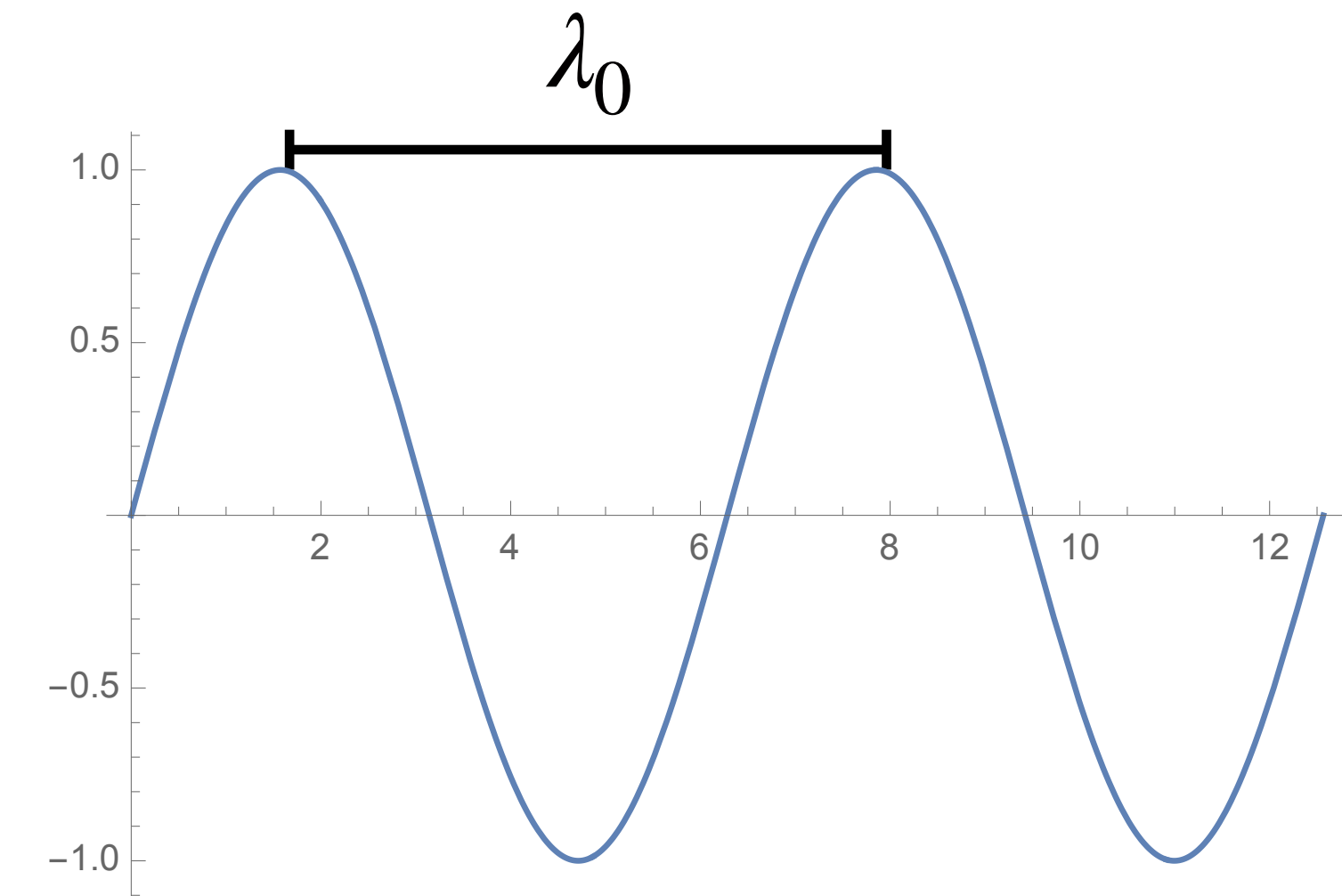
.

.

Efeito Doppler

Fonte se Aproximando do Receptor com Velocidade V_f

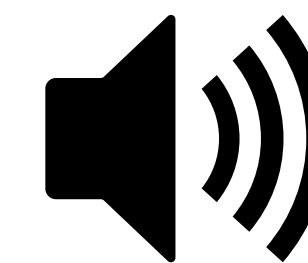
Em repouso a fonte emite ondas com período τ_0 e comprimento de onda $\lambda_0 = v_s \tau_0$ onde v_s é a **velocidade da onda definida no referencial de repouso do meio (atmosfera)**



Se agora a fonte se aproxima de um receptor com velocidade V_f , então no intervalo de tempo (período τ_0) entre a fonte emitir dois máximos ela se aproxima do receptor de $V_f \tau_0$

Assim, o comprimento de onda no referencial do receptor será menor:

$$\lambda = \lambda_0 - V_f \tau_0 = (v_s - V_f) \tau_0$$



de forma que o período τ entre 2 máximos para o receptor será

$$\tau = \frac{\lambda}{v_s} = \left(\frac{v_s - V_f}{v_s} \right) \tau_0$$

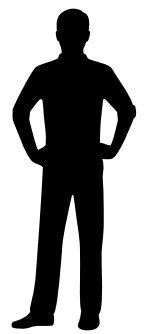
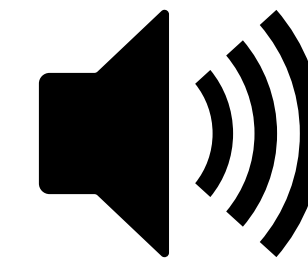
Efeito Doppler

Fonte se Aproximando/Afastando do Receptor com Velocidade V_f

Em termos de frequência $\nu = \frac{1}{\tau}$

$$\tau = \frac{\lambda}{v_s} = \left(\frac{v_s - V_f}{v_s} \right) \tau_0 \quad \rightarrow \quad \nu = \left(\frac{v_s}{v_s - V_f} \right) \nu_0$$

frequência aumenta

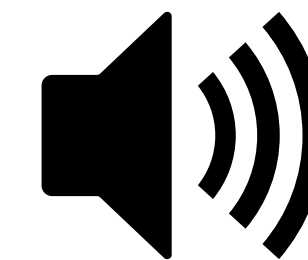


fonte se aproximando

Se a fonte estiver se afastando $V_f \rightarrow -V_f$

$$\rightarrow \quad \nu = \left(\frac{v_s}{v_s + V_f} \right) \nu_0$$

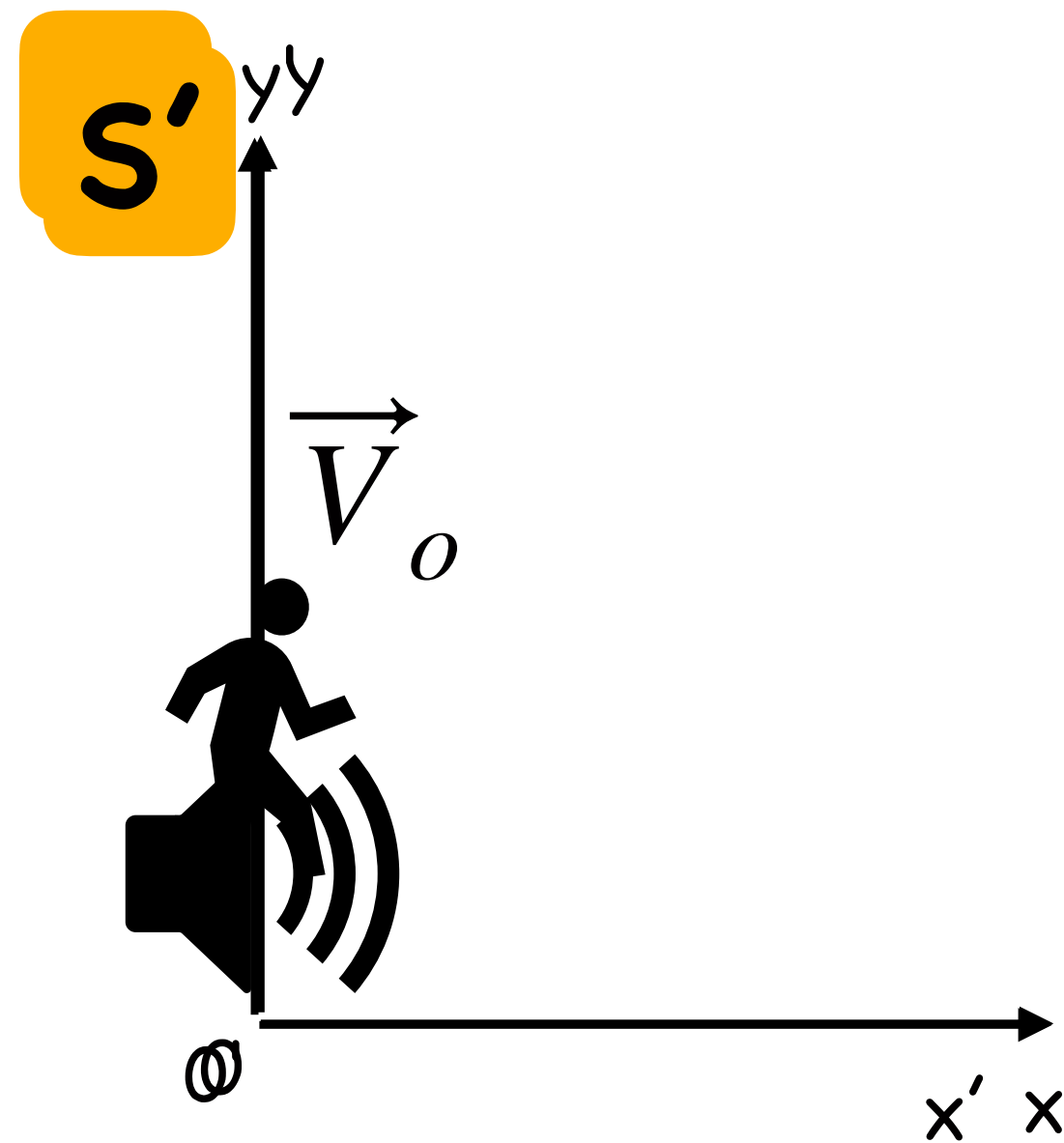
frequência diminui



fonte se afastando

Efeito Doppler

Receptor se Afastando da Fonte com Velocidade V_o



Transformações de Galileu

$$x' = x - V_o t \quad t = t'$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \quad p(x, t) &= \mathcal{P}_0 \cos(kx - \omega t + \delta) \\ &= \mathcal{P}_0 \cos(k(x - v_s t) + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}' \quad p(x', t') &= \mathcal{P}_0 \cos(k(x' + V_o t - v_s t) + \delta) \\ &= \mathcal{P}_0 \cos(kx' - k(v_s - V_o)t + \delta) \end{aligned}$$

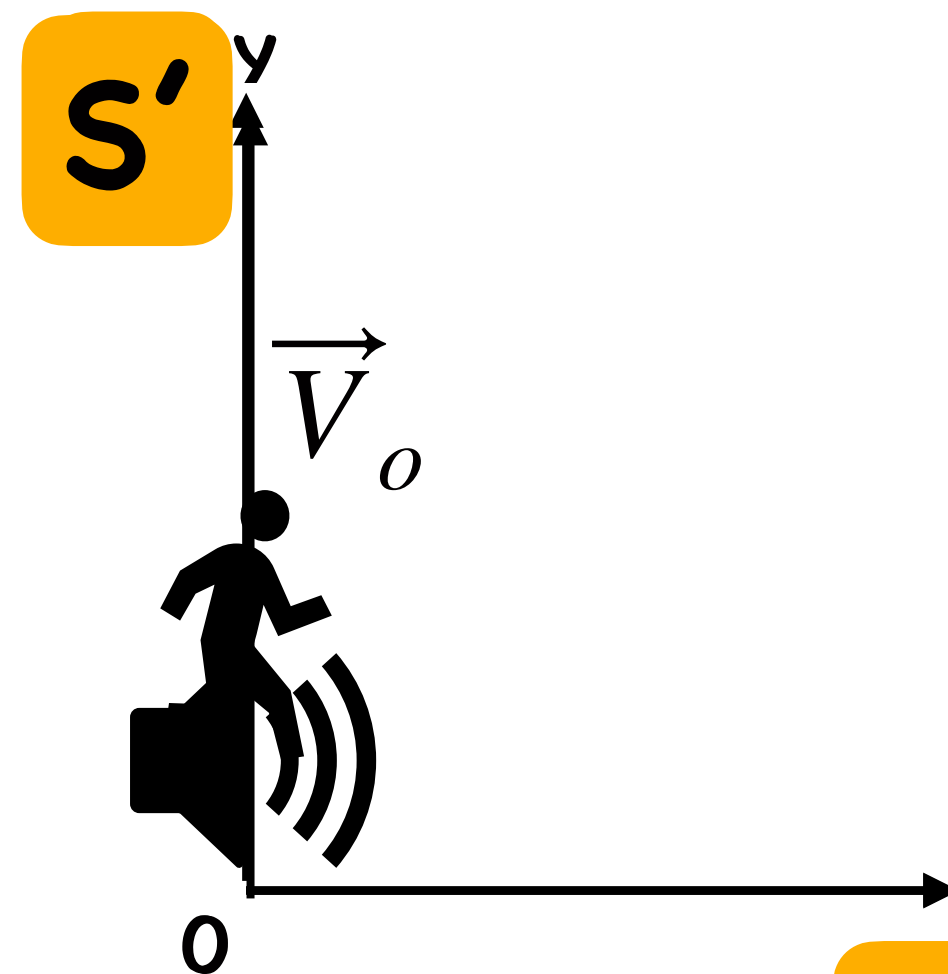
$$\omega' = k(v_s - V_o) \quad \frac{\nu'}{\nu_0} = \frac{\omega'}{\omega_0} = \frac{k(v_s - V_o)}{kv_s} = \frac{(v_s - V_o)}{v_s}$$

Efeito Doppler

Receptor se Afastando/Aproximando da Fonte com Velocidade V_o

$$\nu' = \frac{(v_s - V_o)}{v_s} \nu_0$$

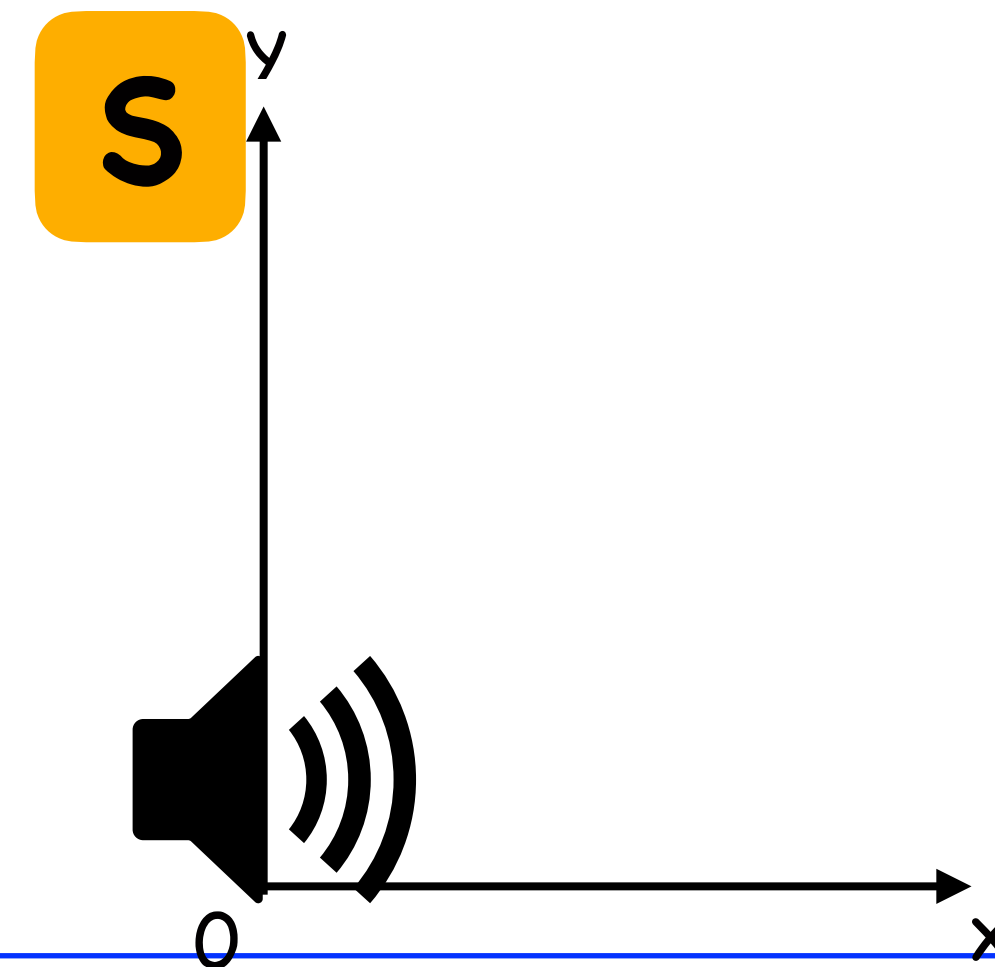
frequência diminui



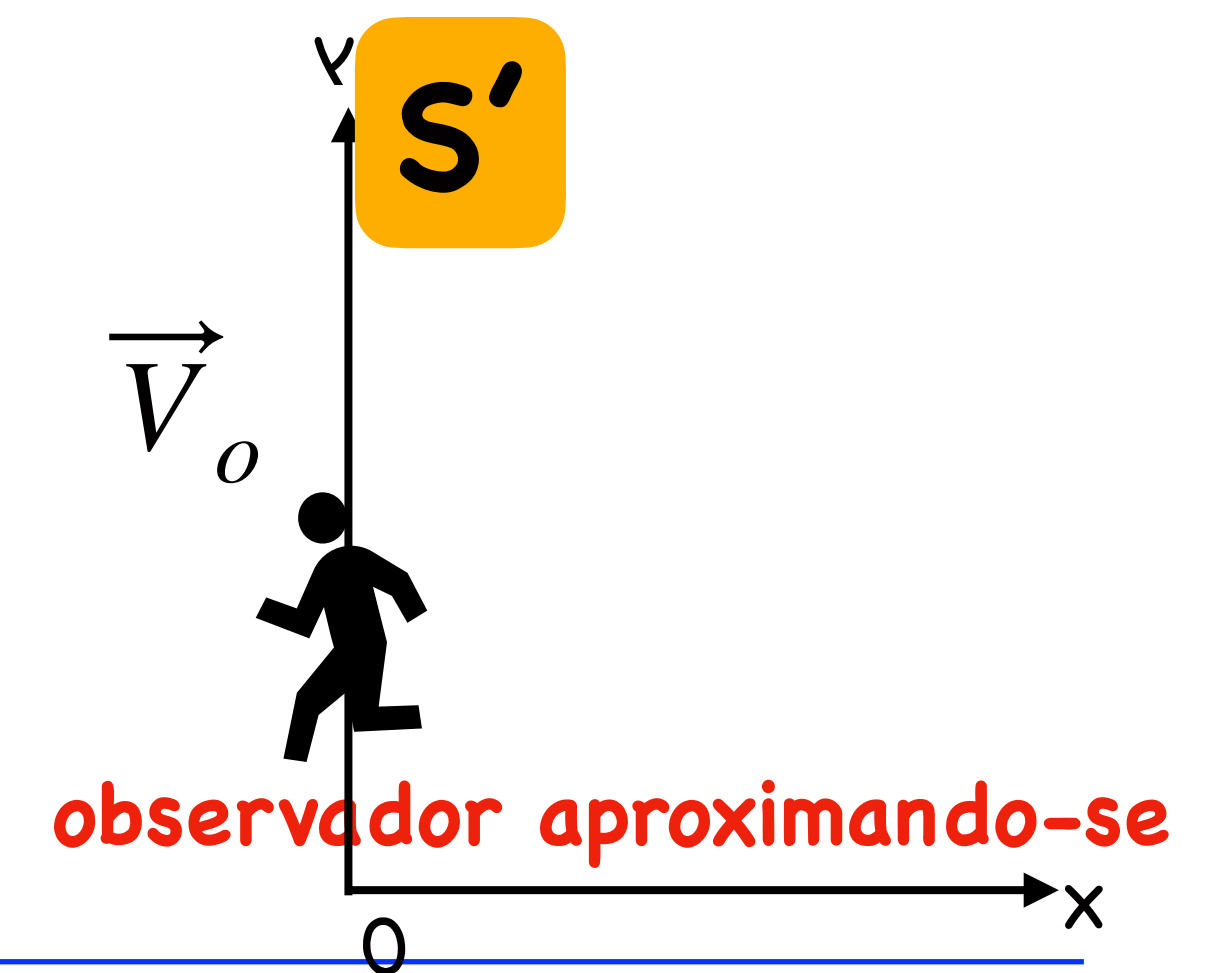
Se o observador estiver se aproximando $V_o \rightarrow -V_o$

$$\nu' = \frac{(v_s + V_o)}{v_s} \nu_0$$

frequência aumenta



observador afastando-se



observador aproximando-se

Efeito Doppler

Para o som há uma assimetria

$$\nu = \left(\frac{v_s \mp V_o}{v_s \pm V_f} \right) \nu_0$$

\mp observador/fonte afastando-se
 \pm observador/fonte aproximando-se

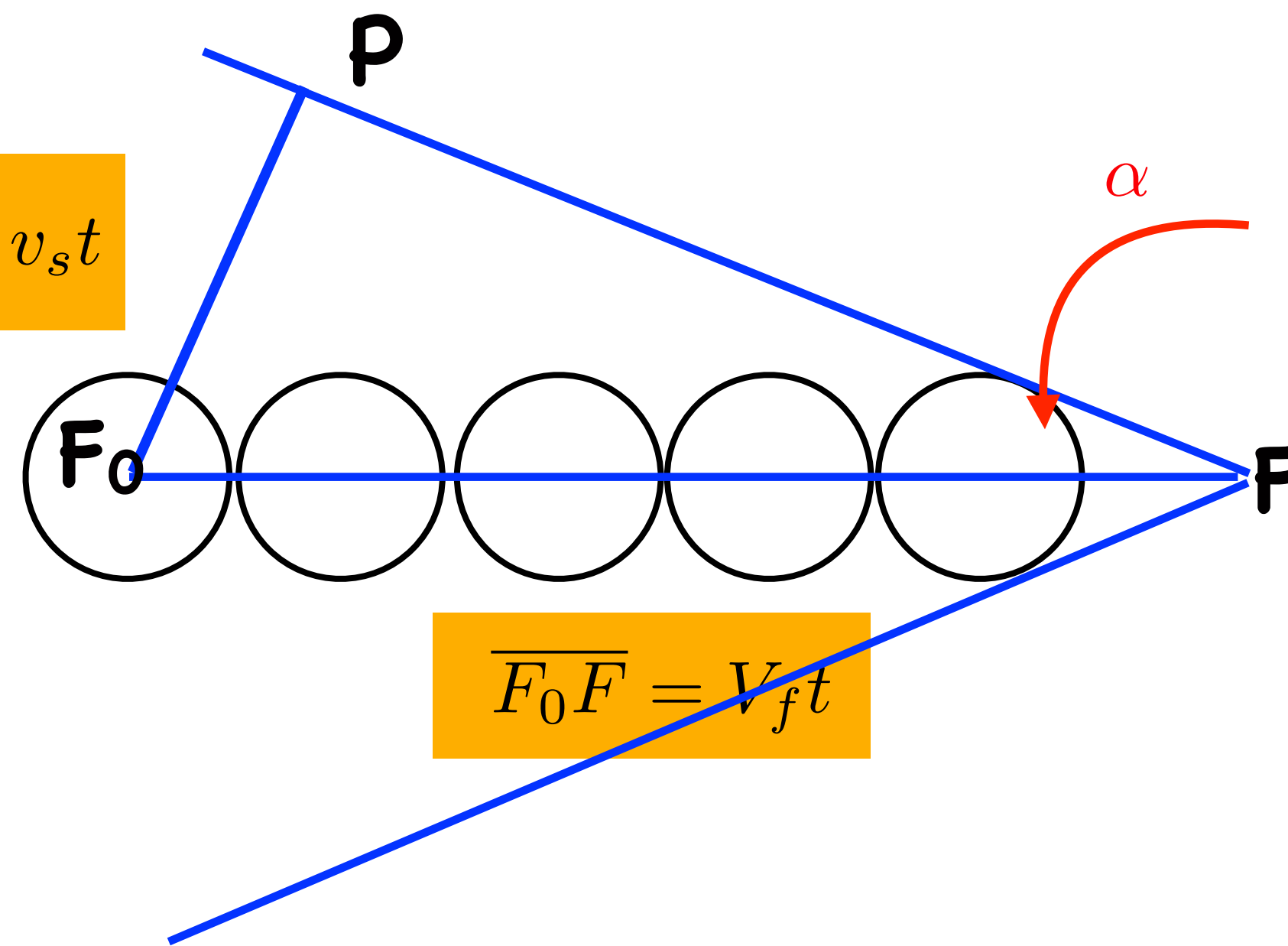
- se o observador se afastar da fonte com velocidade v_s a frequência será nula ele não escutará nada!
- se a fonte se afastar do observador com velocidade v_s a frequência será $\nu = \frac{\nu_0}{2}$ ele escutará o som com frequência menor

Cone de Mach

Quando a fonte se mover com velocidades supersônicas

$$V_f \gg v_s$$

a fonte passa a frente de onda das ondas por ela geradas



$$\overline{F_0P} = v_s t$$

$$\overline{F_0F} = V_f t$$

em um tempo t a onda gerada em F_0 se desloca

$$\overline{F_0P} = v_s t$$

e a fonte se desloca $\overline{F_0F} = V_f t$

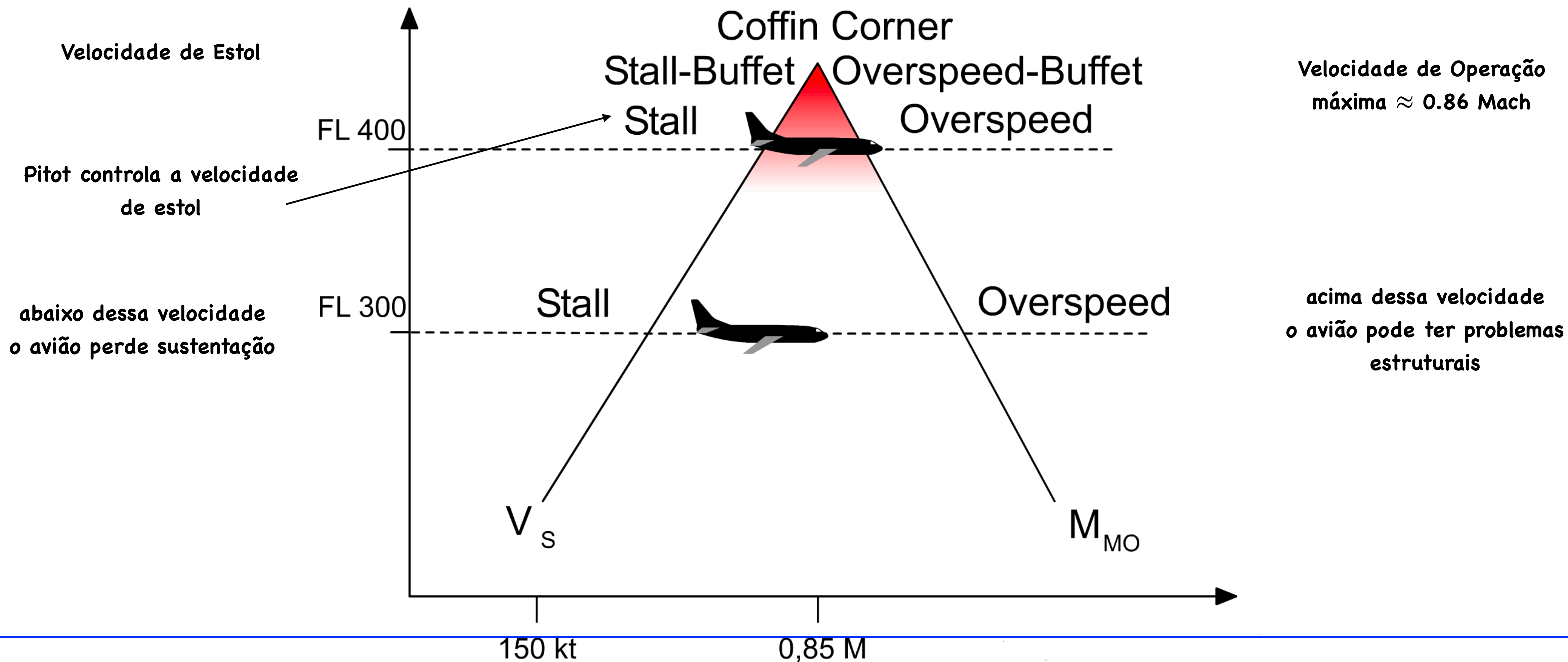
$$\sin \alpha = \frac{v_s}{V_f}$$

$$\text{número de Mach} = \frac{V_f}{v_s}$$

cone de Mach

Coffin Corner/Canto Caixaão

Acidente do voo AF447 - Rio de Janeiro - Paris (2009)



Desvio Doppler da Luz

Como vocês verão em breve nada pode mover-se mais rápido do que a luz no vácuo c

Além disso a luz tem velocidade c em qualquer referencial !

Isso não depende da velocidade da fonte ! Assim, a mudança de frequência no caso da luz é a mesma que vimos antes, basta fazer: $V_0 = V_f = V$ $v_s \rightarrow c$

$$\nu = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} \nu_0$$

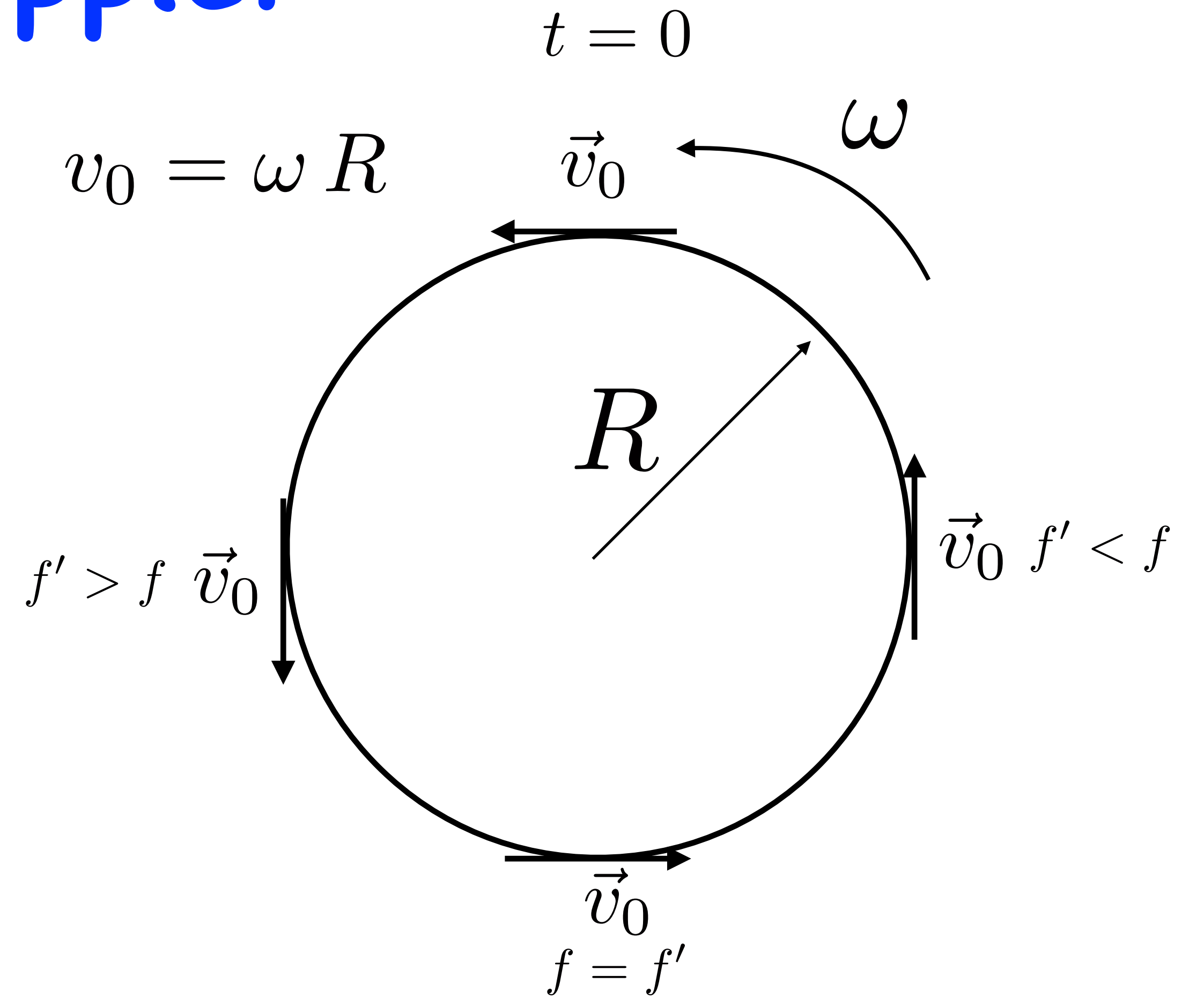
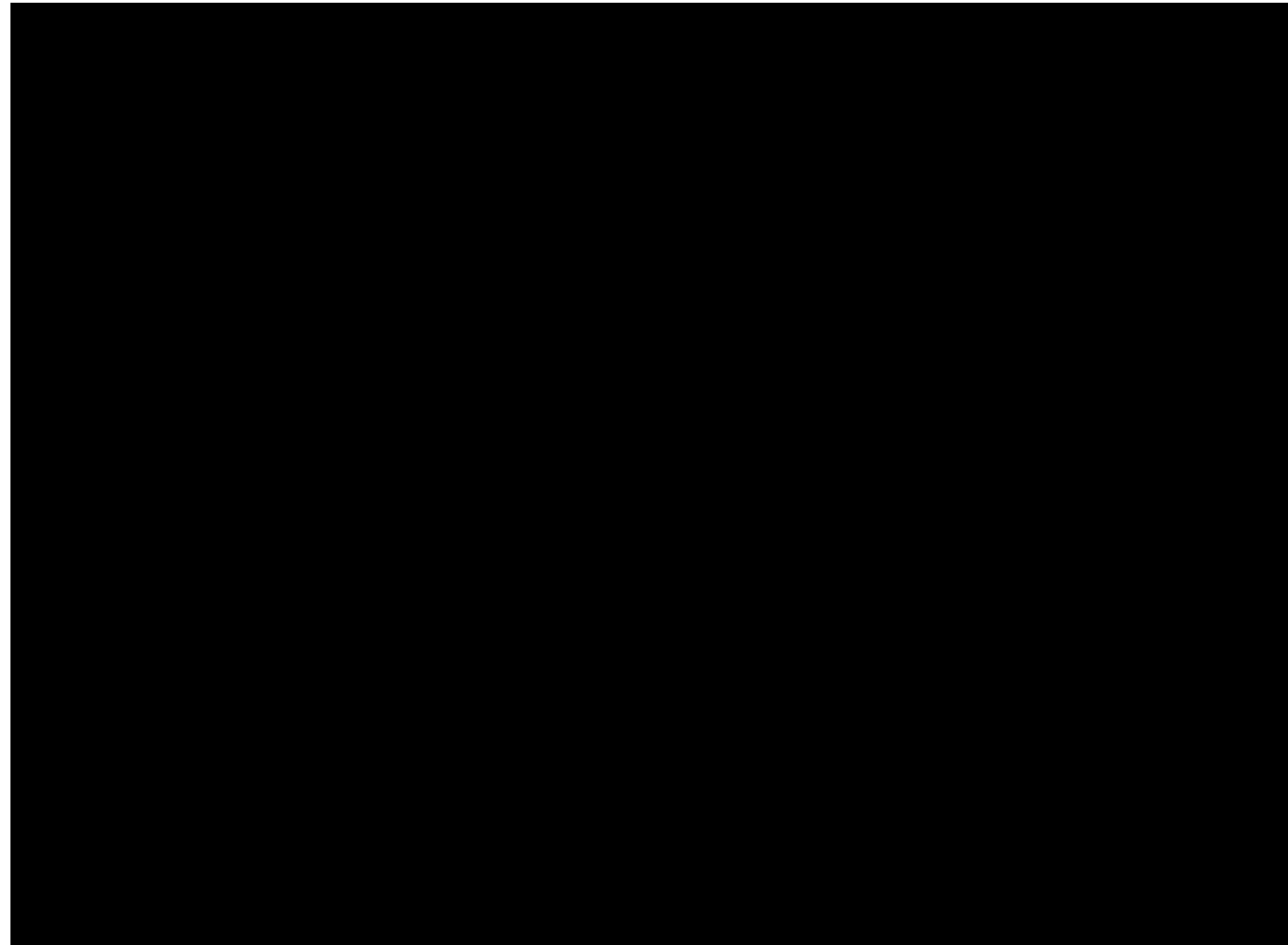
\mp observador/fonte afastando-se

\pm observador/fonte aproximando-se

V aqui é a velocidade relativa entre fonte e observador

$$\beta = V/c$$

Apito Doppler



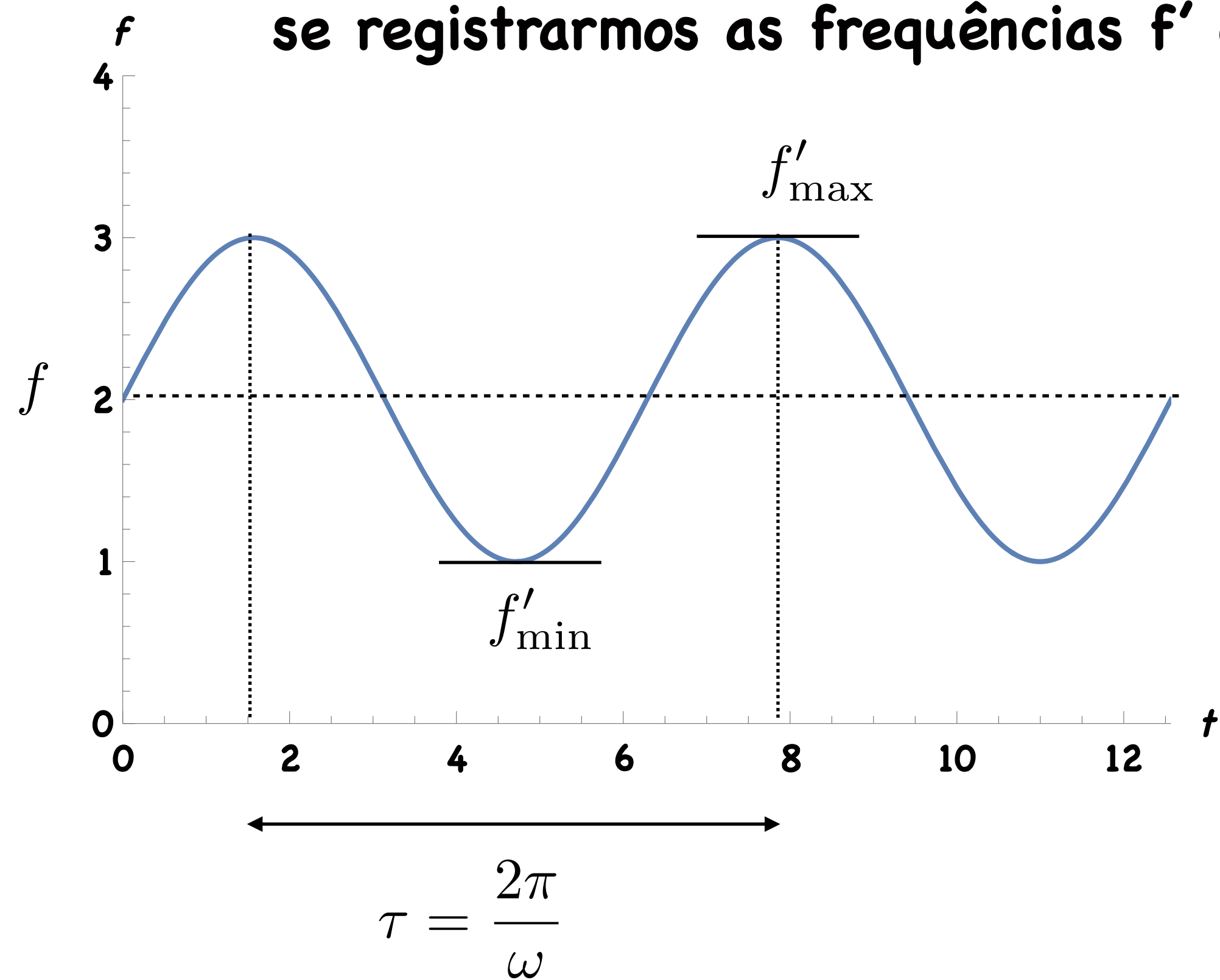
$$v_{\text{radial}} = v_0 \sin(\omega t)$$



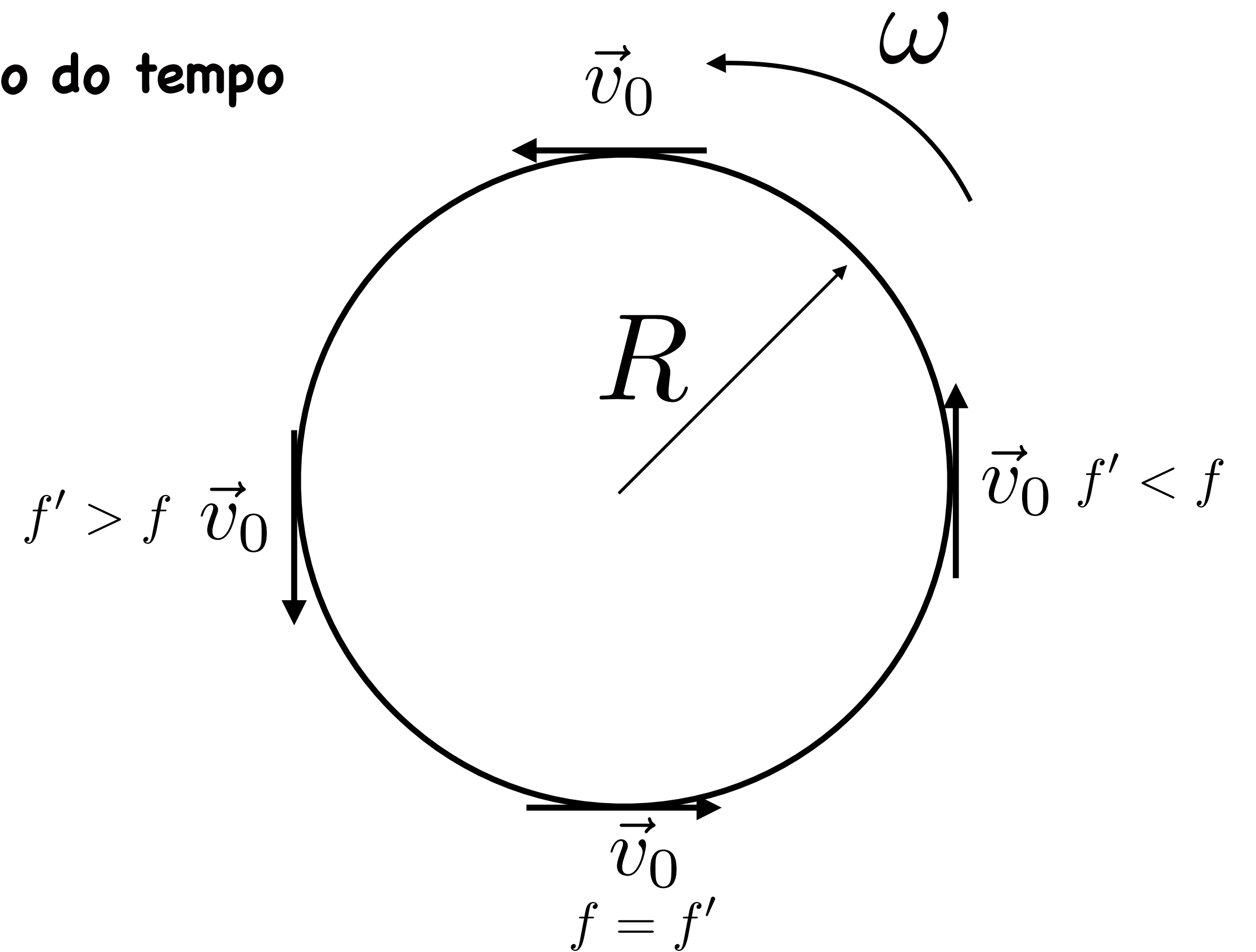
cortesia Prof. Paulo Nussenzveig

Apito Doppler

se registrarmos as frequências f' em função do tempo

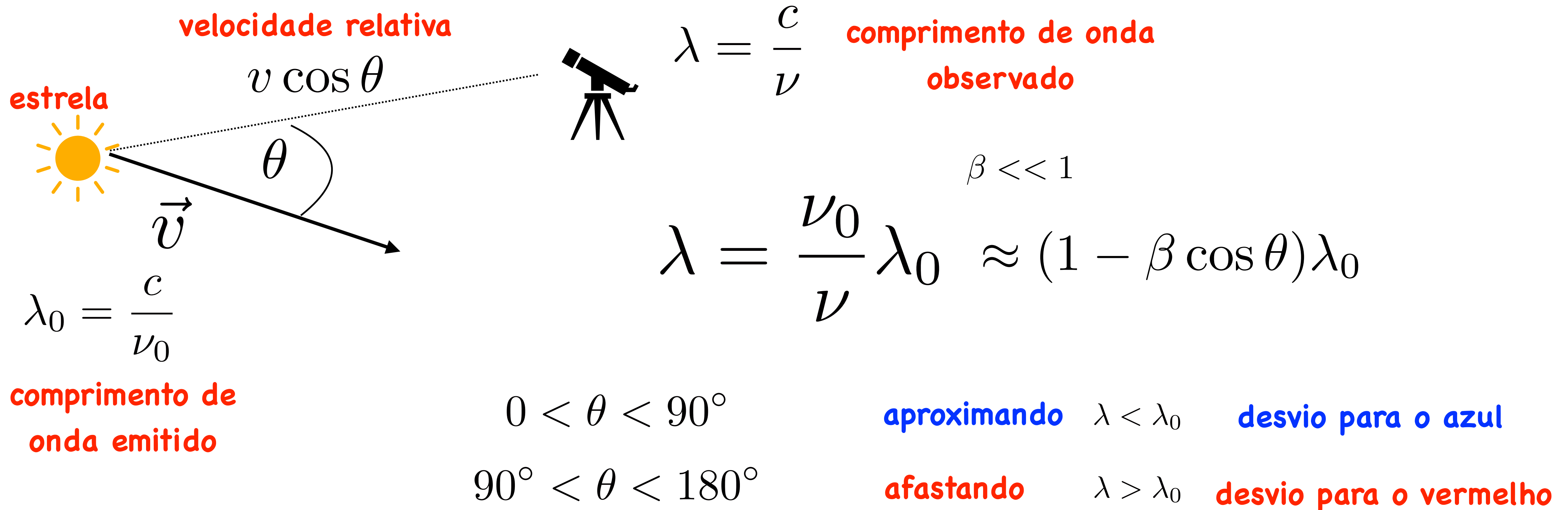


vamos ter informação sobre : τ, ω, R, v_0



o mesmo efeito pode ser usado para a luz !

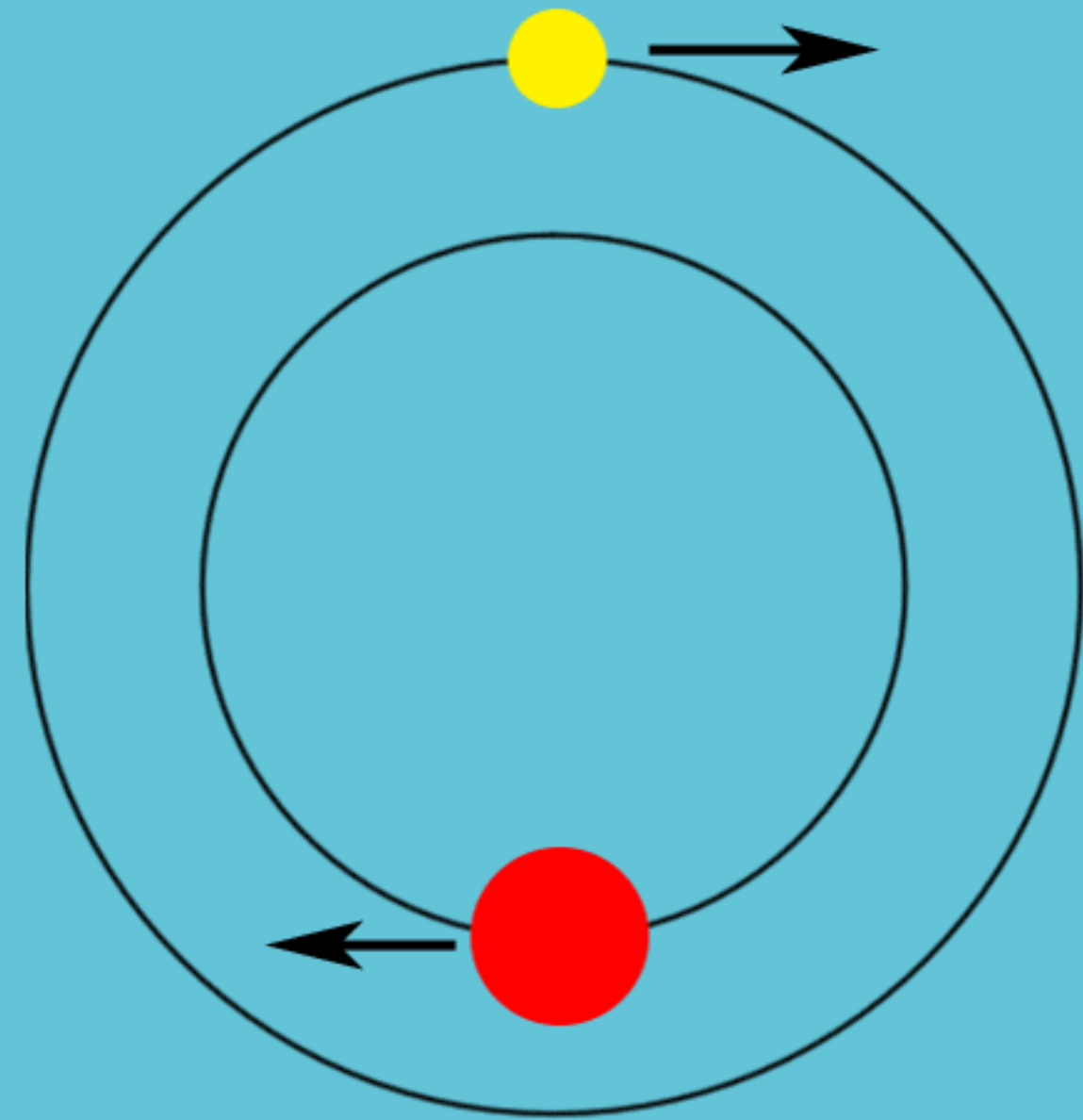
Doppler na Astronomia



Isso é usado na Astronomia para calcular a velocidade radial das estrelas relativas a nós

Espectroscopia Doppler

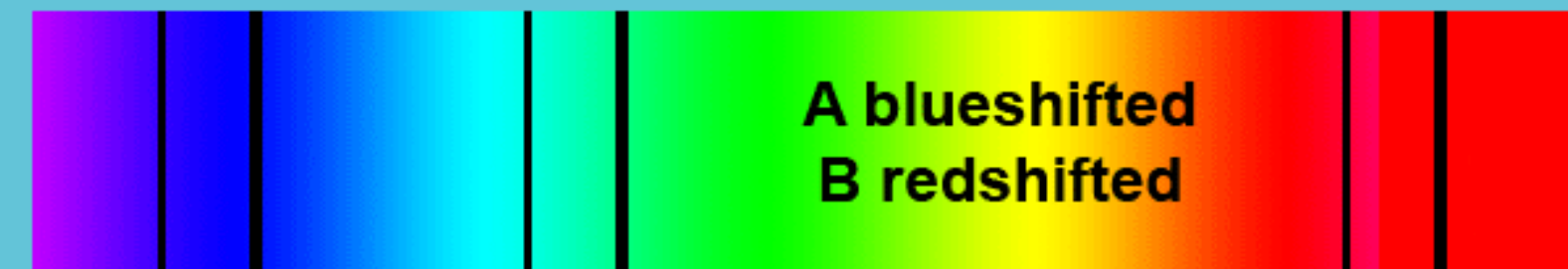
● A
● B



A B

A B

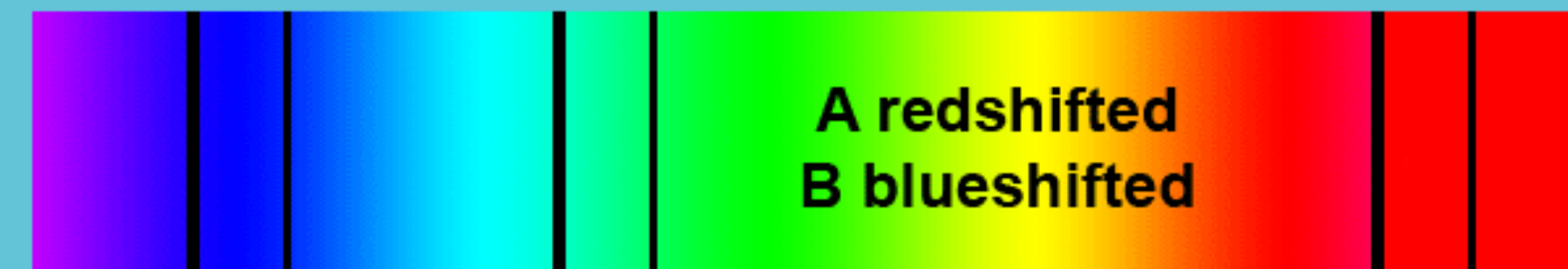
A B



B A

B A

B A



Universo em Expansão



Edwin Powell Hubble

Nos anos ~1930 Edwin Hubble descobriu que muitos objetos considerados até então como nuvens de poeira e gás (nebulosas) eram de fato galáxias fora da Via Lactea

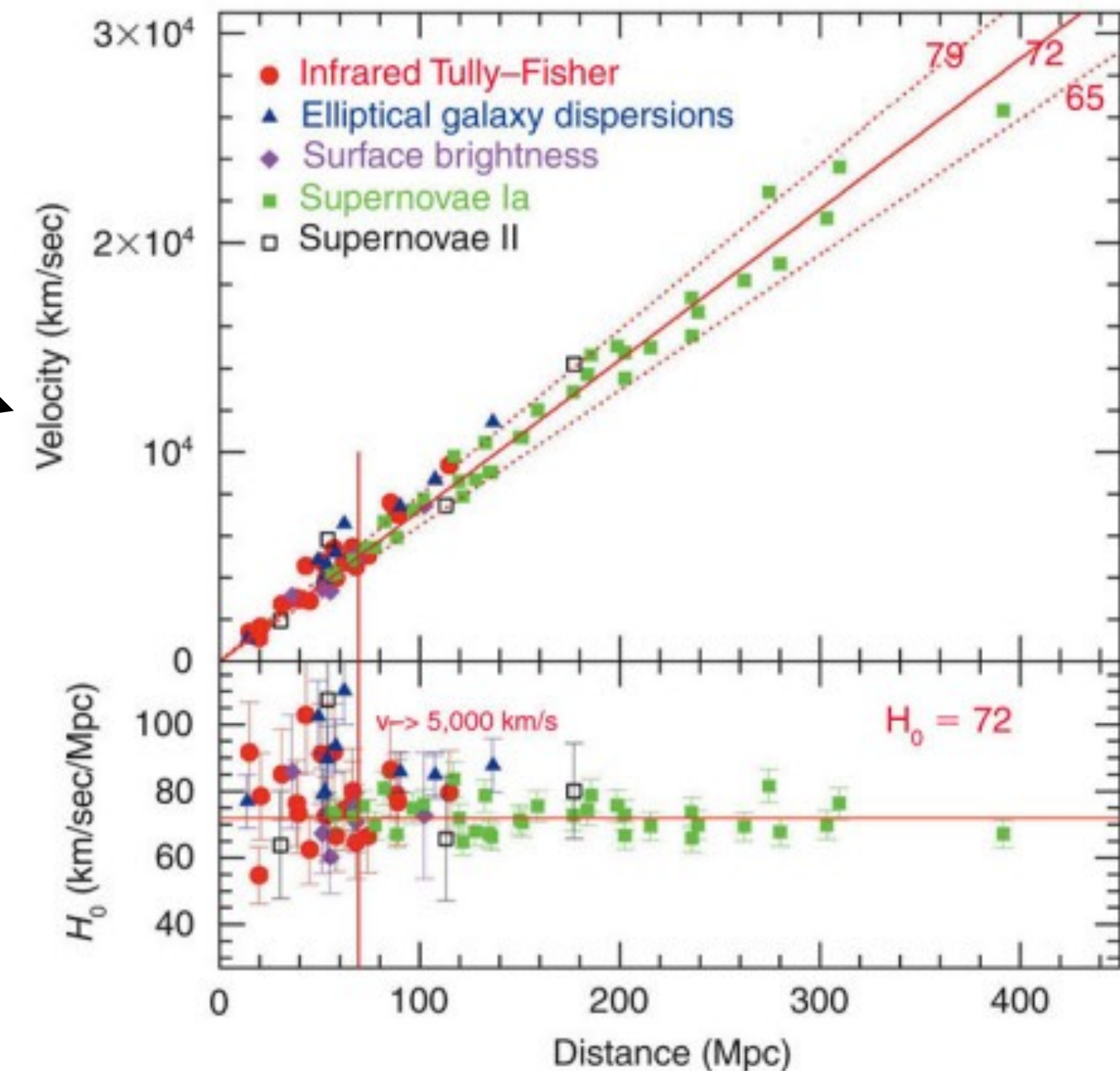
$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

Lei de Hubble

$$v = H_0 d$$

Galáxias se afastado de nós com velocidade proporcional à distância

1 Mpc = 3,262 milhões de anos-luz

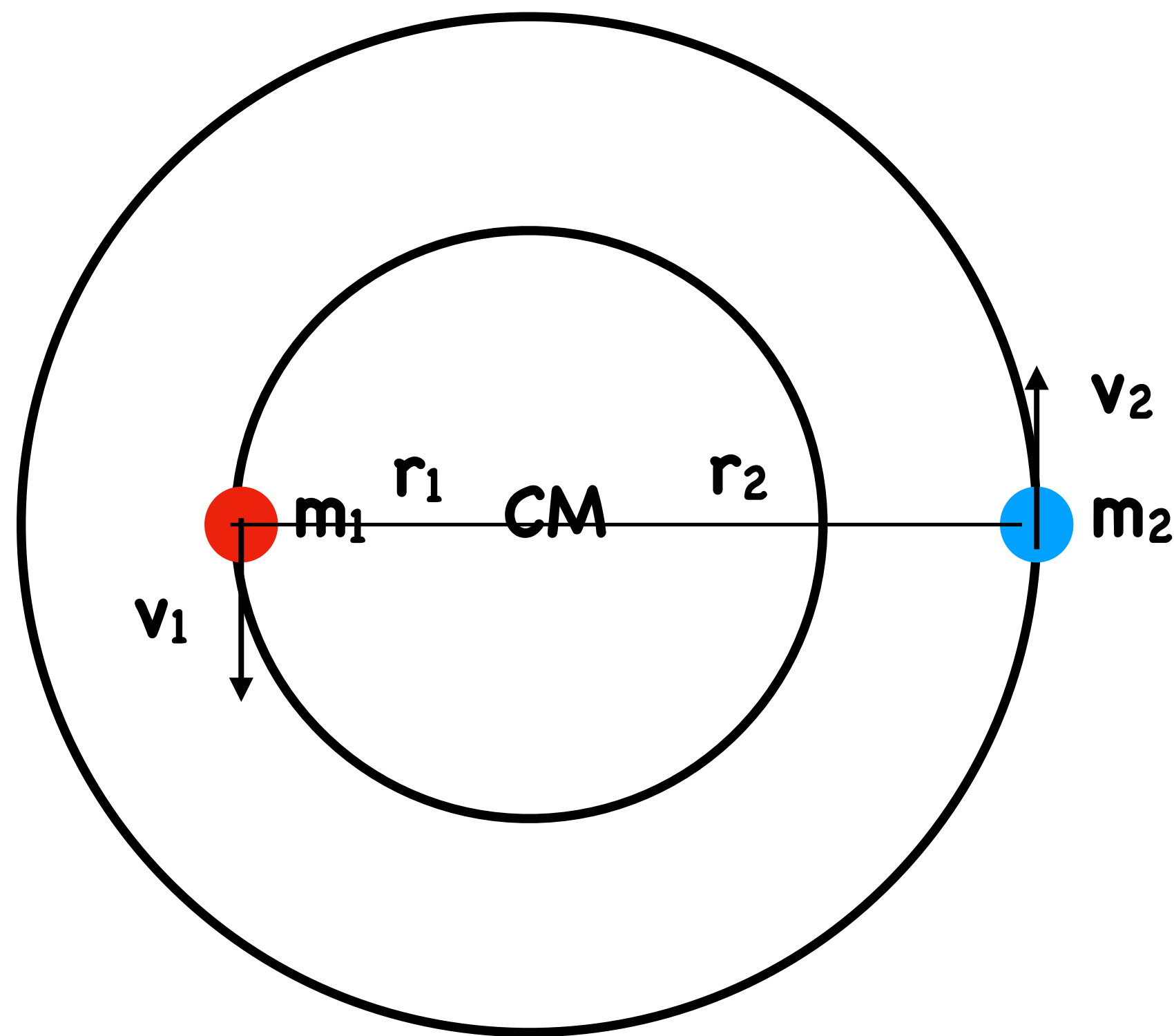


B
(Wendy L. Freedman, Observatories of the Carnegie Institution of Washington, and NASA)

Sistemas Binários

Muitas estrelas estão em sistemas binários, mas frequentemente vemos apenas uma delas

Mas podemos observar as linhas de absorção do espectro e se o sistema for binário essas linhas se movem



$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

Observando o Desvio Doppler

Estrela 1 : τ, v_1, r_1

Estrela 2 : τ, v_2, r_2

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 (r_1 + r_2)^3}{G_N (m_1 + m_2)}$$

período da órbita
3ª lei de Kepler

Sistemas Binários Especiais

Na nossa galáxia há algumas centenas de binárias muito especiais: uma das estrelas é como o Sol e outra é muito pequena (Estrela de Neutrons ou Buraco Negro)

Se o ponto de Lagrange (equilíbrio) estiver dentro da estrela, então a matéria que está à esquerda desse ponto tende a ir para o outro lado ...

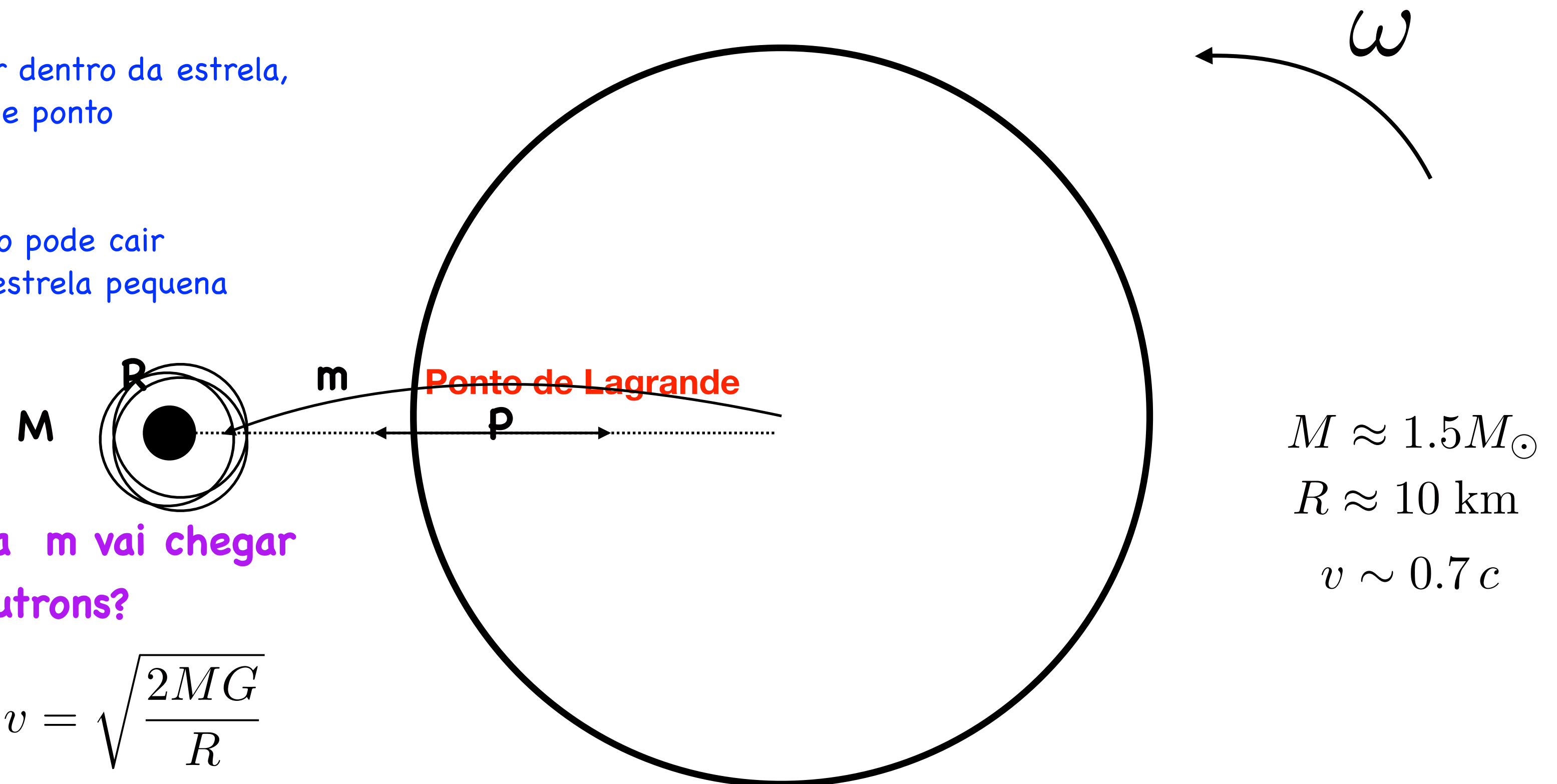
Como o sistema está girando a matéria não pode cair radialmente: vai espiralar para dentro da estrela pequena formando um **disco de acreção**

Com que velocidade essa massa m vai chegar na superfície da estrela de neutrons?

$$\frac{mMG}{R} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2MG}{R}}$$

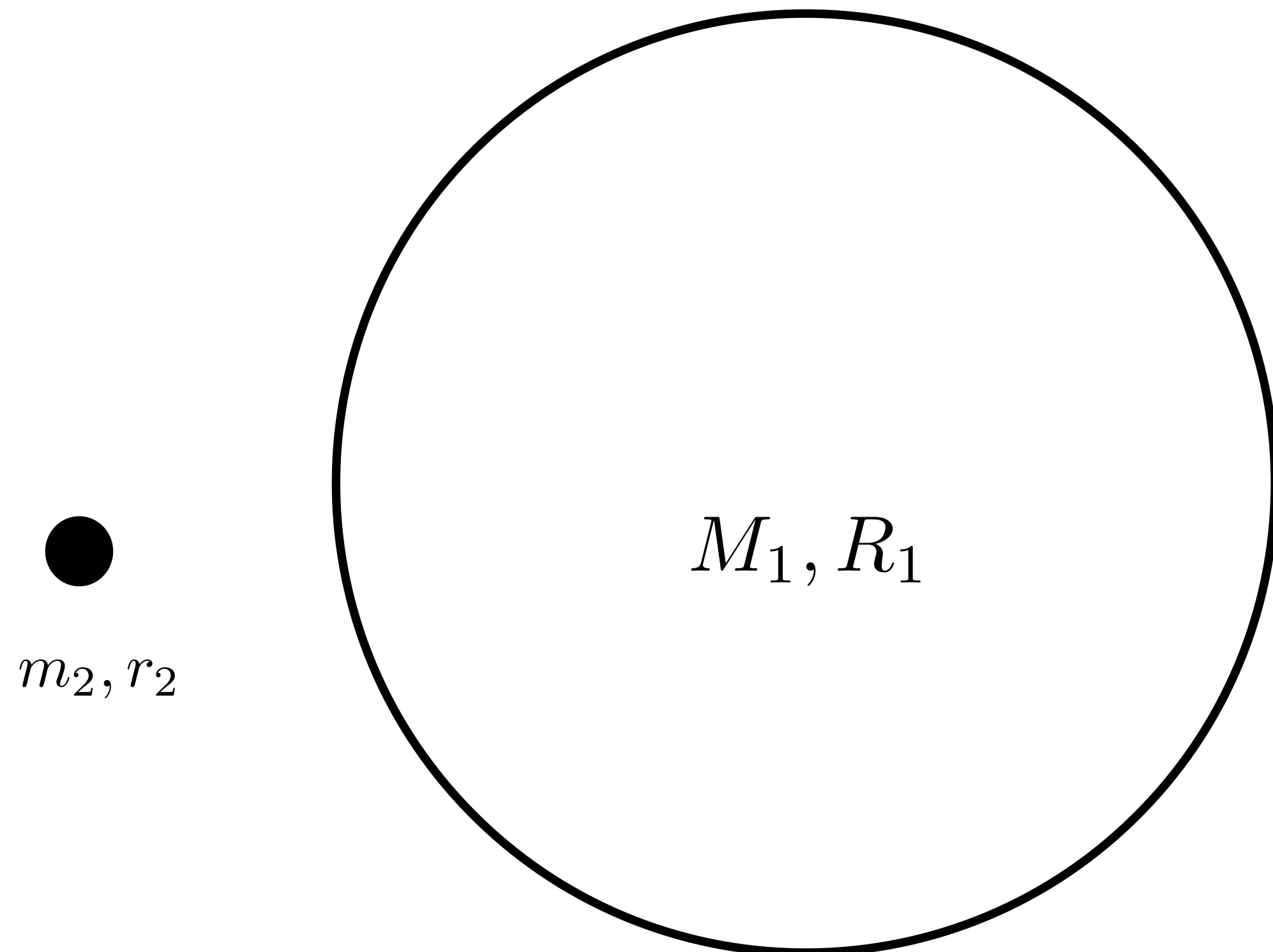
essa energia cinética é convertida em calor (milhões de graus!)



Sistemas Binários Especiais

Astrônomos sabem estimar a massa da estrela (doador) observando o seu espectro luminoso : M_1

Observando o desvio Doppler de uma linha do espectro do doador : τ, v_1, R_1



$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

centro de massa

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 (r_1 + r_2)^3}{G_N (m_1 + m_2)}$$

período da órbita
3ª lei de Kepler

$$\rightarrow m_2, r_2$$

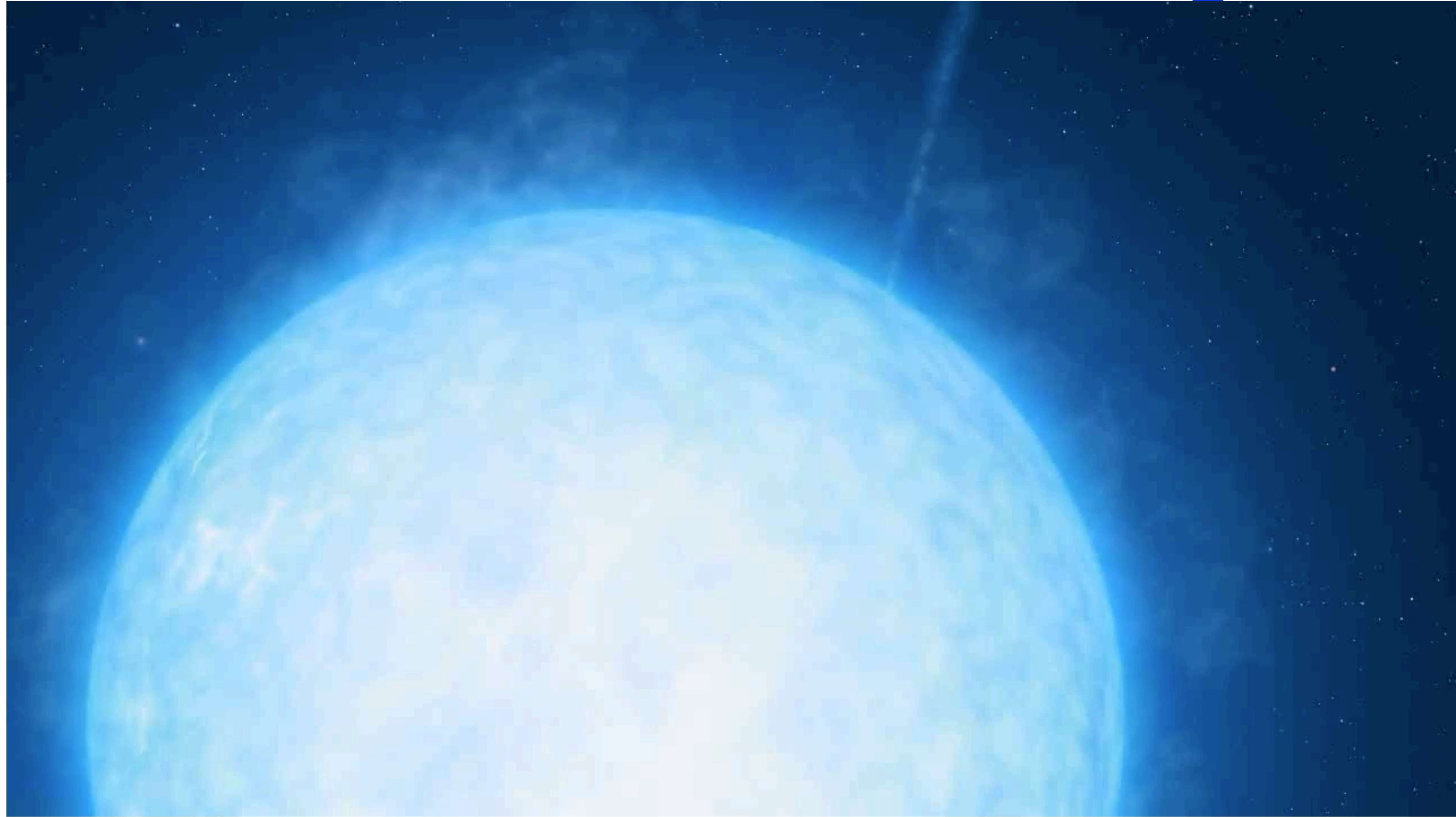
encontram assim a massa da estrela de acreção

limite de Chandrasekar $m_2 > 1.5M_\odot$ colapso da estrela

$$m_2 > 3M_\odot$$

Buraco Negro (Relatividade Geral)

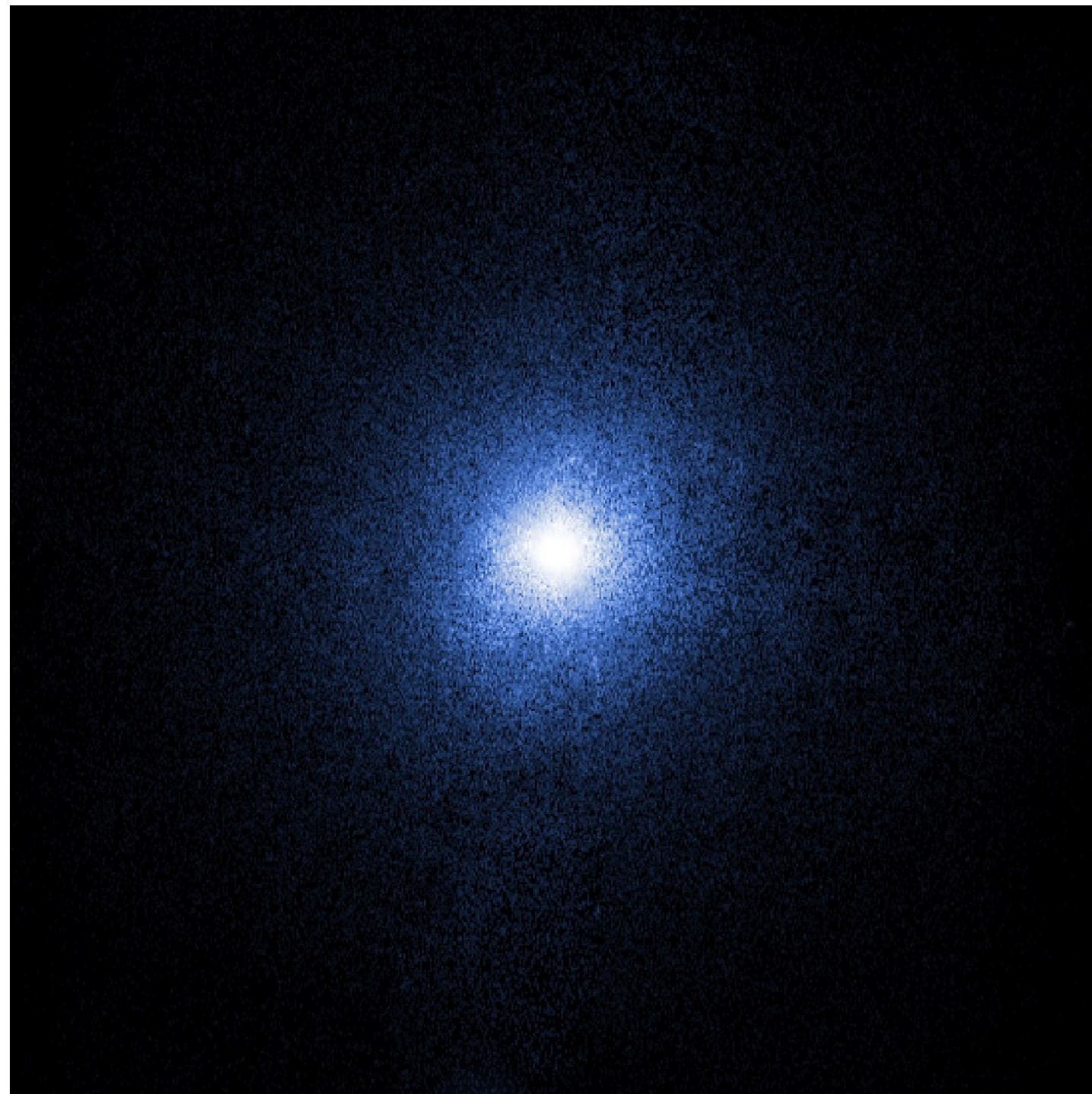
O Primeiro Buraco Negro



O Primeiro Buraco Negro

1971 - Charles Thomas Bolton : Cygnus-X-1 não era uma estrela de neutrons mas um buraco negro!

$$m_2 \approx 15 M_{\odot}$$

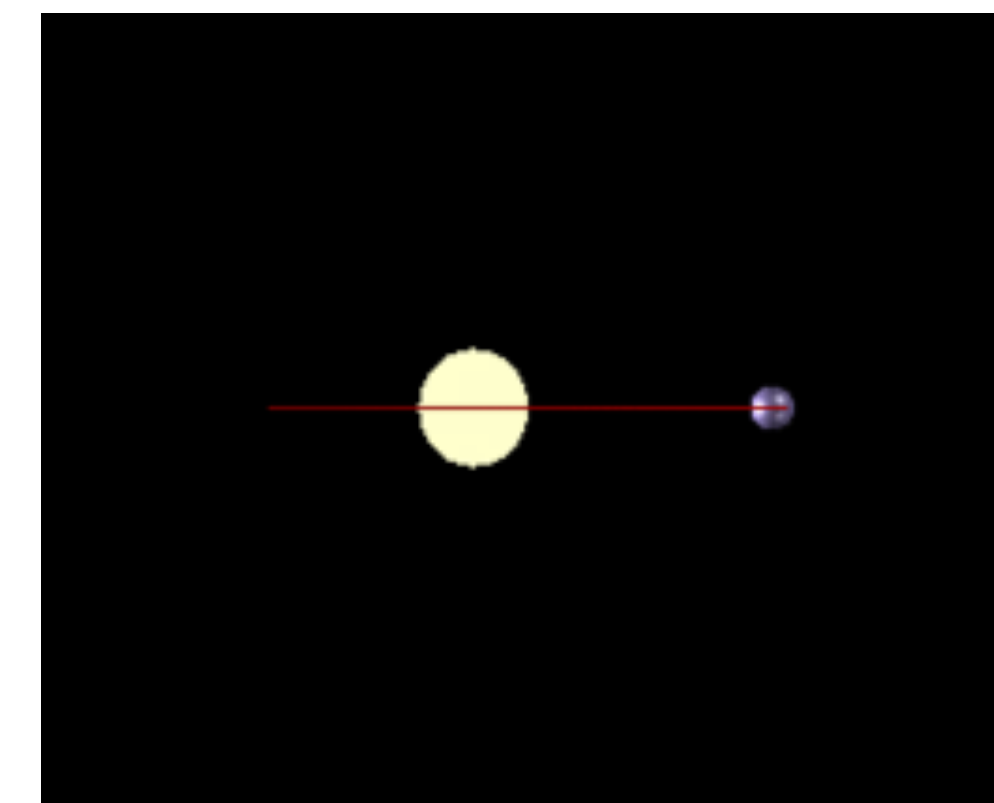


estrela HBE226868
Supergigante Azul



sistema binário
Cygnus-X-1 & HBE26868

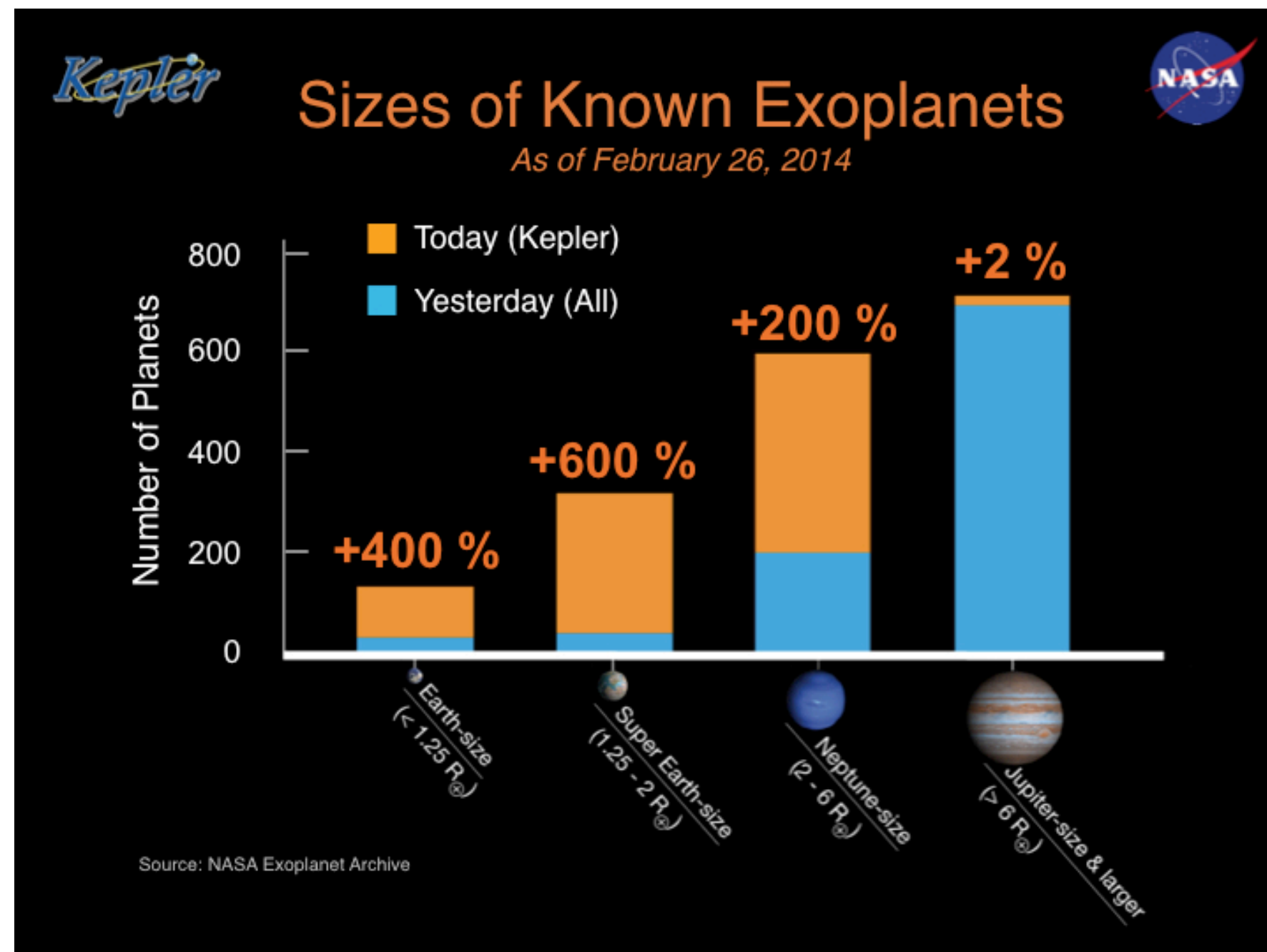
Descoberta de Exoplanetas



<https://exoplanets.nasa.gov/exoplanet-catalog/>

1995

51 Pegasi B primeiro exoplaneta detectado por Michel Mayor e Didier Queloz usando essa técnica



a maioria deles foi observada (90%) pelo método de velocidade-radial: **espectroscopia Doppler** do espectro da estela do sistema orbitada pelo planeta

Hoje existem mais de 5000 exoplanetas confirmado em mais de 3800 sistemas diferentes!

Ondas, Informação & Transformada de Fourier

Para um sinal $f(t)$ arbitrário, precisamos de uma integral de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

assim uma onda progressiva para a direita (+x) pode ser escrita como

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega = f(x - vt)$$

Essa fórmula é válida para qualquer sistema unidimensional com qualquer relação de dispersão !

Quando há dispersão o sinal muda de forma à medida que se propaga pois cada componente harmônica move-se com velocidade diferente

Como então mandar um sinal em um meio dispersivo?

Ondas, Informação & Transformada de Fourier

Vamos mandar o **sinal** com a seguinte modulação

$$2 \underbrace{\cos(k_s x - \omega_s t)}_{\text{sinal}} \underbrace{\cos(k_0 x - \omega_0 t)}_{\text{onda portadora}}$$

$$\text{se } k_s \ll k_0, \omega_s \ll \omega_0$$

$$v_0 = \frac{\omega_0}{k_0}$$

velocidade de fase

velocidade do sinal

$$v_s = \frac{\omega_s}{k_s} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{k_+ - k_-} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad \text{velocidade de grupo}$$

Suponha agora que para algum intervalo de frequência perto de ω_0 a relação de dispersão varie lentamente.

Nesse caso podemos tomá-la como aproximadamente linear expandindo $\omega(k)$ em série de Taylor em torno de k_0

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} + \dots \quad \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega$$

intervalo de frequência

Ondas, Informação & Transformada de Fourier

Então podemos mandar o sinal da forma

$$f(t)e^{-i\omega_0 t} \quad C(\omega) \approx 0 \quad \text{para} \quad |\omega - \omega_0| > \Delta\omega$$

Isso descreve um sinal que tem uma onda portadora de frequência ω_0 modulada pela parte importante do sinal $f(t)$

$$\omega(k) = vk + a \quad k = \frac{\omega}{v} + b$$

$$a = \omega_0 - vk_0 \quad b = k_0 - \frac{\omega_0}{v}$$

desprezando termos de ordem mais alta
a e b são constantes que podemos determinar

o sinal

$$A(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega C(\omega) e^{-i(\omega+\omega_0)t} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' C(\omega' - \omega_0) e^{-i(\omega')t} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega C(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t}$$

Ondas, Informação & Transformada de Fourier

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega C(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t + i(\frac{\omega}{v} + b)x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega C(\omega - \omega_0) e^{-i\omega(t - \frac{x}{v}) + ibx} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega C(\omega) e^{-i(\omega + \omega_0)(t - \frac{x}{v}) + ibx} \\ &= \boxed{f(x - vt)} \boxed{e^{-i\omega_0(t - \frac{x}{v}) + ibx}} \end{aligned}$$

sinal onda portadora

f(t) move-se sem mudança de forma com velocidade de grupo $v = \frac{d\omega(k_0)}{dk}$

desde que possamos ignorar correções de ordem mais alta

Largura de Banda, Fidelidade e Incerteza

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \quad \text{Transformada de Fourier Inversa}$$

considere, por exemplo,

$$f(t) = e^{-\Gamma|t|} \quad \Gamma > 0 \quad C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\Gamma}{\Gamma^2 + \omega^2}$$

Note que quando Γ aumenta o sinal fica mais "picado" perto de $t=0$, mas o espectro de frequências alarga !

Por outro lado, se Γ diminui de forma que $C(\omega)$ fica mais picada em $\omega \approx 0$ então $f(t)$ fica mais larga com $t \dots$

Esse comportamento de fato é geral!

Para resolvermos tempos curtos, precisamos de um espectro largo de frequências e vice-versa.

De fato, podemos demonstrar que:

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

Largura de Banda, Fidelidade e Incerteza

Um exemplo simples de aplicação dessa relação:

Largura de banda nas transmissões de radio AM: uma estação comercial de radio AM usa largura de banda de 5000 Hz em cada lado da frequência portadora

$$\Delta\omega \approx 2\pi\Delta\nu \approx 3 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$$

eles não podem enviar sinais em intervalos de tempo menores do que $\approx 10^{-5} \text{ s}$

Isso é OK para transmitir conversar e alguns tipos de música

Daqui a pouco tempo vocês vão aprender que essa relação é algo absolutamente fundamental: isso faz parte da natureza quântica da matéria e das interações, e vai pelo nome de relações de incerteza.

$$\Delta t \Delta\omega \geq \frac{1}{2} \quad \longleftrightarrow \quad \Delta t \Delta\nu \geq \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi}$$

Constante de Planck:
 $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$

Vocês vão ver que podemos associar energia às frequências, $E = h\nu$, $\Delta E = h\Delta\nu$ e assim: $\Delta t \Delta E \geq \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2} \hbar$