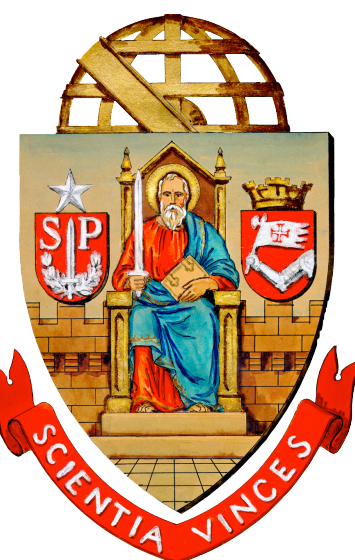


Oscilador Harmônico Forçado

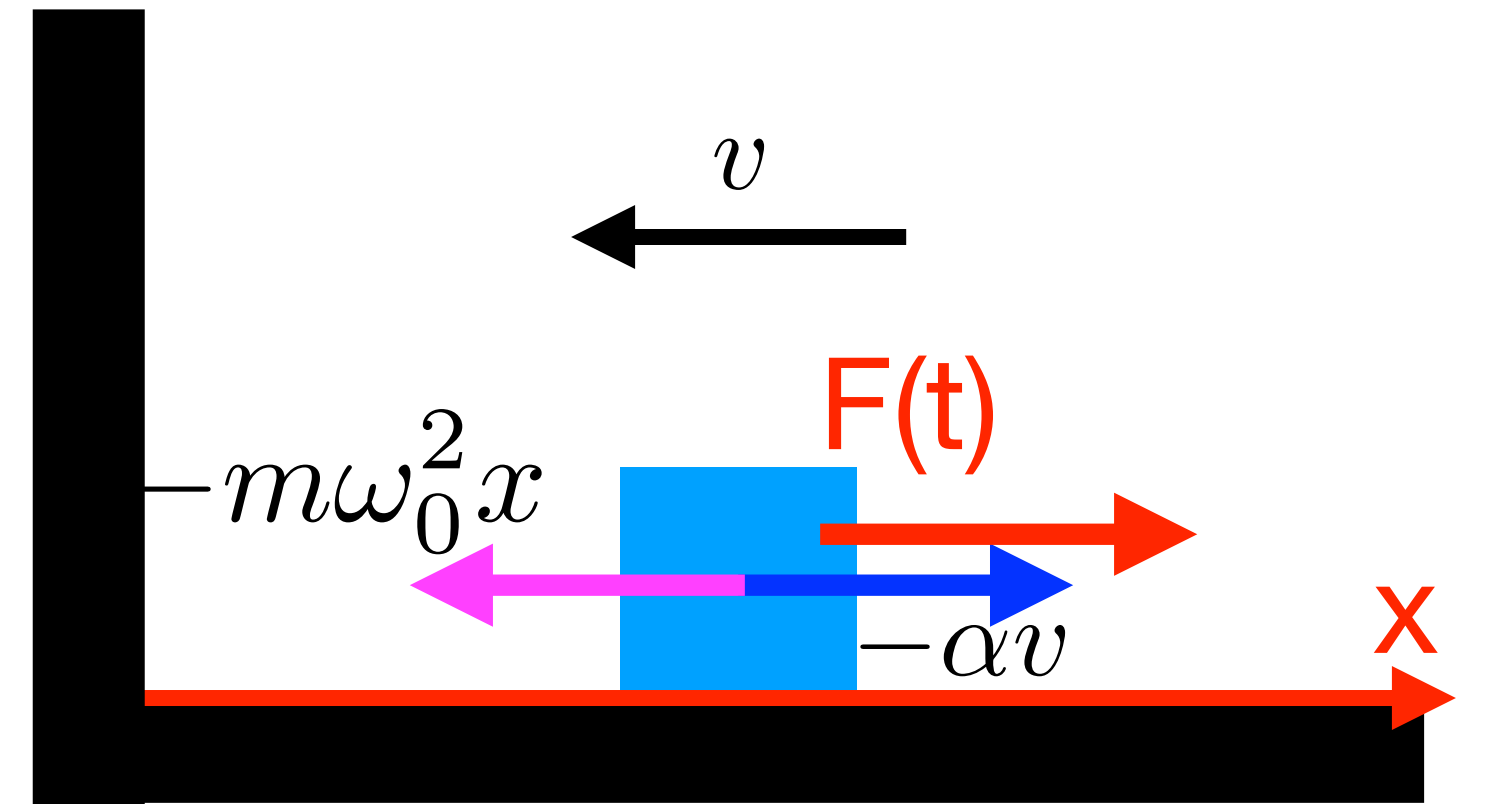
quarta aula

Oscar Éboli 25 de agosto de 2021



1. Equações diferenciais não homogêneas

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \alpha \frac{dx}{dt} + F(t) \implies \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$



Fato sobre a EDO $a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t)$

a solução geral é uma solução particular somada a solução mais geral da homogênea

$$x_p(t) \text{ tal que } a \frac{d^2 x_p}{dt^2} + b \frac{dx_p}{dt} + cx_p = F(t)$$

$$x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad \text{onde } x_{1,2} \text{ são soluções l.i. de } a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Exemplo 2. Força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

A equação de movimento é $\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$

note que $F_0 \cos(\omega t) = \text{Re} [F_0 e^{i\omega t}]$ logo é útil escrever $z(t) = x(t) + i y(t)$

$$x(t) = \text{Re} [z(t)] \implies \frac{d^2}{dt^2} \text{Re} [z(t)] + \gamma \frac{d}{dt} \text{Re} [z(t)] + \omega_0^2 \text{Re} [z(t)] = \text{Re} \left[\frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \right]$$

como a parte real comuta com a derivada, podemos procurar $z(t)$ que satisfaz

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

• Solução particular de
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

• Já que a derivada de uma exponencial é proporcional a ela: $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$

• implicando que
$$(i\omega)^2 z_0 e^{i\omega t} + \gamma i\omega z_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma\omega) z_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Escrevendo $z_0 = Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$

temos $A^2 = \frac{F_0^2}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}$

além disso $Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) \implies \tan \varphi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

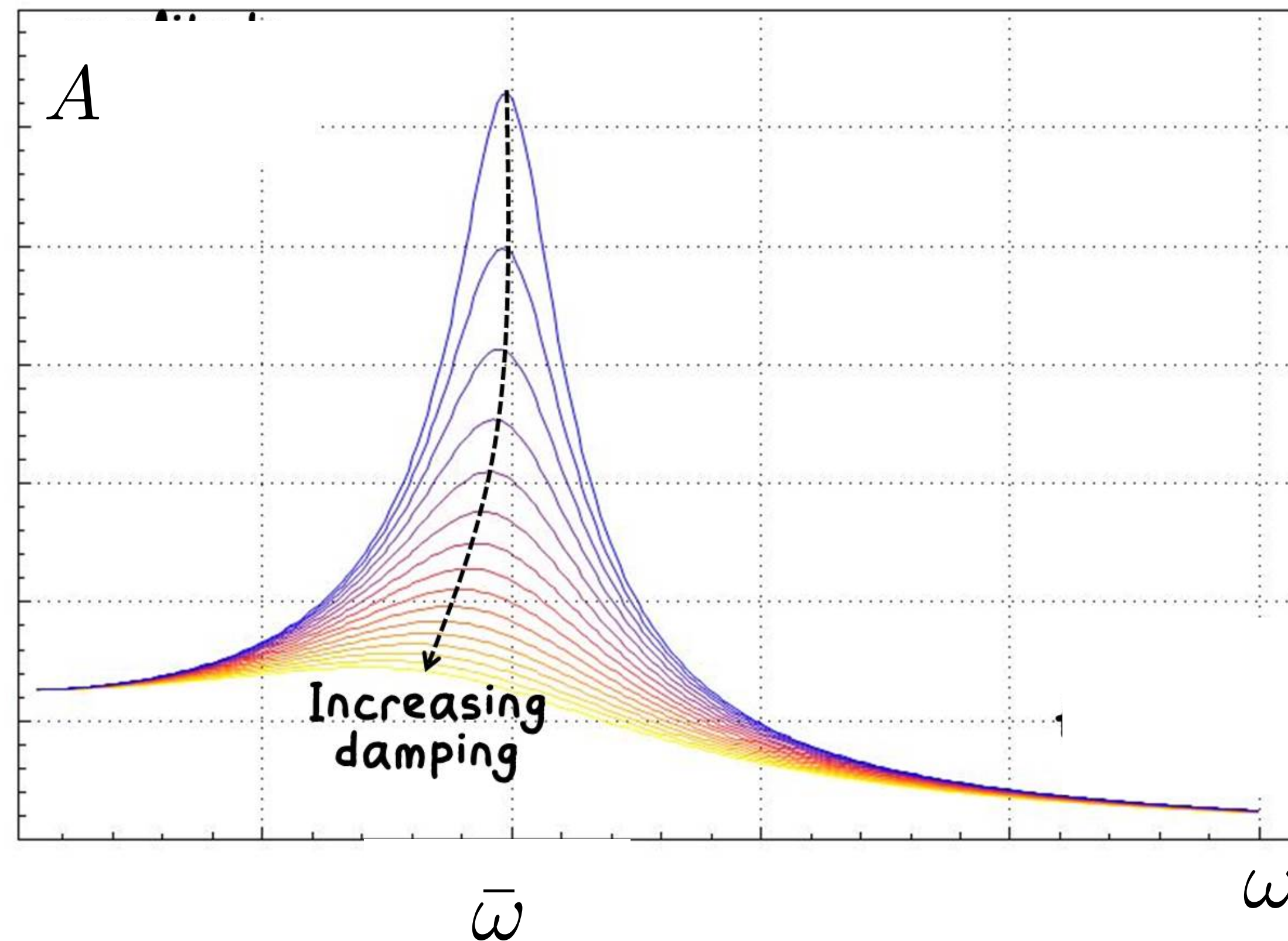
logo $x_p = \text{Re}[z(t)] = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$

ou podemos escrever $x_p(t) = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \gamma\omega \sin(\omega t)]$

• Efeito físico: ressonância

O módulo da amplitude $A^2 = \frac{F_0^2}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}$ é máximo para $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$

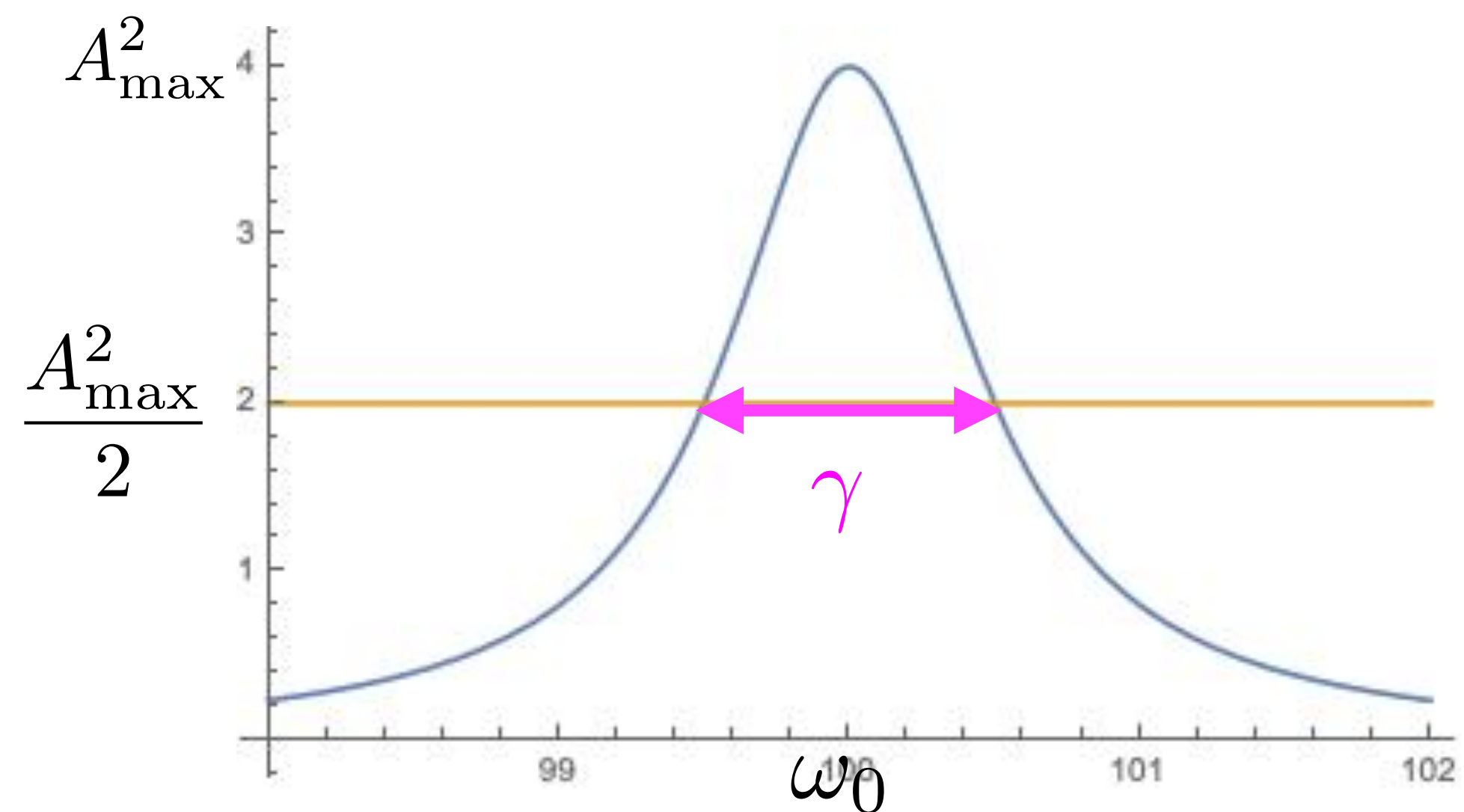
com $A_{\max} = \frac{F_0}{m\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$



• foquemos no caso de amortecimento fraco $\frac{\gamma}{2} \ll \omega_0 \implies \bar{\omega} \simeq \omega_0$

na região $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ temos $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ e $\omega_0^2 = \omega^2$

$$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} \implies A^2 \simeq \left(\frac{F_0}{2m\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\left((\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)} \quad \text{e} \quad A_{\max} = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma}$$



Note

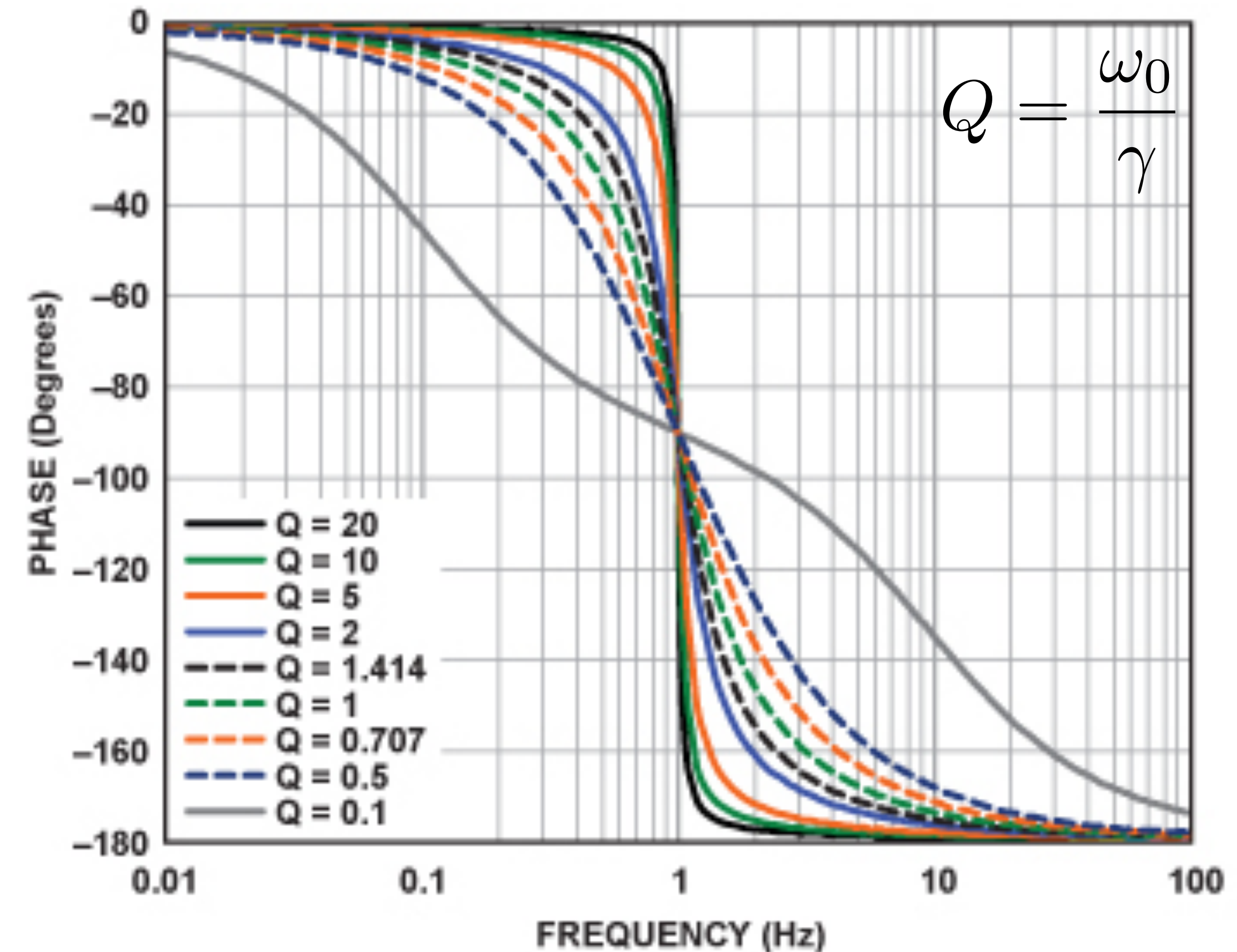
$$\frac{A(\omega_0)}{A(0)} = \frac{\omega_0}{\gamma} = Q$$

analogamente $\tan \varphi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \implies \tan \varphi = -\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega)}$ para $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$

No limite $\omega \rightarrow 0 \implies \varphi \rightarrow -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2}$ basicamente em fase

No limite $\omega \rightarrow \bar{\omega} \simeq \omega_0 \implies \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

No limite $\omega \rightarrow \infty \implies \varphi \rightarrow -\pi - \frac{\gamma}{\omega}$



- Vejamos os diversos regimes de frequência em ação



<https://www.youtube.com/watch?v=FvtwYwTRJq0>

Solução total (caso subcrítico):

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

- A solução geral do problema é $x(t) = x_p(t) + e^{-\frac{\gamma}{2}t} [c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)]$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)} [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \gamma \omega \sin(\omega t)]$$

a solução da homogênea vai a zero para tempos grandes e é chamada de transiente, enquanto a particular é chamada de estacionária.

- Dadas a posição e a velocidade iniciais podemos determinar as constantes c's

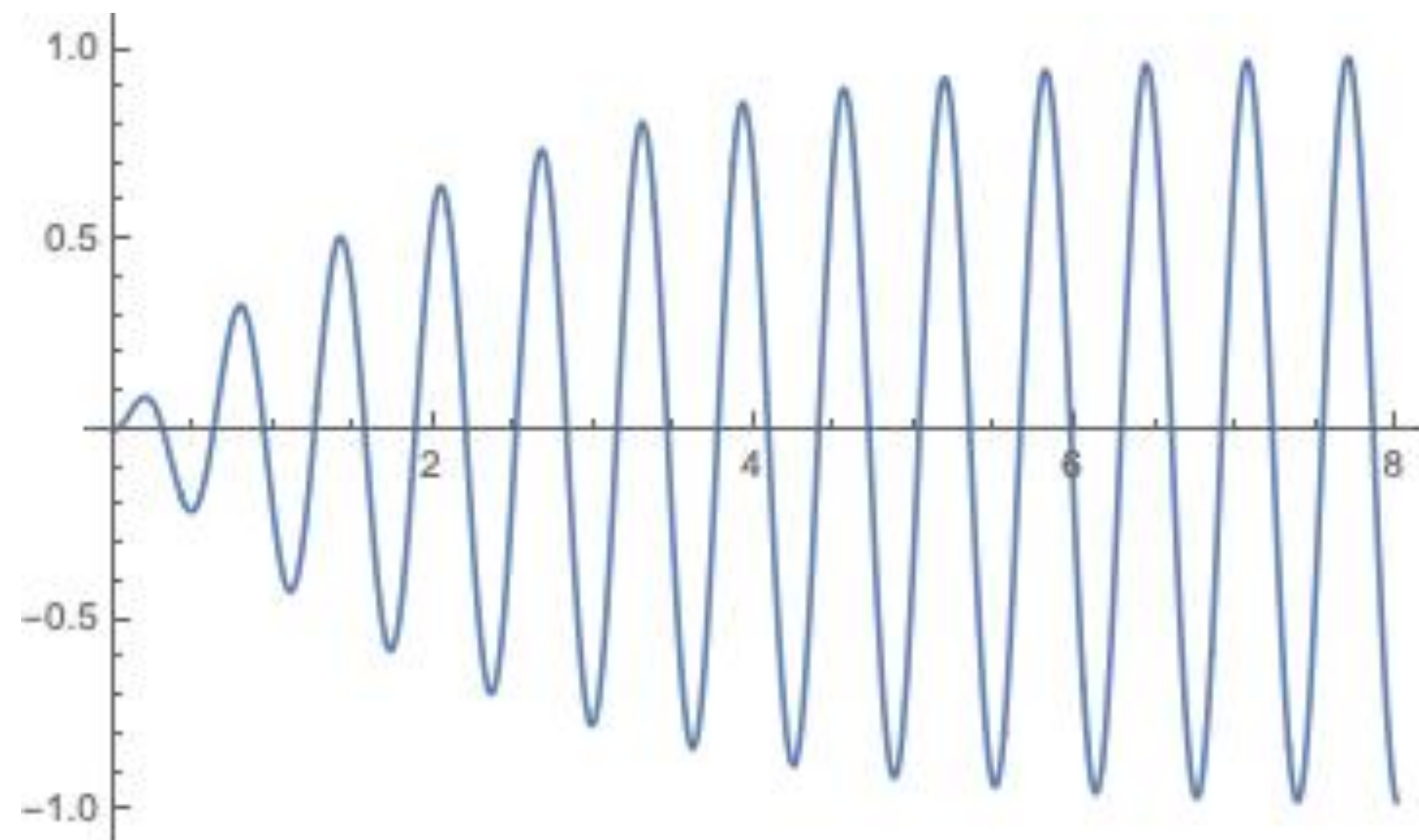
- Consideremos um caso bem particular: $\omega_0^2 \gg \frac{\gamma^2}{4} \implies \omega_1 \simeq \omega_0$ e $\omega = \bar{\omega} \simeq \omega_0$

com a condição inicial $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$

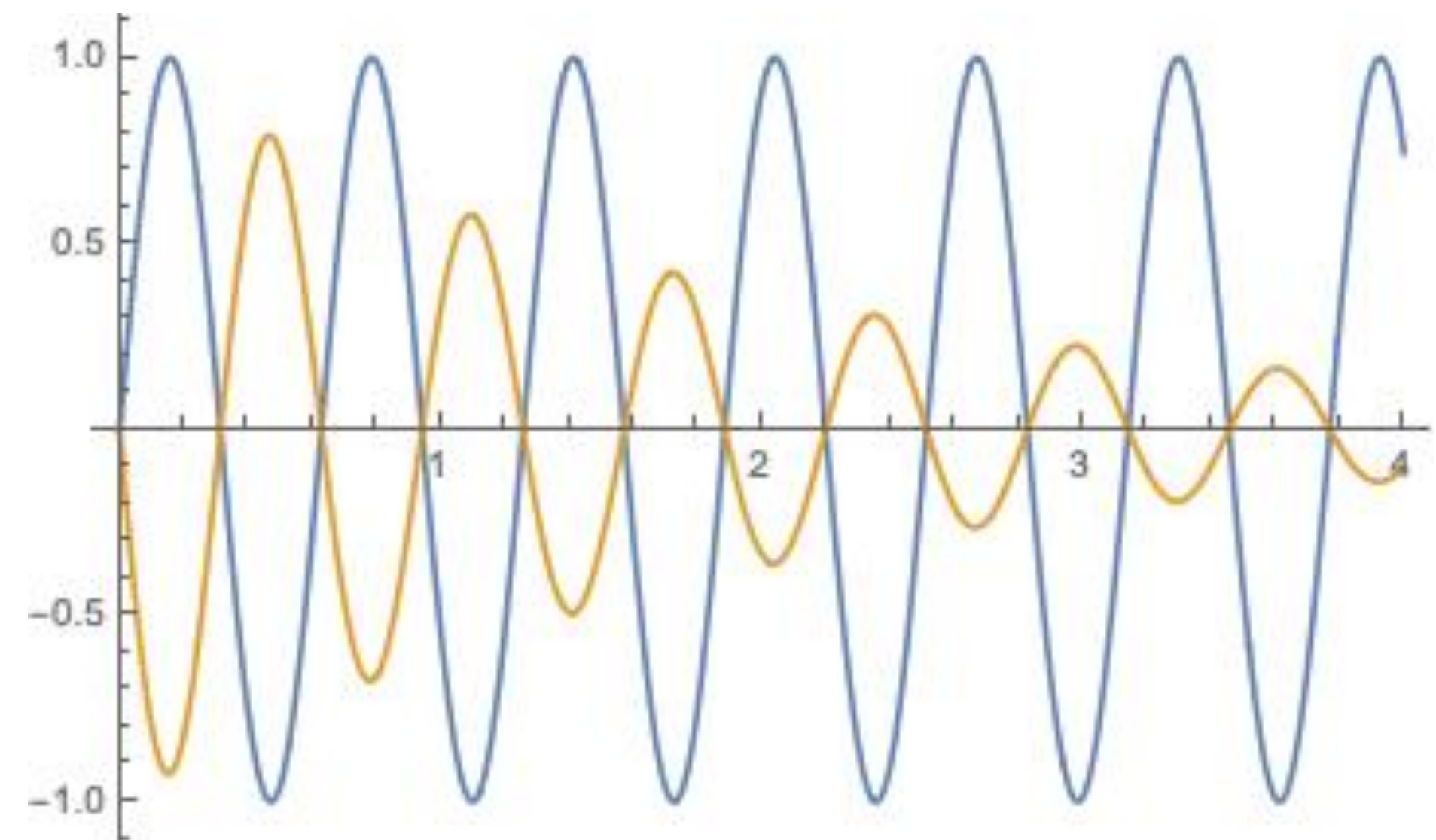
- Nestas condições temos que

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}\right) + x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t)$$

Para $x_0 = 0$



total



particular (azul) e transiente (amarelo)

• E se não houver amortecimento?

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}\right) + x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t)$$

Para $x_0 = 0$

2. Oscilações acopladas!

- Consideremos dois osciladores acoplados:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k(x_1 - \ell) + k(x_2 - x_1 - \ell)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - 2\ell) - k(x_2 - x_1 - \ell)$$

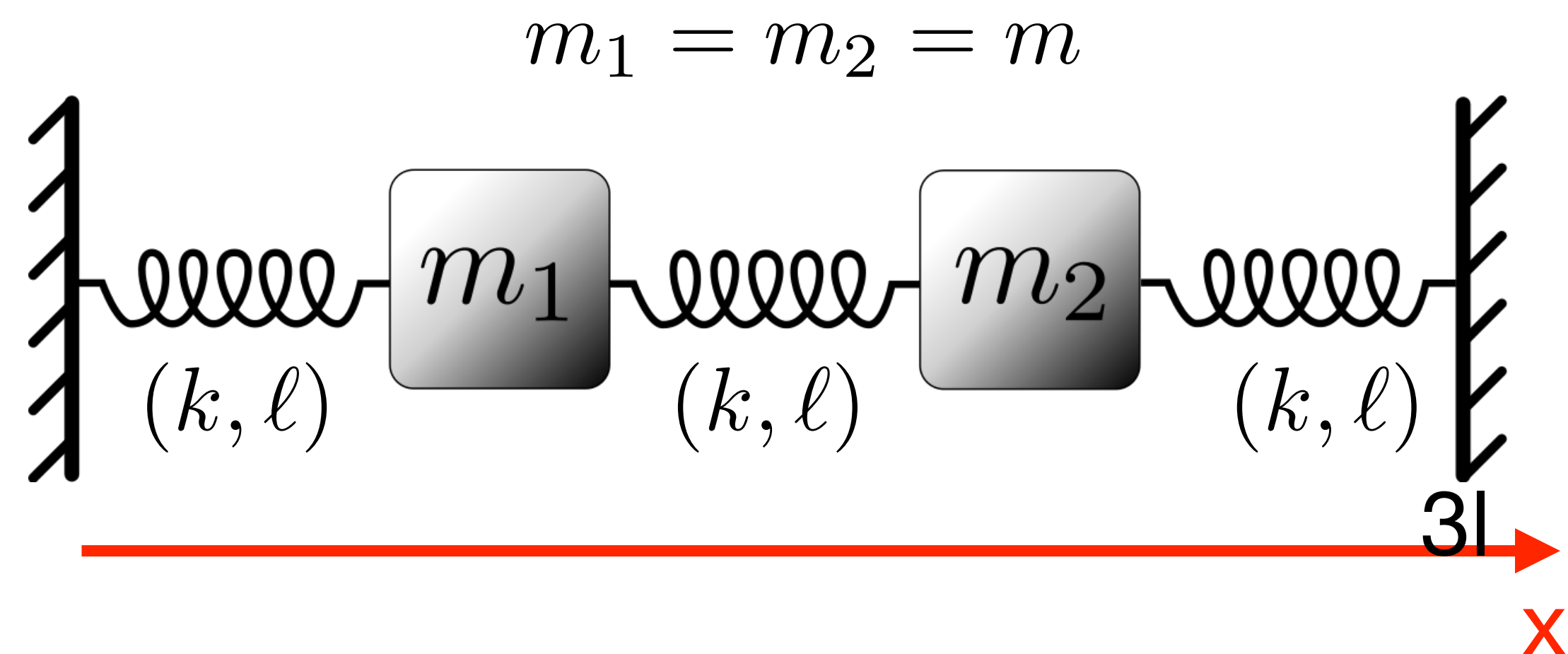
- agora definimos:

$$x'_1 = x_1 - \ell \quad \text{e} \quad x'_2 = x_2 - 2\ell \quad \implies$$

$$m \frac{d^2 x'_1}{dt^2} = -kx'_1 + k(x'_2 - x'_1)$$

$$m \frac{d^2 x'_2}{dt^2} = -kx'_2 - k(x'_2 - x'_1)$$

- Dois métodos de solução: 1. Mudança de variáveis e 2. Matrizes!



sistema acoplado de equações diferenciais!

1. Mudança de variáveis:

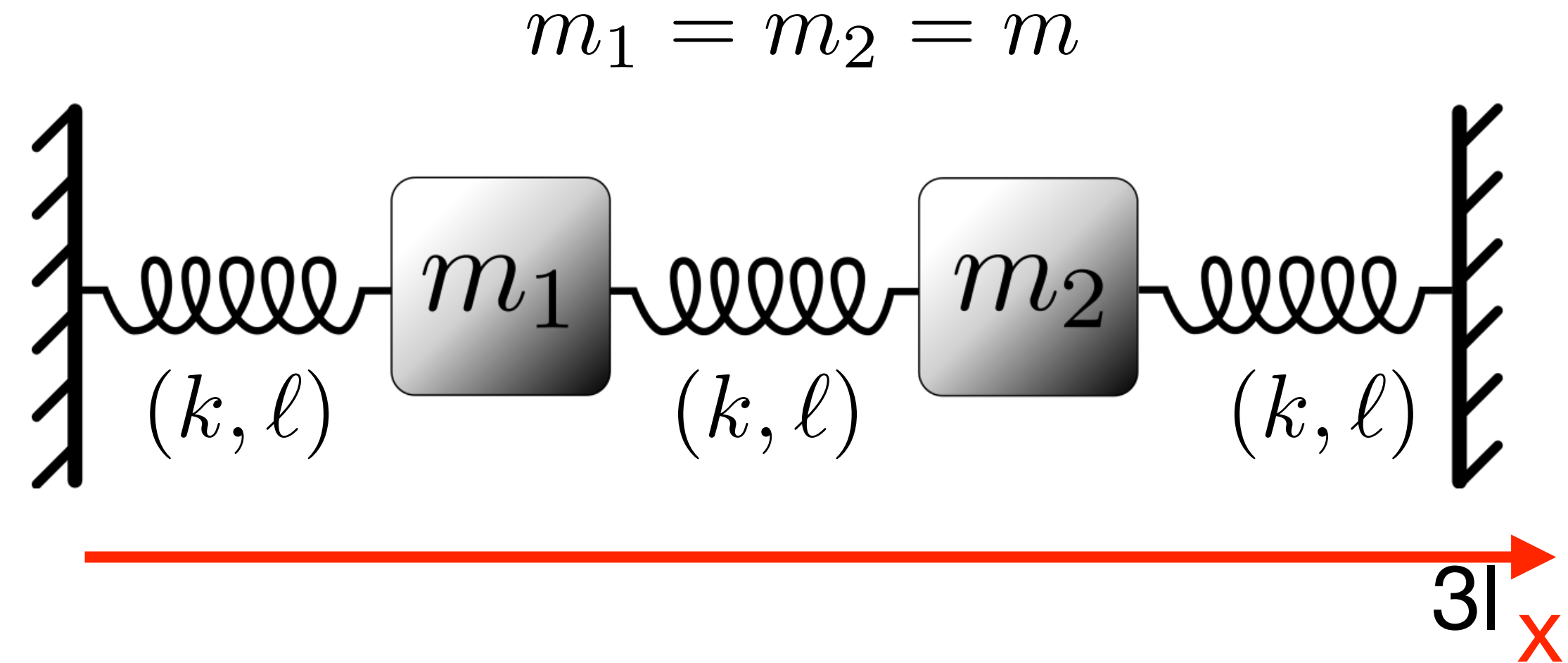
$$m \frac{d^2 x'_1}{dt^2} = -kx'_1 + k(x'_2 - x'_1)$$

$$m \frac{d^2 x'_2}{dt^2} = -kx'_2 - k(x'_2 - x'_1)$$

somando e subtraindo estas equações:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x'_1 + x'_2) = -k(x'_1 + x'_2)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x'_2 - x'_1) = -3k(x'_2 - x'_1)$$



Defino $q_1 = \frac{x'_1 + x'_2}{2}$ e $q_2 = \frac{x'_2 - x'_1}{2}$

$$m \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -kq_1$$

$$m \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -3kq_2$$

$$m \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -kq_1$$

\implies

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\omega_0^2 q_1$$

$$m \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -3kq_2$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} = -3\omega_0^2 q_2$$

- q_1 e q_2 oscilam com frequências diferentes
- q_1 e q_2 são chamados de modos/coordenadas normais
- x_1 e x_2 são superposições de osciladores harmônicos simples

$$q_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$q_2 = A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)$$

com

$$x_1 = q_1 - q_2$$

$$x_2 = q_1 + q_2$$

$$q_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

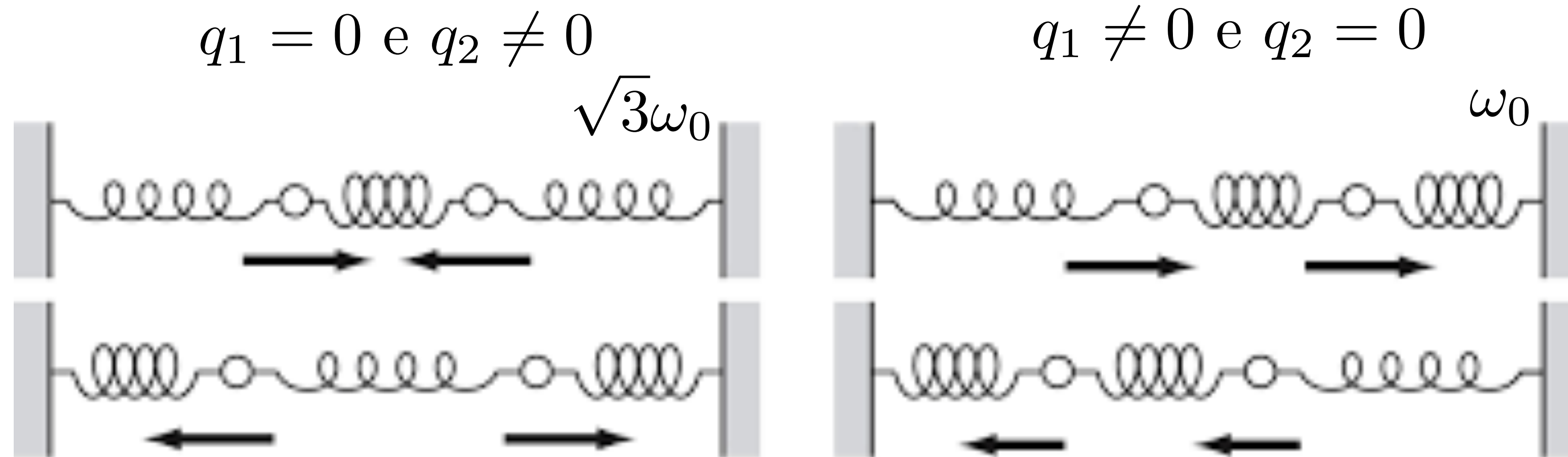
$$q_2 = A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)$$

com

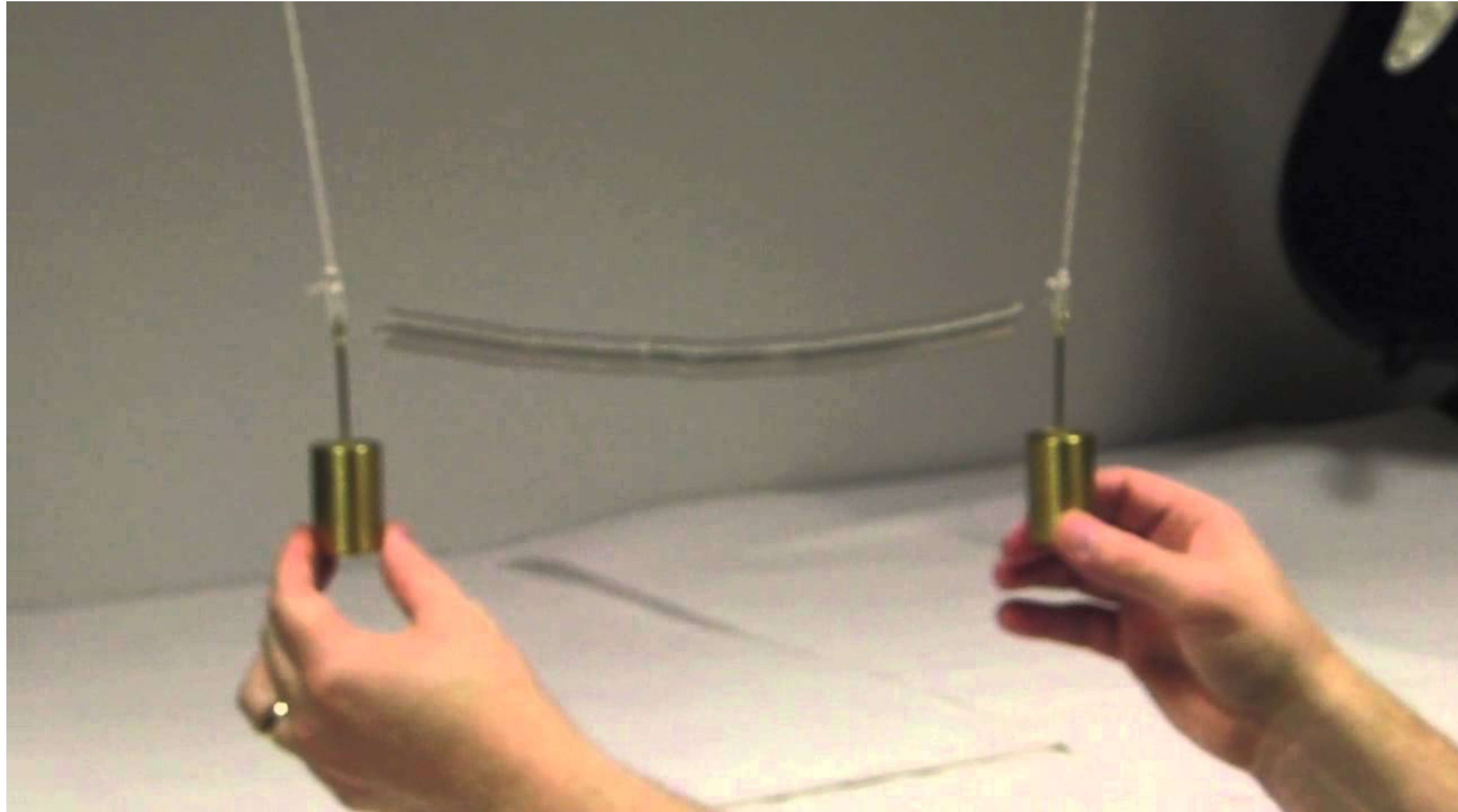
$$x_1 = q_1 - q_2$$

$$x_2 = q_1 + q_2$$

interpretação física



- Video interessante



<https://www.youtube.com/watch?v=YyOUJUOUvso>

Generalização

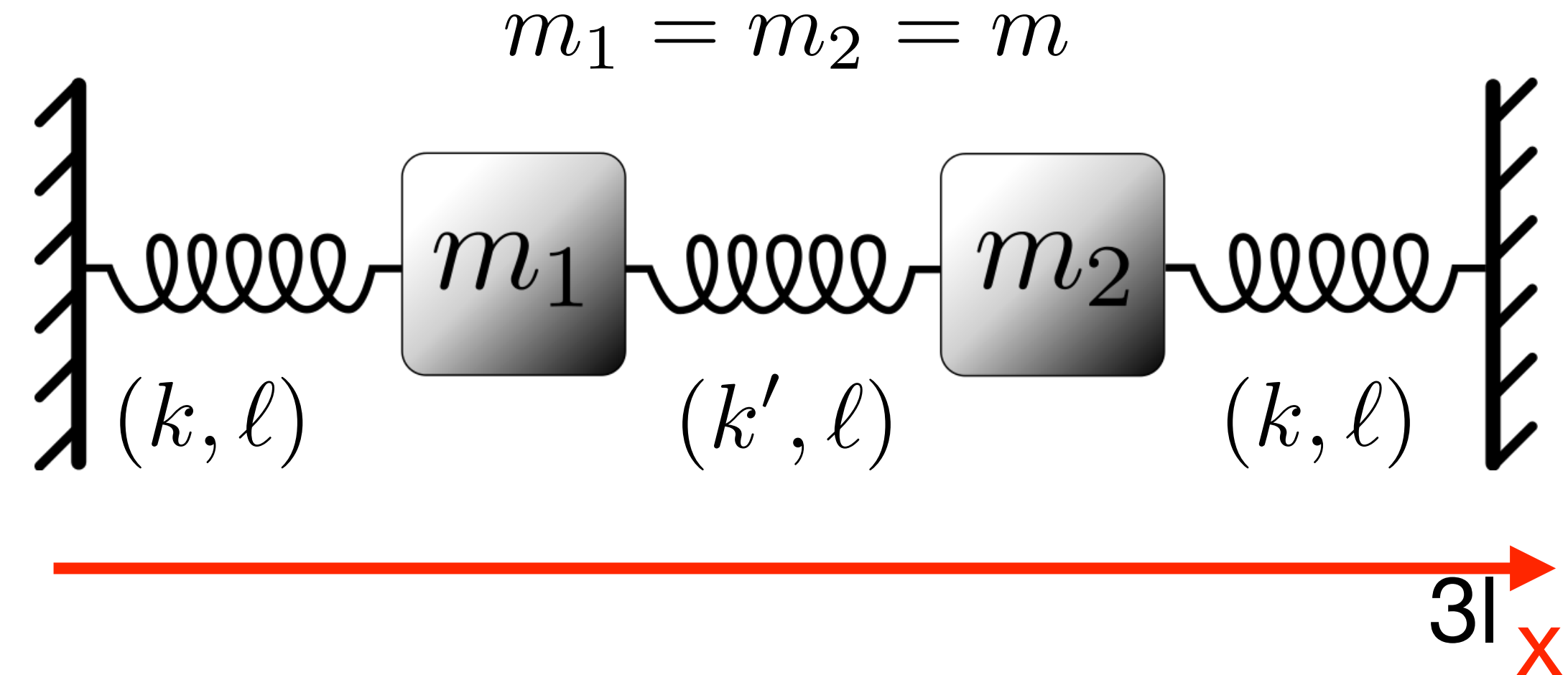
$$m \frac{d^2 x'_1}{dt^2} = -kx'_1 + k'(x'_2 - x'_1)$$

$$m \frac{d^2 x'_2}{dt^2} = -kx'_2 - k'(x'_2 - x'_1)$$

somando e subtraindo estas equações:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x'_1 + x'_2) = -k(x'_1 + x'_2)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x'_2 - x'_1) = -(k + 2k')(x'_2 - x'_1)$$



Defino $q_1 = \frac{x'_1 + x'_2}{2}$ e $q_2 = \frac{x'_2 - x'_1}{2}$

$$m \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -kq_1$$

$$m \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -(k + 2k')q_2$$

Referências:

1. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 seções 4.3 a 4.6 e 3.5
2. French, Vibrations and Waves, capítulo 4
3. Kleppner e Kolenkow, introduction to Mechanics, seção 10.3
4. Crawford , Waves, capítulo 1 (Berkeley volume 3)
5. Feynman, Leyton e Sands, Lectures on Physics, vol. 1, capítulo 21

- Exemplos de ressonância mecânica

<https://www.youtube.com/watch?v=joS6kfjuKQo>