

Primeiro bloco

Oscilações

- Conteúdo:
1. Idéias básicas
 2. Oscilador harmônico simples
 3. Oscilador harmônico amortecido
 4. Oscilador forçado
 5. Modos normais

Oscar Éboli (eboli@if.usp.br)

- **Oscilações podem ser bem complexas: vide**



<https://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU>

- Assim como terem grandes consequências, vide



<https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>

- O oscilador harmônico é o ponto de partida em muitas áreas da Física!

Idéias básicas

primeira aula

Oscar Éboli 17 de agosto de 2022

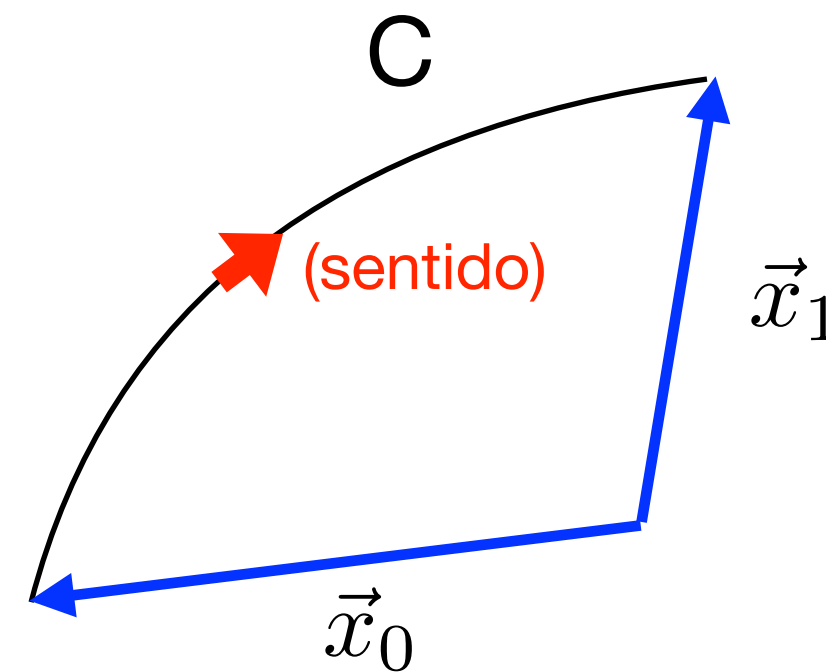
1. Revisão importantíssima!

Trabalho:

Dada uma força $\vec{F}$ e um caminho C

$$W = \int_C d\vec{\ell} \cdot \vec{F}$$

$d\vec{\ell}$ é deslocamento ao longo da curva



- Note: o trabalho depende da força e da curva
- Utilidade desse conceito: teorema do trabalho e energia cinética

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 = W$$

a variação de energia cinética é igual ao trabalho realizado!

Vale para qualquer força?

SIM! se for a força total.

- Caso importante: para forças conservativas o trabalho depende apenas dos pontos inicial e final mas não do caminho entre estes pontos!

- Consequência: existe uma função chamada energia potencial $U(\vec{x})$ tal que

$$W = U(\vec{x}_0) - U(\vec{x}_1)$$

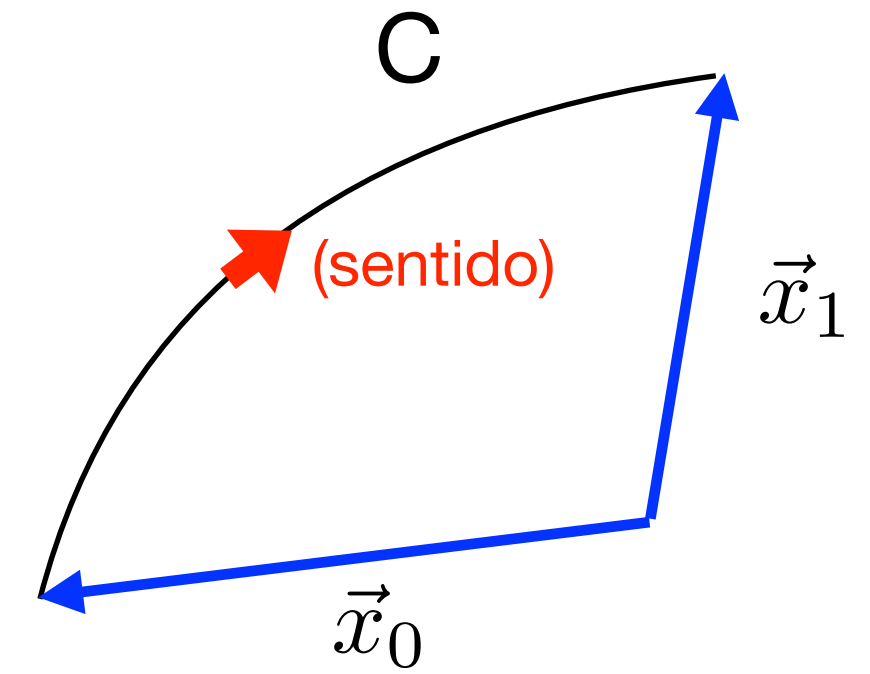
$$\vec{F} = -\nabla U$$

onde podemos escrever

$$U(\vec{x}) = U(\vec{x}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{x}_{\text{ref}}}^{\vec{x}} d\vec{\ell} \cdot \vec{F}$$

- Para forças conservativas o teorema da energia cinética trabalho fica

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 = U(\vec{x}_0) - U(\vec{x}_1) \implies \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + U(\vec{x}_0) = \frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + U(\vec{x}_1) = E_{\text{total}}$$



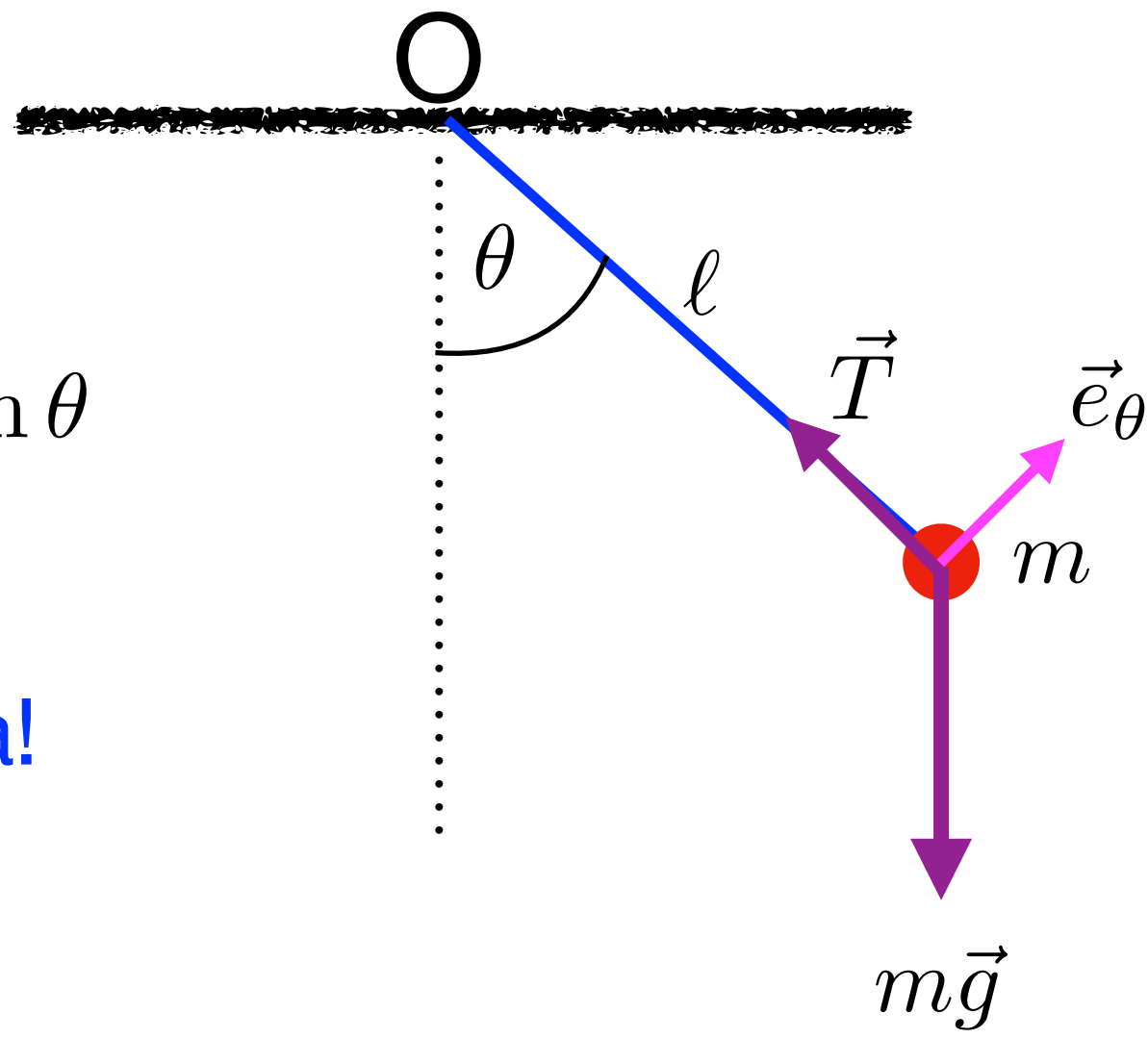
A energia mecânica total é conservada!

2. Oscilações estão em todos os lugares:

1. batidas do coração (periódica)
2. respiração
3. piscar
4. amanhecer/pôr do sol
5. Pêndulo de um relógio
6. etc etc etc!

Concentremos em sistemas simples, mas que aparecem em inúmeros sistemas reais

- Consideremos um pêndulo simples



aceleração na direção $\vec{e}_\theta$

$$m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

equação complexa!

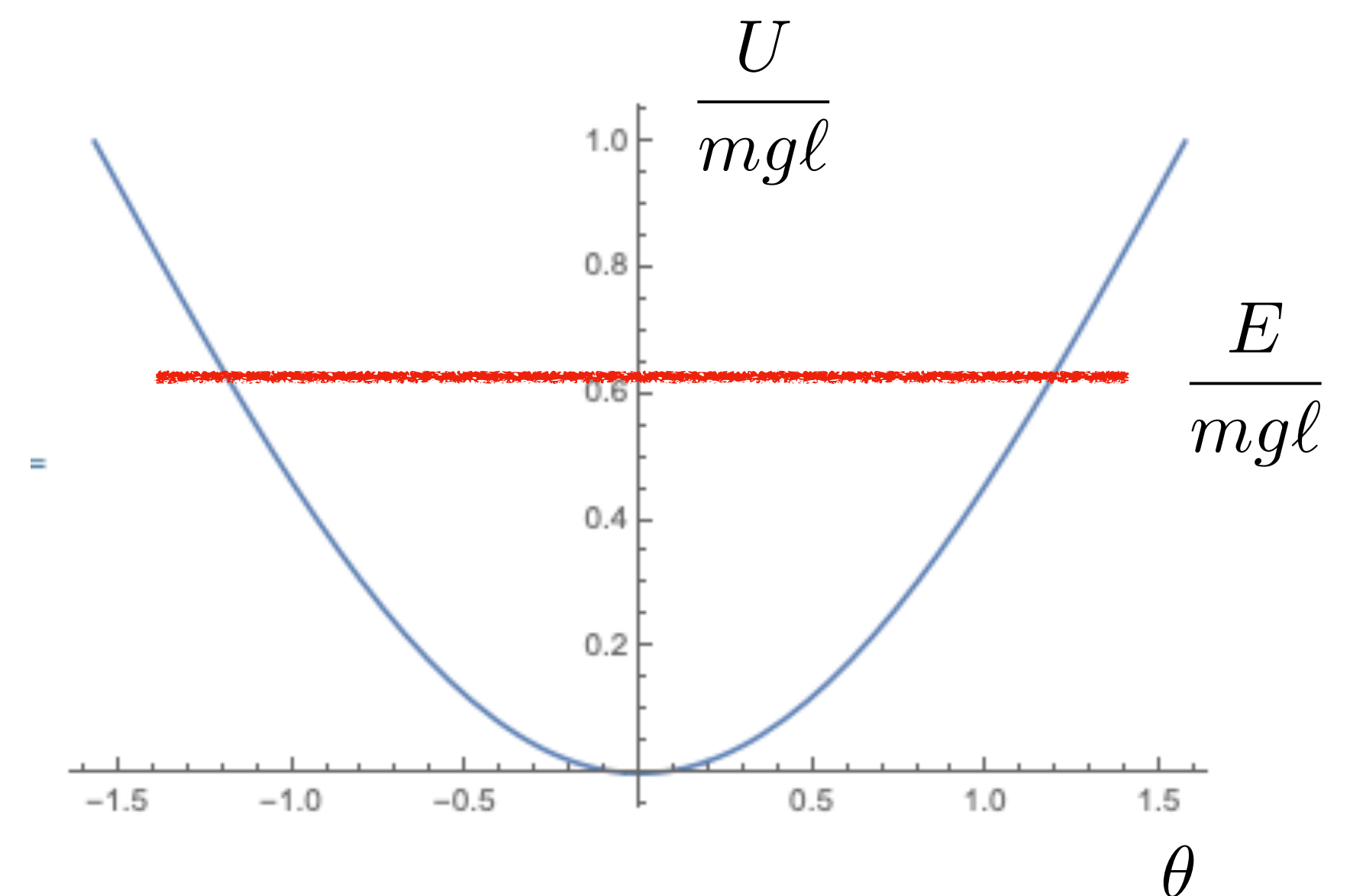
- Tomando o zero da energia potencial para $\theta = 0$

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$$

- a energia total é

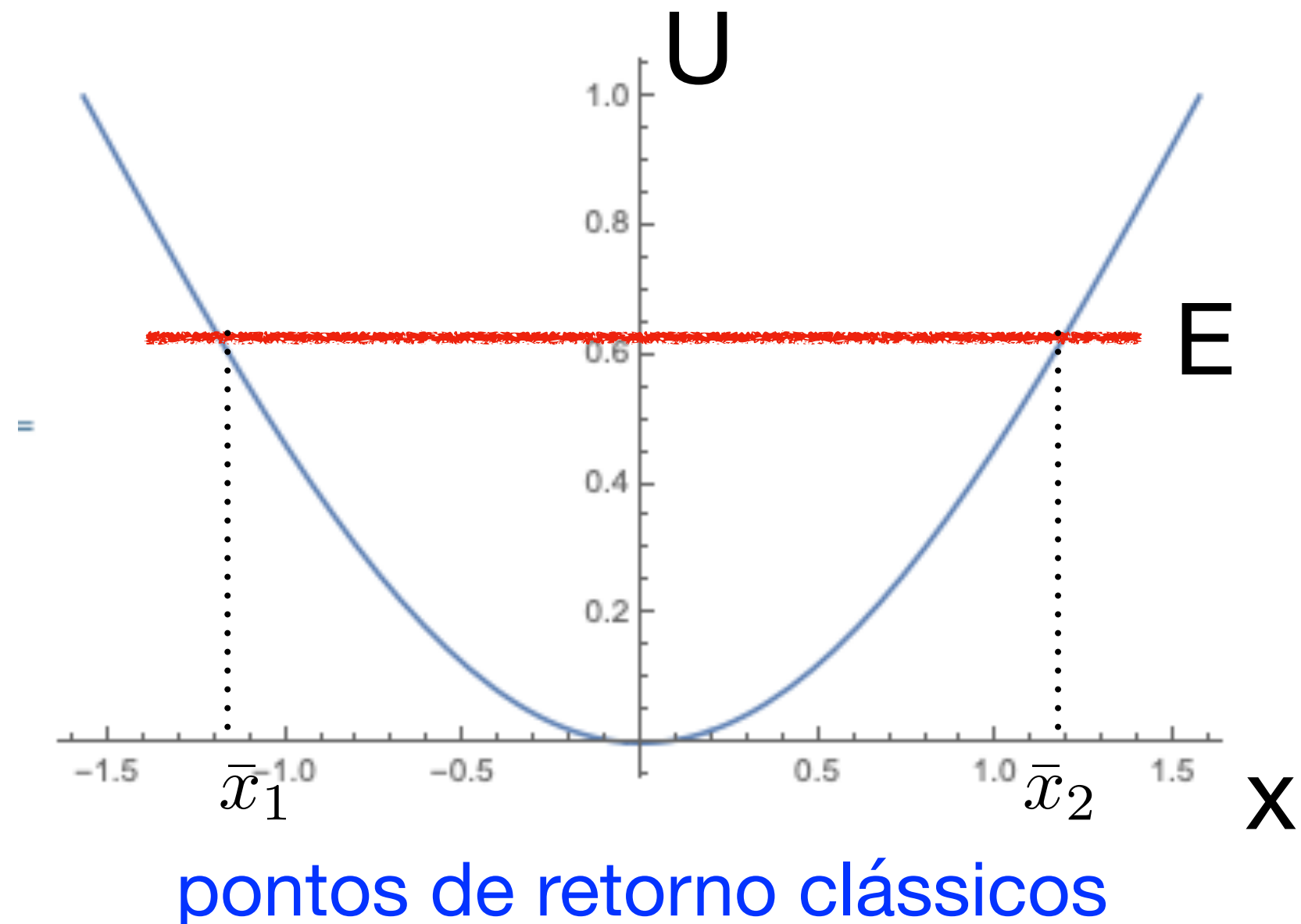
$$E = \frac{1}{2}m \left(\ell \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + U(\theta)$$

Por que oscila?



- Como podemos calcular o período? Em geral para uma força conservativa

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x)$$



$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \implies \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

- Integrando entre os pontos de retorno clássicos

$$\frac{T}{2} = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

- **Simplificação importante:**

- Para pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio estável $\theta = 0$

$$\sin \theta = \theta + \dots \quad \text{e} \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots$$

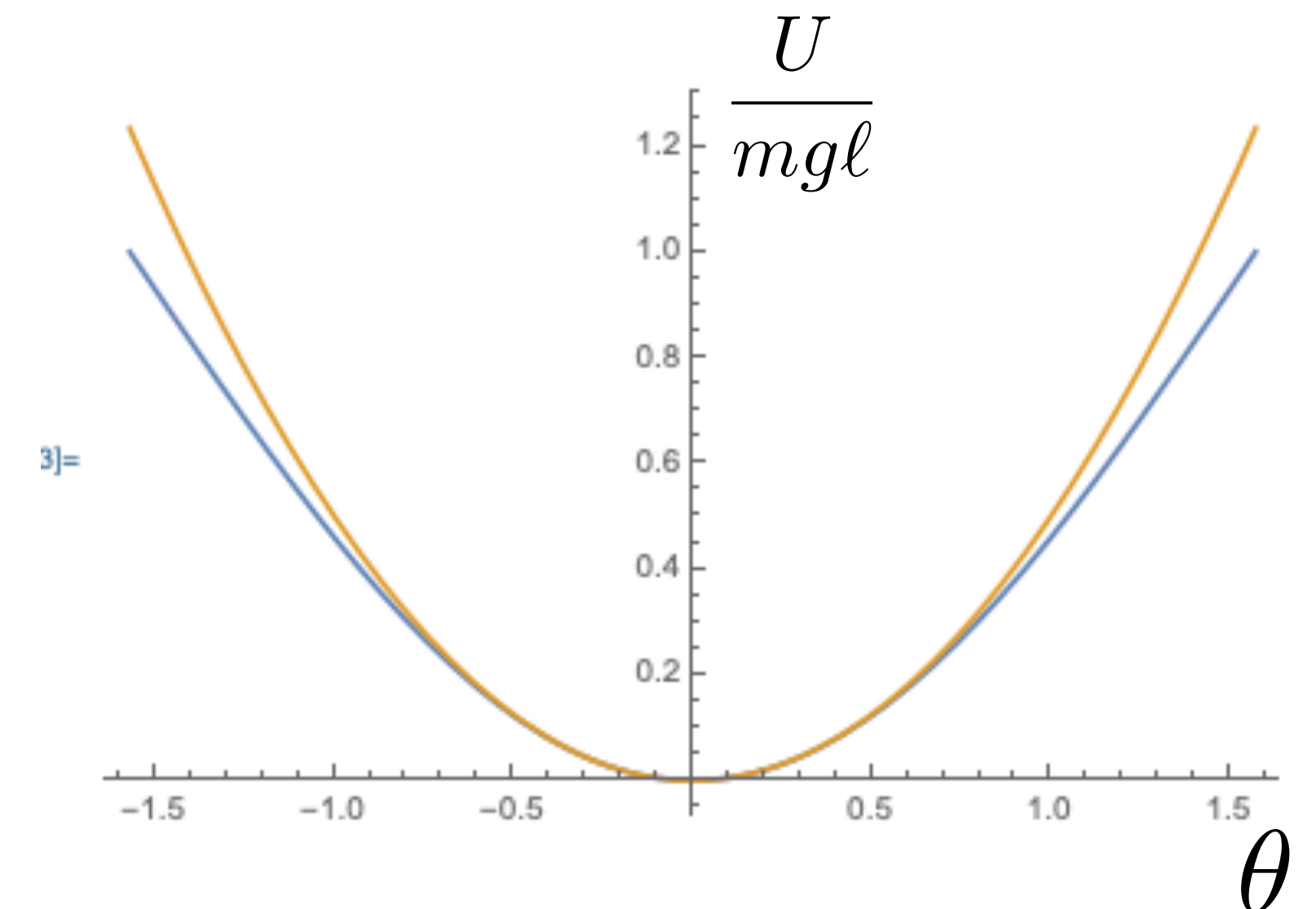
- A equação de movimento fica $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$ (força depende linearmente na variável)

- E a energia potencial é aproximadamente $U(\theta) = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$ (é uma função quadrática)

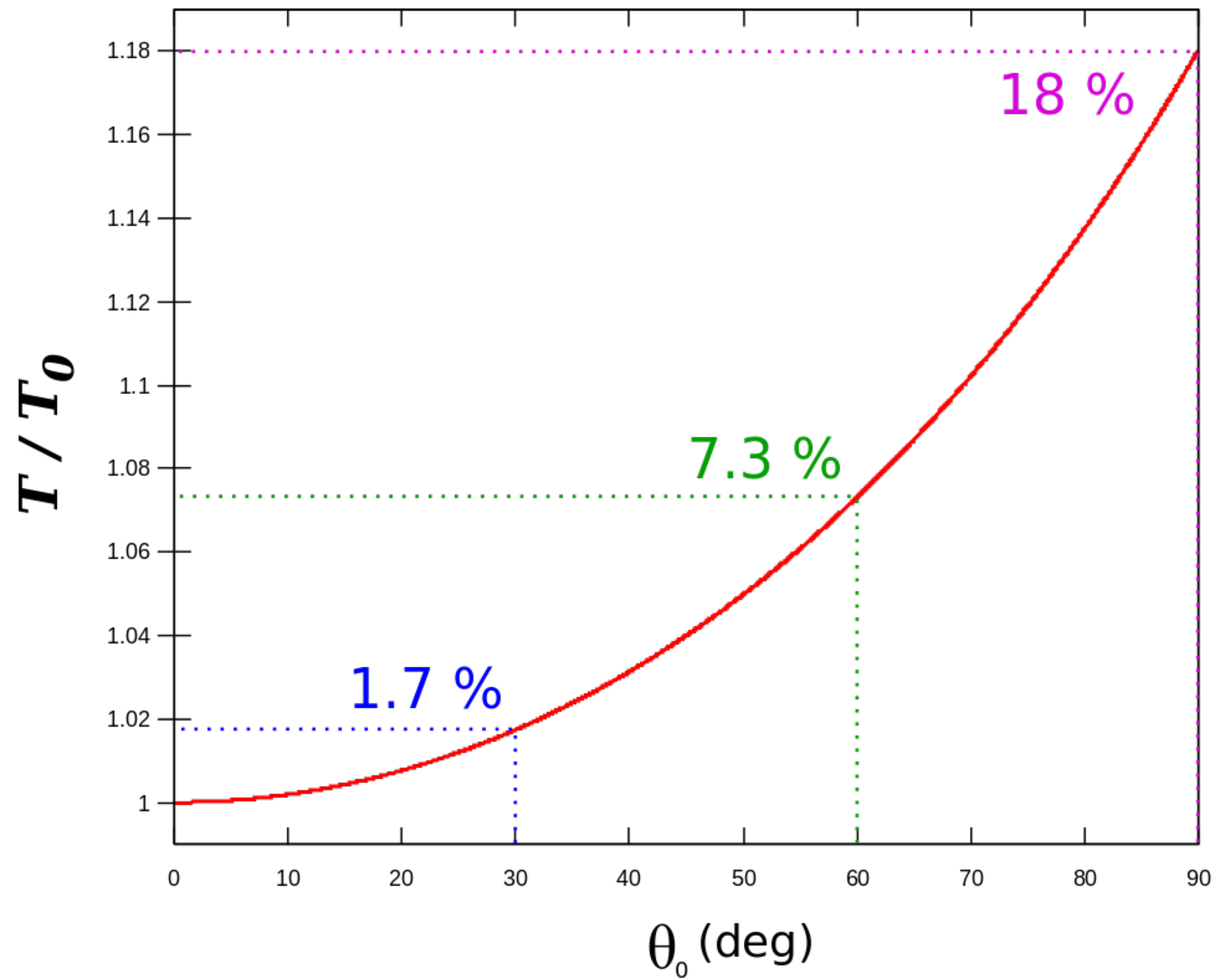
- Essa é a aproximação harmônica

- Mas isso é geral? SIM!!!!

- Por que?



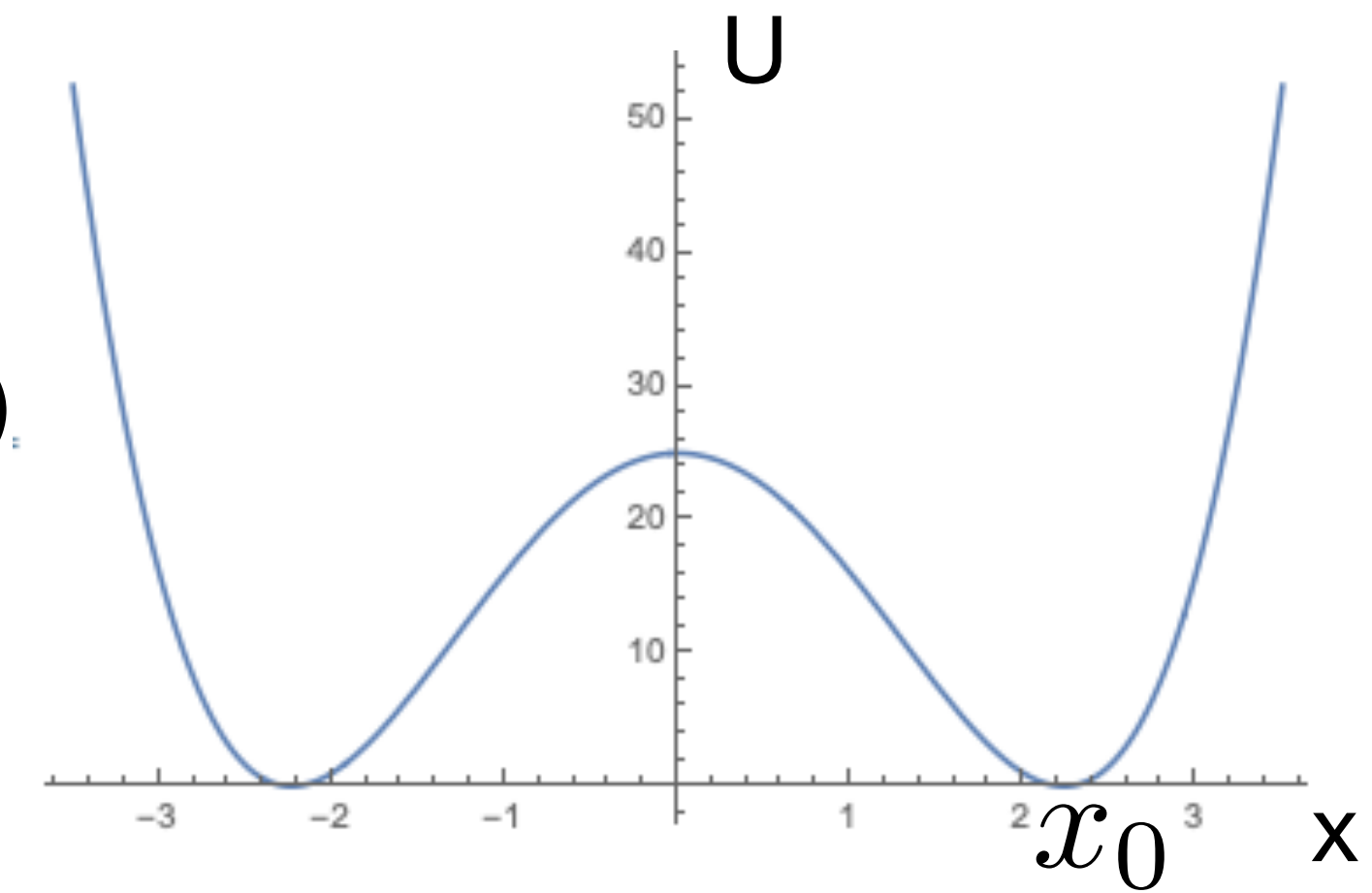
• Essa é uma boa aproximação?



a solução exata para o período contém a função elíptica de Legendre de primeiro tipo₁₁

3. Oscilações harmônicas

- Consideremos um sistema mecânico unidimensional cuja energia potencial é $U(x)$.
- $U(x)$ tem um mínimo em x_0
- Estudemos pequenas oscilações em torno de x_0



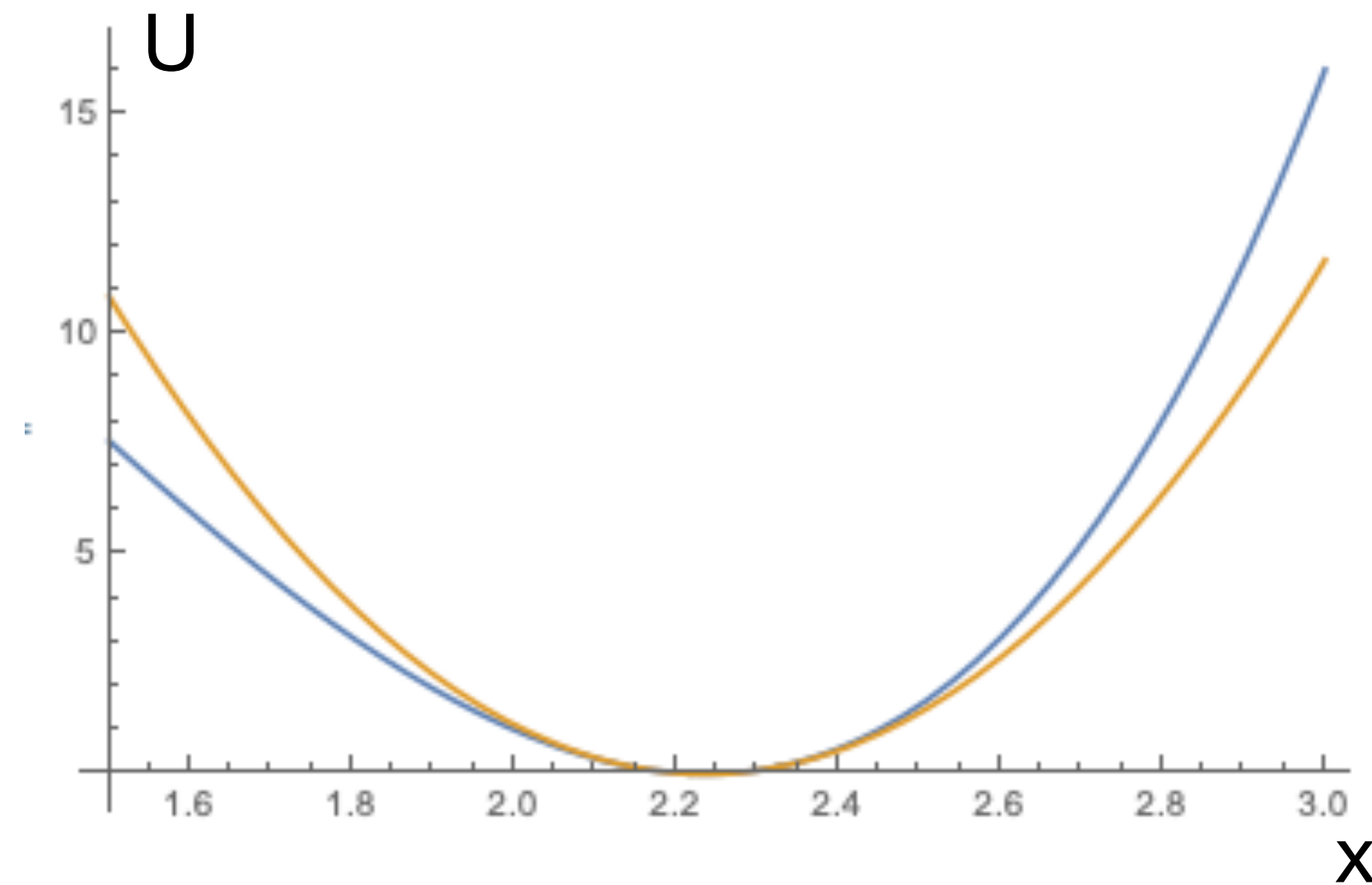
$$U(x) = U(x_0) + \frac{dU}{dx}(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(x_0) (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3U}{dx^3}(x_0) (x - x_0)^3 + \dots$$
$$\simeq U(x_0) + \frac{dU}{dx}(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(x_0) (x - x_0)^2$$

A blue arrow points from the $\frac{dU}{dx}(x_0)$ term in the second equation to a blue '0' below it, indicating that this term is zero at a minimum.

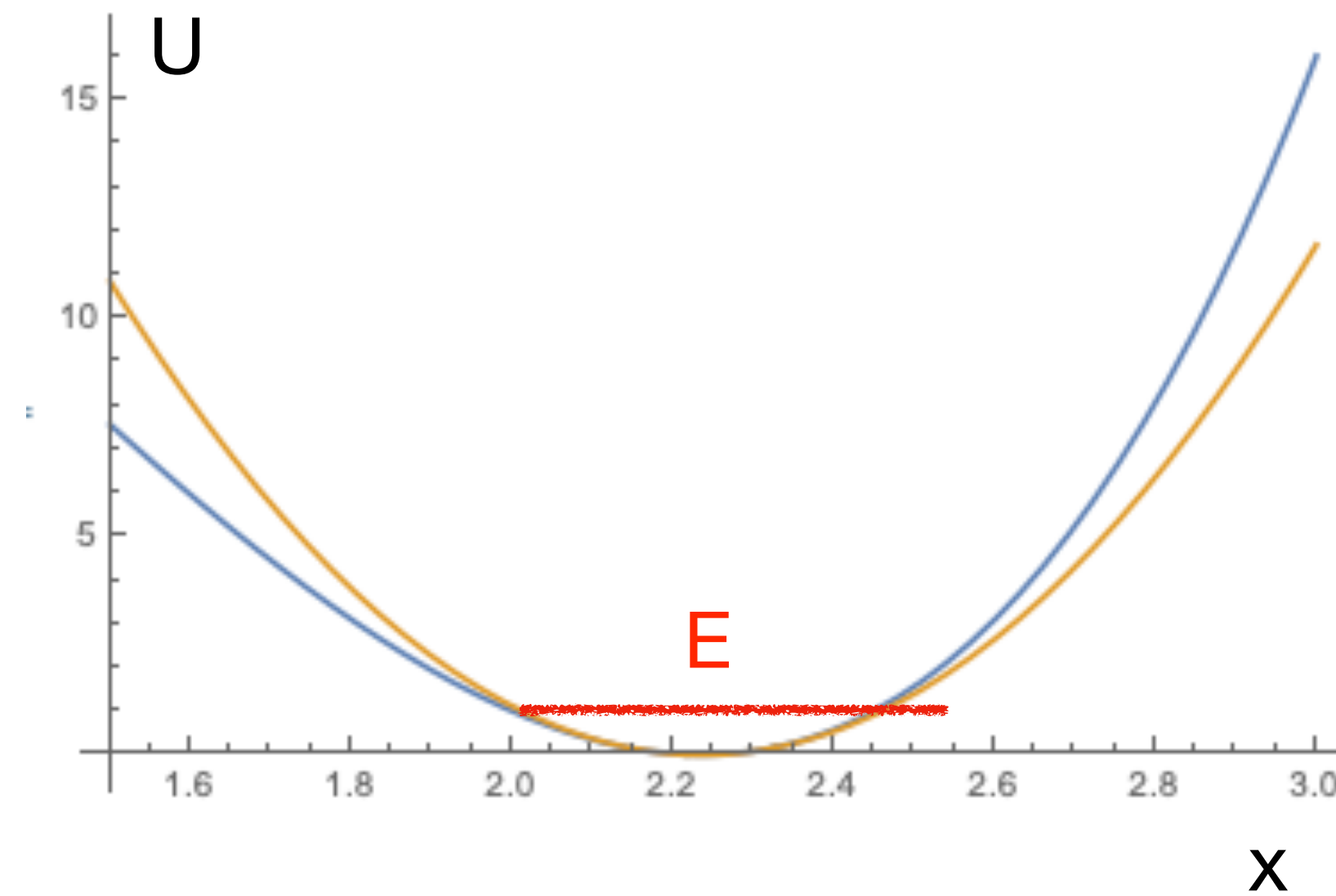
- A força neste caso é $F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d^2U}{dx^2}(x_0) (x - x_0) \equiv -k(x - x_0)$

- A equação de movimento é $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)$

linear



- Como no pêndulo temos oscilações



- Oscilações harmônicas são pequenas oscilações em torno de um mínimo do potencial
- Para simplificar fazemos $x' \equiv (x - x_0)$

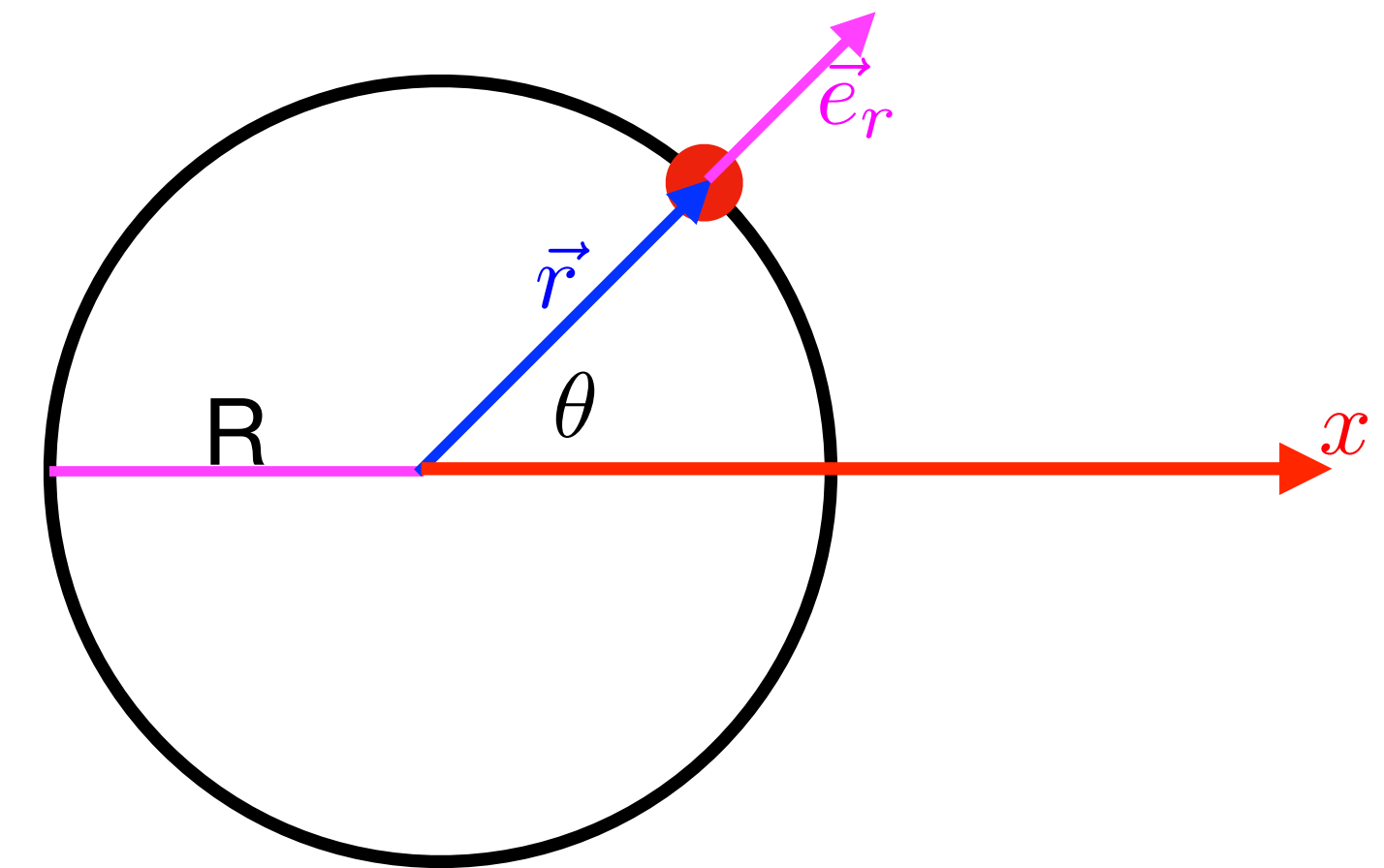
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0) \implies m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -kx'$$

- Temos que resolver a equação diferencial $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$

- Solução astuta: considere um corpo num movimento circular uniforme com velocidade angular ω

$$\theta(t) = \omega t + \varphi \quad \text{e} \quad \vec{r} = R \vec{e}_r(\theta)$$

equação de movimento $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -T \vec{e}_r$ onde $T = m\omega^2 R$



mas $\vec{e}_r(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$

logo a projeção no eixo x é $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -T \cos \theta = -\frac{T}{R} R \cos \theta = -\frac{T}{R} x = -m\omega^2 x$ **equação do oscilador harmônico!**
 $k = m\omega^2$

- A solução do oscilador harmônico é $R \cos(\omega t + \varphi) = \overset{\text{constantes}}{A} \cos(\omega t) + \overset{\text{constantes}}{B} \sin(\omega t)$

4. Parênteses matemático

- Qual a maneira sistemática de resolver essa equação diferencial? Consideremos, por ora,

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

onde a , b e c são constantes.

- Exemplos conhecidos são a partícula livre e o oscilador harmônico.
- Essa equação é dita ser uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem a coeficientes constantes. **UFA!**
- Alguns fatos dessa equação:

1. Esta é uma equação linear: dadas duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e suas constantes c_1 e c_2

então também é solução

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

combinação linear

De fato:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

De fato:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \frac{dx_1}{dt} + c_2 \frac{dx_2}{dt}$$

linearidade!

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = c_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$a \left(c_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) + b \left(c_1 \frac{dx_1}{dt} + c_2 \frac{dx_2}{dt} \right) + c \left(c_1 x_1 + c_2 x_2 \right) =$$

$$c_1 \left(a \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b \frac{dx_1}{dt} + cx_1 \right) + c_2 \left(a \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b \frac{dx_2}{dt} + cx_2 \right) = 0$$

E daí? Como acho as soluções?

- Procuremos duas soluções linearmente independentes para a equação homogênea

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

- Tentemos $x(t) = e^{pt}$ onde p é uma constante. Substituindo temos que

$$a p^2 + b p + c = 0$$

logo

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

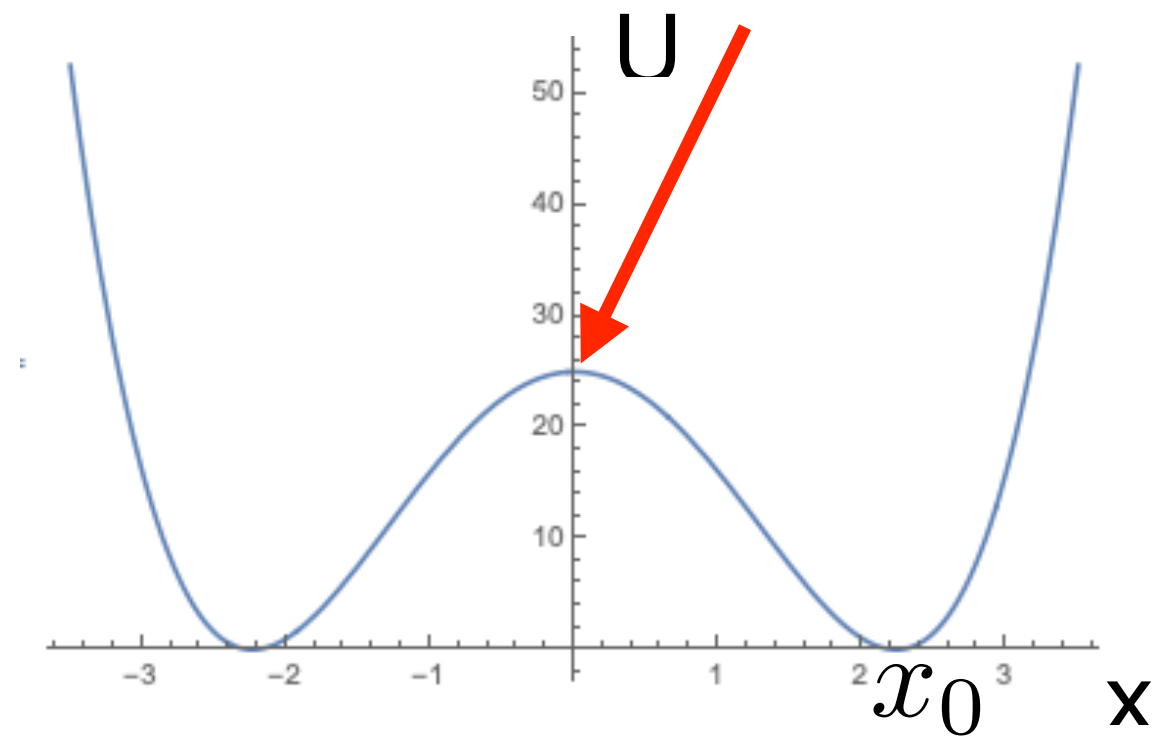
- Primeiro caso: o discriminante é positivo $b^2 - 4ac > 0$ há duas raízes distintas p_1 e p_2

solução geral

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$$

por exemplo

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - k^2 x = 0 \implies p = \pm \frac{k}{\sqrt{m}} \equiv \pm \gamma \implies x(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 e^{\gamma t}$$



• Segundo caso: discriminante nulo $b^2 - 4ac = 0$ há uma única raiz $\gamma = -\frac{b}{2a}$. Qual a segunda solução?

Tentamos $x(t) = f(t) e^{\gamma t} \implies \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \implies f(t) = c_1 + c_2 t$

logo $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\gamma t}$

- Terceiro caso: o discriminante é negativo $b^2 - 4ac < 0$ logo $p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$ com $\omega = \sqrt{4ac - b^2}$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{+i\omega t})$$

- O que é a exponencial imaginária? Lembremos da fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} \equiv \cos \theta + i \sin \theta$$

- Logo podemos escrever as soluções são

$$x(t) = e^{\gamma t} [c'_1 \cos(\omega t) + c'_2 \sin(\omega t)]$$

Exemplo oscilador harmônico simples:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \implies p = \pm i \frac{k}{\sqrt{m}} \equiv \pm i\omega \implies x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

2. Existem duas soluções tais que

$$x_1(t) \neq c x_2(t)$$

qualquer que seja c

← constante

exemplos

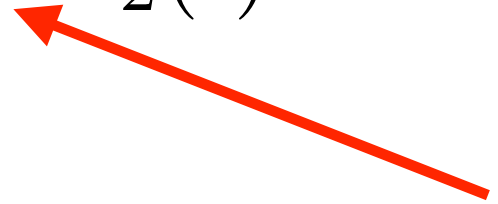
3. A solução é única se especificarmos

$$x(0) \text{ e } \frac{dx}{dt}(0)$$

2. Existem duas soluções tais que

$$x_1(t) \neq c x_2(t)$$

qualquer que seja c

 constante

exemplos

i. Partícula livre: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \implies x(t) = x_0 + v_0 t$

ii. Oscilador harmônico simples: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x \implies x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$

3. Qualquer solução pode ser escrita como uma combinação linear dessas soluções

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

4. A solução é única se especificarmos

$$x(0) \text{ e } \frac{dx}{dt}(0)$$

Referências:

1. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 seções 3.1 a 3.3
2. Kittel, Knight e Ruderman, Mechanics, capítulo 7
3. Feynman, Leyton e Sands, Lectures on Physics, vol. 1, capítulo 21