Desafio II - Física II

Muitos dos problemas em física podem ser descritos, pelo menos em um certo regime, por um movimento harmônico, isso pode ser observado desde a Mecânica Clássica, através de um pêndulo e uma corda, até a Teoria Quântica de Campos, onde podemos considerar um campo como um conjunto infinito de osciladores harmônicos.

Entretanto, em algumas situações desejamos considerar efeitos ou fenômenos mais complexos que produzem equações diferenciais que não podem ser resolvidas analiticamente. O nosso objetivo com essa provinha é estudar ambos os regimes, primeiramente analisaremos a dinâmica de um pêndulo simples, onde conseguimos uma solução analítica, e, em seguida, passaremos a analisar um sistema de um pêndulo duplo, neste último caso precisamos a recorrer a ferramentas que nos oferecem soluções numéricas.

A provinha será dividida em duas partes: na primeira será abordado o movimento de um pêndulo simples numa situação um pouco mais complexa, e na segunda, que será um desafio, estudaremos o pêndulo duplo.

Antes de começarmos vale a pena fazermos algumas recomendações. A parte mais interessante da provinha está contida no desafio, caso você não consiga terminá-lo em conjunto com a primeira parte no tempo estipulado, envie somente a primeira parte, o item 1, e depois envie o seu desafio. Para instruções de como você deve fazer este envio entre em contato com o seu monitor. O ponto importante é: se você tem interesse em saber como resolver equações diferenciais numericamente pelo Mathematica ou Python, **não deixe de fazer o desafio**! Por último, seja claro e organizado ao longo de suas resoluções, esses requisitos são essenciais para a compreensão do texto, lembre-se que você é um cientista em formação e que ao longo da sua carreira você precisará publicar artigos das suas descobertas, esses artigos precisam ser claros e compreensíveis, comece a treinar essas qualidades desde já.

1) Na primeira parte da provinha discutiremos novamente o pêndulo simples, mas em uma situação um pouco mais complexa, agora o pêndulo estará submetido em um líquido viscoso que oferece resistência ao seu movimento. Vamos considerar que o pêndulo é constituído por um fio inextensível de comprimento l e massa desprezível, na sua extremidade livre está presa uma esfera de massa m com dimensão irrelevante em relação ao arranjo, como apresentado na Figura 1. Também vamos considerar que a aceleração da gravidade influência o movimento do pêndulo e que a força resistiva $\vec{F}_R$ do líquido é proporcional a velocidade $\vec{v}$ do mesmo

$$\vec{F}_R = -\mu\vec{v}. \tag{1}$$

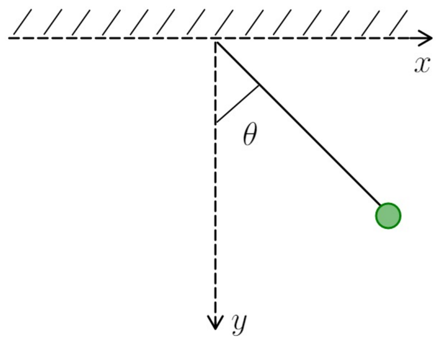

Figura 1: Pêndulo simples de massa m formado um ângulo θ com a vertical. O sistema de coordenadas está embutido na figura.

(a) Discuta, qualitativamente, por que é interessante utilizarmos coordenadas polares para estudar a dinâmica desse sistema.

(b) Escreva quem é o vetor posição $\vec{r}$ da massa m em função do ângulo θ, do comprimento l do fio e dos versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$ das coordenadas cartesianas, definidas como foi apresentado na Figura 1. A partir disso podemos definir o $\hat{r}$ como o versor com mesma direção e sentido de $\vec{r}$. Mostre que $\hat{r}$ pode ser escrito como

$$\hat{r}(t) = \sin\theta(t)\,\hat{x} + \cos\theta(t)\,\hat{y} \tag{2}$$

e escreva $\vec{r}$ em função desse versor.

(c) Derive o versor $\hat{r}$ em relação a θ e note que podemos definir um novo versor $\hat{\theta}$ como

$$\hat{\theta}(t) = \cos\theta(t)\,\hat{x} - \sin\theta(t)\,\hat{y}. \tag{3}$$

Em seguida, mostre que $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ são ortogonais e represente-os no desenho do pêndulo. Esses versores formam uma base do nosso sistema de coordenadas polares e portanto podemos escrever qualquer vetor do nosso sistema em função deles.

(d) Derive o vetor posição $\vec{r}$ e relação ao tempo e escreva tanto a velocidade quanto a aceleração da massa m em função de $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, l e θ.

(e) Quais são as forças atuando nesse corpo? Escreva quem são essas forças em função dos versores do sistema de coordenadas polares para obter a equação de movimento.

(f) Aplique a segunda lei de Newton e obtenha a equação diferencial que rege o comportamento da coordenada $\theta(t)$. Para que seja possível resolvermos essa equação diferencial é necessário que seja utilizada a aproximação para pequenos ângulos. Utilize a forma geral da expansão de uma função $f(x)$ ao redor do ponto x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + ... \tag{4}$$

para expandir até primeira ordem (considerando a soma apenas até o termo que envolve a primeira derivada) a função $\sin\theta$ ao redor de $\theta_0 = 0$. Como fica a equação diferencial envolvendo $\theta(t)$ quando consideramos essa aproximação?

(g) Se considerarmos o caso em que $\frac{\mu^2}{m^2} < \frac{4g}{l}$, qual $\theta(t)$ é a solução da equação diferencial encontrada?

(h) Considerando o caso em que $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \beta_0$, qual função $\theta(t)$ descreve o movimento angular do corpo?

(i) Discuta qualitativamente em que condições a massa pode atingir um angulo de módulo maior do que θ_0. Esboce um gráfico dessa situação, explicitando quem são θ_0 e o ângulo máximo no gráfico.

2) Se quisermos resolver esse problema de forma exata temos que resolver uma equação diferencial mais complicada que não envolve apenas a função $\theta(t)$ e suas derivadas, mas também $\sin\theta(t)$. Para simular o movimento desse objeto e obter como $\theta(t)$ varia com o tempo, podemos recorrer a soluções numéricas dessas equações diferenciais. Estas soluções, por sua vez, não são expressões analíticas das funções que estamos procurando, mas sim o valor numérico dessas funções em diferentes instantes de tempo. Para obte-lás e poder visualizar esses diferentes comportamentos utilizaremos duas formas diferentes: Python ou Mathematica. Você poderá escolher uma das duas opções, mais informações sobre essas duas plataformas são encontradas ao final da provinha. Caso escolha o Mathematica, leia com atenção o notebook (arquivo do Mathematica) comentado que está disponível para download no Moodle, lá explicamos todos os comandos que foram utilizados para a resolução desse problema. Se você tiver escolhido o Python, recomendamos que pule o exercício (c), pois se você optou por esse caminho a animação obtida nesse item é apresentada somente no fim do atividade, também devemos ressaltar que para essa escolha talvez seja necessário conhecimento básico sobre programação (funções e manipulação de variáveis). Caso você não tenha familiaridade com linguagens de programação recomendamos que utilize o Mathematica, ele é mais intuitivo que o Python para um primeiro contato.

Após o estudo desse notebook, no caso do Mathematica, a proposta é que vocês possam aplicar essas novas ferramentas para resolução de problemas ainda mais complexos. Para isso, iremos explorar um sistema de pêndulo duplo ilustrado na imagem abaixo

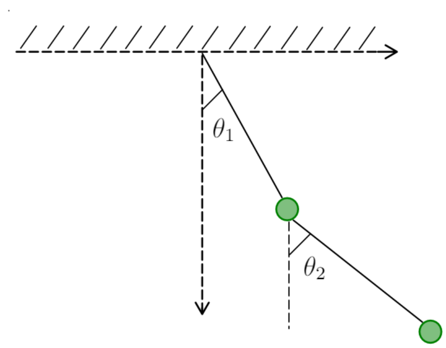

Figura 2: Pêndulo duplo de massas $m_1 = m_2 = m$ que forma ângulos θ_1 e θ_2 com a vertical.

(a) Vamos primeiro estudar as diferentes trajetórias que esses pêndulos podem tomar. Para isso, considerando $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$, escreva as equações de movimento em coordenadas cartesianas de cada um dos corpos em função de T_1, T_2, x_1, y_1, x_2, y_2, onde $\vec{r_1} = (x_1, y_1)$ e $\vec{r_2} = (x_2, y_2)$ são as posições dos corpos 1 e 2, respectivamente.

(b) Podemos notar que a partir do item anterior obtivemos apenas 4 equações diferenciais, mas temos 6 diferentes funções que dependem do tempo. Para que seja possível resolver esse sistema de equações precisamos de mais duas relações entre nossas funções. Essas relações são obtidas a partir da imposição de que os fios são inextensíveis. Como podemos relacionar essas condições com a posição dos corpos? Escreva essas duas relações.

(c) Se baseando na parte já explorada do pêndulo simples nos programas disponibilizados no Moodle, faça as devidas modificações no código a fim de obter a trajetória dos corpos desse sistema mais complexo. Tome sempre cuidado para colocar condições iniciais que respeitem os vínculos impostos no item anterior. Feito isso, siga as instruções do programa para plotar duas trajetórias com condições iniciais muito próximas. Você irá perceber que para tempos altos cada um dos sistemas terá um comportamento completamente diferente. Isso é o que chamamos de sistema caótico, um sistema que é altamente sensível a pequenas variações nas condições iniciais.

Da mesma forma que foi feito no caso do pêndulo simples, é possível estudar o comportamento angular dos pêndulos que compõem nosso sistema. Para isso, precisamos de equações diferenciais que envolvam os ângulos $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$. Obter essas equações através do formalismo Newtoniano é muito complicado, mas sabemos que em física sempre podemos abordar um mesmo problema de inúmeras maneiras diferentes. Para obter as equações de movimento utilizaremos o formalismo Lagrangeano! Não se assuste, explicaremos com cuidado o que você precisa fazer ao longo dos itens.

(d) Antes de escrevermos a Lagrangeana precisamos detalhar cuidadosamente nosso sistema de coordenadas. Para isso, utilize o sistema apresentado na Figura 2, onde o eixo X está para direita e o eixo Y para baixo, para mostrar que os vetores posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ dos pêndulos 1 e 2, respectivamente, em termos de l, θ_1 e θ_2 são

$$\vec{r}_1 = l(\sin\theta_1\,\hat{x} + \cos\theta_1\,\hat{y}), \tag{5}$$

$$\vec{r}_2 = l\Big[(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\,\hat{x} + (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,\hat{y}\Big]. \tag{6}$$

(e) Agora derive em relação ao tempo os vetores que você obteve e conclua que os vetores velocidade são

$$\vec{v}_1 = l\dot{\theta}_1(\cos\theta_1\,\hat{x} - \sin\theta_1\,\hat{y}), \tag{7}$$

$$\vec{v}_2 = l\Big[(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2)\hat{x} - (\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2)\hat{y}\Big]. \tag{8}$$

Com esses resultados já estamos prontos para escrever a Lagrangeana do nosso sistema. Lembre-se que a Lagrangeana é a diferença entre a energia cinética, T, e a energia potencial, V, isto é,

$$L = T - V. \tag{9}$$

(f) Mostre que a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2}ml^2\Big[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\Big]. \tag{10}$$

Dica: Utilize os resultados dos itens anteriores.

(g) Agora mostre que a energia potencial é

$$V = -mgl\Big[2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\Big], \tag{11}$$

e escreva a Lagrangeana para um pêndulo duplo.

Dica: Lembre-se que sempre temos liberdade para definir o ponto zero de energia potencial a onde quisermos.

Para obter as equações de movimento precisamos aplicar as Equações de Euler-Lagrange. Essas equações são obtidas através do principio de mínima ação, segundo ele, o caminho entre dois pontos é tal que a ação resultante é um extremo. Caso esteja curioso, você pode ler mais sobre isso em [1], aqui apenas utilizaremos essas equações, que são dadas por

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \tag{12}$$

com $i = 1, 2$.

Note que devemos aplicar essa formula duas vezes, uma para cada ângulo. Isso decorre do fato que esta expressão deve ser aplicada para cada coordenada generalizada que descreve o nosso sistema, no caso em questão, as coordenadas generalizadas são os ângulos θ_1 e θ_2. **Cuidado:** nessa expressão estamos utilizando derivadas parciais sobre L, e portanto iremos pensar em θ e $\dot{\theta}$ como independentes na hora de aplicá-las.

(h) Utilize a expressão (15) para obter as equações de movimento para cada um dos ângulos, elas devem coincidir com

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{1}{2}\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{l}\sin\theta_1, \tag{13}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{l}\sin\theta_2. \tag{14}$$

A partir de agora ofereceremos duas maneiras para resolver essas equações numericamente, você pode continuar programando no Mathematica, ou você pode utilizar o Python.

Versão Mathematica

Para utilizar o programa Mathematica é necessário fazer o download segundo os passos descritos **nesse link**. Feito o download, para realizarmos as resoluções numéricas das equações diferenciais basta fazer o download do notebook (arquivo do Mathematica) disponibilizado no Moodle e seguir as intruções que estão no próprio arquivo. Durante o primeiro semestre foi disponibilizado um documento com algumas explicações sobre esse programa, caso tenha interesse ele pode ser acessado **aqui**.

Versão Python

O Python é uma linguagem gratuita e altamente utilizada ao redor do mundo, atualmente ela é a segunda linguagem de programação mais utilizada, perdendo somente para o JavaScript.

Para começarmos é necessário que você utilize o Python 3, para isso você precisa baixar o Python através do pacote Anaconda, **link para o site**, nesse pacote exite uma plataforma chamada Jupyter Notebook, será ela que usaremos para os itens restantes.

Caso você tenha dúvida de como baixar, acesse o link: **como instalar o Python pelo Anaconda**.

Uma vez que você tenha baixado o Anaconda, abra o Júpiter e faça o upload do Notebook que disponibilizamos no Moodle e o inicie. No começo do Notebook são apresentadas algumas informações gerais, lei-as com atenção.

Basicamente, o que você precisará fazer é implementar uma função, a função chamada de **pendulo_duplo**, que representará seu sistema de equações diferenciais que deseja resolver.

Para entendermos como essa implementação deve ser feita vamos implementar uma função para resolver a equação diferencial para o pêndulo simples. Para isso, vamos utilizaremos a função **odeint** da biblioteca **Scipy** para resolver a equação diferencial. O que essa função faz é resolver um sistema de equações diferencias de primeira ordem. Infelizmente, não conseguimos resolver uma equação diferencial de segunda ordem com tanta facilidade como no Mathematica.

Antes de começarmos a entender o código, precisamos transformar nossa equação diferencial de segunda ordem em um sistema de equações de primeira ordem. Para isso, somente definimos uma nova variável como

$$\eta = \dot{\theta}, \tag{15}$$

podemos utilizar essa definição para reescrever nossa equação diferencial

$$\dot{\eta} + \gamma\eta + \omega_o^2 \sin\theta = 0, \tag{16}$$

onde substituímos $\dot{\theta}$ por η e $\ddot{\theta}$ por $\dot{\eta}$.

Utilizando (15) e (16), escrevemos nosso sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\theta} = \eta, \tag{17}$$

$$\dot{\eta} = -\gamma\eta - \omega_o^2 \sin\theta. \tag{18}$$

Agora, o que precisamos fazer é implementar uma função que nos devolva essas relações, o nome dessa função no Notebook é pendulo_simples. Note que o primeiro argumento da função é um vetor contendo θ na primeira componente e η na segunda componente. Os demais parâmetros da função estão explicados no Notebook.

Em seguida, faremos novamente o mesmo processo, mas para o pêndulo duplo. Note que podemos transformar as nossas duas equações diferenciais em (13) e (14) como um sistema de equações diferenciais com quatro equações

$$\dot{\theta}_1 = \eta_1, \tag{19}$$

$$\dot{\eta}_1 = -\frac{1}{2}\dot{\eta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2}\eta_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{l}\sin\theta_1, \tag{20}$$

$$\dot{\theta}_2 = \eta_2, \tag{21}$$

$$\dot{\eta}_2 = -\dot{\eta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \eta_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{l}\sin\theta_2. \tag{22}$$

Mas note que ainda tempos uma derivada temporal no lado direito das equações (20) e (22), como podemos reescrever essas duas equações para que esta dependência desapareça?

Dica: Considere essas duas equações como um sistema de duas incógnitas $\dot{\eta}_1$ e $\dot{\eta}_2$ e o resolva.

Uma vez que você tenha feito isso, implemente a função **pendulo_duplo**.

Suporte

Caso precise de ajuda, pergunte ao seu monitor. Vale ressaltar que talvez ele não esteja familiarizado com as linguagens apresentadas, caso precise de ajuda envie um email para:

Ajuda em Mathematica: luighi.leal@gmail.com

Ajuda em Python: matheus.martines.silva@usp.br

Referências

[1] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica Analítica*. 2º Edição.