Lista de Exercícios VI

① Mostre que para a função

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

valem as identidades

$$(i)\ \gamma\, v = c\sqrt{\gamma^2 - 1}, \quad (ii)\ c^2 d\gamma = \gamma^3 v\, dv, \quad (iii)\ d(\gamma v) = \gamma^3 dv,$$

e faça um gráfico de γ e $\gamma\, v$ em função de v para $-c \leq v \leq c$.

② Considere dois referenciais inerciais $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$, associados a coordenadas (t, x, y, z) e (t', x', y', z'). Os eixos dos dois referenciais são orientados ao longo das mesmas direções com o mesmo sentido. O referencial $\mathcal{S}'$ se move com velocidade v na direção x de $\mathcal{S}$ e os relógios nos dois referenciais são sincronizados de forma tal que as origens de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ coincidem em $t = 0 = t'$. Em $\mathcal{S}'$ uma barra no plano $z' = 0$ e paralela ao eixo x' se move com velocidade u na direção y' positiva. Mostre que em $\mathcal{S}$ barra está inclinada com relação ao eixo x e calcule o ângulo de inclinação.

③ Considere os mesmos referenciais $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ do exercício antecedente. Defina a rapidez ϕ (de $\mathcal{S}'$ com relação com $\mathcal{S}$) por

$$\tanh\phi = \frac{v}{c}.$$

Lembre-se que $\cosh^2(\eta) - \sinh^2(\eta) = 1$ e que $\cosh(\eta) \pm \sinh(\eta) = e^{\pm\eta}$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$.

1. Mostre que

$$(i)\ \cosh\phi = \gamma, \quad (ii)\ sinh\phi = \frac{v}{c}\gamma, \quad (iii)\ e^{\phi} = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{1/2};$$

2. Mostre que a transformação

$$x' = \gamma(x - vt)$$

pode ser escrita como

$$x' = x\cosh\phi - ct\sinh\phi;$$

3. Encontre a expressão para a transformação

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

em termos da rapidez ϕ;

4. Observe que, como $\cosh \phi = \cos(i\phi)$ e $i \sinh \phi = \sin(i\phi)$ (mostre!), as transformações dos itens antecedentes podem ser interpretadas formalmente como o resultado de uma "rotação" no plano (x, it) e um ângulo $i\phi$, e como tal preserva a "norma" $x^2 + (it)^2$. Mostre que as afirmações antecedentes são verdadeiras;

5. Derive as relações

$$ct' + x' = e^{-\phi}(ct + x), \quad ct' - x' = e^{\phi}(ct - x);$$

6. Observe que as relações acima mostram que, em termos das coordenadas $\xi = ct + x$ e $\zeta = ct - x$ (que correspondem a uma rotação de $\pi/4$ no plano (t, x)), uma transformação de Lorentz não altera a direção dos eixos coordenados. Qual é então seu efeito? Escreva o intervalo invariante entre dois eventos A e B em termos de suas coordenadas (ξ_A, ζ_A) e (ξ_B, ζ_B) e diga sua interpretação geométrica num diagrama $\xi \times \zeta$;

7. Se um terceiro referencial $\mathcal{S}'''$ se move com velocidade constante u na direção x' de $\mathcal{S}'$, sua rapidez ψ relativa a $\mathcal{S}'$ é então definida por $\tanh \psi = u/c$. Usando as relações do item 5, mostre que sua rapidez relativa ao referencial $\mathcal{S}$ é $\psi + \phi$, ou seja, *a rapidez é aditiva para movimentos colineares.*

④ Considere um choque elástico entre duas partículas de massas m_1 e m_2 no referencial inercial $\mathcal{S}$. Neste referencial, as velocidades iniciais das partículas são $\boldsymbol{v}_1 = (v_1, 0, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (v_2, 0, 0)$. Depois do choque, as velocidades das partículas 1 e 2 são $\boldsymbol{v}_3 = (v_3, 0, 0)$ e $\boldsymbol{v}_4 = (v_4, 0, 0)$, respectivamente. Ademais, considere um segundo referencial inercial $\mathcal{S}'$ que se move com velocidade $\boldsymbol{u} = (-u, 0, 0)$ $(u > 0)$ com respeito a $\mathcal{S}$.

1. Utilize a lei de transformação de velocidade relativista para calcular as velocidades iniciais e finais das partículas 1 e 2 no referencial $\mathcal{S}'$;

2. Mostre que as equações de conservação de energia e momento não podem ser satisfeitas consistentemente nos dois referencias usando as definições não relativista $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ e $E = \boldsymbol{p}^2/(2m)$;
3. Mostre que, por outro lado, usando as definições relativista $\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}$ e $E = m\gamma c$, as equações de conservação de energia e momento são validas nos dois referenciais.

⑤ Usando as expressões para o momento e a energia relativista, encontre uma expressão para a velocidade de uma partícula em função do momento e da energia da partícula. Qual a relação entre momento e energia para uma partícula que se move com a velocidade da luz?

⑥ Considere um fóton que está em movimento na direção x no referencial $\mathcal{S}$. De acordo com quanto sugerido por Planck, a energia do fóton pode ser escrita como $E = h\nu$, com h a constante de Planck.

1. Dado que o fóton por definição se move com velocidade igual a velocidade da luz, use o resultado da questão 5 para mostrar que a massa do fóton é nula;
2. Quanto valem a energia e o momento do fóton em um referencial inercial $\mathcal{S}'$ em movimento com velocidade $\boldsymbol{u} = (u, 0, 0)$ respeito a $\mathcal{S}$? Compare com a fórmula do efeito Doppler encontrada em aula;
3. Repita o cálculo do item antecedente considerando agora um referencial $\mathcal{S}''$ em movimento com velocidade $\boldsymbol{u}' = (0, u', 0)$ respeito a $\mathcal{S}$.