SEL0310 - Ondas Eletromagnéticas

Resolução P2 - 04/07/2023

1 Questão 1

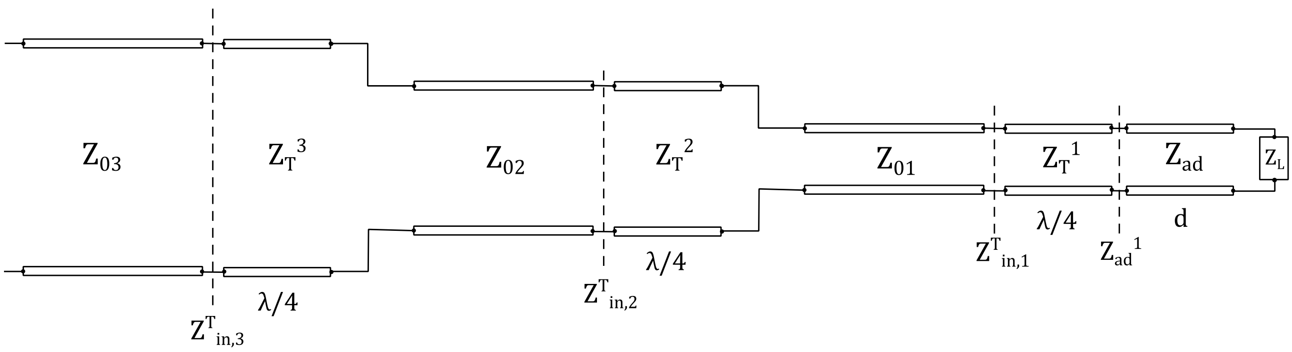

Figura 1: Esquemático de seções de linha e transformadores

Inicialmente, calcula-se o comprimento de onda em cada seção da linha. Nesse sentido, sabendo que:

$$\lambda_n = \frac{u_n}{f}$$

onde u_n corresponde a velocidade de fase do segmento de linha e $f = 50$ MHz a frequência do gerador, tem-se:

$$\boxed{\lambda_1 = 3.6 \text{ m}} \quad \boxed{\lambda_2 = 4.2 \text{ m}} \quad \boxed{\lambda_3 = 4.8 \text{ m}}$$

(a) No geral, o objetivo em projetar os transformadores de quarto de onda na linha apresentada consiste em deixar a impedância de entrada de cada transformador, ou seja, deixar a impedância vista no terminal de cada seção, equivalente à impedância característica da respectiva seção, o que corresponde à condição de casamento.

Assim, analisando o primeiro segmento de linha, observa-se que, de antemão, a carga complexa $Z_L = 500 + j100\ \Omega$ demanda uma linha adicional, de forma que a impedância vista pelo terminal do transformador Z_{in}^{ad} seja puramente real.

Supõe-se, como parte do projeto, que a impedância desta linha adicional será equivalente $Z_{ad} = 500\ \Omega$ (outros valores são igualmente possíveis, levando a diferentes projetos). Normaliza-se, então, a carga:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_{ad}} \Rightarrow \boxed{z_L = 1 + j0.2}$$

Marcando-se a carga na carta de Smith, percorre-se o lugar geométrico $|\Gamma_L|$ constante em direção ao gerador (sentido horário) até cruzar o eixo horizontal, onde as cargas são puramente reais.

Nesse sentido, após um comprimento $\boxed{d = 0.114\lambda}$ tem-se uma impedância normalizada $z_{in}^{ad} = 1.2$ na entrada da linha adicional/terminal do transformador.

Como, $\lambda = \lambda_1$, tem-se que para o projeto, deve-se implementar uma linha adicional de comprimento $\boxed{d = 410.4 \text{ cm}}$ e impedância característica 500 Ω. Essa linha conduzirá a uma impedância $Z_{in}^{ad} = 600\ \Omega$.

A partir deste momento, projeta-se o transformador de quarto de onda, de forma que:

$$Z_T^1 = \sqrt{Z_{in,1}^T \cdot Z_{in}^{ad}} \tag{1}$$

Como deseja-se que no casamento de impedâncias, $Z_{in,1}^T = Z_{01}$, então será necessário um transformador de impedância $\boxed{Z_T^1 = 173.21\ \Omega}$

Para o segundo segmento, espera-se, igualmente, que a impedância de entrada do transformador $Z_{in,2}^T$ seja equivalente a impedância característica Z_{02} da segunda seção de linha. Nesse sentido, como a impedância vista nos terminais do transformador (carga) é igual a impedância característica Z_{01} da primeira seção, devido à condição de casamento, utiliza-se novamente a Eq. 1 para calcular:

$$Z_T^2 = \sqrt{Z_{in,2}^T \cdot Z_{01}} = \sqrt{Z_{02} \cdot Z_{01}} \Rightarrow \boxed{Z_T^2 = 70.71\ \Omega}$$

Por fim, para o terceiro segmento, realiza-se o mesmo processo, encontrando-se:

$$Z_T^3 = \sqrt{Z_{in,3}^T \cdot Z_{02}} = \sqrt{Z_{03} \cdot Z_{02}} \Rightarrow \boxed{Z_T^3 = 173.21\ \Omega}$$

(b) Seja

$$l_n = \frac{\lambda_n}{4}$$

tem-se:

$$\boxed{l_1 = 0.90 \text{ m}} \quad \boxed{l_2 = 1.05 \text{ m}} \quad \boxed{l_3 = 1.20 \text{ m}}$$

(c) Seja a relação de onda estacionária VSWR dada por

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|}$$

onde Γ_0 é o coeficiente de reflexão na carga vista pela linha, dado por:

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Assim, antes da inserção dos transformadores de quarto de onda, tinha-se, no primeiro segmento:

$$\boxed{\Gamma_{01} = 0.83 + j0.03 = 0.83\angle 2.22°}$$

logo,

$$\boxed{\text{VSWR}_1 = 10.40}$$

Em seguida, calcula-se a impedância na entrada do primeiro segmento, o que corresponde a impedância vista pelo terminal do segundo segmento:

$$Z_L^2 \equiv Z(z = -l_1) = Z_{01} \frac{Z_L + jZ_{01}\, tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot l_1\right)}{Z_{01} + jZ_L\, tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot l_1\right)} \Rightarrow \boxed{Z_L^2 = 10.98 + j56.08\ \Omega = 57.15\angle 78.92°}$$

Dessa forma, tem-se:

$$\Gamma_{02} = \frac{Z_L^2 - Z_{02}}{Z_L^2 + Z_{02}} \Rightarrow \boxed{\Gamma_{02} = -0.44 + j0.73 = 0.85\angle 120.98°}$$

logo,

$$\boxed{\text{VSWR}_2 = 12.00}$$

Por fim, calcula-se a impedância na entrada do segundo segmento, o que corresponde a impedância vista pelo terminal do terceiro segmento:

$$Z_L^3 \equiv Z(z = -l_2) = Z_{02} \frac{Z_L^2 + jZ_{02}\, tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot l_2\right)}{Z_{02} + jZ_L^2\, tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot l_2\right)} \Rightarrow \boxed{Z_L^3 = 1187.16 + j120.91\ \Omega = 1193.30\angle 5.81°}$$

Assim, tem-se:

$$\Gamma_{03} = \frac{Z_L^3 - Z_{03}}{Z_L^3 + Z_{03}} \Rightarrow \boxed{\Gamma_{02} = 0.60 + j0.03 = 0.60\angle 3.11°}$$

logo,

$$\boxed{\text{VSWR}_3 = 4.00}$$

Depois da inserção dos transformadores de quarto de onda, espera-se que todos os segmentos tenham coeficiente de reflexão Γ_0 nulo, portanto:

$$\boxed{\text{VSWR}_1 = \text{VSWR}_2 = \text{VSWR}_3 = 1}$$

(d) Para calcular a impedância de entrada do sistema, sem a inserção dos transformadores, utiliza-se o resultado obtido no item anterior:

$$Z_{in} \equiv Z(z=-l_3) = Z_{03}\frac{Z_L^3 + jZ_{03}\,tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_3}\cdot l_3\right)}{Z_{03} + jZ_L^3\,tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_3}\cdot l_3\right)} \Rightarrow \boxed{Z_{in} = 100.86 - j168.76\ \Omega = 196.62\angle-59.13^\circ}$$

Com a inserção dos transformadores, espera-se:

$$Z_{in} = Z_{03} \Rightarrow \boxed{Z_{in} = 300\ \Omega}$$

2 Questão 2

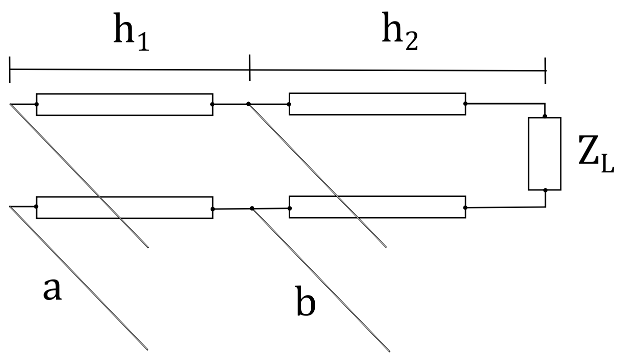

Figura 2: Esquemático do problema

Inicialmente, normaliza-se a carga:

$$\boxed{z_L = 0.72\angle 56.31^\circ = 0.40 + j0.60}$$

e determina-se a admitância de carga:

$$\boxed{y_L = 0.77 - j1.15}$$

Após marcar esta cota na carta de Smith (cf. Fig 3), percorre-se $h_2 = 0.2\lambda$ no sentido do gerador, marcando-se a admitância no plano B sem a admitância em paralelo do *stub* de comprimento b:

$$\boxed{y_{B1} = 0.31 + j0.26}$$

Como a impedância de entrada da linha de transmissão deve ser 50 Ω (VSWR = 1), carrega-se o lugar geométrico ($r = 1$) que contém a impedância 50 Ω (plano A) para o plano B. Tal translação equivale a caminhar $h_1 = 0.25\lambda$ na direção da carga (1/2 carta) e é representada pelo círculo tracejado vermelho.

Neste ponto, caminha-se sobre o lugar geométrico $r = 0.31$ até a admitância

$$\boxed{y_{B2} = 0.31 + j0.46}$$

A parte imaginária de y_{B1} foi alterada de $j0.26$ para $j0.46$, de forma que a diferença de $j0.20$ deve ser fornecida pelo *stub* de comprimento b em sua entrada. Encontra-se para as duas configurações:

$$\boxed{b_{\,curto} = 0.281\lambda}$$

$$\boxed{b_{\,aberto} = 0.031\lambda}$$

Dessa forma, a nova posição de admitância y_{B2} corresponde ao valor visto na entrada do trecho de linha de comprimento $h_2 = 0.2\lambda$, em paralelo com a admitância vista na entrada do *stub* de comprimento b.

Em seguida, caminha-se 0.25λ a partir de y_{B2} para chegar no plano A que é a entrada da linha, encontrado a admitância:

$$\boxed{y_A = 1.0 - j1.49}$$

Assim, o *stub* de comprimento a deve ter, em sua entrada, admitância $+j1.49$. Portanto, encontra-se:

$$\boxed{a_{\,curto} = 0.406\lambda}$$

$$\boxed{a_{\,aberto} = 0.156\lambda}$$

Escolhe-se, portanto, a configuração de *stub* em circuito aberto por apresentarem menor comprimento de linha necessário para o casamento de impedâncias.

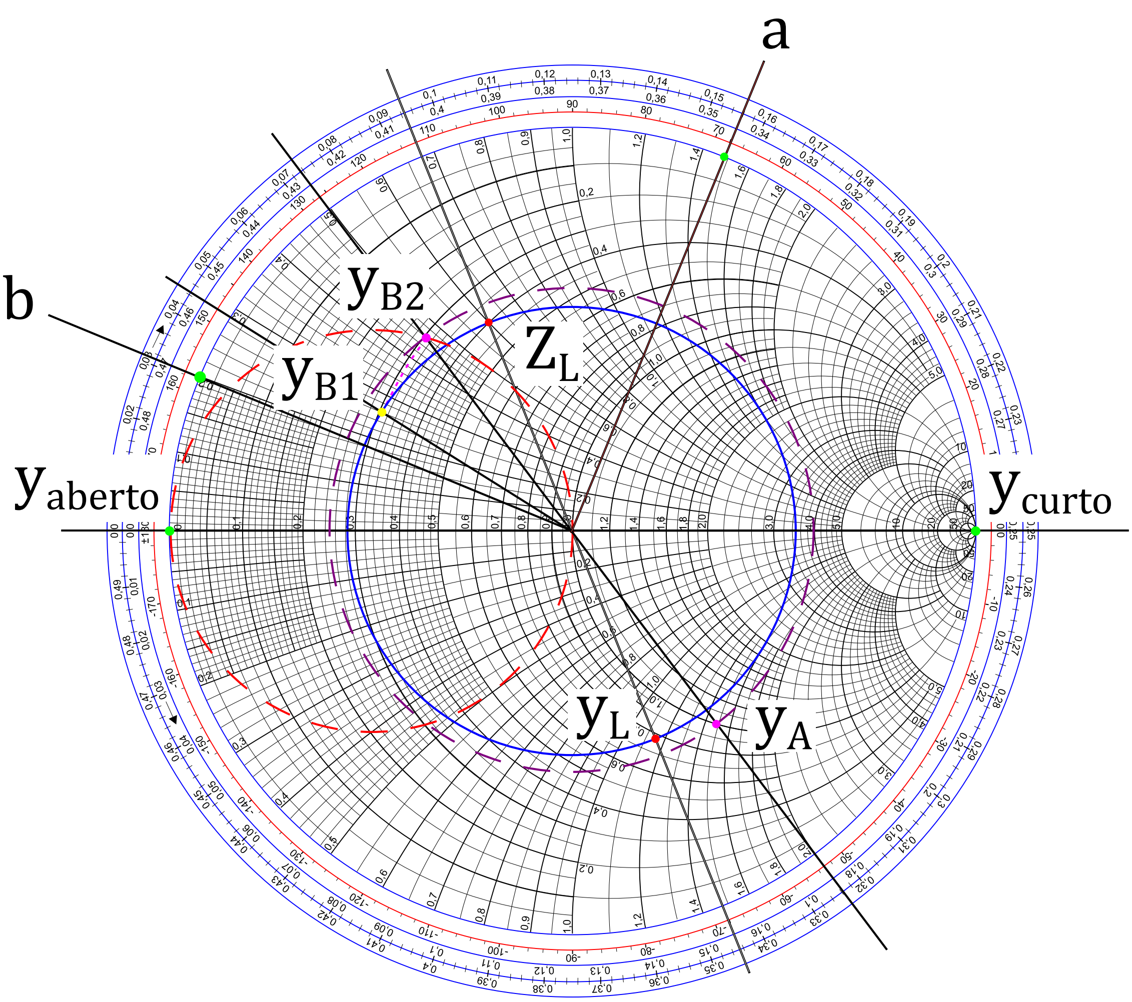

Figura 3: Solução gráfica

3 Questão 3

3.1 Questão 12-4-1

(a) Calcula-se

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \Rightarrow \boxed{Z_0 = 45.31 - j5.70\ \Omega = 45.67\angle -7.17^\circ\ \Omega}$$

(b) Calcula-se:

$$v/c = \frac{1}{c\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{v/c = 9.31\ \times\ 10^{-2}}$$

(c) Inicialmente, calcula-se a constante de propagação complexa:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = (1.13 + j6.80) \times 10^{-4}\ \ m^{-1}$$

Dessa forma, tem-se uma constante de atenuação equivalente a:

$$\alpha = \mathrm{Re}\,(\gamma) = 1.13 \times 10^{-4}\ Np/m$$

Seja a potência média ao longo de uma linha de transmissão com perdas, na ausência da onda refletida, da forma:

$$P_m(z) = P_m^{in} \cdot e^{-2\alpha z}$$

onde $P_{in} \equiv P(z = 0)$ é a potência incidente na linha de transmissão, calcula-se a atenuação (dB) em $z = 2$ km :

$$A_{dB} = 10 \cdot \log\left[\frac{P_m(z = 2\ km)}{P_m^{in}}\right] = 10 \cdot \log\left(e^{-2\,\alpha\,\cdot\,2\times10^3}\right) \Rightarrow \boxed{A_{dB} = -1.97 \text{ dB}}$$

3.2 Questão 12-7-5

Normaliza-se a carga:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} \Rightarrow \boxed{z_L = 0.5 + j0.75}$$

Utilizando a carta de Smith (cf. Fig. 4), marca-se a carga normalizada e encontra-se a admitância normalizada:

$$\boxed{y_L = 0.62 - j0.92}$$

Como o *stub* está conectado em paralelo com a linha, trabalha-se, por conveniência, com as admitâncias. Em seguida, caminha-se no lugar geométrico $|\Gamma_0|$ constante até o ponto:

$$\boxed{y_A = 1 + j1.28}$$

onde o *stub* deve ser inserido. Logo,

$$\boxed{d = 0.305\lambda}$$

Para ocorrer o casamento de impedâncias, é necessário que a entrada do *stub* tenha admitância $y_{stub} = -j1.28$, logo, tendo terminação em curto-circuito ($y_{curto} \to \infty$), opera-se na carta de Smith para encontrar:

$$\boxed{l = 0.106\lambda}$$

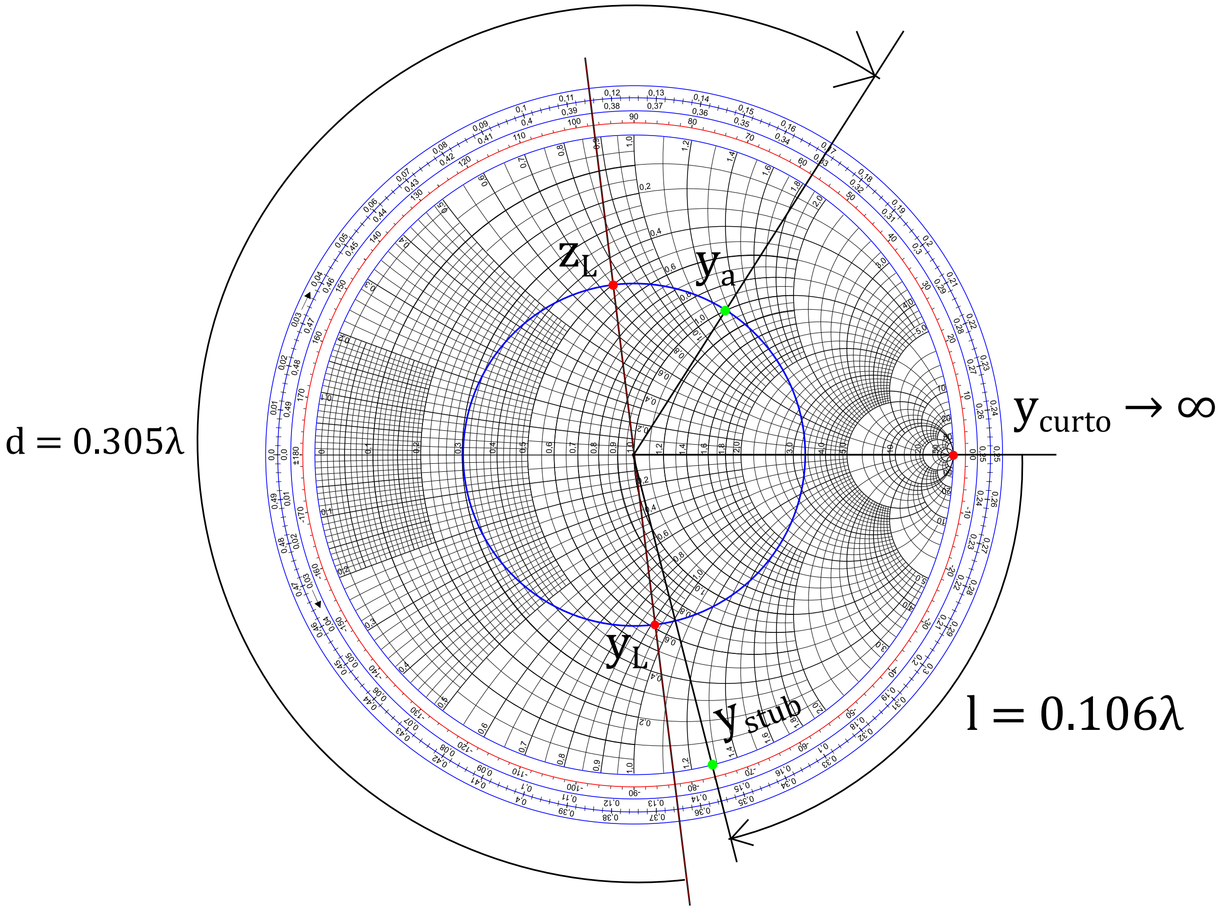

Figura 4: Solução gráfica

3.3 Questão 12-7-6

Normaliza-se a carga:

$$\boxed{z_L = 0.35 - j0.35}$$

Utilizando a carta de Smith (cf. Fig. 5), marca-se a carga normalizada e encontra-se a admitância normalizada:

$$\boxed{y_L = 1.42 + j1.42}$$

Como o *stub* está conectado em paralelo com a linha, trabalha-se, por conveniência, com as admitâncias. Em seguida, caminha-se no lugar geométrico $|\Gamma_0|$ constante até o ponto:

$$\boxed{y_A = 1 - j1.24}$$

onde o *stub* deve ser inserido. Logo,

$$\boxed{d = 0.140\lambda}$$

Para ocorrer o casamento de impedâncias, é necessário que a entrada do *stub* tenha admitância $y_{stub} = +j1.24$, logo, tendo terminação em curto-circuito ($y_{curto} \to \infty$), opera-se na carta de Smith para encontrar:

$$\boxed{l = 0.392\lambda}$$

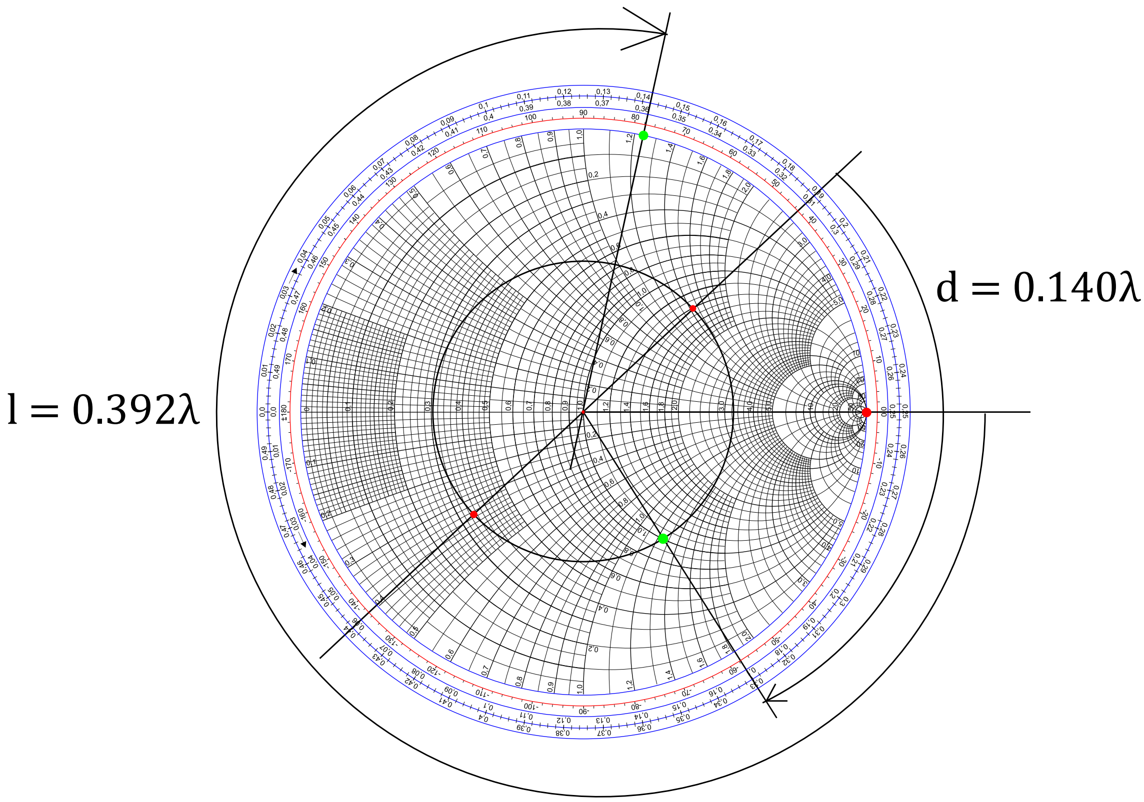

Figura 5: Solução gráfica

3.4 Questão 12-10-1

Calcula-se, inicialmente, os coeficientes de reflexão parciais relativos a um único pulso de onda incidente:

$$\Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \Rightarrow \boxed{\Gamma_1 = 1/3}$$

$$\Gamma_2 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} = -\Gamma_1 \Rightarrow \boxed{\Gamma_2 = \text{-}1/3}$$

$$\Gamma_3 = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} \Rightarrow \boxed{\Gamma_3 = 1/3}$$

$$\Gamma_4 = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_3 + Z_2} = -\Gamma_3 \Rightarrow \boxed{\Gamma_4 = \text{-}1/3}$$

$$\Gamma_5 = \frac{R_L - Z_3}{R_L + Z_3} \Rightarrow \boxed{\Gamma_5 = 0}$$

Calcula-se igualmente os coeficientes de transmissão parciais:

$$T_1 = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \Rightarrow \boxed{T_1 = 4/3}$$

$$T_2 = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} \Rightarrow \boxed{T_2 = 2/3}$$

$$T_3 = \frac{2Z_3}{Z_3 + Z_2} \Rightarrow \boxed{T_3 = 4/3}$$

$$T_4 = \frac{2Z_2}{Z_3 + Z_2} \Rightarrow \boxed{T_4 = 2/3}$$

$$\boxed{T_5 = 1}$$

Considera-se que o pulso de onda de $V^+ = 10$V incide no transformador em $t = 0$ e percorre a seção de $\lambda/4$ até a entrada da linha de impedância 400 Ω em um período T $= \lambda/4f$. Ao longo da linha de impedância 400 Ω, o pulso transmitido leva um período 3T para atingir o comprimento total de λ, como desejado pela questão.

As sucessivas reflexões e transmissões do pulso (totalizando 5 pulsos no transformador) são apresentadas no grafo abaixo:

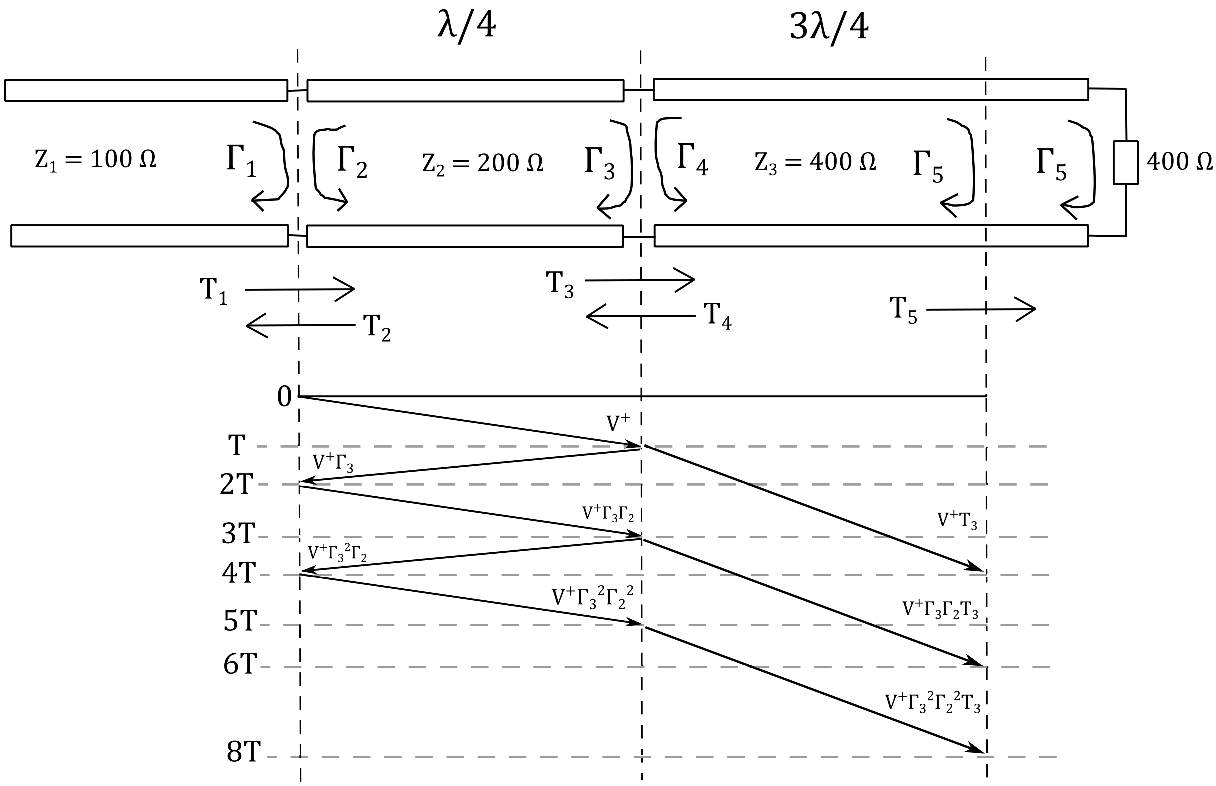

Figura 6: Transiente do sistema