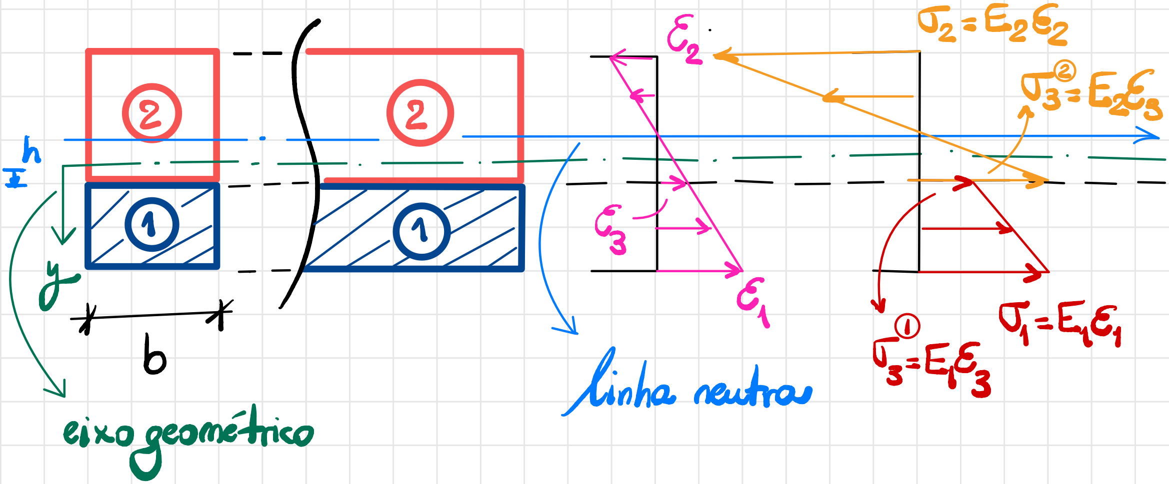
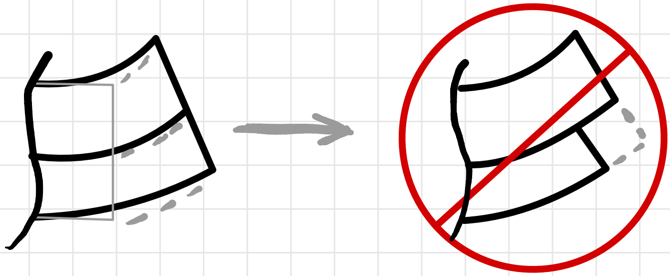
Flexão Simples - Múltiplos Materiais

Como lidar com vigas compostas por múltiplos materiais? Considere a viga a seguir composta por dois materiais (assumindo $E_2 > E_1$):



Para a seção permanecer plana, há a necessidade de haver continuidade nas deformações, o que leva a uma descontinuidade nas tensões:



Analisando a lei de Hooke:

$$\sigma(y) = E(y) \cdot \varepsilon(y)$$

com $\varepsilon(y) = Ky$ e $E(y) = \begin{cases} E_1, & y > h \\ E_2, & y < h \end{cases}$

No caso da flexão simples, pode-se escrever:

$$N = 0 \longrightarrow \int \sigma(y)\,dA = 0 \longrightarrow \int K E(y) \cdot y\,dA = 0$$

$$K \int E(y)\,y\,dA = 0$$

Se for utilizado um módulo de elasticidade equivalente (E_{eq}) ao invés de $E(y)$:

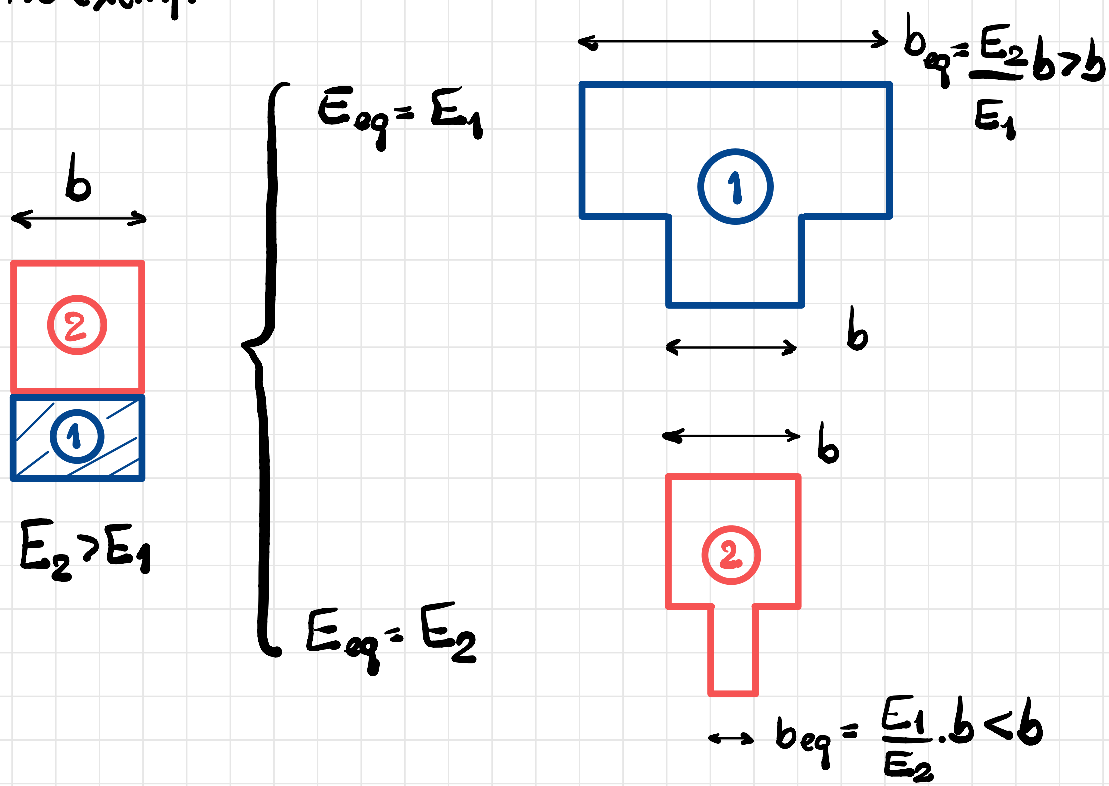
$$K \int E_{eq} \left(\frac{E(y)}{E_{eq}}\right) y\,dA = 0 \longrightarrow K E_{eq} \int y\,dA_{eq} = 0$$

Usando uma Área equivalente é possível resolver o problema.

Ou seja, para o problema de múltiplos materiais, define-se uma área equivalente ponderada pelo módulo de elasticidade equivalente.

A maneira mais simples de obter a área equivalente é alterar a base da seção transversal (uma vez que área e inércia variam linearmente com a base).

No exemplo:

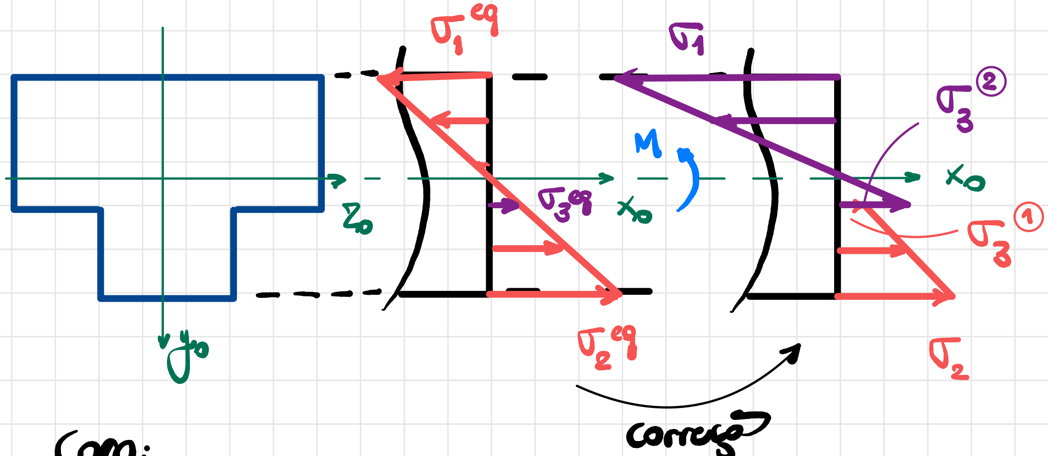


Assim, pode-se calcular as propriedades da seção equivalente:

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \quad ; \quad I_{z_0} = \sum \left(I_{z_0}^i + d_i^2 A_i \right)$$

da seção equivalente!

Por exemplo, escolhendo ① como material base (ou equivalente):

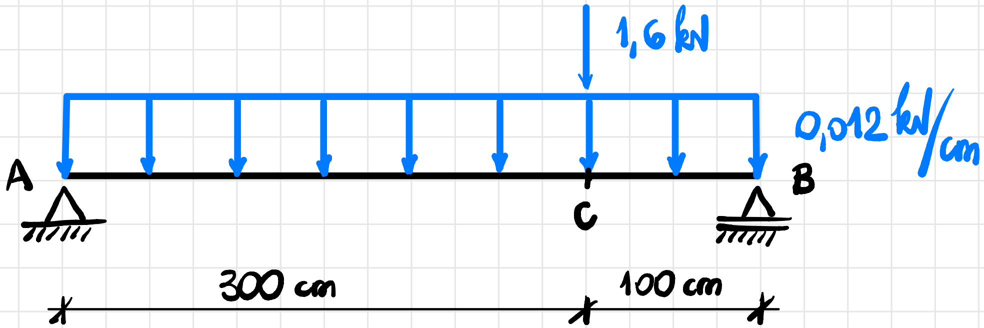


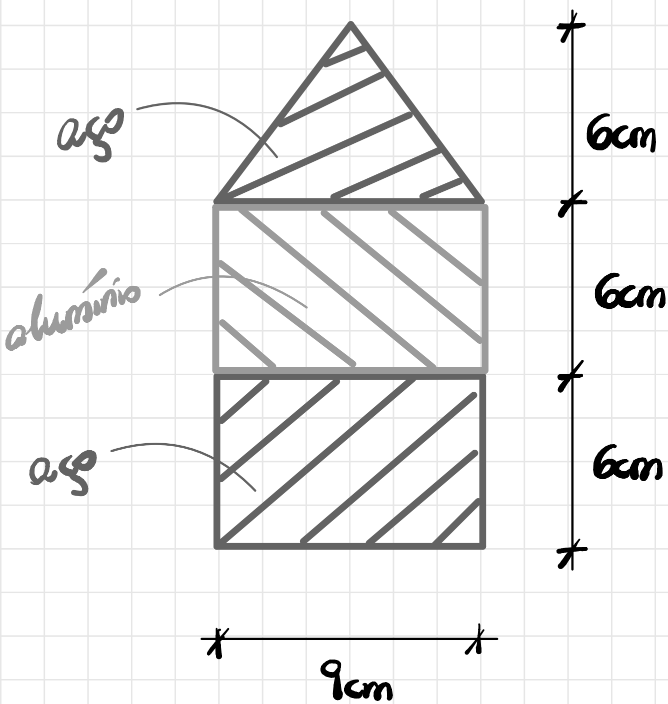
Com:

$$\sigma_1 = \frac{E_2}{E_1} \cdot \sigma_1^{eq} \qquad \sigma_3^{①} = \sigma_3^{eq}$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^{eq} \qquad \sigma_3^{②} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \sigma_3^{eq}$$

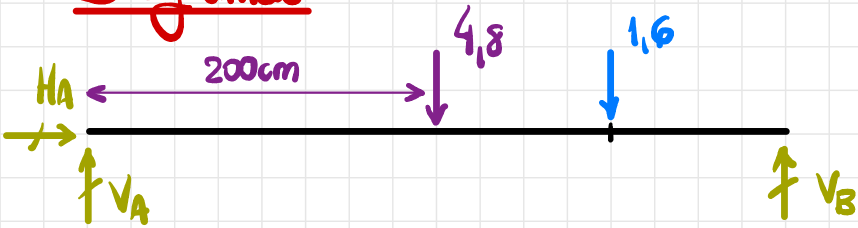
Exemplo: Determinar as máximas tensões no aço e no alumínio para a viga de seção transversal dada.





$E_{aço} = 3\,E_{alumínio}$

Diagramas

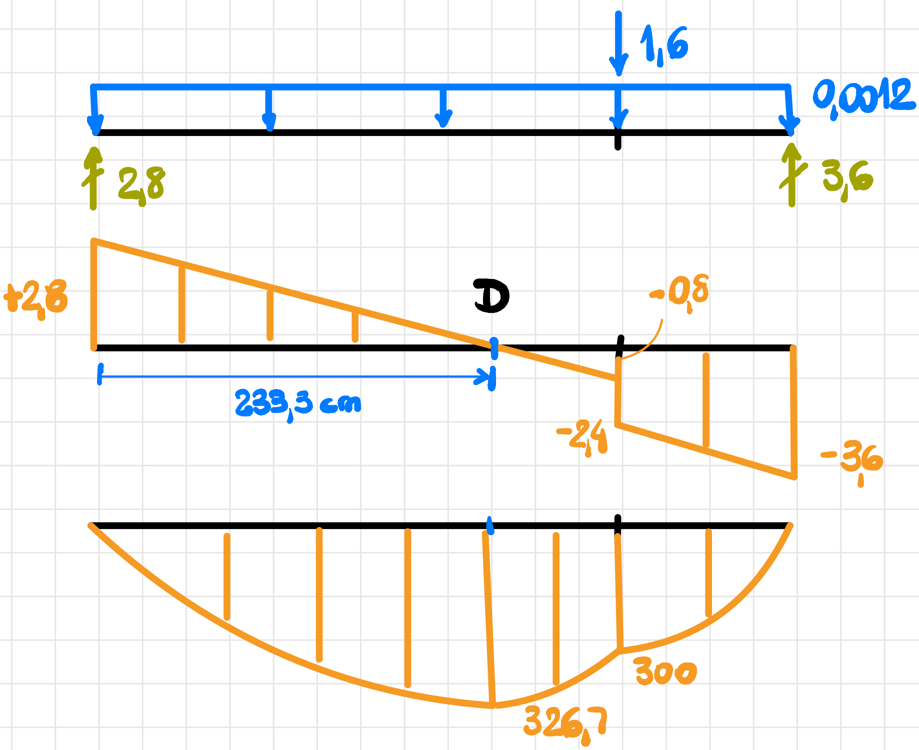


$$\sum F_H = 0: \quad \boxed{H_A = 0}$$

$$\sum F_V = 0: \quad V_A + V_B = 6,4$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0: \quad -4,8 \cdot 200 - 1,6 \cdot 300 + V_B \cdot 400 = 0$$

$$\therefore \boxed{V_B = 3,6\ kN} \longrightarrow \boxed{V_A = 2,8\ kN}$$

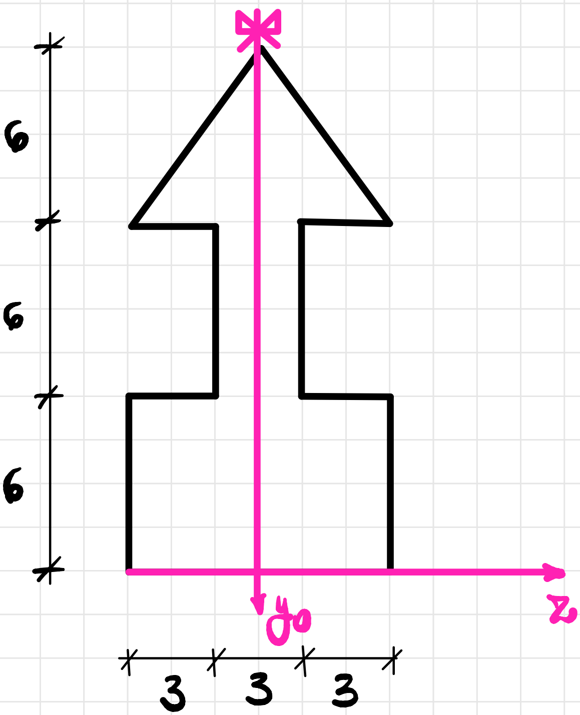


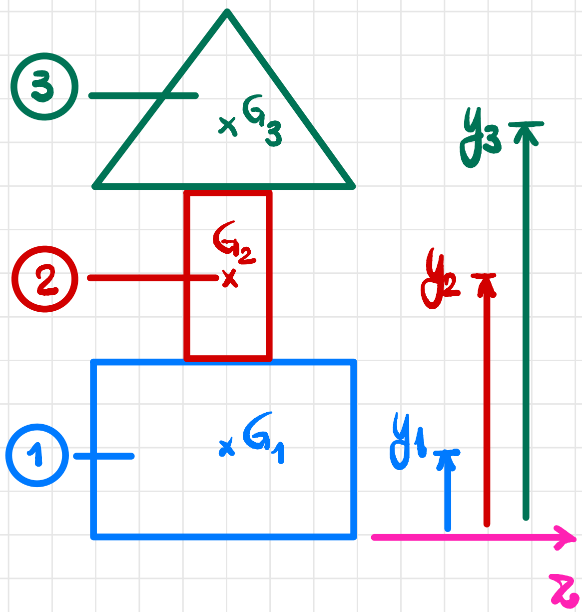
Seção Equivalente

Escolhendo E_{eq} como $E_{aço}$, modifica-se a área de alumínio. Mantendo a altura, a nova base fica:

$$b_{eq} = \frac{E_{alumínio}}{E_{aço}} \cdot b = \frac{1}{3} \cdot b$$

Assim, a seção equivalente fica:





	y_G [cm]	A [cm^2]	I_{z_0} [cm^4]	d [cm]	d^2A [cm^4]
1	3	54	162	4,1	907,74
2	9	18	54	1,9	64,98
3	14	27	54	6,9	1285,47

$$y_G = \frac{3.54 + 9.18 + 14.27}{54 + 18 + 27} = \frac{702}{99} \longrightarrow \boxed{y_G \simeq 7{,}1 cm}$$

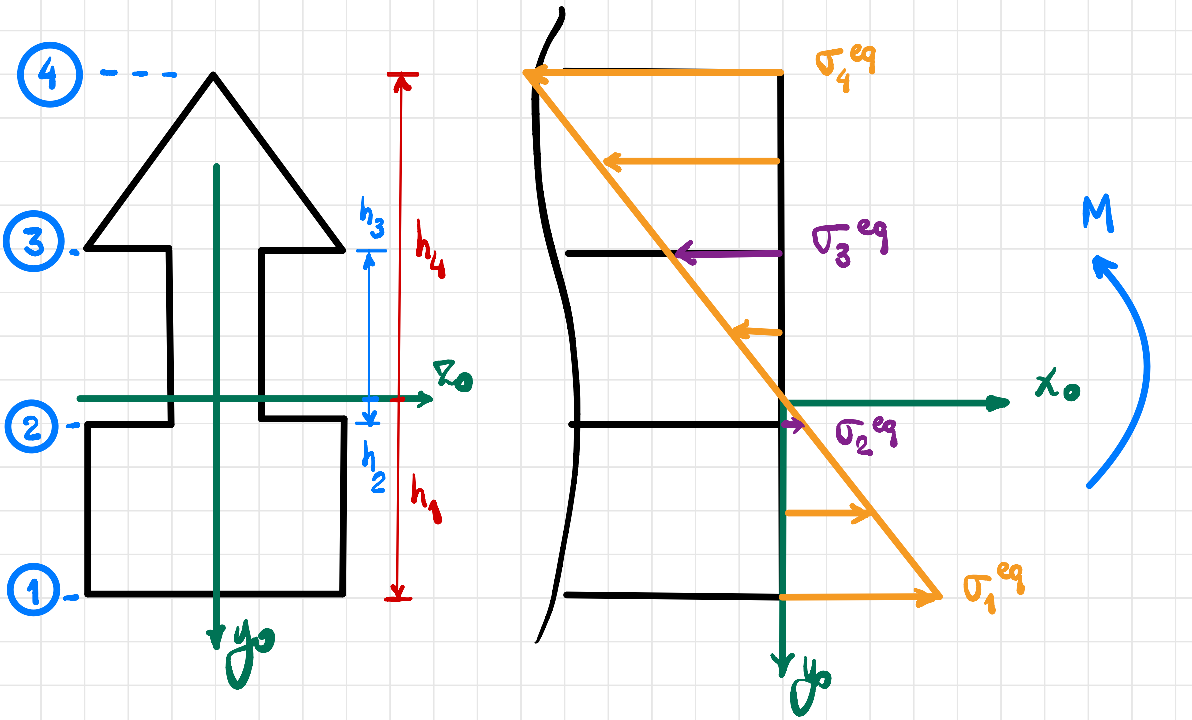
$$I_{z_0} = \underbrace{(162 + 907{,}74)}_{\text{área } 1} + \underbrace{(54 + 64{,}98)}_{\text{área } 2} + \underbrace{(54 + 1285{,}47)}_{\text{área } 3}$$

$$\boxed{I_{z_0} = 2528{,}2\ cm^4}$$

Observação: a tabela poderia ser montada com a seção original e o fator ser usado na área e na inércia!

A seção de interesse é a seção D, haja visto que só existem momentos positivos atuando na estrutura.

Seção D ($M = 326{,}7$ kNcm):



$h_1 = 7{,}1\,\text{cm}$; $h_2 = 1{,}1\,\text{cm}$; $h_3 = 4{,}9\,\text{cm}$; $h_4 = 10{,}9\,\text{cm}$.

$$\sigma_1^{eq} = \frac{M}{I_{x_0}} y_1 = \frac{M}{I_{x_0}} h_1 = \frac{326{,}7}{2528{,}2} \cdot 7{,}1 = 0{,}917\ \text{kN/cm}^2 = 9{,}17\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2^{eq} = \frac{M}{I_{x_0}} y_2 = \frac{M}{I_{x_0}} \cdot h_2 = \frac{326{,}7}{2528{,}2} \cdot 1{,}1 = 0{,}142\ \text{kN/cm}^2 = 1{,}42\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3^{eq} = \frac{M}{I_{x_0}} y_3 = \frac{M}{I_{x_0}} (-h_3) = -\frac{326{,}7}{2528{,}2} \cdot 4{,}9 = -0{,}633\ \text{kN/cm}^2 = -6{,}33\ \text{MPa}$$

$$\sigma_4^{eq} = \frac{M}{I_{x_0}} y_4 = \frac{M}{I_{x_0}} (-h_4) = -\frac{326{,}7}{2528{,}2} \cdot 10{,}9 = -1{,}408\ \text{kN/cm}^2 = -14{,}08\ \text{MPa}$$

$\sigma_1^{aço} = 9{,}17\ MPa$

$\sigma_2^{aço} = 1{,}42\ MPa$

$\sigma_3^{aço} = -6{,}33\ MPa$

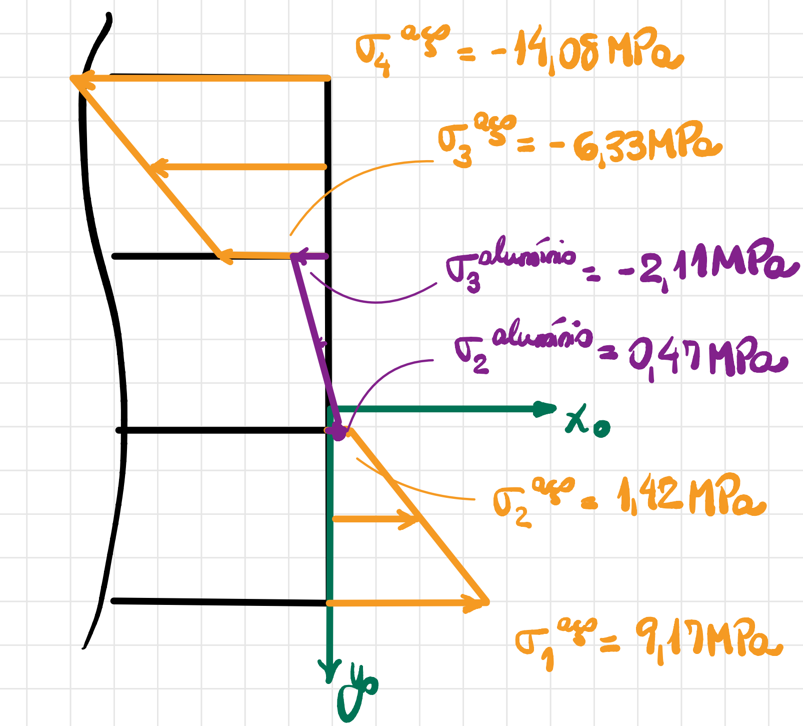
$\sigma_4^{aço} = -14{,}08\ MPa$

$$\sigma_2^{alumínio} = \frac{E_{alumínio}}{E_{aço}} \cdot \sigma_2^{alumínio}$$

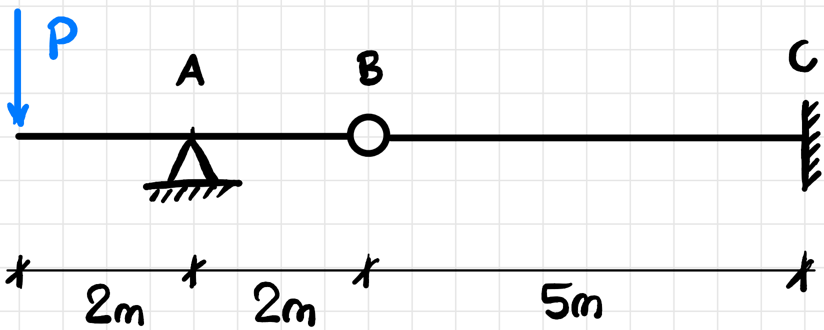
$$\sigma_2^{alumínio} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}42 = 0{,}47\ MPa$$

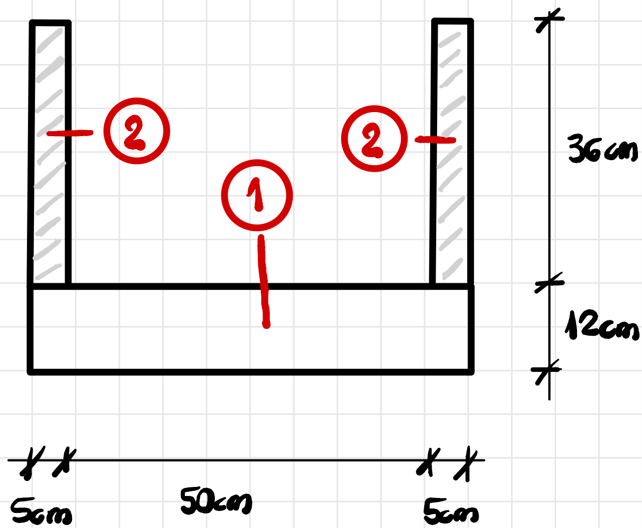
$$\sigma_3^{alumínio} = \frac{E_{alumínio}}{E_{aço}} \cdot \sigma_3^{alumínio}$$

$$\sigma_3^{alumínio} = \frac{1}{3} \cdot (-6{,}33) = -2{,}11\ MPa$$

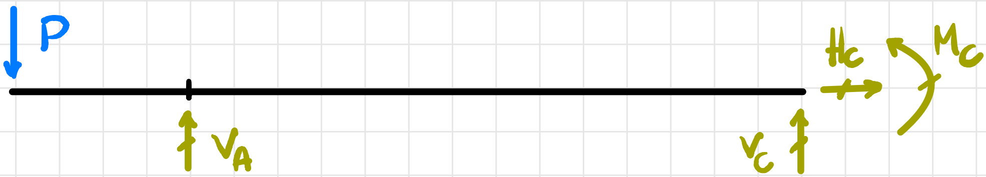


Exemplo: Determinar o valor máximo admissível para a carga P, sabendo que $E_2 = 800.000\ kgf/cm^2$, $E_1 = 400.000\ kgf/cm^2$ e as tensões admissíveis à tração e compressão dos dois materiais são $\bar{\sigma} = 200\ kgf/cm^2$ (material 1) e $\bar{\sigma} = 700\ kgf/cm^2$ (material 2).





Diagramas

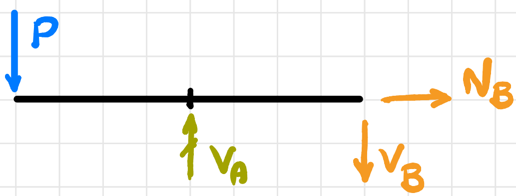


$$\sum F_H = 0: \quad H_C = 0$$

$$\sum F_V = 0: \quad V_A + V_C = P$$

$$(+)\ \sum M_A = 0: \quad P.200 + V_C.700 + M_C = 0$$ ← em kNcm

Corte em B:

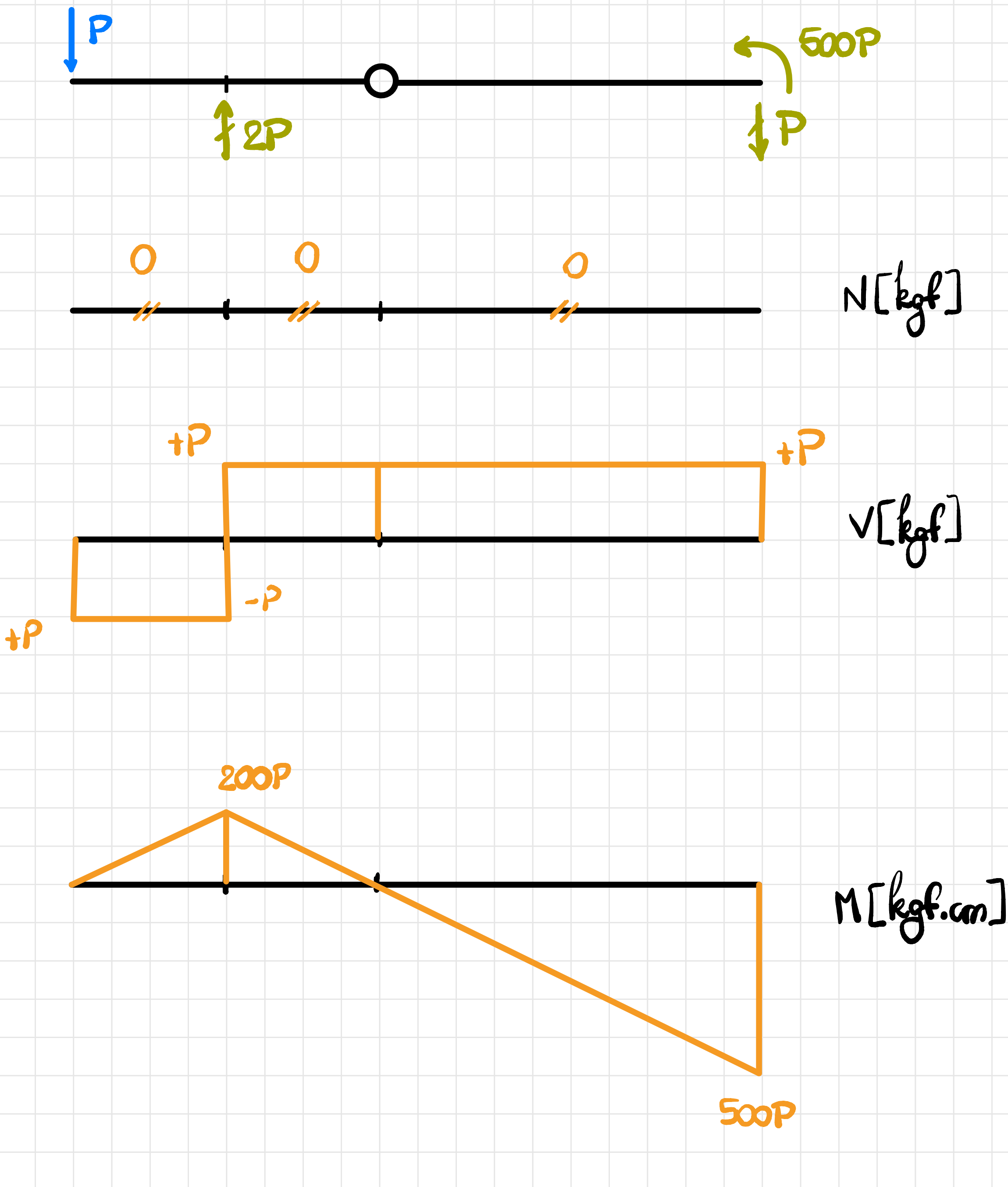


$$(+)\ \sum M_B = 0: \quad P.400 - V_A.200 = 0 \rightarrow \boxed{V_A = 2P}$$

$$V_C = P - V_A \rightarrow \boxed{V_C = -P}$$

$$M_C = -200P - 700.V_C \rightarrow \boxed{M_C = 500P}$$

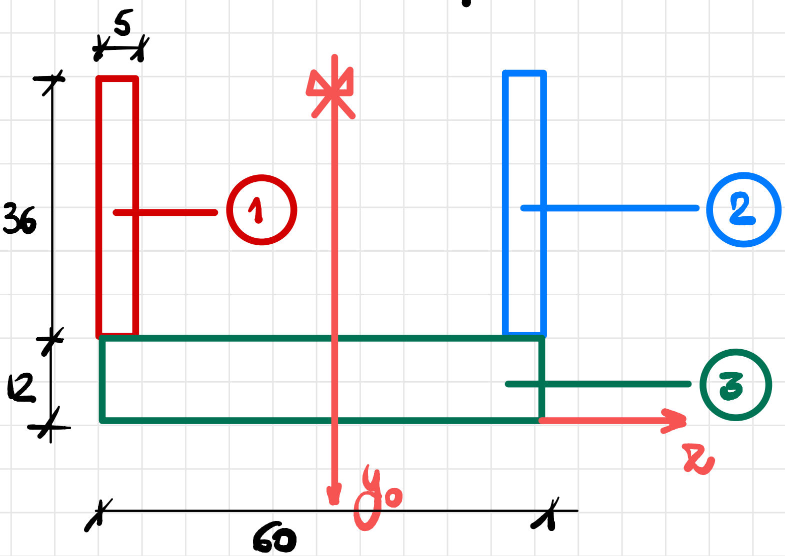
Diagramas



Propriedades da seção transversal

Escolhendo o material 2 como base: $E_1/E_2 = 400.000/800.000 = 1/2$.

Usando a técnica de aplicar o fator na área e inércia:



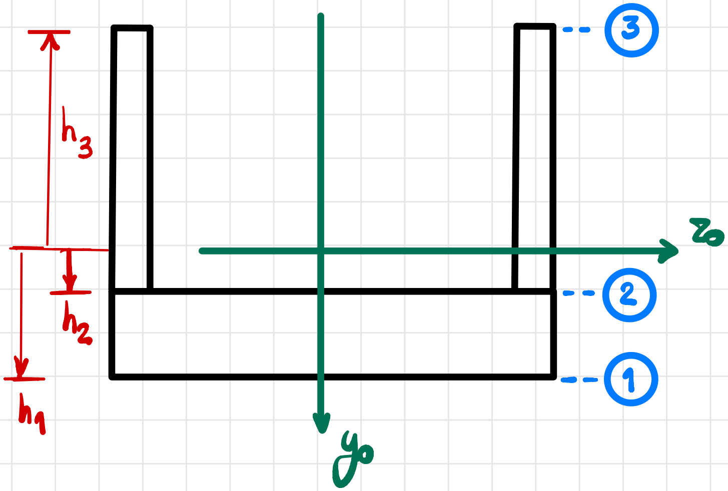
	y [cm]	A [cm^2]	I_{z0} [cm^4]	d [cm]	d^2A [cm^4]
1	30	180	19.440	12	25.920
2	30	180	19.440	12	25.920
3	6	$\frac{1}{2} \cdot 720$	$\frac{1}{2} \cdot 8.640$	12	51.840

$$y_G = \frac{30.180 + 30.180 + 6.\frac{1}{2}.720}{180 + 180 + \frac{1}{2}.720} = \boxed{18\,cm}$$

$$I_{z0} = (19.440 + 25.920) + (19.440 + 25.920) + \left(\frac{1}{2}.8.640 + 51.840\right)$$

$$\boxed{I_{z0} = 146.880\,cm^4}$$

Pontos de interesse na seção:



$h_1 = 18cm$

$h_2 = 6cm$

$h_3 = 30cm$

Seção A

$$M_A = -200P$$

$$\sigma_1^e = \frac{M_A}{I_{z0}} \cdot h_1 = -\frac{3600P}{I_{z0}}$$

$$\sigma_2^e = \frac{M_A}{I_{z0}} \cdot h_2 = \frac{-1200P}{I_{z0}}$$

$$\sigma_3^e = \frac{M_A}{I_{z0}} \cdot -h_3 = \frac{6000P}{I_{z0}}$$

Seção C

$$M_c = 500P$$

$$\sigma_1^e = \frac{M_c}{I_{z0}} \cdot h_1 = \frac{9000P}{I_{z0}}$$

$$\sigma_2^e = \frac{M_c}{I_{z0}} \cdot h_2 = \frac{3000P}{I_{z0}}$$

$$\sigma_3^e = \frac{M_c}{I_{z0}} \cdot -h_3 = \frac{-15000P}{I_{z0}}$$

As tensões no material 1:

$$\sigma_1^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma_1^e = \frac{-1800P}{I_{z0}}$$

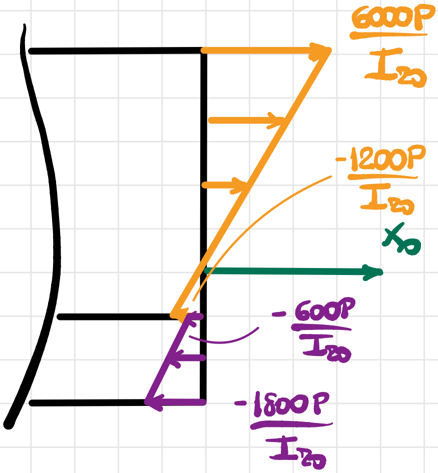
$$\sigma_2^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma_2^e = -\frac{600P}{I_{z0}}$$

$$\sigma_1^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma_1^e = \frac{4500P}{I_{z0}}$$

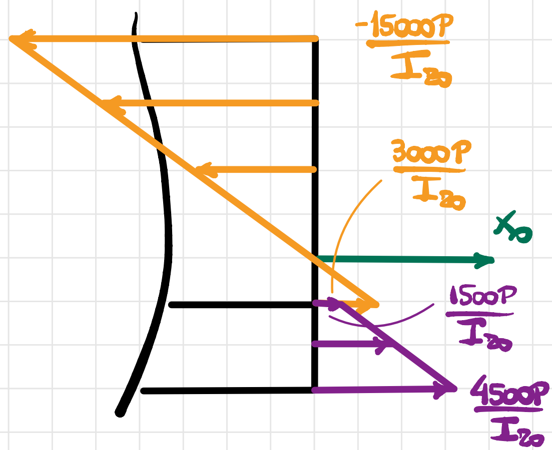
$$\sigma_2^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma_1^e = \frac{1500P}{I_{z0}}$$

Assim:

Seção A:



Seção C:



Dessa forma, as tensões máximas nos materiais 1 e 2 são, respectivamente:

$$\sigma_{máx,1} = \frac{4500P}{I_{z_0}}$$

$$\sigma_{máx,2} = \frac{15000P}{I_{z_0}}$$

Como $\sigma_{máx,i} \leq \bar{\sigma}_i$, então:

$\sigma_{máx,1} \leq \bar{\sigma}_1$

$\frac{4500\,P}{I_{z0}} \leq 200$

$P \leq \frac{200}{4500} I_{z0}$

$P \leq 6528$ kgf

$\sigma_{máx,2} \leq \bar{\sigma}_2$

$\frac{15000\,P}{I_{z0}} \leq 700$

$P \leq \frac{700}{15000} I_{z0}$

$P \leq 6854{,}4$ kgf

Logo, a carga máxima admissível é de

6528 kgf.