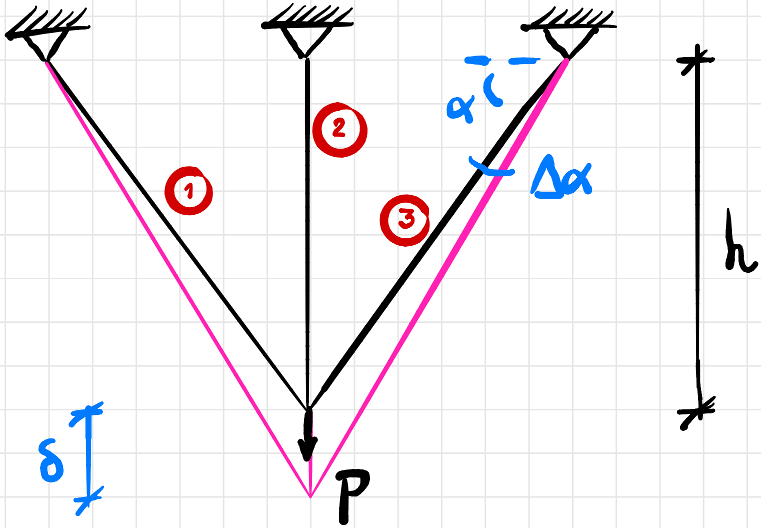
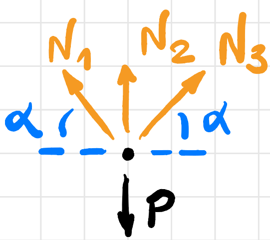
Estruturas Hiperestáticas



Equilíbrio no nó C:

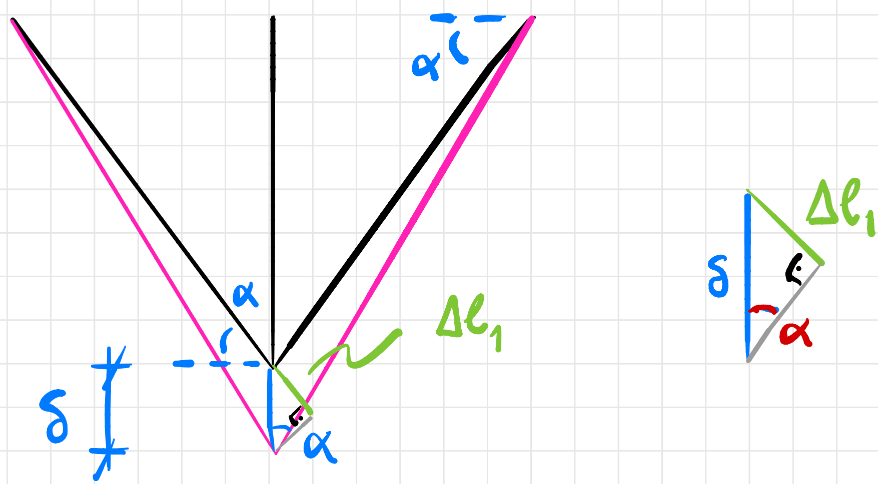


$$\sum F_H = 0: \quad -N_1 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha = 0 \longrightarrow N_1 = N_3$$

$$\sum F_V = 0: \quad -P + N_2 + N_1 \operatorname{sen}\alpha + N_3 \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\therefore \boxed{N_2 + 2N_1 \operatorname{sen}\alpha = P} \quad (I)$$

Assim, tem-se uma única equação (I) e duas incógnitas (N_1 e N_2). Para obter mais uma equação, equações de compatibilidade serão utilizadas. Traçando o diagrama de Williot:



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\Delta\ell_1}{\delta} \longrightarrow \delta = \dfrac{\Delta\ell_1}{\operatorname{sen}\alpha} & (II) \\[2ex] \Delta\ell_2 = \delta & (III) \\[2ex] \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\Delta\ell_3}{\delta} \longrightarrow \delta = \dfrac{\Delta\ell_3}{\operatorname{sen}\alpha} & \end{cases}$$

Com a compatibilidade surgiu uma nova incógnita (δ), porém com duas equações.
Igualando II e III:

$$\frac{\Delta l_1}{\operatorname{sen}\alpha} = \Delta l_2 \qquad (IV)$$

Lembrando que $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$, então:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

Considerando que os fios são do mesmo material e possuem a mesma seção transversal e:

$$l_1 = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} \quad ; \quad l_2 = h$$

Então:

$$\frac{N_1 \cdot \cancel{L}}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{1}{\cancel{EA}\operatorname{sen}\alpha} = \frac{N_2 \cancel{L}}{\cancel{EA}}$$

$$\therefore \boxed{N_1 = N_2 \operatorname{sen}^2\alpha} \quad (V)$$

Com a equação (V), pode-se encontrar N_1 e N_2:

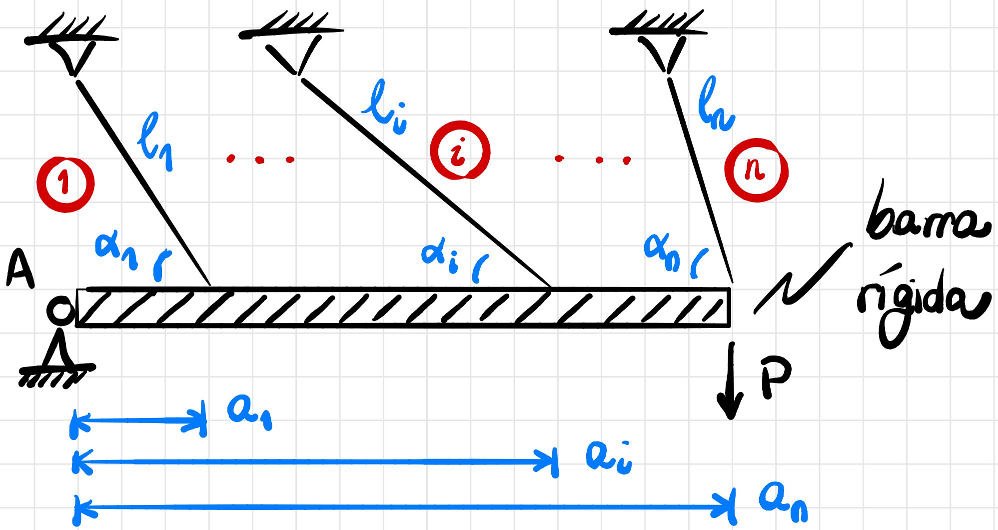
$$N_2 + 2(N_2 \operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha = P$$

$$\therefore \boxed{N_2 = \frac{P}{1+2\operatorname{sen}^3\alpha}}$$

e $$\boxed{N_1 = \frac{P\operatorname{sen}^2\alpha}{1+2\operatorname{sen}^3\alpha}}$$

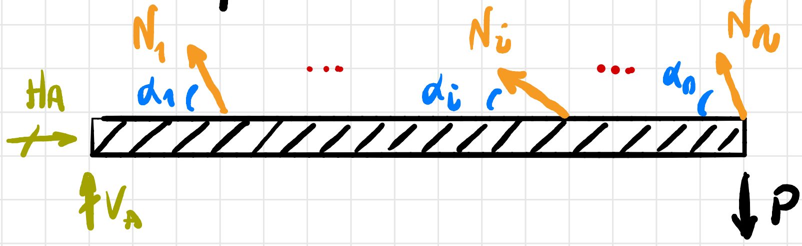
Estruturas Estaiadas

Um exemplo de estruturas hiperestáticas são estruturas estaiadas:



Problema $(n-1)$ vezes hiperestático.

Fazendo o equilíbrio:

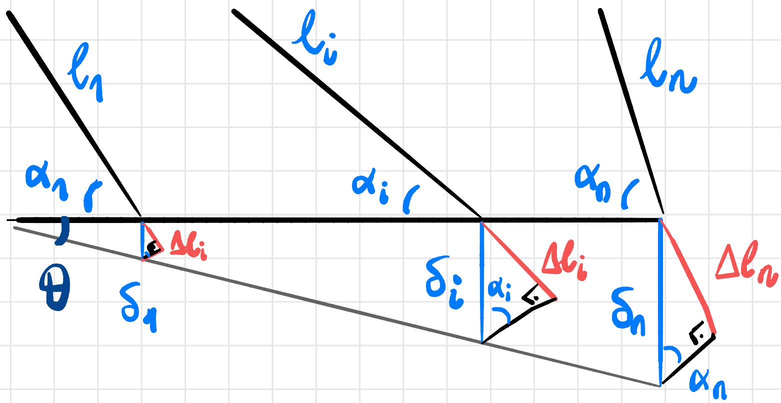


$$\sum F_H = 0: \quad H_A - \sum N_i \cos\alpha_i = 0$$

$$\sum F_V = 0: \quad V_A + \sum N_i \operatorname{sen}\alpha_i - P = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad \sum N_i \operatorname{sen}\alpha_i \, a_i - P a_n = 0$$

Para o cálculo da compatibilidade:



Assim:

$$\operatorname{sen}\alpha_i = \frac{\Delta l_i}{\delta_i} \longrightarrow \delta_i = \frac{\Delta l_i}{\operatorname{sen}\alpha_i}$$

Tem-se, assim, mais n equações e n incógnitas.

Porém, observando o ângulo θ:

$$tg\theta = \frac{\delta_1}{a_1} = \frac{\delta_i}{a_i} = \frac{\delta_n}{a_n} = cte$$

O que fornece $(n-1)$ equações.

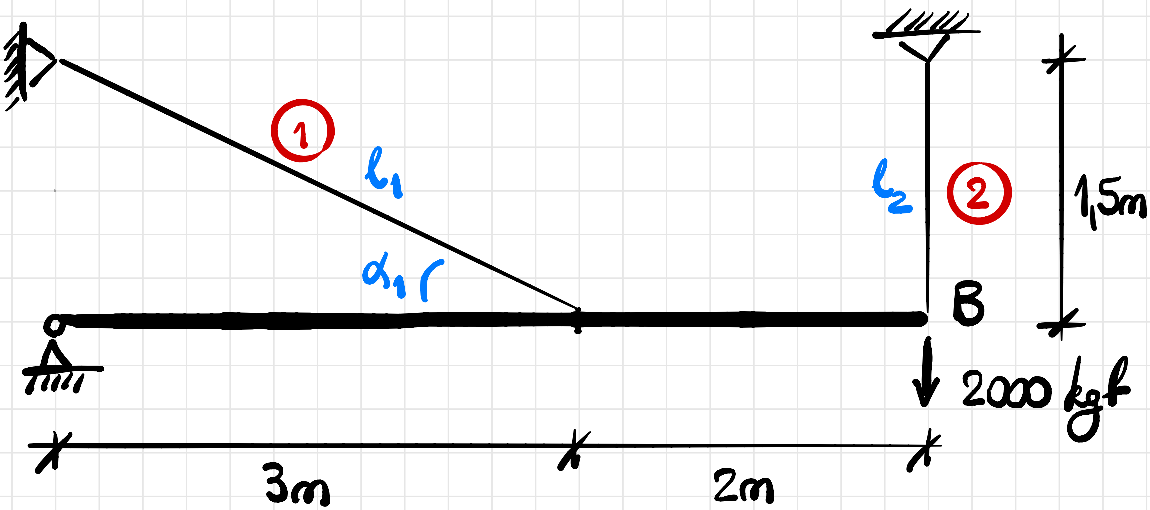
Combinando as expressões e lembrando a relação entre variação de comprimento e normal:

$$\frac{\Delta l_i}{a_i \, sen\alpha_i} = tg\theta$$

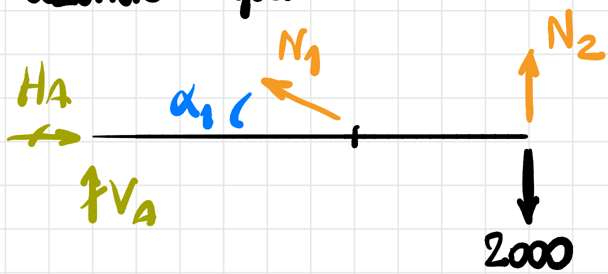
$$\frac{N_i l_i}{E_i A_i a_i \, sen\alpha_i} = tg\theta \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo: Encontrar o diâmetro mínimo dos estais da estrutura da figura considerando:

$$\begin{cases} \bar{\delta} = 1\,cm \\ \bar{\sigma} = 600\ kgf/cm^2 \quad [60\,MPa] \\ E = 2 \cdot 10^6\ kgf/cm^2 \quad [200\,GPa] \end{cases}$$



Fazendo o equilíbrio:

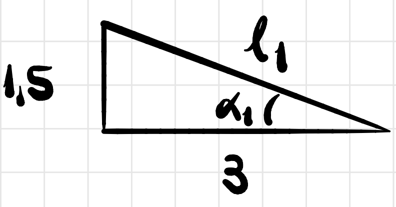


$$\sum F_H = 0: \quad H_A - N_1 \cos\alpha_1 = 0$$

$$\sum F_V = 0: \quad V_A + N_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + N_2 - 2000 = 0$$

$$\circlearrowleft \sum M_A = 0: \quad N_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \cdot 3 + N_2 \cdot 5 - 5 \cdot 2000 = 0$$

Determinando $\operatorname{sen}\alpha_1$:



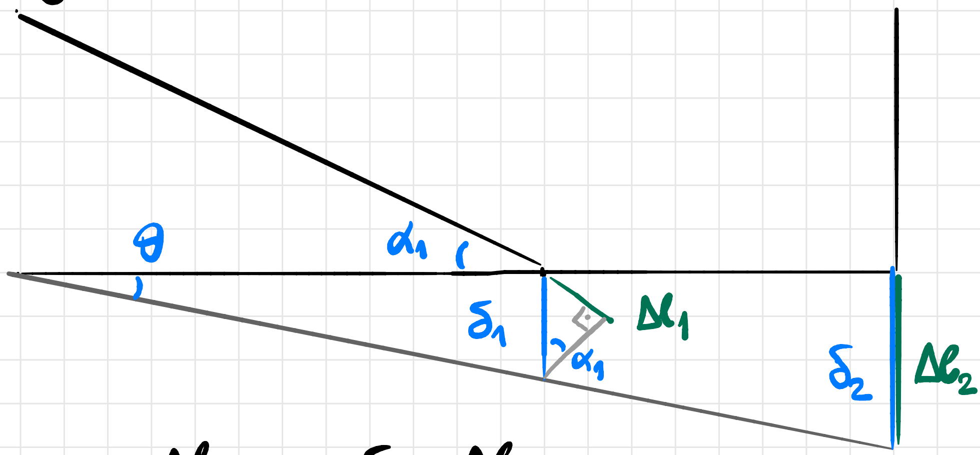
$$l_1 = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2} = 3{,}354\,m$$

$$\operatorname{sen}\alpha_1 = \frac{1{,}5}{l_1} = 0{,}447$$

Assim:

$$\boxed{1{,}342 N_1 + 5 N_2 = 10000}$$

Diagrama de Williot:



$$\operatorname{sen}\alpha_1 = \frac{\Delta \ell_1}{\delta_1} \longrightarrow \delta_1 = \frac{\Delta \ell_1}{\operatorname{sen}\alpha_1}$$

$$\delta_2 = \Delta \ell_2$$

E:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta_1}{300} = \frac{\delta_2}{500} \longrightarrow \frac{\delta_1}{3} = \frac{\delta_2}{5}$$

Substituindo:

$$\frac{\Delta \ell_1}{3\operatorname{sen}\alpha_1} = \frac{\Delta \ell_2}{5}$$

Sabendo que os estais têm mesma área e são do mesmo material:

$$\frac{N_1 \ell_1}{3EA \operatorname{sen}\alpha_1} = \frac{N_2 \ell_2}{5EA}$$

$$\frac{N_1 \cdot 335{,}4}{3 \cdot 0{,}447} = \frac{N_2 \cdot 150}{5} \longrightarrow \boxed{N_1 = 0{,}12 N_2}$$

Voltando ao equilíbrio:

$$1{,}342(0{,}12 N_2) + 5N_2 = 10000$$

$$\therefore \boxed{N_2 = 1937{,}6 \text{ kgf}}$$

$$\boxed{N_1 = 232{,}51 \text{ kgf}}$$

Se desejássemos saber os valores das reações de apoio, seria só substituir no equilíbrio.

$$(H_A = 207{,}9 \text{ kgf} \ ; \ V_A = -41{,}6 \text{ kgf})$$

De posse das forças normais, pode-se dimensionar os estais. Existem 2 critérios (deslocamento máximo e tensão máxima).

① Tensão máxima admissível

A tensão em ambos os fios deve ser menor que a tensão admissível:

$$\sigma_1 \leq \bar{\sigma} \text{ e } \sigma_2 \leq \bar{\sigma} \rightarrow \text{máx}(\sigma_1, \sigma_2) \leq \bar{\sigma}$$

Como as áreas são iguais, a maior normal resultará na maior tensão. Como $N_2 > N_1$, então $\sigma_2 > \sigma_1$.

$$\sigma_2 \leq \bar{\sigma} \rightarrow \frac{N_2}{A} \leq \bar{\sigma} \rightarrow A \geq \frac{N_2}{\bar{\sigma}}$$

$$A \geq \frac{1937{,}6}{600} \rightarrow \underline{A \geq 3{,}23 \text{ cm}^2}$$

② Deslocamento máximo.

O maior deslocamento acontece no extremo (B).

Assim:

$$\delta_B \leq \bar{\delta} \longrightarrow \delta_2 \leq \bar{\delta} \longrightarrow \Delta\ell_2 \leq \bar{\delta}$$

$$\frac{N_2 \ell_2}{EA} \leq \bar{\delta} \longrightarrow A \geq \frac{N_2 \ell_2}{E\bar{\delta}}$$

em cm

$$A \geq \frac{1937{,}6 \cdot 150}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} \longrightarrow \underline{A \geq 0{,}14\,cm^2}$$

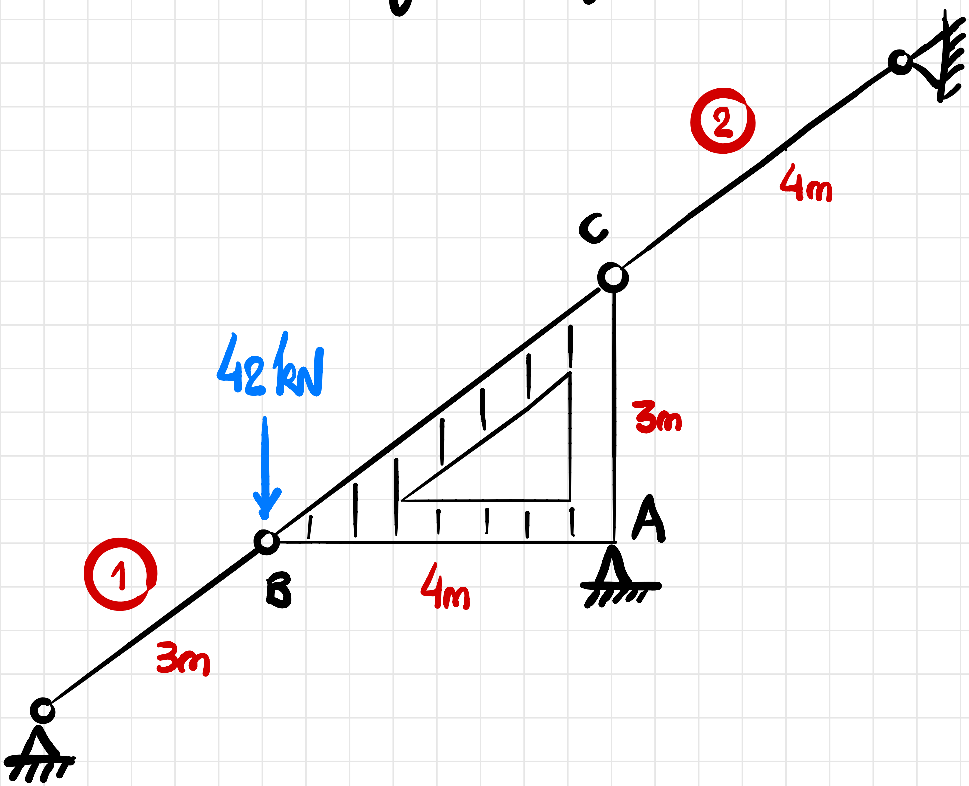
em cm

Assim, para atender ambos os critérios:

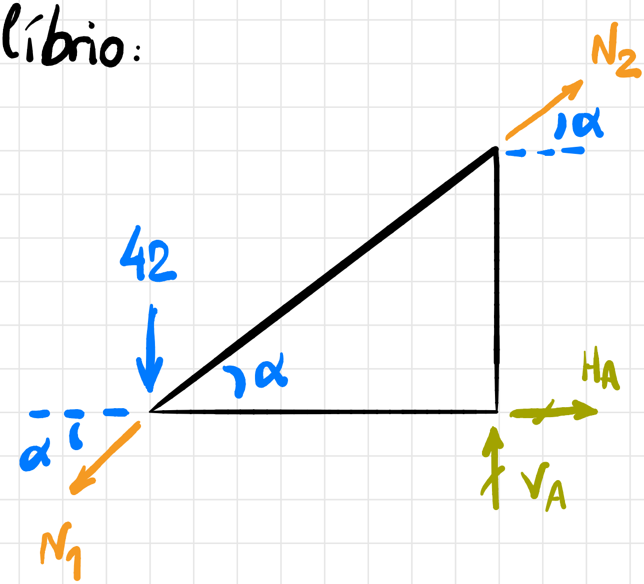
$$A \geq 3{,}23 \longrightarrow \tfrac{1}{4}\pi\phi^2 \geq 3{,}23$$

$$\therefore \boxed{\phi \geq 2{,}03\,cm}$$

Exemplo: Dimensionar os fios sabendo que são compostos do mesmo material ($E = 10^3 MPa$) e possuem a mesma seção transversal, considerando que a tensão máxima admissível é $\bar{\sigma} = 40 MPa$ e o deslocamento vertical do ponto B não deve ultrapassar 0,1m. Sabe-se que a chapa triangular é rígida.



Equilíbrio:



$\operatorname{sen}\alpha = 3/5$

$\cos\alpha = 4/5$

$$\sum F_H = 0: \ -N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha + H_A = 0$$

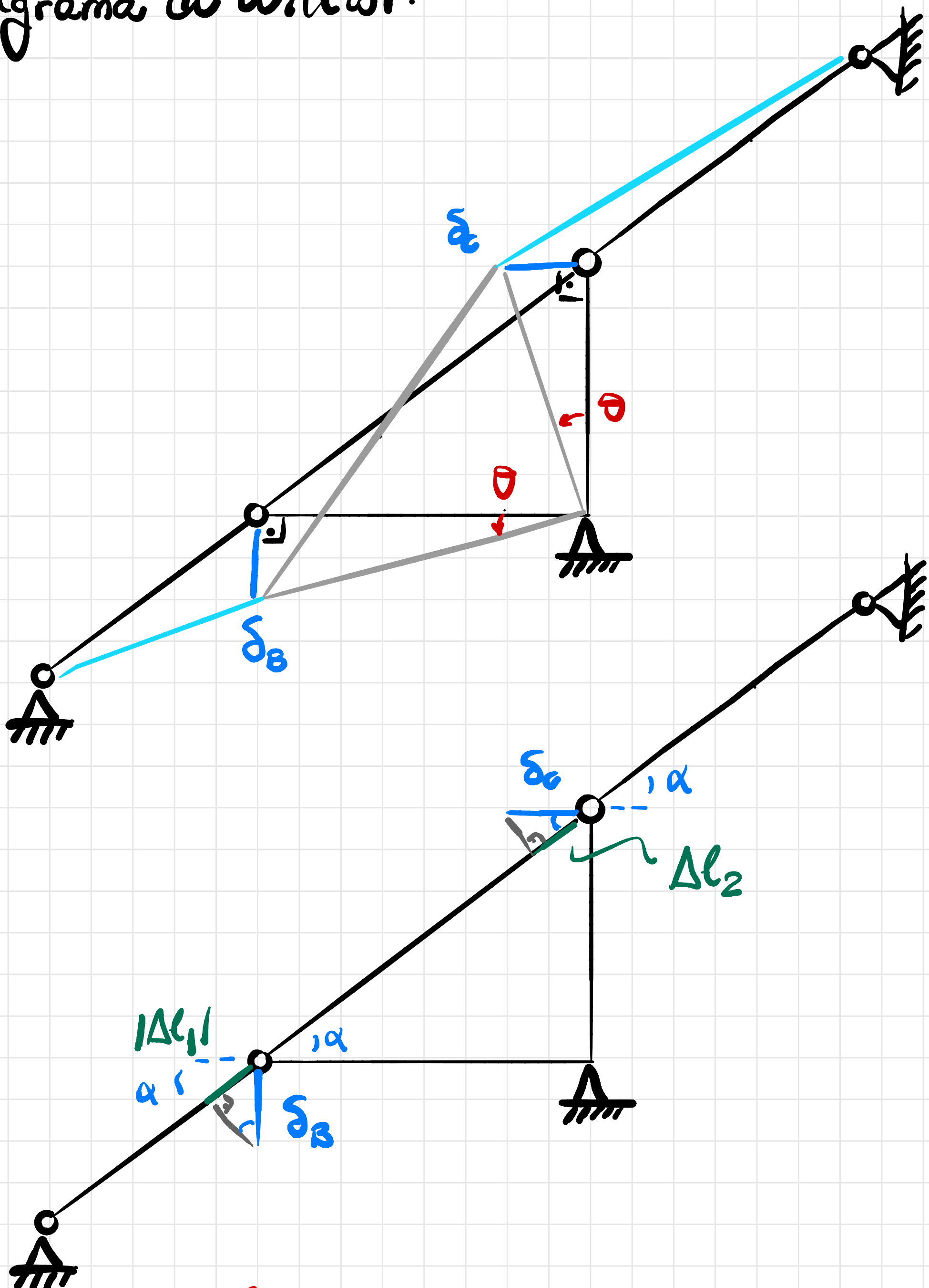
$$\sum F_V = 0: \ -N_1\operatorname{sen}\alpha - 42 + N_2\operatorname{sen}\alpha + V_A = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0: \ 42.4 + N_1\operatorname{sen}\alpha.4 - N_2\cos\alpha.3 = 0$$

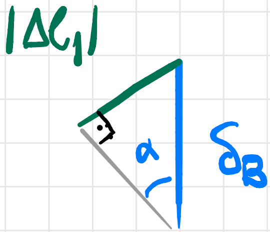
$$\frac{12}{5}N_2 - \frac{12}{5}N_1 = 168$$

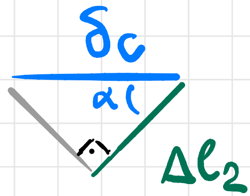
$$\boxed{N_2 - N_1 = 70}$$

Diagrama de Williot:



importante! $\Delta\ell_1 < 0 \rightarrow$ compressão!





$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\Delta\ell_1|}{\delta_B} \qquad \cos\alpha = \frac{\Delta\ell_2}{\delta_C}$$

$$\delta_B = \frac{|\Delta\ell_1|}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \delta_C = \frac{\Delta\ell_2}{\cos\alpha}$$

Mas:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta_C}{3} = \frac{\delta_B}{4}$$

Assim:

$$\frac{|\Delta\ell_1|}{4\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\Delta\ell_2}{3\cos\alpha}$$

Como $\Delta l_i = \dfrac{N_i l_i}{EA}$ (mesmos E e A):

$$\frac{|N_1| l_1}{4\cancel{EA}\, \text{sen}\,\alpha} = \frac{N_2 l_2}{3\cancel{EA} \cos\alpha}$$

$$\frac{|N_1| \cdot 3}{\cancel{4 \cdot 3/5}} = \frac{N_2 \cdot 4}{\cancel{3 \cdot 4/5}}$$

$$\therefore N_2 = -\frac{3}{4} N_1$$

Voltando ao equilíbrio:

$$-\frac{3}{4} N_1 - N_1 = 70 \longrightarrow -\frac{7}{4} N_1 = 70$$

$$\boxed{N_1 = -40\,kN} \longrightarrow \boxed{N_2 = 30\,kN}$$

Dimensionamento:

① Tensão máxima admissível:

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \bar{\sigma} \longrightarrow |\sigma_1| \leq \bar{\sigma}$$

$$\frac{|N_1|}{A} \leq \bar{\sigma} \longrightarrow A \geq \frac{|N_1|}{\bar{\sigma}} \longrightarrow A \geq \frac{40.10^3 \; [N]}{40.10^6 \; [Pa]}$$

$$\therefore \boxed{A \geq 10^{-3} \, m^2}$$

② Deslocamento máximo permitido:

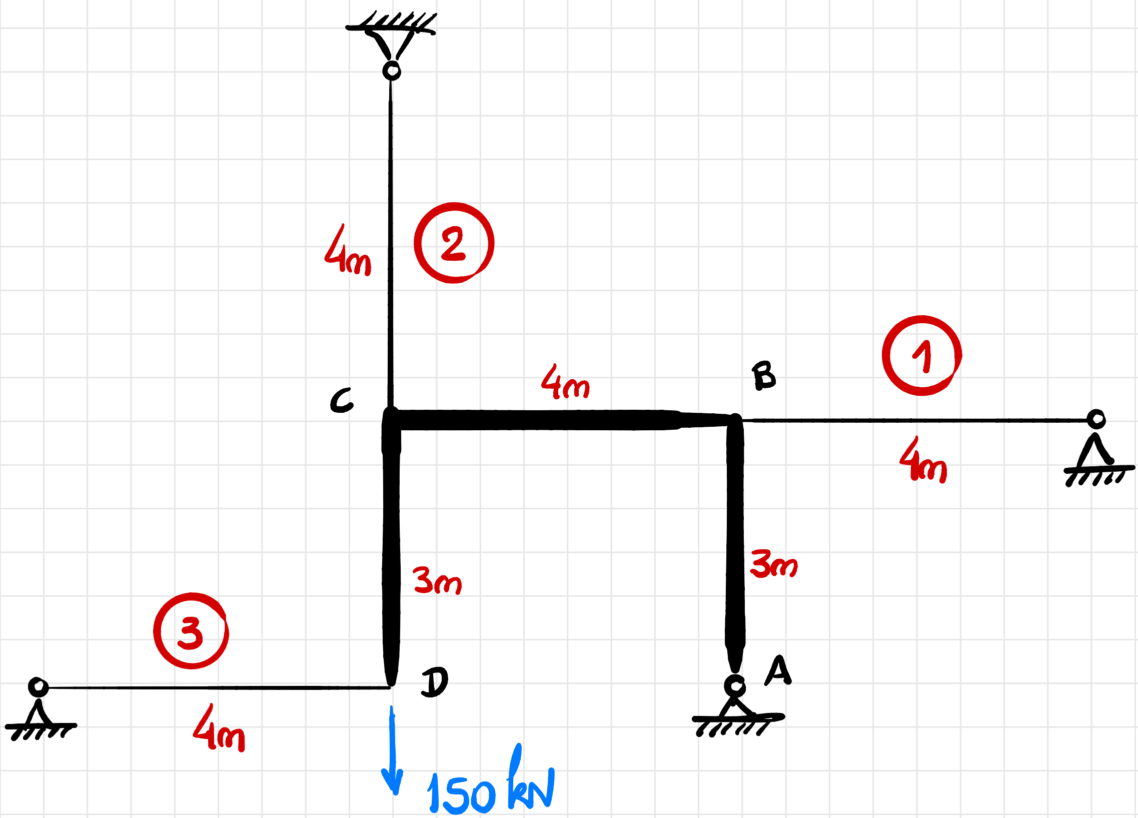
$$\delta_B \leq \bar{\delta}_B \longrightarrow \frac{|\Delta \ell_1|}{\operatorname{sen} \alpha} \leq \bar{\delta}_B$$

$$\frac{|N_1| \, \ell_1}{E A \operatorname{sen} \alpha} \leq \bar{\delta}_B \longrightarrow A \geq \frac{|N_1| \, \ell_1}{E \bar{\delta}_B \operatorname{sen} \alpha}$$

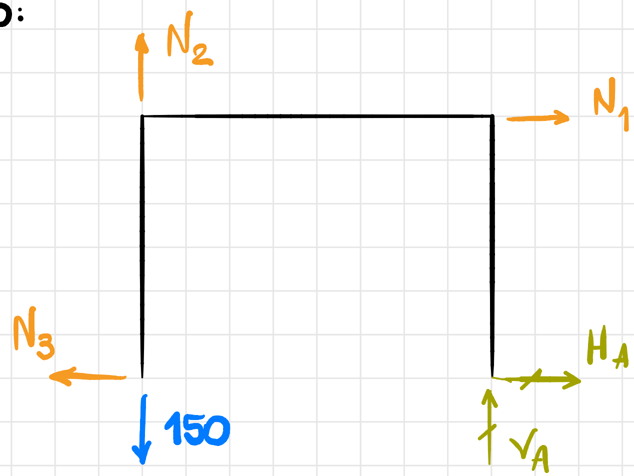
$$A \geq \frac{\overset{N}{40.10^3} . \overset{m}{3}}{\underset{Pa}{10^9} . \underset{m}{0,1} . 3/5} \longrightarrow \boxed{A \geq 2.10^{-3} \, m^2}$$

Logo $A_{min} = 20 \, cm^2$

Obter as forças normais nos fios da figura, considerando que os fios são idênticos, de mesmo material ($E = 9{,}6\ GPa$) e área de seção transversal ($A = 8 \cdot 10^{-4}\ m^2$). Também obter o deslocamento horizontal do ponto B.



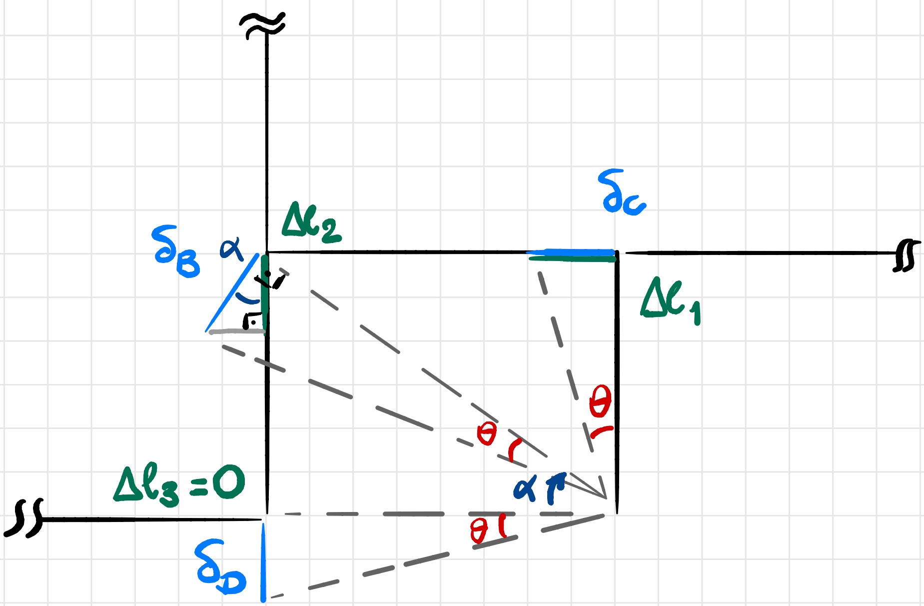
Equilíbrio:



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0: \; -N_1 . 3 - N_2 . 4 + 150 . 4 = 0$$

$$\therefore \; \boxed{3N_1 + 4N_2 = 600}$$

Diagrama de Williot:



Assim:

$$\Delta\ell_1 = \delta_C \longrightarrow \delta_C = \Delta\ell_1$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta\ell_2}{\delta_B} \longrightarrow \delta_B = \frac{\Delta\ell_2}{\cos\alpha}$$

$$\Delta\ell_3 = 0$$

E:

$$tg\,\theta = \frac{\delta_C}{3} = \frac{\delta_B}{5} = \frac{\delta_D}{4}$$

Assim:

$$\frac{\Delta\ell_1}{3} = \frac{\Delta\ell_2}{5\,sen\,\alpha} \longrightarrow \frac{\Delta\ell_1}{3} = \frac{\Delta\ell_2}{5 \cdot 4/5}$$

$$\therefore \frac{\Delta\ell_1}{3} = \frac{\Delta\ell_2}{4}$$

Logo:

$$\frac{N_1 \ell_1}{3\cancel{EA}} = \frac{N_2 \ell_2}{4\cancel{EA}} \longrightarrow \frac{4}{3} N_1 = \frac{4}{4} N_2 \longrightarrow \boxed{N_1 = \frac{3}{4} N_2}$$

Voltando ao equilíbrio:

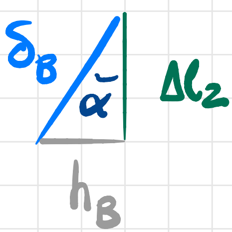
$$3\cdot\left(\frac{3}{4}N_2\right)+4N_2=600 \rightarrow \frac{9}{4}N_2+4N_2=600$$

$$\frac{25}{4}N_2=600 \rightarrow \boxed{N_2=96\ kN}$$

$$N_1=\frac{3}{4}\cdot 96 \rightarrow \boxed{N_1=72\ kN}$$

$$\Delta\ell_3=0 \rightarrow \boxed{N_3=0\ kN}$$

O deslocamento horizontal de B fica:



$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{h_B}{\delta_B} \rightarrow h_B=\delta_B\operatorname{sen}\alpha$$

$$h_B=\frac{\Delta\ell_2}{\cos\alpha}\cdot\operatorname{sen}\alpha \rightarrow h_B=\frac{N_2\ell_2}{EA}\operatorname{tg}\alpha$$

$$h_B=\frac{96\cdot10^3\cdot4}{9{,}6\cdot10^9\cdot8\cdot10^{-4}}\cdot\frac{3}{4} \rightarrow \boxed{h_B=0{,}0375\ m}$$

(para a esquerda)