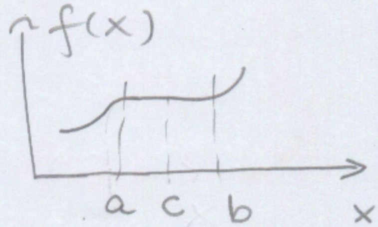
(*) Uma função $f(x)$ é contínua num ponto $x=c$ (pertencente a um dado intervalo) se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

e $f(c)$ existe. <u>Intuitivamente</u>, se você consegue "desenhar" a função (no dado intervalo) sem tirar a caneta do papel, a $f(x)$ é contínua.



<u>Derivada</u>

$$\frac{df}{dx}(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A derivada $\frac{df}{dx}(x)$ ou $\underbrace{f'(x)}_{\text{outra notação}}$ existe em x se o limite existe em x.

Ex: $f(x) = 2x + 4$, $f'(x)$?

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2(x+\Delta x) + 4 - (2x+4)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} 2\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 2 \,//$$

Ex: $f(x) = 3x^2 + 8$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{3(x+\Delta x)^2 + 8 - (3x^2+8)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cancel{3x^2} + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + \cancel{8} - \cancel{3x^2} - \cancel{8}}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(6x + 3\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} [6x + 3\cancel{\Delta x}]$$

$$= 6x.$$

Vocês conseguem mostrar que $f(x) = x^n$ onde $n \in$ inteiros positivos $\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$?

— x — x — x —

Voltando a física novamente...

Nosso vetor posição $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$ é um vetor mas cada componente dele é uma funcão real de uma variável real.

Então, a velocidade como sua derivada

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$ ou

em componentes

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) \hat{\imath} + \left(\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) \hat{k} \right]$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) \hat{\imath} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \hat{\jmath}$$

$$+ \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) \hat{k} = \underline{V_x(t)}\, \hat{\imath} + \underline{V_y(t)}\, \hat{\jmath} + \underline{V_z(t)}\, \hat{k}$$

Então, a derivada ordinária desse vetor $\vec{r}(t)$ atua em cada componente independentemente.

Ex: $\vec{r}(t) = 2t\,\hat{\imath} + 20\,\hat{\jmath}$ (em metro, por exemplo)

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(t+\Delta t) - 2t}{\Delta t} \right) \hat{\imath} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{0}{\cancel{20 - 20}}}{\Delta t} \right) \hat{\jmath}$$

$$= \lim \quad 2\cancel{\Delta t}\, \hat{\imath} + 0\, \hat{\jmath} = 2\, \hat{\imath}$$

Mais sobre cálulo diferencial e integral ...

Em geral os limites que usaremos na física serão simples, como

$$\lim_{x \to a} 50x^3 + 3 = 50a^3 + 3 \quad \text{e etc.}$$

Haverão outros que são mais complicados ...

Por exemplo,

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ⟹ Suponha que você queira calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ? \quad \text{Certamente, não dá } \frac{0}{0} ☺$$

pode cortar!

De fato, $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} (x+1)$

$= 2_{//}$

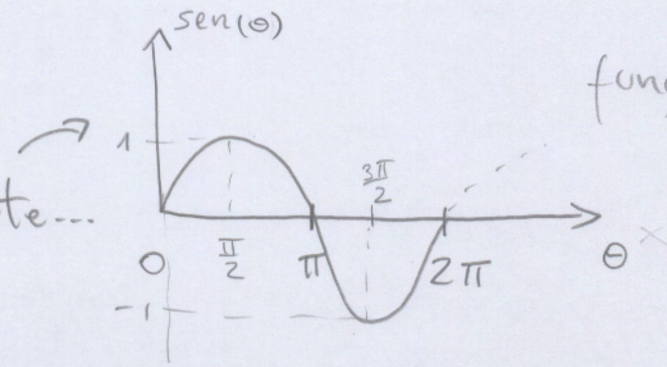
Agora, suponha que você tenha algo mais complicado...

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}$? Novamente, com certeza não é $\frac{0}{0}$ (que não está definido!)

Quanto seria $\lim_{\theta \to 0} \text{sen}(\theta)$? Claramente,

$\lim_{\theta \to 0} \text{sen}(\theta) = 0$

Graficamente...

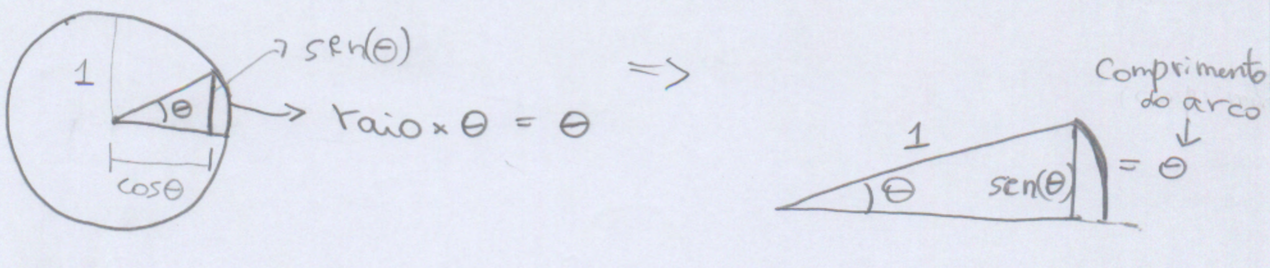


função periódica

Agora, suponha que $\theta \ll 1$ mas não zero.

Quanto vale $\text{sen}(\theta)$? Ou melhor, com que $\theta \ll 1$ potência de θ, $\text{sen}(\theta)$ se aproxima de zero quando $\theta \to 0$?

Seja, o círculo de raio 1



Se $\theta = \frac{\pi}{2} \to \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} \sim \frac{2}{3}$.

Quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad $\rightarrow$ $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, Então,

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sim \frac{9}{10}$$ (está chegando perto de 1...).

Agora, vemos que quanto mais $\theta \rightarrow 0$, mais sen(θ) se aproxima do comprimento do arco, isto é, $\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta} = 1.}$

- Podemos dizer também que $\underset{\theta \ll 1}{sen(\theta)} = \theta + O(\theta^3)$

termos de ordem superior em θ.

E $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(\theta) - 1}{\theta}$?

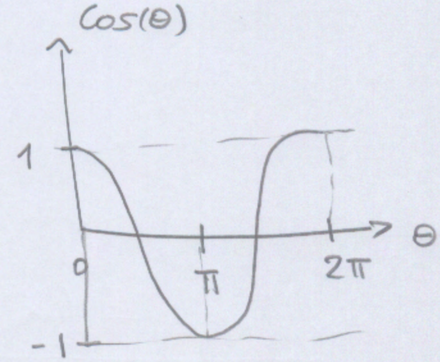
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{(\cos(\theta) - 1)}{\theta} \cdot \frac{(\cos(\theta) + 1)}{\cos(\theta) + 1} = \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{\cos^2(\theta) - 1}{\theta(\cos(\theta) + 1)} \right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{(-sen^2(\theta))}{\theta(\cos(\theta)+1)} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{sen\theta}{\theta}\right) \cdot \lim \left(\frac{sen(\theta)}{...}\right)$$

Continuando...

$$\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos(\theta)-1}{\theta} \right) = \underbrace{\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{sen(\theta)}{\theta} \right)}_{1} \cdot \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{-sen(\theta)}{\cos(\theta)+1} \right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{-\cancelto{0}{sen(\theta)}}{\underbrace{\cos(\theta)+1}_{1+1}} \right) = 0 \,/\!/$$



Então, $\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos(\theta)-1}{\theta} \right) = 0$

Agora podemos calular $\frac{d}{dx} sen(x)$. De foto,

$$\frac{d}{dx} sen(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x+\Delta x) - sen(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[sen(x)\cos(\Delta x) + sen(\Delta x)\cos(x) - sen(x) \right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[sen(x) \left(\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} \right) + \frac{sen(\Delta x)}{\Delta x} \cos(x) \right]$$

$$= sen(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} \right)}_{0} + \cos(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x} \right)}_{1}$$

Então,

$$\boxed{\frac{d}{dx} sen(x) = \cos(x)}$$

Analogamente, $\frac{d}{dx}\cos(x)$?

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\cos(x)\cos(\Delta x) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(\Delta x) - \cos(x)\right]/\Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x)\left(\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\right) - \lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}(x)\frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \cos(x)\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\right)}_{0} - \text{sen}(x)\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}\right)}_{1}$$

Então,

$$\boxed{\frac{d\cos(x)}{dx} = -\text{sen}(x)}$$

Outras derivadas importantes (não vou provar aqui mais você vai ver em Cálculo I).

(0) $\frac{dc}{dx} = 0$ $\quad c \to$ constante

1) $\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$ $\quad$ (α real)

(regra do produto)

2) $\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

(Prove que)

3) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)^2}g'(x)$

(regra da cadeia)

4) $f(x) = h(g(x)) \rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

5) $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$ 6) $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$ e muitas outras...

Ex: $f(x) = \underbrace{2x^4}_{\text{Produto + potência}} + \underbrace{\ln(x)\, e^x}_{\text{produto}} + \underbrace{\text{sen}(x^3)}_{\text{cadeia}} + \underbrace{10^{15}}_{\text{constante}}$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 2 \cdot 4\, x^{4-1} + \frac{1}{x} \cdot e^x + \ln(x) \cdot e^x + \cos(x^3)\, 3x^{3-1} + 0.$$

$$f'(x) = 8x^3 + \frac{e^x}{x} + \ln(x)\, e^x + 3x^2 \cos(x^3) \quad //$$

Ex: $$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d\,\text{sen}(x)}{dx}\right)}{\cos(x)} - \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} \overbrace{\frac{d}{dx}\cos(x)}^{-\text{sen}(x)}$$

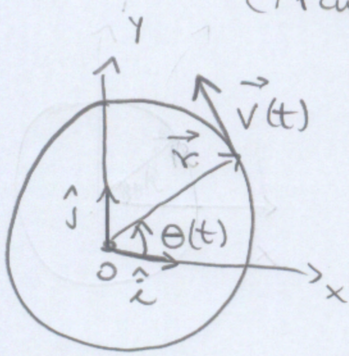
$$= 1 + \frac{\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) \quad //$$

Ex: $$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{d}{dx}\frac{(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{1}{2}\frac{d e^x}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d e^{-x}}{dx}$$

$= e^x - e^{-x} = \text{senh}(x)$ // Prove: $\frac{d}{dx}(\text{senh}(x)) = \cosh(x)$?

Ex: Coordenadas polares - MCU (Movimento Circular Uniforme)

círculo de raio R $\rightarrow$ $|\vec{r}| = R$



$$\theta(t) = \omega t \quad , \quad \omega = cte$$

(Velocidade angular)

$$\vec{r} = R\cos\theta(t)\,\hat{i} + R\sin\theta(t)\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\hat{i}\frac{d}{dt}\cos\theta(t) + R\hat{j}\frac{d}{dt}\sin\theta(t)$$

$$= R\hat{i}(-\sin\theta)\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} + R\hat{j}\cos\theta\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}$$

Então:

$$\vec{v}(t) = R\omega\left[-\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta(t) + \hat{j}\cos\theta(t)\right]$$

Note que $\vec{r}(t).\vec{v}(t) = R^2\omega\left[\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\right].\left[-\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right]$

$$= R^2\omega\left[-\sin\theta\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right] = 0$$

Agora, imagine que eu definisse

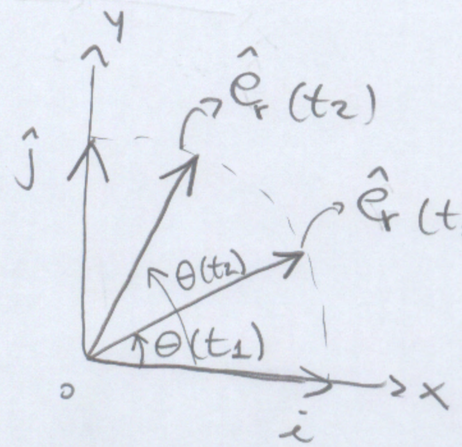
$$\hat{e}_r(t) \equiv \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}(t)}{R} = \cos\theta(t)\,\hat{i} + \sin\theta(t)\,\hat{j}$$

Note que $\hat{e}_r(t)$ é unitário, ou seja, $|\hat{e}_r(t)| = 1$.

Pois $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1 \quad \forall\ \theta(t) \in [0, 2\pi]$.

Agora, podemos escrever $\vec{r}(t) = R\,\hat{e}_r(t)$.

Esse $\hat{e}_r(t)$ é um vetor unitário que se move ("gira") com o tempo dado por $\underline{\underline{\omega}}$. (embora $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ sejam constantes no tempo)



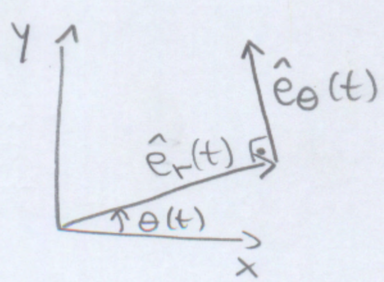
Agora, vamos definir o vetor <u>unitário</u>

$$\hat{e}_\theta(t) \equiv -\hat{\imath}\,\text{sen}\,\theta(t) + \hat{\jmath}\cos\theta(t)$$

Note que $|\hat{e}_\theta| = 1$ (<u>claro</u>)

e que $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0 \quad \forall \theta(t)$. A velocidade calculada anteriormente, nessa notação seria

$\vec{V}(t) = R\omega\,\hat{e}_\theta \quad \Rightarrow$



$\{\hat{e}_r(t), \hat{e}_\theta(t)\} \rightarrow$ base <u>polar</u>, tão boa quanto a cartesiana $\underline{\underline{\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}}}$ (que é uma base constante no tempo).

O vetor $\vec{v}(t)$ pode ser escrito

$$\vec{V}(t) = R\omega\left[-\text{sen}\,\theta(t)\,\hat{i} + \cos\theta(t)\,\hat{j}\right]$$ ou

$$\vec{v}(t) = R\omega\,\hat{e}_{\theta(t)}$$

Ambas descrições são corretas. Mesma informação em ambas as bases. Entretanto, em alguns problemas (MCU, pêndulo, e etc) coordenadas polares tornam a análise mais simples.

~~* Agora, note que para uma função harmônica~~ $\cancel{f(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = -\omega\,\text{sen}(\omega t)}$

$\cancel{\omega = cte}$

$$\cancel{\frac{d^2f}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 f(t) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2f}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0}}$$

~~eq. diferencial ordinária do oscilador harmônico.~~

$\omega =$ constante

Ex: $f(t) = A\cos(\omega t) \rightarrow f'(t) = -A\,\text{sen}(\omega t) \cdot \frac{d}{dt}(\omega t)$

$f'(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t)$. E a derivada segunda?

notação

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = f''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-A\omega\,\text{sen}(\omega t)\right)$$

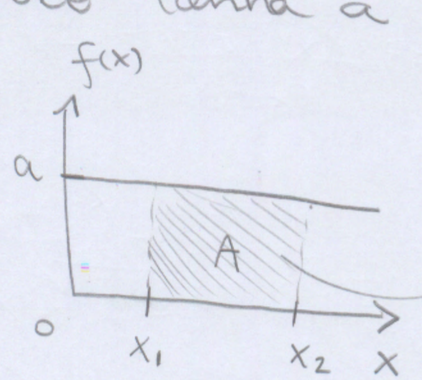
$$= -A\omega \frac{d}{dt}(\text{sen}(\omega t)) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

- Interessante, veja que $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$

Vocês vão ver que isso é uma eq. diferencial (linear, ordinária homogênea) e uma das duas soluções é $\sim \cos(\omega t)$.

Noções sobre integral

Suponha que você tenha a função $f(x) = a = \underline{\underline{cte}}$



Quanto vale essa área?

$A = a(x_2 - x_1)$