Contribuições para Resolução da 2ª Série de Problemas

Parte A – Comentários Referentes aos Conceitos de Programação Linear

A1 Referentes ao sistema de equações do problema de programação linear na forma padrão

Considere-se um problema de programação linear na forma padrão

minimizar z

$$z = cx$$

sujeito a restrições

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

em que o sistema $Ax = b$ é constituído por m equações independentes com n $(n > m)$ variáveis

1. As colunas A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, da matriz A, associadas a cada variável x_j, são vetores do espaço R^m.

2- Qualquer subconjunto de r colunas, $r > m$, da matriz A é linearmente dependente (ou de outra forma, o maior número de colunas linearmente independentes da matriz A é igual a m.

A_2 Referentes à Solução Básica do problema de programação linear na forma padrão

Mantida a premissa de que a matriz A m linhas linearmente independentes e n colunas, considerem-se m colunas arbitrárias desta matriz. Caso estas m colunas sejam linearmente independentes, seja B a submatriz por elas formadas e A^N a submatriz formada pelas outras $(n-m)$ colunas. Sejam, em correspondência, x^B a parte do vetor x associada a B e x^N a parte do vetor X associada a A^N. Formalmente,

$$A = [B \mid A^N] \; ; \; X = \begin{bmatrix} X^B \\ X^N \end{bmatrix}$$

Uma solução básica do problema de programação linear na forma padrão é obtida da seguinte forma:

a) impõe-se $x^N = 0$; e

b) resolve-se o sistema de equações

$$Bx^B = b$$

do qual resulta $x^B = B^{-1}b = \bar{b}$

Caso todo $\bar{b}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, a solução básica é viável.

Comentários

1 - O número máximo de componentes positivas de uma solução básica viável é igual a m.

2 - Qualquer solução viável do problema de programação linear na forma padrão cujo número de componentes positivas é maior que m não é uma solução básica.

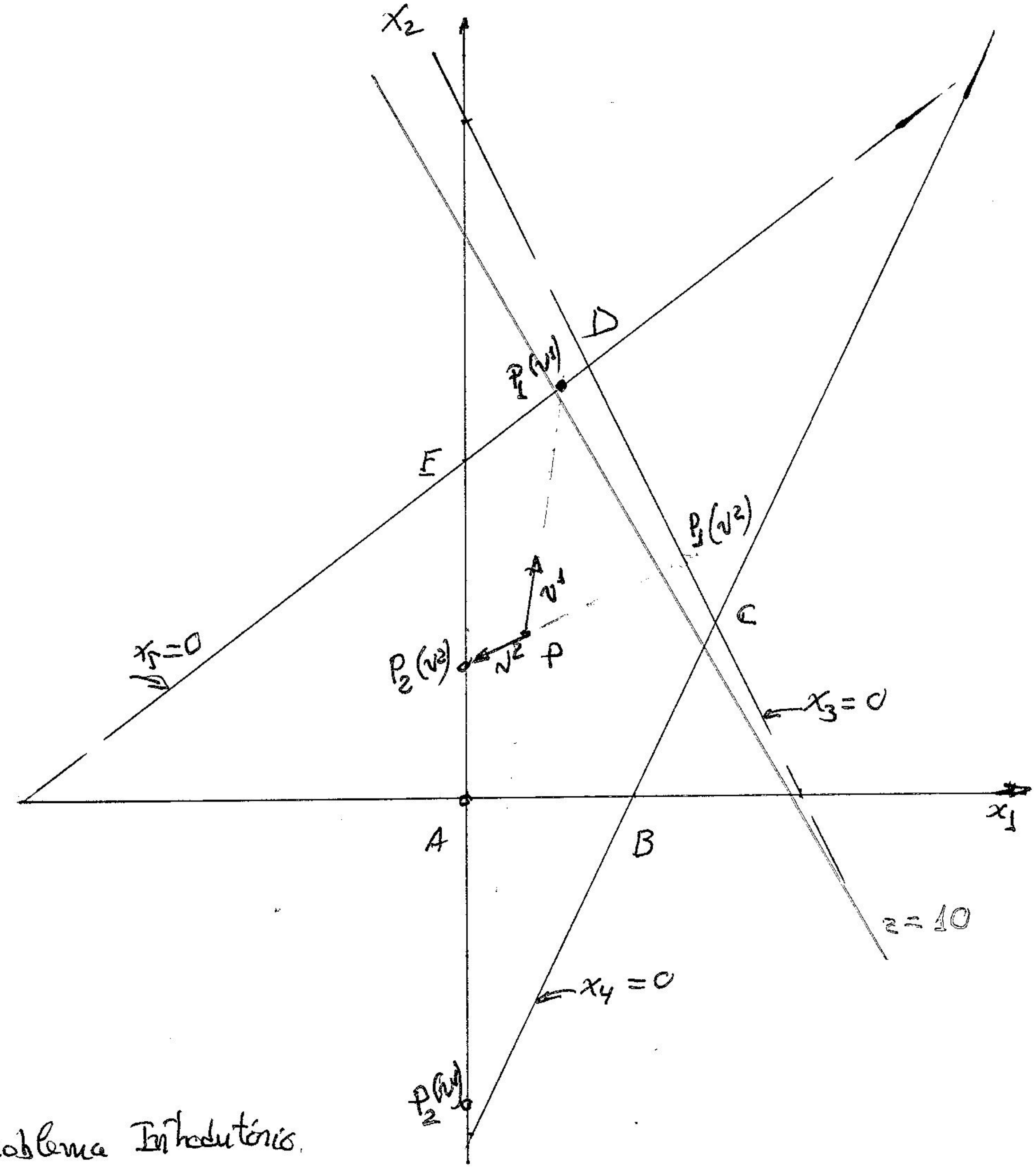
3. Qualquer solução viável do problema de programação linear na forma padrão, cujas componentes positivas estejam associadas a colunas linearmente dependentes, não é uma solução básica.

4. Por fim, cabe lembrar que o algoritmo simplex somente examine soluções básicas viáveis.

Parte B. A Questão 2 da 2ª Série de Problemas no Contexto do Exemplo Introdutório do Problema de Programação Linear

Considere-se a representação geométrica do problema introdutório no espaço das variáveis (x_1, x_2) ilustrada na figura da página seguinte e um ponto P da região viável, escolhido arbitrariamente com $x_1^1 = 1$ e $x_2^1 = 3$. Os valores correspondentes das outras variáveis são: $x_3^1 = 7/3$, $x_4^1 = 21/4$ e $x_5^1 = 5/4$

Portanto, todas as componentes da solução viável arbitrariamente escolhida são positivas. É óbvio que não se trata de uma solução básica e que



Problema Introdutório

min z

$$z = 15 - 7/8\, x_1 - 1/2\, x_2$$

$$2/3\, x_1 + 1/3\, x_2 + x_3 = 4$$

$$3/2\, x_1 - 3/4\, x_2 + x_4 = 9/2$$

$$-1/4\, x_1 + 1/3\, x_2 + x_5 = 2$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5$$

as colunas A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 a elas associadas são linearmente dependentes. Isto é,

$$A_5 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 \qquad (*)$$

Como neste caso, as colunas A_j são vetores do R^3 e o sistema de equações (*) é constituído por 3 equações com 4 incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4, tendo, portanto, infinitas soluções. Desta forma há infinitos vetores $v = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, -1]$ análogo ao citado no enunciado da Questão 2 da 2ª Série de Problemas. Isto é compreensível pois P é um ponto no interior da região viável e, assim, qualquer reta $x' + \theta v$ terá pontos na região viável para uma faixa de valores $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Excluindo o caso em que o vetor é paralelo ao feixe de retas $z = k$, a reta cortará o polígono viável em 2 pontos P_1 e P_2, um no qual a função objetivo terá valor menor que no ponto P e outro no qual o valor da função objetivo será maior que no ponto P. Para cada vetor v escolhido, determina-se o valor de θ de modo a se atingir o lado do polígono em que a função objetivo tem valor menor que no ponto P. No caso da direção v^1, escolhe-se $\theta > 0$ e, no caso da direção v^2, $\theta < 0$. O valor a ser atribuído a θ, em cada caso, deve assegurar que nenhuma componente de y seja negativa e uma delas seja nula. Desta forma, na solução viável y o valor da função objetivo z será menor que em x' e o número de componentes positivas será 4 em lugar de 5.

Admita-se, para o que segue, que foi escolhido o vetor v^1 e percorreu-se a semi-reta $x' + \theta v^1$, com $\theta > 0$, indo atingir a solução y^1. (No plano (x_1, x_2), caminhou-se do ponto P para o ponto $P_1(v^1)$. Na figura, verifica-se que $y_1^1 > 0$, $y_2^1 > 0$, $y_3^1 > 0$, $y_1^4 > 0$ e $y_1^5 = 0$.

Como o ponto y^1 tem 4 componentes positivas, elas estão associadas a 4 colunas linearmente dependentes e, por analogia, pode-se aplicar o mesmo procedimento feito a partir da solução x'. Neste caso, no entanto, há uma única solução para o sistema de equações $A_4 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ e o vetor $v = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -1, 0]$ vai ser paralelo ao lado ED e a escolha do sinal de θ garan tirá que, neste caso, chegue à solução ótima, vértice D.

No caso de uma direção genérica v, o que se garante para este problema introdutório que se chegue a um vértice (3 componentes positivas e duas nulas, como mencionado anteriormente)

Observação final referente a Questão 2 da 2ª série de Problemas

A escolha do sinal de θ visa garantir que $cy \leq cx'$ e depende dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ da combinação linear e dos custos da função objetivo. Admita que eles são conhecidos.